Correction

Exercice 1

Dans un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement est égale au taux de cisaillement multiplié par la viscosité dynamique

$$\tau = \mu \cdot \dot{\gamma}.$$

Le profil de vitesse étant supposé linéaire, le gradient de la vitesse s'écrit $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = u/h$, on obtient donc

$$\tau = \mu \cdot \frac{u}{h}$$

avec h la hauteur respective de chaque côté de la paroi. Cela donne donc :

$$\tau_1 = 0{,}02\,[\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}]\,\frac{4\,\left[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]}{6\cdot 10^{-3}\,[\mathrm{m}]} = 13{,}3\,[\mathrm{Pa}]$$

$$\tau_2 = 0{,}01\,[\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}]\,\frac{4\,\left[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]}{3\cdot 10^{-3}\,[\mathrm{m}]} = 13{,}3\,[\mathrm{Pa}]$$

La contrainte de cisaillement est la même dans tout le liquide cisaillé. Cependant le taux de cisaillement est supérieur dans la couche de liquide inférieur (respectivement supérieur dans la couche de liquide supérieur), mais l'épaisseur de liquide y est inférieur. La direction de la contrainte est la même que celle du gradient de vitesse. Dans cet exercice, les contraintes sont donc parallèles aux plaques.

Note : La contrainte de cisaillement au sein d'un fluide est généralement définie comme étant la contrainte qu'une couche de fluide exerce sur la couche qui est au-dessus, la couche de dessus ayant une vitesse plus grande. Dans cette convention, la couche du dessous ralentit la couche du dessus. La contrainte est alors négative et orientée dans le sens opposé au gradient de vitesse.
Mais attention, si l'on parle de la contrainte de cisaillement que la plaque en mouvement exerce sur le fluide, le sens de la contrainte est alors le même que celui du gradient de vitesse.

Le liquide cisaillé exerce sur chacune des plaques entre lesquelles il est confiné une force de cisaillement ayant la même direction que le gradient de vitesse. Cette force est égale au produit de la contrainte de cisaillement τ et de la surface de contact entre la plaque et le liquide.
Dans le cas de la plaque centrale (en mouvement) cette force s'oppose au mouvement de la plaque. Il faut donc fournir une force dans le sens inverse pour maintenir la plaque en mouvement (p. ex. tirer sur la plaque).
Dans le cas de la plaque latérale (immobile), cette force cherche à entraîner la plaque dans le sens de la vitesse du fluide. Si la plaque latérale n'est pas fixée à un socle, elle entrera en mouvement.

Dans ce type de problème, il est important de bien préciser si l'on parle de la contrainte du fluide sur la plaque, ou de la contrainte de la plaque sur le fluide. Ces deux contraintes ne diffèrent que par leur sens.

Exercice 2

Le profil de vitesse étant supposé linéaire, la contrainte de cisaillement s'exprime ainsi :

$$\tau = \mu \cdot \frac{v}{d} = \mu \cdot \frac{\omega r_i}{d}\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$$

ou r_i est le rayon intérieur et d est l'épaisseur de couche de fluide. La force de cisaillement qu'exerce le fluide sur le cylindre intérieur s'obtient en multipliant la contrainte par la surface de contact :

$$F = 2\pi r_i h \tau\,[\mathrm{N}]$$

Cette force de cisaillement résulte du frottement du liquide sur **toute** la surface du cylindre. Étant donné la géométrie du système, cette force transmet un couple sur l'axe du cylindre. Le moment du couple transmis sur l'axe se calcule en intégrant sur la surface S du cylindre le moment qui résulte de l'action de la contrainte de cisaillement τ sur chaque élément de surface infinitésimal $\mathrm{d}s = r_i \mathrm{d}\theta \mathrm{d}h$:

$$M_\tau = \int\int_S r_i \tau \mathrm{d}s = \int\int_S r_i \tau r_i \mathrm{d}\theta \mathrm{d}h = r_i^2 \tau \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^h \mathrm{d}h = r_i^2 \tau 2\pi h\,\left[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}\right] = 2\pi r_i^2 h \mu \cdot \frac{r_i \omega}{d}\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}] \tag{1}$$

$$M_\tau = 0{,}589\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$$

avec $d = 0{,}1$ mm l'épaisseur du fluide.

