Navier-Stokes

Exercice 1 : écoulement laminaire entre deux plans parallèles

Dans cet exercice, nous allons considérer l'écoulement d'un fluide newtonien entre deux plaques horizontales séparées d'une distance $2b$.

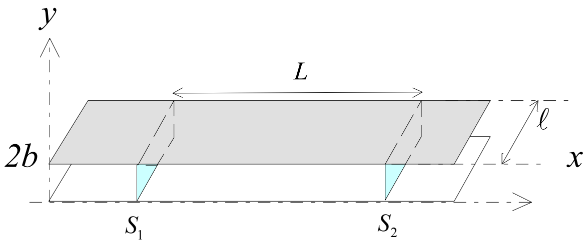


Fig. 1 – *Schéma de principe.*

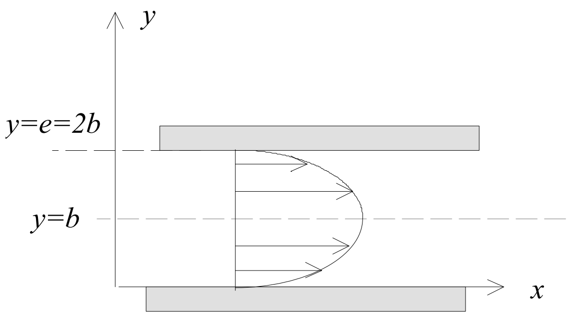
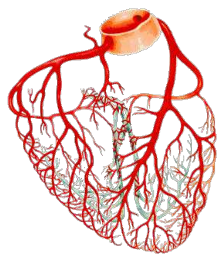


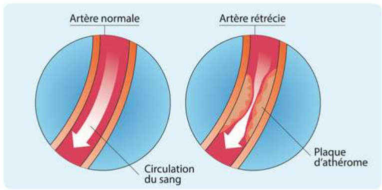
Fig. 2 – *Vue en coupe*

L'écoulement se fait selon l'axe x, la longueur des plaques L ainsi que leur largeur ℓ sont beaucoup plus grandes que l'espace $2b$ qui les séparent ($L \gg 2b$, $\ell \gg 2b$), si bien que l'on peut considérer que les plaques sont de taille infinie selon x et z. Une pompe impose un gradient de pression $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ dans la direction x. Le fluide est de masse volumique ϱ et de viscosité μ. On suppose que l'écoulement est permanent, laminaire et on néglige les effets de la pesanteur.

1. Déterminer le champ de vitesse au sein de l'écoulement. Pour cela, partir des équations de Navier-Stokes, projeter les dans le repère xyz puis éliminer tous les termes nuls et intégrer l'équation différentielle pour obtenir le champ de vitesse.
2. Déterminer le débit par unité de largeur transitant dans la conduite, en déduire la vitesse moyenne de l'écoulement.
3. Déterminer la contrainte de cisaillement τ dans l'écoulement.
4. Déterminer la puissance dissipée.

Exercice 2 : circulation sanguine

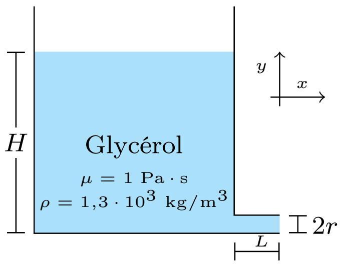




On considère le sang comme un fluide newtonien de masse volumique constante $\varrho = 1000$ kg/m^3 ; la viscosité cinématique est $\nu = 5$ mm^2/s. Une grosse artère est assimilable à une conduite circulaire de diamètre $d = 8$ mm et de longueur moyenne $L = 12{,}5$ cm. Un adulte a environ $n = 40$ grosses artères. La pression à l'entrée de l'aorte est de 13 kPa. Le débit artériel total est de 5 l/min.

1. Quel est le débit dans une grosse artère ?
2. Quelle est la vitesse moyenne ?
3. Quel est le nombre de Reynolds ? Le régime est-il laminaire ou turbulent ?
4. Calculez la forme du champ de vitesse en supposant un régime laminaire. (On démontre ici la loi de Poiseuille dans un cylindre) *Hypothèses: Écoulement laminaire, gravité négligée.*
5. Intégrer le profil de vitesse pour déterminer le débit.
6. Calculer la variation de pression caractéristique pour une grosse artère en supposant que le débit est constant (on néglige le caractère pulsé de la circulation sanguine). Qu'en déduisez-vous par rapport à la pression à l'entrée de l'aorte ? Que se passe-t-il si le diamètre de l'artère diminue? (sténose).

