TD10

Correction

Exercice 1

1. On va déterminer le coefficient de Manning-Strickler par la relation

$$K = \frac{1}{n} = \frac{1}{0{,}015} = 66{,}7 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}.$$

La vitesse moyenne est définie par la loi de frottement de Manning-Strickler comme $u = K\sqrt{i}R_H^{2/3}$ avec pour rayon hydraulique

$$R_H = \frac{S}{\chi} = \frac{bh_n}{2h_n + b} = 3 \text{ m}.$$

On en déduit donc $u = 9{,}81$ m/s. Le débit vaut donc

$$Q = uS = 735{,}8 \text{ m}^3/\text{s}.$$

2. À partir de la relation de Jäggi on détermine

$$d_{90} = \left(\frac{23{,}2}{K}\right)^6 = 1{,}77 \text{ mm}.$$

3. La loi de Keulegan s'écrit

$$\tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2(11h/k_s)}\varrho u^2$$

avec

$$\tau_p = \varrho g i R_H.$$

En combinant les deux équations et en manipulant un peu l'expression on arrive a exprimer

$$u^2 = \frac{giR_H \ln^2(11h/k_s)}{\kappa^2}.$$

L'application numérique donne $u = 9{,}26$ m/s. Le calcul du débit avec la nouvelle vitesse donne $Q = 642{,}5$ m^3/s.

4. la formule de Manning-Strickler nous permet d'exprimer le débit en fonction du rayon hydraulique

$$Q = SR_H^{2/3}K\sqrt{i}.$$

En utilisant le fait que $S = bh$ et $R_H = bh/(2h + b)$ on peut déterminer une équation pour la variable h :

$$\frac{h^{5/3}}{(2h + b)^{2/3}} = \frac{Q}{K\sqrt{i}b^{5/3}}$$

Exercice 2

1. Par application du théorème de Bernouilli entre la surface de l'eau et le fond de la conduite on retrouve la formule de Torricelli et on exprime le diamètre

$$d = 2\sqrt{\frac{Q_s}{\pi\sqrt{2g(h + L_c)}}} = 11 \text{ cm}.$$

2. La hauteur correspond à la charge à l'amont du seuil. Il suffit donc de prendre la formule du seuil en régime dénoyé et de l'inverser (connaissant le débit transitant $Q = Q_c$ et $q = Q_c/\ell$)

$$h_{crue} = p + \frac{3}{2}\left(\frac{q}{\sqrt{g}}\right)^{2/3} = 6{,}1 \text{ m}.$$

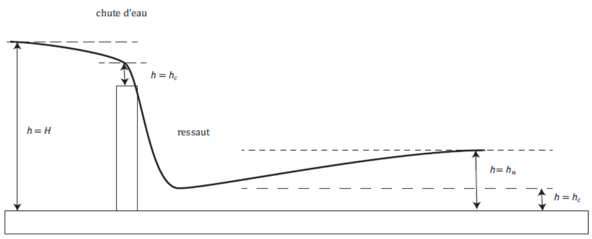

FIG. 1 – *Courbe de remous*

3. La formule de Jäggi donne

$$K = \frac{23{,}2}{d_{90}^{1/6}} = 50\ \mathrm{m}^{1/3} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

La formule de Manning-Strickler donne alors la hauteur normale en résolvant l'équation implicite

$$Q_c = h_n B K \sqrt{i} \left(\frac{B h_n}{B + 2h_n} \right)^{2/3} \Rightarrow h_n = 55\ \mathrm{cm}.$$

4. La hauteur critique est telle que $Fr(hc) = 1$, soit donc

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 29\ \mathrm{cm}.$$

5. Il faut reporter les valeurs remarquables de h. Voir figure 1.
6. Il faut écrire le bilan de masse entre le flux entrant et le flux sortant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{volume} = \mathrm{fluxentrant} - \mathrm{fluxsortant}$$

soit

$$LW \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h = Q_c - \ell \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}(h - p) \right)^{2/3},$$

une équation différentielle en h avec pour condition initiale $h(0) = p$ et une solution qui doit tendre asymptotiquement vers h_{crue}.

Exercice 3

1. La hauteur normale est donnée par la condition d'équilibre

$$\tau_p = \varrho g R_H i = \varrho g u^2 / (K^2 R_H^{1/3}),$$

avec $u = Q/(bh)$ et $R_H = hb/(2h + b)$. On a donc à résoudre

$$K \left(\frac{h_n b}{2h_n + b} \right)^{2/3} \sqrt{i} = u = \frac{Q}{b h_n}. \tag{1}$$

La hauteur critique est telle que $\mathrm{Fr} = 1$, donc

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b^2}} = 2{,}17\ \mathrm{m}$$

pour les trois biefs.

