Correction

Exercice 1

Soit P_{atm} la pression atmosphérique à l'extérieur du tuyau et A et B deux points situés à la même altitude dans le premier fluide. En utilisant la loi de Pascal, $\Delta p = \rho g h$, et le fait que $P_A = P_B$, on peut écrire (en prenant le point A à l'interface des deux fluides) :

$$\Longrightarrow P_{atm} + \rho_2 g h_2 = P_{atm} + \rho_1 g h_1,$$
$$\Longrightarrow \rho_2 = \rho_1 \times \frac{h_1}{h_2} = 1000 \times \frac{h_1}{h_2} \text{ kg m}^{-3}$$

Exercice 2

Soit r le rayon de la paille, l la longueur de la paille et $= 2\pi r l$ le volume de la paille.

Le volume initial de soda dans le verre, avant que le paille ne soit remplie, est $\pi R^2 h_0$. Le volume final est donc $\pi r^2(l - h_1) + \pi R^2 h_1$. Le volume de soda est bien conservé puisque le fluide ne fait que remonter dans la paille (l'étudiant n'a pas encore commencé à boire le soda). Soit h_1 la hauteur de soda dans le verre lorsque la paille est remplie, on peut alors écrire :

$$\Longrightarrow h_1 = \frac{R^2 h_0 - r^2 l}{R^2 - r^2}.$$

La pression qui s'applique à la surface du soda dans le verre est la pression atmosphérique P_{atm}. La pression qui s'applique à l'extrémité de la paille, au niveau de la bouche, est P_b. En égalisant la pression qui s'exerce au fond du verre, loin de la paille, avec celle qui s'exerce au fond du verre, au niveau de l'extrémité de la paille, on peut écrire :

$$\Longrightarrow P_b + \rho g z = P_{atm} + \rho g h_1,$$
$$\Longrightarrow \Delta P = -\rho g \left(z - \frac{R^2 h_0 - r^2 l}{R^2 - r^2} \right).$$

Exercice 3

i) Oui, c'est vrai. La loi de Pascal permet d'écrire :

$$\begin{aligned} dP &= -\rho g dz \\ \Longrightarrow \int_0^\infty dP &= P_\infty - P_{atm} \\ &= -\int_0^\infty \rho g dz \end{aligned}$$

Et donc, si $P_\infty \longrightarrow 0$ au sommet de l'atmosphère, $P_{atm} \longrightarrow \int_0^\infty \rho g dz = \rho g z_{atm}$.

ii) Non, cela correspond au poids de la colonne d'eau au-dessus d'un point dans le même plan horizontal. En effet, dans un fluide incompressible au repos (conditions hydrostatiques), la pression est la même à une altitude donnée. On rappelle qu'une propriété fondamentale de la pression est l'isotropie (identique dans toutes les directions).

Exercice 4

Soit ϕ la colatitude (angle zénital) et θ la latitude. La pression peut alors s'exprimer ainsi : $p(\phi,\theta) = \rho g(h - a\cos\phi)$.

Soit l'élément de surface infinitésimal $dS = a^2 \sin\phi d\phi d\theta$, la force de pression exercée par le fluide sur cette surface est $d\vec{F} = -p\vec{n}dS = \rho g(h - a\cos\phi)\vec{n}dS$ avec $\vec{n}$ la normale à la surface du dôme orientée vers l'extérieur du fluide. La composante verticale (orientée vers le bas) de cette force de pression est $dF_z = \rho g(h - a\cos\phi)\cos\phi dS$.

Intégrer la pression sur le dôme revient à intégrer la composante verticale puisque la composante horizontale s'annule étant donné la symétrie de la surface. La résultante de la force de pression est donc :

$$\begin{aligned}
F_{hyd} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \rho g(h - a\cos\phi)a^2\cos\phi\sin\phi d\phi d\theta \\
&= \rho g a^2 2\pi \int_0^{\pi/2} h\cos\phi\sin\phi - a\cos^2\phi\sin\phi d\phi \\
&= \rho g a^2 2\pi \left[\frac{h}{2}\sin^2\phi + \frac{a}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi/2} = \rho g a^2 \pi\left[h - 2a/3\right].
\end{aligned}$$

Bilan des forces : $F_{hyd} = 4'694'000$ kN; $F_{poids} = 2000$ kg $\times$ 9,81 m s^{-2} $= 1'962$ kN; $F_{ancrages} = 10$ kN/m $\times$ $2\pi r = 6'283$ kN; $F_{in} = F_{poids} + F_{ancrages} + F_{hyd} = 4'694'600$ kN,

Pour obtenir la pression intérieure maximum acceptable, il faut diviser la force de pression associée F_{in} par la surface d'application, soit la projection du dôme dans le plan horizontal (la résultante de la force de pression étant orientée verticalement) : $P_{in} = F_{in}/(\pi a^2) = 1'494 \times 10^7$ N m^{-2}.

Exercice 5

Soit V le volume de l'iceberg et α la fraction immergée. Pour que l'iceberg flotte, la poussée d'Archimède doit contrebalancer le poids : $V\alpha\rho_e g = V\rho_g g$. On obtient : $\alpha = \rho_g/\rho_e = 90\%$.

