TD11

Correction

Exercice 1

1. L'application numérique donne $Q = 2.0 \cdot 10^{-5}$ m$^3 \cdot$ s^{-1}.
2. On peut déduire la vitesse moyenne en considérant que sur une section la rapport de surfaces vides sur la surface totale est la porosité. $\Phi = \frac{Svide}{A}$. D'où une vitesse moyenne $v_{moy} = \frac{Q}{Svide} = \frac{Q}{\Phi * A}$. On trouve $v_{moy} = 3,3 \cdot 10^{-5}$ m $\cdot$ s^{-1}. Le nombre de Reynolds, $Re = \frac{v_{moy}D}{\nu} = 3.3 \cdot 10^{-3}$. Le régime est donc laminaire.
3. $Q_{tot} = nAQ$.
4. $\Phi = \frac{A_{pores}}{A_{tot}} = \frac{nA\pi d^2/4}{A} = n\pi d^2/4$.
5. $\Delta P = \rho g \Delta H$.
6. En comparant les deux expressions
$$Q_{Darcy} = Q_{Poiseuille} \quad \rightarrow \quad KA\frac{\Delta H}{L} = nA\frac{\pi \rho g}{128\rho\nu}\frac{\Delta H}{L}d^4$$
.
On déduit alors que
$$K = \frac{ng\pi d^4}{128\nu} = \frac{\Phi g d^2}{32\nu}$$
.
D'où l'expression de $d = \sqrt{\frac{K32\nu}{\Phi g}}$.
<u>A.N.</u> : $d = 33$µm, le diamètre des pores correspondant à une perméabilité $K = 10^{-4}$m $\cdot$ s^{-1}.
7. $v(r) = \frac{\Delta P}{L}\frac{R^2-r^2}{4\rho\nu}$.
8. L'eau dans l'anneau cylindrique (de surface $2\pi r \mathrm{d}r$) est soumise aux actions de pression de la part du reste de l'eau. Les actions de pression radiales ne travaillent pas car elles sont orthogonales à la vitesse de l'eau. Les seules actions qui travaillent sont les actions de pression amont ($F_{amont} = P_{amont} * 2\pi r \mathrm{d}r$) et aval ($F_{amont} = -P_{aval} * 2\pi r \mathrm{d}r$). D'où le puissance totale : $\mathrm{d}\mathscr{P}_p = F_{amont} \cdot v(r) + F_{aval} \cdot v(r) = \Delta P 2\pi r v(r)\mathrm{d}r$. Cette puissance est positive car $P_{amont} > P_{aval}$.
9. La puissance totale dans un tube s'obtient en intégrant sur tous les rayons.
$$\mathscr{P} = \int_{r=0}^{r=d/2} \mathrm{d}\mathscr{P} = \int_{r=0}^{r=d/2} \Delta P 2\pi r \frac{\Delta P}{L}\frac{R^2 - r^2}{4\rho\nu}\mathrm{d}r \rightarrow \mathscr{P} = \frac{\pi d^4}{128L\nu\rho}\Delta P^2 = Q\Delta P$$
.
10. On peut appliquer ici le théorème de l'énergie cinétique. La vitesse étant constante dans le tube on peut écrire :
$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = 0 = \mathscr{P}_p + \mathscr{P}_\nu.$$
On déduit que les pertes sont l'opposé de la puissance issu des forces de pression. Pour la puissance totale on multiplie par le nombre total de capillaire dans le milieu poreux $N = nA = \frac{4\Phi A}{\pi d^2}$.
11. L'eau gagne sous forme thermique la puissance qu'elle a perdue sous forme mécanique par viscosité.
$$\mathscr{P}_{th} = -\mathscr{P}_\nu = \frac{4\Phi A}{\pi d^2}Q(\Delta P) = Q_{tot}\rho g \Delta H$$
On peut calculer cette puissance dissipée dans l'aquifère : $\mathscr{P}_{th} = 0.2\ W$.
Un raisonnement simplifié consiste à dire que la quantité de chaleur élémentaire $\mathscr{P}_{th}\mathrm{d}t$ est fournie à la masse d'eau élémentaire $\delta m = \rho Q_{tot}\mathrm{d}t$.
D'où
$$\Delta T c\delta m = c\rho Q_{tot}\mathrm{d}t = \mathscr{P}_{th}\mathrm{d}t \rightarrow \Delta T = \frac{\mathscr{P}_{th}}{\rho Q_{tot} c}.$$
<u>A.N.</u> : $\Delta T = 2.3 \cdot 10^{-3}$K, on voit que l'élévation de la température est insignifiante.