Exercice 3 : vidange d'un réservoir de fluide visqueux



Un réservoir de glycérol dont le niveau est maintenu à une hauteur $H = 10$ cm alimente une conduite circulaire de rayon $r = 0{,}02$ mm et de longueur $L = 5$ m. Déterminer, à l'aide des réponses de l'exercice 2 :

1. Le débit de sortie.
2. La vitesse moyenne et maximale de l'écoulement
3. La force totale de frottement sur le tube

Exercice 4

FIG. 3 – *décanteurs dans une station d'épuration*

En station d'épuration, une des étapes du traitement primaire des boues est la décantation. Pour déterminer combien de temps on va devoir attendre pour que les particules supérieures à un diamètre $D = 10$ µm soient déposées au fond du bassin, l'ingénieur doit faire au préalable le calcul de la sédimentation de ces particules.

Les particules ont une masse volumique $\varrho_p = 2650$ kg/m^3, elles sédimentent dans de l'eau ($\varrho_f = 1000$ kg/m^3, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s. On étendra le raisonnement à un parachutiste.

1. Le régime étant supposé laminaire, donner l'expression de la force visqueuse, du poids et de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur les particules de diamètre $D = 10$ µm.
2. Calculer la vitesse de sédimentation.
3. Calculer le nombre de Reynolds particulaire[1]. Somme-nous bien dans un régime laminaire?
4. Combien de temps doit-on attendre pour que les particules tombent au fond sachant que la hauteur du bassin est $H = 1{,}5$ m.
5. Calculer la vitesse de chute dans le cas d'un parachutiste ($D = 1{,}8$ m) dans l'air ($\varrho_f = 1{,}2$ kg/m^3 et $\nu = 10^{-5}$ m^2/s). La vitesse vous semble-t-elle raisonnable?
6. Sachant qu'un parachutiste chute à environ 10 m/s, calculer le nombre de Reynolds. Quel est le régime?

Exercice 5

On se propose de mesurer expérimentalement la viscosité d'un fluide newtonien. Pour ce faire on dispose d'un rhéomètre muni d'une géométrie de type Couette (voir figure 4). Il s'agit en fait de deux cylindres concentriques d'axe z entre lesquels se trouve le fluide. Le cylindre intérieur de rayon $R_1 = 5{,}0$ cm est en rotation à vitesse angulaire constante Ω_1, tandis que le cylindre extérieur de rayon $R_2 = 5{,}5$ cm est fixe ($\Omega_2 = 0$). Pour entretenir la rotation, on doit appliquer un couple C constant sur le cylindre intérieur. *Hypothèses: Écoulement laminaire, gravité négligée.*

1. Déterminer les composantes non nulles du champs de vitesse au sein du fluide à l'aide de considérations de symétrie et de l'équation de conservation de la masse.
2. Simplifier les équations de conservation de la quantité de mouvement.
3. Établir la relation
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r}\right).$$
4. Donner l'expression du champ de vitesse dans la cellule grâce aux conditions limites.
5. Déterminer la relation entre le couple qu'il faut exercer pour maintenir la vitesse de rotation du cylindre intérieur constante et la viscosité du fluide sachant que les cylindres ont une hauteur $h = 10$ cm. Calculer ensuite la viscosité du fluide sachant que pour $\Omega_1 = 0{,}1$ Hz on mesure un couple $C = 2{,}42 \cdot 10^{-3}$ N m.

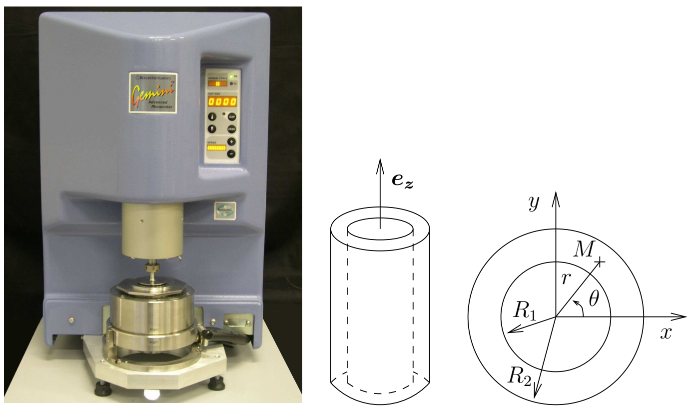


Fig. 4 – *Vue et représentation schématique d'une géométrie de type Couette.*

Indication : en coordonnées cylindriques $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]$.

1. "Particulaire" signifie ici que l'on prend le diamètre de la particule comme longueur caractéristique

Equations de Navier-Stokes

Coordonnées cartésiennes $(x,\, y,\, z)$

Conservation de la masse:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}
\varrho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \varrho g_x,\\
\varrho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) + \varrho g_y,\\
\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \varrho g_z.
\end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques $(r,\, \theta,\, z)$

Conservation de la masse:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad = \quad 0.$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}
\varrho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \varrho g_r\\
\varrho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r}\right) &= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right) + \varrho g_\theta\\
\varrho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \varrho g_z
\end{aligned}$$