Le moteur doit donc transmettre au cylindre un couple C similaire, mais orienté dans le sens inverse, pour assurer la rotation du cylindre.

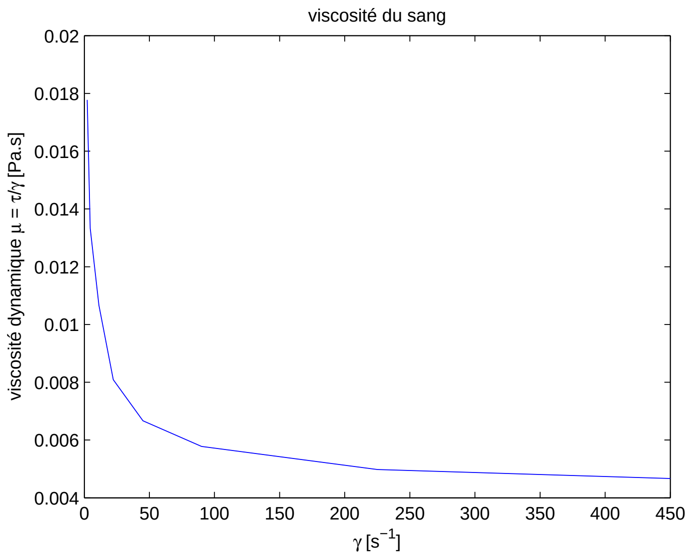
D'après (1), le couple C varie linéairement avec la viscosité μ. On a donc :

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \mu}{\mu} = \frac{0{,}1 - 0{,}008}{0{,}1} = 0{,}92 \text{ [-]}$$

Le couple varie de 92 % avec le changement de température.

Exercice 3

Un fluide est dit newtonien lorsque la relation entre la contrainte de cisaillement τ [Pa = N/m^2] et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ [s^{-1}] est linéaire. Le rapport $\tau/\dot{\gamma}$ est appelé coefficient de viscosité dynamique et est noté μ [Pa·s]. La viscosité dynamique d'un fluide newtonien ne dépend donc pas du taux de cisaillent (c'est-à-dire de la vitesse de déformation).
Le sang est par conséquent un fluide non newtonien (sa viscosité dynamique diminue avec le taux de cisaillement).



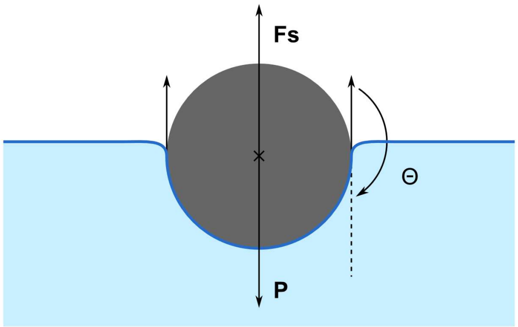
Exercice 4

En négligeant la poussée d'Archimède, il y a deux forces qui s'exercent sur les pattes de l'insecte, son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ orienté vers le bas, et la force résultant de la tension de surface $\vec{F_s}$ orientée vers le haut.
Le bilan des efforts sur l'insecte donne :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{f\rightarrow s} + m\vec{g} &= 0 \\ -l\gamma cos(\theta) - mg &= 0 \\ l\gamma - mg &= 0 \end{aligned}$$

avec l la longueur de contact totale entre l'insecte.
Attention : On parle de la force du fluide sur le solide $\vec{F}_{f\rightarrow s} = -l\gamma cos(\theta) = l\gamma\vec{e_y}$ avec $\theta = \pi$ rad ou 180°.

Voir la figure ci-dessous. Le vecteur unitaire $\vec{e_y}$ n'est pas représenté sur la figure mais est orienté vers le haut.



La longueur de contact totale nécessaire pour que l'insecte flotte est donc de :

$$l = \frac{mg}{\gamma} = \frac{10^{-5}\,[\mathrm{kg}] \cdot 9{,}81\,\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\right]}{72 \cdot 10^{-3}\,\left[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}\right]} = 1{,}4\,[\mathrm{mm}] \tag{2}$$

Puisque qu'il y a 6 pattes au total et que sur chaque patte il y a 2 films qui se forment, la longueur minimale d'une patte pour assurer la flottaison de l'insecte est de 1,4/12 = 0,12 mm.

