

## Analyse dimensionnelle

### Exercice 1

Soit  $F$  une force,  $P$  une pression,  $a$  une accélération,  $E$  une énergie et  $x$  une longueur, quelles sont les dimensions dans le système  $MLT$  de  $a$ ,  $F$ ,  $P$ ,  $dF/dx$ ,  $d^3P/dx^3$ ,  $\int Fdx$ ,  $E$ ?

### Exercice 2

Lors d'un examen, des étudiants ont utilisé les formules suivantes :

- $a = Ut/l$  où  $U$  est une vitesse,  $t$  un temps,  $l$  une longueur ;
- $F = \rho VU/t$  où  $F$  est une force,  $V$  un volume,  $\rho$  une masse volumique ;
- $E = mVgz$  où  $g$  est la constante de gravité,  $V$  un volume,  $z$  une hauteur et  $m$  une masse.

Identifier celles qui sont fausses à l'aide d'arguments dimensionnels.

### Exercice 3

Si  $p$  est une pression,  $V$  une vitesse et  $\rho$  une masse volumique, quelles sont les dimensions de  $p/\rho$ ,  $p\rho V$  et  $p/(\rho V^2)$ ?

### Exercice 4

Retrouver la dimension de la viscosité dynamique  $\mu$  puis celle de la viscosité cinématique  $\nu = \mu/\rho$ , où  $\rho$  est la masse volumique du fluide. Soit  $V$  une vitesse et  $l$  une longueur, identifier les combinaisons adimensionnelles parmi les suivantes :  $\nu l V$ ,  $lV/\nu$ ,  $\nu V^2$  et  $V/(\nu l)$ .

### Exercice 5

Déterminer les dimensions des coefficients  $A$  et  $B$  de l'équation homogène suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + Bx = 0 \quad (1)$$

où  $x$  est une longueur et  $t$  un temps.

### Exercice 6

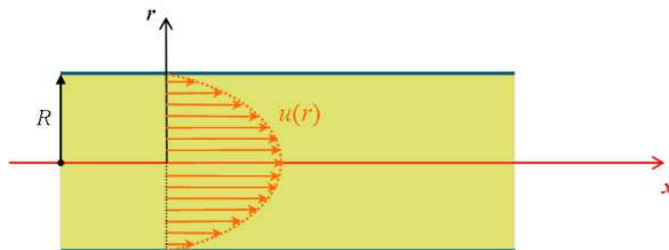


FIG. 1 – Profil de vitesse d'un écoulement de Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille est un écoulement laminaire d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique rectiligne. Le débit total à travers une telle conduite s'exprime comme

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu l} \quad (2)$$

où  $R$  est le rayon de la conduite,  $\Delta p$  la chute de pression le long de la conduite,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide et  $l$  la longueur de la conduite. Déterminer la dimension de la constante  $\pi/8$ . Peut-on qualifier cette équation d'homogène? Expliquer.

## Exercice 7

La différence de pression  $\Delta p$  à travers une obturation partielle (appelée sténose) d'une artère peut être estimée par l'équation

$$\Delta p = K_v \frac{\mu V}{D} + K_u \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right)^2 \rho V^2 \quad (3)$$

où  $V$  est la vitesse du sang,  $\mu$  la viscosité du sang,  $\rho$  la masse volumique du sang,  $D$  le diamètre de l'artère,  $A_0$  la section de l'artère avant l'obturation et  $A_1$  la section de la sténose. Déterminer les dimensions des constantes  $K_v$  et  $K_u$ . Cette équation est-elle valide dans n'importe quel système d'unités?

## Exercice 8

Selon les informations fournies par un livre d'hydraulique, la perte de charge par unité de masse de fluide passant à travers un gicleur connecté à un tuyau peut être estimée par la formule suivante :

$$h = (0.06)(D/d)^4 V^2 / 2g \quad (4)$$

où  $h$  est la perte de charge par unité de masse,  $D$  le diamètre du tuyau,  $d$  le diamètre du bout du gicleur,  $V$  la vitesse du fluide dans le tuyau, et  $g$  l'accélération de la gravité. Cette équation est-elle valide dans n'importe quel système d'unités? Expliquer.