2. La pente critique vérifie

$$Q = K h_c b \left(\frac{h_c b}{2h_c + b} \right)^{2/3} \sqrt{i},$$

donc avec $h_c = 2{,}17$ m on a

$$i_c = 0{,}00217.$$

3. On résout l'équation (1) avec $h_n = 5$ m et on trouve $i_1 = 2 \times 10^{-4}$. le nombre de Froude est
$$\mathrm{Fr} = \frac{u}{\sqrt{gh_n}} = 0{,}29 < 1$$
et donc le régime est subcritique.
4. Comme $i_2 > i_c$ l'écoulement est supercritique. On résout l'équation (1) de façon implicite :
$$h_2 = h_n = 1{,}04 \text{ m},$$
pour le second bief. On trouve que bien
$$\mathrm{Fr}_2 = \frac{u}{\sqrt{gh_n}} = 3{,}0 > 1.$$
5. On trace la courbe de remous en suivant les mêmes principes qu'à l'exercice précédent. Elle est présentée sur la figure 2.

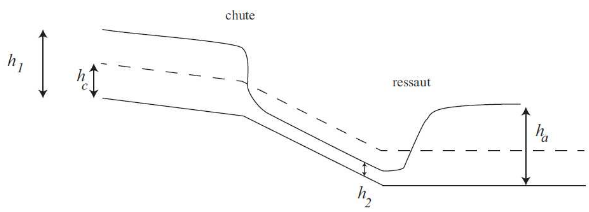

Fig. 2 – *Courbe de remous*

6. La relation de conjugaison donne
$$\frac{h_a}{h_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_2^2} - 1\right).$$
Numériquement on trouve $h_a = 3{,}93$ m.

Exercice 4

1. La pression est hydrostatique. Pour le montrer, on peut intégrer l'équation du mouvement pour un fluide parfait qui n'est ici que l'équation de l'hydrostatique : $0 = -g - \mathrm{d}p/\mathrm{d}z$.
2. Étant donné que la pression est hydrostatique la distribution de pression s'écrit
$$p = \varrho g(h_1 - z).$$
3. On intègre la pression sur la face AB afin de calculer la résultante des forces de pression, soit en tenant compte que $\boldsymbol{n} = (-1, 0)$
$$F_{AB} = \int_0^{h_1} \varrho g(h_1 - z)B\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\varrho g B h_1^2.$$
4. On intègre la pression sur la face CD afin de calculer la résultante des forces de pression, soit en tenant compte que $\boldsymbol{n} = (1, 0)$
$$F_{CD} = \int_0^{h_2} -\varrho g(h_2 - z)B\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\varrho g B h_2^2.$$
5. Étant donné que le volume de contrôle est arbitraire, car il se déplace à une vitesse c différente de la vitesse de l'écoulement, on doit exprimer les équations de bilan en fonction du volume de contrôle matériel (indice$m$) et du volume de contrôle arbitraire (indice a). On peut donc exprimer la conservation d'une quantité f comme (voir p. 63-64 du polycopié)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_m} f\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_a} f\mathrm{d}V + \int_{S_a} f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$
avec $\boldsymbol{w}$ la vitesse du volume de contrôle arbitraire. Pour la conservation de la masse on prendra $f = \varrho$. Étant donné que la masse se conserve
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_a} \varrho\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_m} \varrho\mathrm{d}V = 0$$

ce qui donne finalement

$$\int_{S_a} f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w})\mathrm{d}S = -\varrho B h_1(u_1 - c) + \varrho B h_2(-c) = 0,$$

soit après manipulation de l'expression on obtient

$$c = \frac{h_1 u_1}{h_1 - h_2}. \tag{2}$$

6. On suit le même développement qu'a la question précédente, avec cette fois $f = \varrho \boldsymbol{u}$. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_m} \varrho \boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_a} \varrho \boldsymbol{u}\mathrm{d}V + \int_{S_a} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

Étant donné que $\boldsymbol{u}$ est une constante indépendante du temps et de la position on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_a} \varrho \boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_m} \varrho \boldsymbol{u}\mathrm{d}V = 0.$$

On exprime donc le flux de quantité de mouvement à travers la surface AB

$$\phi_{AB} = \int_{S_a} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_0^{h_1} \varrho \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{w})\boldsymbol{n}B\mathrm{d}y = -\varrho B h_1 u_1(u_1 - c).$$

7. De manière similaire on exprime le flux de quantité de mouvement sur la surface CD, cela donne

$$\phi_{CD} = 0.$$

8. En régime permanent, la conservation de la quantité de mouvement implique que le flux de quantité de mouvement à travers la surface de contrôle est égal à la somme des forces appliquées au volume (théorème d'Euler). Cela veut dire que

$$\Sigma F = \phi_{CD} - \phi_{AB}.$$

En utilisant le fait que $\Sigma F = F_{AB} + F_{CD}$ et en manipulant les termes on obtient

$$\frac{1}{2}g(h_1^2 - h_2^2) = h_1 u_1(u_1 - c). \tag{3}$$

9. En remplaçant l'expression de c de l'équation (2) dans l'équation (3) on peut exprimer u_1 en fonction de h_1 et h_2 :

$$u_1 = (h_1 - h_2)\sqrt{\frac{1}{2}g\frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}}.$$

On remplace u_1 dans l'équation (2) et on obtient l'expression de c en fonction de h_1 et h_2 :

$$c = \sqrt{\frac{1}{2}g\frac{h_1}{h_2}(h_1 + h_2)}.$$