Exercice 5

Le bilan des forces sur la lame en négligeant la poussée d'Archimède est le suivant :

$$\vec{F}_{f\to s} + m\vec{g} = 0,$$
$$-\left(l_e + l_i\right)\gamma\cos(\theta) - mg = 0.$$

Attention : On parle de la force du fluide sur le solide $\vec{F}_{f\to s} = -l\gamma cos(\theta)\vec{e_y}$. Voir la figure ci-dessous.

L'angle de contact lorsque la lame flotte est donc de :

$$\cos(\theta) = -\frac{mg}{\gamma\left(l_e + l_i\right)} = -\frac{1{,}3 \cdot 10^{-3}\,[\mathrm{kg}] \cdot 9{,}81\,\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\right]}{72 \cdot 10^{-3}\,\left[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}\right] \cdot (0{,}154 + 0{,}052)\,[\mathrm{m}]} = -0{,}86\,[\text{-}]$$
$$\theta = 149{,}3°. \tag{3}$$

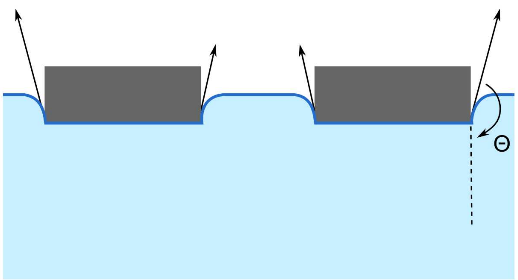
Si la lame n'est pas évidée, l'équation (3) devient :

$$\cos(\theta) = -\frac{mg}{\gamma \cdot l_e} = -\frac{1{,}3 \cdot 10^{-3}\,[\mathrm{kg}] \cdot 9{,}81\,\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\right]}{72 \cdot 10^{-3}\,\left[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}\right] \cdot 0{,}154\,[\mathrm{m}]} = -1{,}15\,[\text{-}]$$

Ce qui est bien impossible. La lame ne peut alors pas flotter !

Note : l'angle de contact se dessine depuis l'interface gaz-liquide vers l'interface liquide-solide.

Vue en coupe de la lame de rasoir



Exercice 6

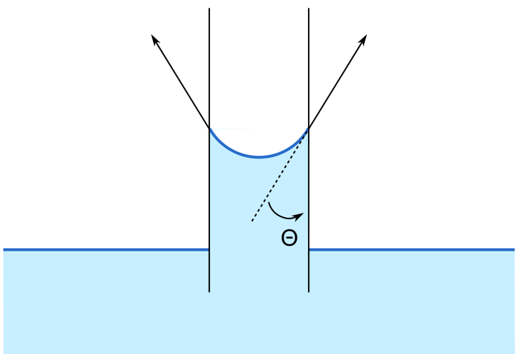
Bilan des efforts sur le ménisque:

$$\begin{aligned} \vec{F_s} + m\vec{g} &= 0 \\ 2\pi r\gamma\cos\theta - \rho\pi r^2 h|g| &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Donc, le rayon **minimal** pour que $h < 1$ est donné par:

$$\begin{aligned} r &\geq \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g h} \\ &\geq \frac{2 \cdot 72 \cdot 10^{-3}\left[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}\right] \cdot 1}{10^3\left[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}\right] \cdot 9{,}81\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\right] \cdot 10^{-3}\left[\mathrm{m}\right]} = 1{,}47\left[\mathrm{cm}\right] \end{aligned}$$

Vue en coupe du ménisque



Exercice 7

La relation (4) donne la hauteur h dans le tube:

$$\begin{aligned} h &= \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r} \\ &= \frac{2 \cdot 0{,}485\left[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}\right] \cdot (-0{,}64)}{13546\left[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}\right] \cdot 9{,}81\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\right] \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\left[\mathrm{m}\right]} = -3{,}13\left[\mathrm{mm}\right] \end{aligned}$$

Le mercure s'abaisse de $-3{,}13$ mm quand on insère le tube en verre.

Vue en coupe du ménisque