## Exercice 9

Une formule pour estimer le débit  $Q$  au-dessus du trop-plein d'un barrage est :

$$Q = C \sqrt{2g} B (H + V^2 / 2g)^{3/2} \quad (5)$$

où  $C$  est une constante,  $g$  l'accélération de la gravité,  $B$  la largeur du trop-plein,  $H$  la profondeur de l'eau au-dessus du trop-plein, et  $V$  la vitesse de l'eau juste à l'amont du barrage. Cette équation est-elle valide dans n'importe quel système d'unités? Expliquer.

## Exercice 10

Utiliser le tableau 1 pour exprimer les quantités suivantes en unités SI: 10,2 in/min; 4,81 slugs; 3,02 lb; 73,1 ft/s<sup>2</sup>; 0,0234 lb · s/ft<sup>2</sup>.

TAB. 1 – <i>tableau de conversion</i>	
Unités anglaises	Conversion SI
in (pouce)	$2,540 \cdot 10^{-2}$ m
slug (unité de masse)	$1,459 \cdot 10^1$ kg
lb (livre-force)	4,448 N
ft (pied)	$3,048 \cdot 10^{-1}$ m

## Exercice 11

Le but de cet exercice est de calculer une vitesse de sédimentation. On se place dans de l'air de masse volumique  $\rho_f$  et nous considérons la chute d'une sphère de rayon  $R = 5$  cm et de masse volumique  $\rho_s$ . Faire un bilan des forces qui s'exercent sur la sphère et calculer sa vitesse limite. La force de traînée est donnée par l'équation suivante :

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho_f S v^2 \quad (6)$$

où  $C_D$  est le coefficient de traînée qui peut être estimé par l'abaque de la figure suivante ( $C_D$  en fonction du nombre de Reynolds),  $S$  la surface projetée de la sphère ( $\pi R^2$ ), et  $v$  sa vitesse. On supposera le nombre de Reynolds très grand. Une fois la vitesse limite calculée, vérifier cette dernière hypothèse. Nous utiliserons les données suivantes:  $\rho_f = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu_f = 2 \times 10^{-5}$  Pa · s et  $\rho_s = 1000$  kg/m<sup>3</sup>.

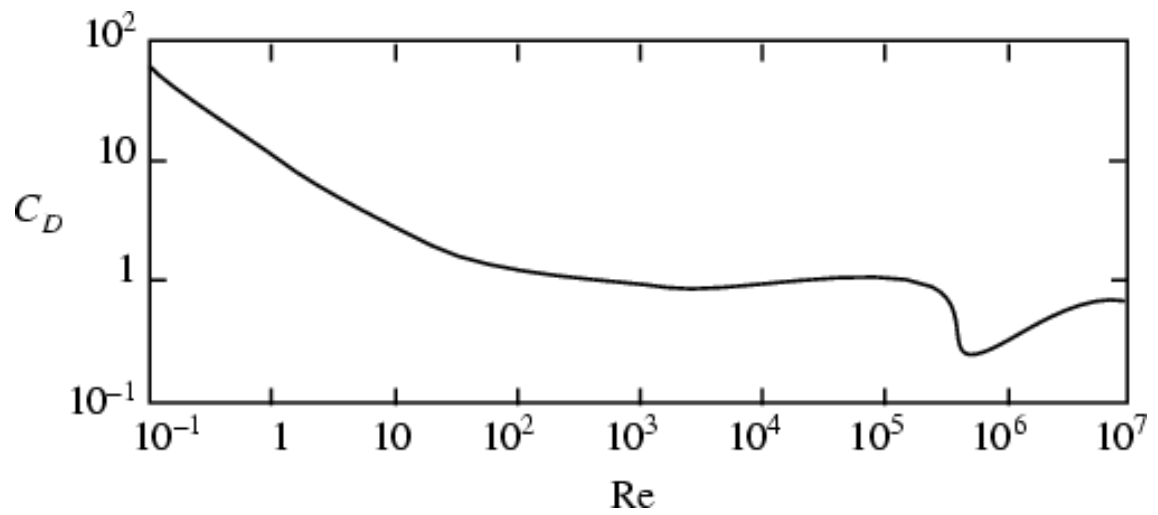


FIG. 2 – variation de  $C_D$  en fonction du nombre de Reynolds.