Exercice 2

1. L'écoulement peut être considéré comme **unidirectionnel**.
2. La vitesse selon y étant faible, le gradient de pression selon Oy se réduit au gradient de Pression hydrostatique. On peut écrire alors que $p(x,y) = \rho g(y_s(x) - y)$ et donc que le gradient de pression horizontal s'écrit $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}$.
3. $Q = v_{sx}(x) y_s(x) B = -KBy_s(x)\frac{\mathrm{d}y_s(x)}{\mathrm{d}x}$.
4. On peut résoudre cette equation en séparant les variables et en intégrant :

$$\frac{Q}{K\ B}\int_0^x \mathrm{d}x \quad = \quad -\int_{y_s(0)}^{y_s(x)} y_s(x)\mathrm{d}y_s(x), \tag{1}$$

$$\frac{Q}{K\ B}\,x \quad = \quad 1/2 y_0^2 - y_s(x)^2, \tag{2}$$

$$Q \quad = \quad K\ B\,\frac{y_0^2 - y_s(x)^2}{2x}, \tag{3}$$

Le débit est imposé par la condition aux limites en $y_1 = y_s(L)$.

$$Q \quad = \quad K\ B\,\frac{y_0^2 - y_1^2}{2L}. \tag{4}$$

5. En remplaçant l'expression de Q dans (3), on obtient

$$y_s(x) = \sqrt{y_0^2 - \frac{x}{L}(y_0^2 - y_1^2)}.$$

6. On trouve $K = 1.8 \cdot 10^{-8}$ m $\cdot$ s^{-1} il faut donc un sol très argileux pour limiter le débit entre les deux bassins.

Exercice 3

1. On va calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement avec $U_* = 0,01$ m/s, $H_* = 0,1$ m, $\varrho = 1100$ kg/m^3

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho U_* H_*}{\mu} \approx 10^{-2}.$$

On peut considérer l'écoulement comme étant laminaire.

2. On introduit les variables adimensionnelles (X, Y, U, V) définies tel que :

$$x = L_* X \text{ et } y = H_* Y,$$
$$u = U_* U \text{ et } v = V_* V.$$

En notant que pour X (même raisonnement pour Y)

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} \text{ et que } \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{L_*}.$$

L'équation de continuité s'écrit sous forme adimensionelle

$$\frac{U_*}{L_*}\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{V_*}{H_*}\frac{\partial V}{\partial Y} = 0.$$

Pour que l'équation de continuité soit respectée, il faut que les termes U_*/L_* et V_*/H_* soit du même ordre de grandeur ce qui implique

$$V_* = U_* H_*/L_* = \varepsilon U_*.$$

3. Soit la variable de pression adimensionnelle telle que $p = P_* P$ avec $P_* = \mu U_*/(\varepsilon H_*)$. Pour l'obtenir on a considéré que le gradient de pression horizontal, qui est de l'ordre $P_*/(\varrho L_*)$, est du même ordre de grandeur que le gradient de cisaillement qui est de l'ordre $\eta U_*/(H_*^2)$ En égalisant les deux termes on obtient l'expression de P_*. Écrivons maintenant les équations de Navier-Stokes sous forme adimensionnelle

$$\frac{U_*^2}{L_*}U\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{U_* V_*}{H_*}V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\nu U_* L_*}{\varepsilon H_* L_*}\frac{\partial P}{\partial X} + \nu\left(\frac{U_*}{L_*^2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{V_*}{H_*^2}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right), \tag{5}$$

$$\frac{U_* V_*}{L_*}U\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{V_*^2}{H_*}V\frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\nu U_* L_*}{\varepsilon H_*^2}\frac{\partial P}{\partial Y} + \nu\left(\frac{V_*}{L_*^2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{V_*}{H_*^2}\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right). \tag{6}$$