Exercice 6

Force de pression / unité de largeur : $\vec{F}_z = -\int_0^h p\vec{n}dz = \int_0^h \rho_{eau} g(h-z)dz = \rho g h^2/2$. (Ou également avec le triangle)

Sans frottement, faisons un bilan des moments: $M_{poids} = M_{Fp}$,

$$\begin{aligned}
M_{poids} &= 2l/3 \times hlg\rho/2 \\
M_{Fp} = -\int_0^h z(h-z)\rho_{eau} g dz &= -\rho_{eau} g h^3/6 \\
\Longrightarrow h &= \sqrt{2l^2\frac{\rho}{\rho_{eau}}}
\end{aligned}$$

pour que ça ne bascule pas.

La présence de frottement ne change pas le bilan des moments car il agit dans le même plan que l'origine.

Exercice 7

i) La pression du liquide à l'altitude z est $P_0 - \rho g z$ où P_0 est la pression atmosphérique. Mais l'air ambiant exerce également une pression P_0 de l'autre côté de la paroi et P_0 n'intervient pas. La résultante cherchée est donc $\vec{F}$, telle que $F_x = \int\int_{(OADB)} -\rho g z dS$.

Pour calculer cette intégrale, décomposons le 1/2 disque en bandes parallèles à $y'y$, $[z, z+dz]$.

$$\begin{aligned}
z &= -R\sin\theta \\
dS &= 2R\cos\theta dz = -2R^2\cos^2\theta d\theta \\
F_x &= \int_0^{\pi/2} 2\rho g R^3 \sin\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= 2\rho g R^3\left[-\cos^3\theta/3\right]_0^{\pi/2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

d'où $F_x = \frac{2}{3}\rho g R^3$.

Le moment des forces de pression par rapport à Oy est :

$$M_{Oy} = \int\int_{(OADB)} -\rho g z^2 dS = \int_0^{\pi/2} 2\rho g R^4 \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$$

avec $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)$ et $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)d\theta = \frac{\pi}{16}$. $\Longrightarrow M_{Oy} = -\frac{\pi}{8}\rho g R^4$.

Le moment par rapport à Ox est nul (forces parallèles à Ox); celui par rapport à Oz également en raison de la symétrie de la répartition de pression par rapport au plan xOz. Le moment résultant des forces pressantes exercées sur la paroi verticale en O, et par suite en tout point, est donc le même que celui d'une force unique $\vec{F} = \frac{2}{3}\rho g R^3 \vec{e_x}$, dont le bras de levier passe par le point P de Oz, tel que $M_{Oy} = \bar{OP} \times F_x$.

On en déduit : $\bar{OP} = -\frac{3\pi}{16}R$. (Le résultat est applicable à tout système de forces parallèles : leur moment est le même que celui d'une force passant par leur barycentre).

ii) Les forces de pression exercées sur le 1/4 de sphère sont radiales donc leur moment en O est nul.

Analysons l'équilibre du liquide contenu dans le récipient : la contribution de la pression atmosphérique P_0 agit sur la totalité de la surface qui limite le liquide (surface libre et action des parois), elle n'intervient donc pas.

En éliminant P_0, le liquide ne subit, en plus de la pesanteur, que des forces de résultante $-\vec{F}$ de la part de la paroi verticale ($OABD$), et des forces de pression de la part du 1/4 de sphère dont nous noterons la résultante $-\vec{F'}$; alors $-\vec{F'}$ est la résultante des actions exercées sur cette sphère, car la contribution P_0 agit des 2 côtés de cette surface.

On a donc : $M\vec{g} - \vec{F} - \vec{F'} = \vec{0}$ d'où :

$$F'_x = -F_x = -\frac{2}{3}\rho g R^3$$
$$F'_z = -Mg = -\frac{\pi}{3}\rho g R^3.$$

Leur moment en O étant nul, les forces de pression exercées sur cette paroi en 1/4 de sphère sont équivalentes à une seule force $\vec{F'}$, dont la direction passe par O, donc aussi par le point Q de l'arc de cercle (CD) du plan xOz, défini par l'angle α tel que

$$\tan\alpha = \frac{F'_z}{F'_x} = \pi/2.$$

iii) Il suffit d'annuler le moment des actions exercées sur le liquide, par rapport a Oy, la contribution de P_0 étant nulle.

Le moment des actions exercées par la paroi verticale est, compte non tenu de P_0, $-\bar{OP} \cdot F_x$; celui qu'exerce le 1/4 de sphère est nul. Enfin, le moment des forces de pesanteur par rapport à Oy est $x_G \cdot Mg = \frac{\pi}{3}\rho R^3 g x_G$.

$$-F_x \cdot \bar{OP} + \frac{\pi}{3}\rho R^3 g x_G = 0$$

d'où $\bar{OP} = \frac{\pi}{2}x_G = \tan\alpha \cdot x_G$.

Le centre de masse G est situé dans le plan de symétrie xOz, et sur la 1$^{\text{ère}}$ bissectrice des axes Ox et Oy, car le plan bissecteur de ces axes est également plan de symétrie pour le récipient : $x_G = z_G$.

En décomposant le volume en 1/2 cylindres d'épaisseur dx et de rayon $\sqrt{R^2 - x^2}$, ($x \in [-R,0]$), donc de volume $\delta V = \frac{\pi}{2}(R^2 - x^2)dx$ il vient :

$$x_G = \frac{1}{V}\int_{-R}^{0} x dV = \frac{3}{2R^3}\int_{-R}^{0} x(R^2 - x^2)dx, \left(V = \frac{\pi}{3}R^3\right).$$

Soit $x_G = z_G = -\frac{3R}{8}$ (on a donc $OG = \frac{3R}{8}\sqrt{2}$).

On retrouve alors $\bar{OP} = -\frac{3\pi}{16}R$.