En multipliant les équations 5 et 6 par $H_*^2/(\nu U_*)$ et en utilisant $\varepsilon = H_*/L_*$ et $V_* = \varepsilon U_*$ on obtient les équations de Navier-Stokes sous forme adimensionnelle

$$\varepsilon \mathrm{Re} U\frac{\partial U}{\partial X} + \varepsilon \mathrm{Re} V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \tag{7}$$

$$\varepsilon \mathrm{Re} U\frac{\partial U}{\partial X} + \varepsilon \mathrm{Re} V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial X} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}. \tag{8}$$

4. Étant donné que $\mathrm{Re} \approx \varepsilon = 10^{-2} \ll 1$, on peut négliger tous les termes qui sont de l'ordre de Re et ε dans les équation de Navier-Stokes. Cela veut dire qu'elles se réduisent à

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{9}$$

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

Étant donné qu'on néglige la gravité dans ce problème, le gradient de pression est indépendant le l'altitude y, on peut donc écrire $\partial p/\partial p = \mathrm{d}p/\mathrm{d}x$.

5. On intègre deux fois l'équation 9 pour obtenir la forme générale du champs de vitesse

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y^2 + Cy + D.$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$u(x, y = 0) = u_p, \tag{11}$$

$$u(x, y = h(x)) = 0. \tag{12}$$

La condition limite 11 implique que $D = u_p$. La condition limite 12 implique que

$$C = \frac{-u_p}{h(x)} - \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h(x).$$

On peut finalement écrire le champ de vitesse

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y(y - h(x)) + u_p\left(1 - \frac{y}{h(x)}\right). \tag{13}$$

6. Le débit par unité de largeur est défini comme

$$q = \int_0^{h(x)} u(x, y)\ \mathrm{d}y.$$

Le calcul de cette intégrale donne

$$q = \frac{1}{12\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h^3(x) + \frac{u_p}{2}h(x). \tag{14}$$

7. Le débit se conserve car l'écoulement est stationnaire. On peut donc directement utiliser l'équation 14 pour exprimer le gradient de pression

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{12\mu}{h^3(x)}\left(q - \frac{u_p}{2}h(x)\right). \tag{15}$$

8. On va se servir de l'équation 15 pour exprimer la pression en un point x quelconque.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{12\mu}{h^3(x)}\left(q - \frac{u_p}{2}h(x)\right)$$

$$\int_{p_1}^{p(x)} \mathrm{d}p = \int_0^x \frac{12\mu q}{h^3(x)} - \frac{6\mu u_p}{h^2(x)}\ \mathrm{d}x$$

On peut donc écrire la pression en un point quelconque

$$p(x) = p_0 + 12\mu q \int_0^x \frac{1}{h^3(x)}\ \mathrm{d}x - 6\mu u_p \int_0^x \frac{1}{h^2(x)}\ \mathrm{d}x. \tag{16}$$

9. En utilisant le fait que $p_1 = p_2 = p_0$ on a que

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p = \int_0^\ell \frac{12\mu q}{h^3(x)} - \frac{6\mu u_p}{h^2(x)}\ \mathrm{d}x = 0$$

$$q = \frac{u_p}{2}\frac{\int_0^\ell \frac{1}{h^2(x)}\ \mathrm{d}x}{\int_0^\ell \frac{1}{h^3(x)}\ \mathrm{d}x}.$$

Étant donné que $h(x) = h_1 + (h_2 - h_1)x/\ell$ on obtient finalement

$$q = u_p \frac{h_1}{1 + \frac{h_1}{h_2}}. \tag{17}$$

Application numérique : $q = 5,21\ 10^{-6}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$

10. La force totale exercée sur le plan inférieur est donnée par le tenseur des contraintes

$$\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}s$$

avec $\boldsymbol{\Sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}$. Les forces normale et tangentielle sont respectivement

$$F_N = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n} = (0,1),$$
$$F_T = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t} = (1,0),$$

ou $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{t}$ sont respectivement les vecteur normal et tangent au plan inférieur. Le tenseur des contraintes s'écrit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} -p(x) & \mu\frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu\frac{\partial u}{\partial y} & -p(x) \end{pmatrix},$$

On voit donc que

$$F_N = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = \int_0^\ell -p(x)\ \mathrm{d}x,$$

$$F_T = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t} = \int_0^\ell \mu\frac{\partial u}{\partial y}\ \mathrm{d}x.$$

Comme $\theta \approx \tan\theta = (h_2 - h_1)/\ell$,l'inclinaison du plan supérieur est très petite, on va supposer que les forces exercées sur le plan supérieur sont les mêmes que celles exercées sur le plan inférieur, sauf pour la force normale qui sera de signe opposée (la flaque d'huile supporte le plan supérieur).
On va calculer F_N en intégrant 16. Pour cela effectuons le changement de variable $x = (h - h_1)\ell/(h_2 - h_1)$ avec $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}h}{\theta}$, les bornes d'intégration vont de h_1 à $h(x)$. L'intégrale s'écrit alors

$$p(x) = p_0 + \frac{12\mu q}{\theta}\int_{h_1}^{h(x)} \frac{1}{h^3(x)}\ \mathrm{d}h - \frac{6\mu u_p}{\theta}\int_{h_1}^{h(x)} \frac{1}{h^2(x)}\ \mathrm{d}h, \tag{18}$$

$$p(x) = p_0 + \frac{12\mu q}{\theta}\left[\frac{1}{h(x)^2} - \frac{1}{h_1^2}\right] - \frac{6\mu u_p}{\theta}\left[\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h_1}\right]. \tag{19}$$

On obtient alors la force normale en intégrant une deuxième fois la pression sur la surface supérieure :

$$F_N = \int_0^\ell p(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\int_{h_1}^{h_2} p(h)\ \mathrm{d}h = \frac{h_2 - h_1}{\theta}p_0 - \frac{6\mu u_p}{\theta^2}\left[\log\frac{h_2}{h_1} - \frac{2(h_2-h_1)}{h_2+h_1}\right] \tag{20}$$

La force tangentielle se déduit de la même manière sur le plan inférieur :

$$\begin{aligned} F_T = \int_0^\ell \mu\frac{\partial u}{\partial y}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\int_{h_1}^{h_2} \mu\frac{\partial u}{\partial y}\ \mathrm{d}h \quad &= \quad -\frac{1}{\theta}\int_{h_1}^{h_2}\left(\frac{h(x)}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mu u_p}{h(x)}\right)\mathrm{d}h \\ &= \quad \frac{2\mu u_p}{\theta}\left(2\log\frac{h_1}{h_2} - \frac{3(h_2-h_1)}{h_2+h_1}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

11. On voit que dans une situation identique $F_T \approx \theta F_N$ en ordre de grandeur. Étant donné les faibles valeur de θ, $F_N \gg F_T$.

    C'est le résultat essentiel de la lubrification. Cette propriété est mise à profit dans un nombre important d'applications : axes tournant dans un logement de diamètre voisin (paliers de machine tournante). Mais cet effet peut aussi être néfaste si on glisse sur la plaque d'huile !
12. En effectuant le calcule pour la flaque d'huile on trouve $F_N = 100\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $F_T = 10\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.