Correction

Exercice 1

Considérons le point 1 juste au-dessous de l'extrémité du tube mince sur la droite et le point 2 juste au-dessous de la fin du tube mince sur la gauche. En servant du théorème de Bernoulli entre ces deux points, nous obtenons :

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g z_1 &= p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g z_2, \\ p_1 - p_2 &= \frac{1}{2}\varrho (v_2^2 - v_1^2) + \varrho g (z_2 - z_1). \end{aligned} \tag{1}$$

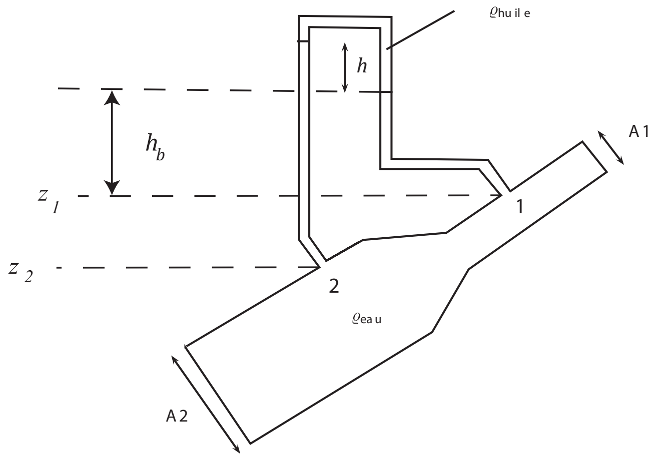

Figure 1 : application du théorème de Bernoulli entre 1 et 2.

Cela nous donne une solution pour la différence de pressions en fonction de la différence de vitesses. La position du manomètre résulte de la différence de pressions aux points 1 et 2. Maintenant, pour trouver h, nous utilisons une seconde équation qui lie h à la pression résultant des colonnes de liquide et d'huile dans le manomètre :

$$p_2 = \varrho g h + \varrho g h_b + \varrho g \Delta z,$$

$$p_1 = \varrho_h g h + \varrho g h_b.$$

Ici on a $\Delta z = z_1 - z_2 > 0$ puisque l'axe z pointe vers le haut et h_b est la partie du manomètre entre z_1 et le fond de la colonne d'huile. La différence de pression est la suivante :

$$p_2 - p_1 = \varrho g h - \varrho_h g h + \varrho g (z_1 - z_2). \tag{2}$$

Substituant (2) dans (1), puis utilisant $Q = v_i S_i$, nous trouvons :

$$h = \frac{\varrho}{2g(\varrho - \varrho_h)}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{\varrho Q^2}{2g(\varrho - \varrho_h)}(S_1^{-2} - S_2^{-2}). \tag{3}$$

Exercice 2

1. Pour connaître le débit de l'eau à la sortie du réservoir lorsque la surface de l'eau est à l'altitude $z(t)$ par rapport au fond, on applique le théorème de Bernoulli entre le point S de la surface libre et l'ouverture O (voir figure 2) :

   $$p_s + \frac{1}{2}\varrho v_s^2 + \varrho g z_s = p_o + \frac{1}{2}\varrho v_o^2 + \varrho g z_s,$$

   soit après simplification

   $$\varrho g z = \frac{1}{2}\varrho v_o^2 = \frac{1}{2}\varrho \frac{Q^2}{(\pi r^2)^2},$$

   avec Q le débit sortant, ϱ la masse volumique de l'eau, et $z(t)$ la cote de S. On obtient l'expression du débit sortant en fonction de la hauteur d'eau :

   $$Q = \pi r^2 \sqrt{2gz} \tag{4}$$

C'est la formule de Torricelli vue en cours.

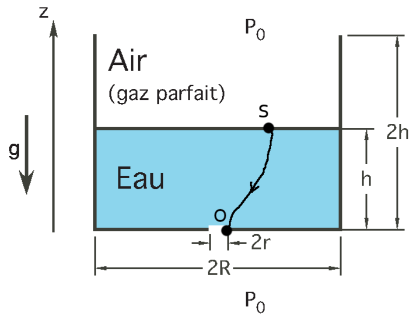

Figure 2 : application du théorème de Bernoulli entre S et O.

Le débit volumique descendant au niveau de le surface est égal au débit sortant par le trou (conservation de la masse) :

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\pi R^2 = \pi r^2\sqrt{2gz(t)},$$

avec πR^2 la surface du cylindre et πr^2 la surface de l'orifice.
Cette équation différentielle du premier ordre s'intègre en séparant les variables :

$$\int_{2h}^{z(t)} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2gz}} = -\int_0^t \frac{r^2}{R^2}\mathrm{d}t,$$

soit encore

$$\rightarrow t\frac{r^2}{R^2} = \frac{(\sqrt{h}-\sqrt{z(t)})}{\sqrt{g}}.$$

Au temps $t = T$, le reservoir est vide ($z(T) = 0$), et on déduit :

$$T = \frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 14{,}28 \text{ s.} \tag{5}$$

2. Soit p_g la pression du gaz et x sa hauteur : $x = 2h - z(t)$. Nous cherchons quand l'eau s'arrête de couler, donc la condition pour laquelle on a $v_o = 0$. Les pressions s'additionnent en O (loi de l'hydrostatique) :

$$p_o = \varrho g(2h - x) + p_g.$$

La loi des gaz parfaits implique $p_g^i V_g^i = p_g^f V_g^f$ entre les instants initial et final, avec $V_g^i = \pi R^2 h$, $V_g^f = \pi R^2 x$. On a alors :

$$p_g^f = p_g^i\frac{h}{x} = p_0\frac{h}{x},$$

donc :

$$p_o = \varrho g(2h - x) + p_g^f = \varrho g(2h - x) + p_0\frac{h}{x}. \tag{6}$$

L'eau ne coule plus quand $p_0 = p_{atm}$. La résolution de l'équation du second ordre (6) donne deux solutions, dont une seule est positive : $x = 0{,}101$ m. L'eau coule donc de $x - h = 1$ mm avant de s'arrêter.

Exercice 3

Soit $h_1 = 1{,}50$ m, $h_2 = 1{,}0 + 1{,}5 = 2{,}50$ m, $p_{atm} = 0$ Pa, $\varrho = 1000$ kg/m^3.
L'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B donne (voir figure 3) :

$$p_a + \frac{1}{2}\varrho v_a^2 + \varrho g z_a = p_b + \frac{1}{2}\varrho v_b^2 + \varrho g z_b,$$

soit encore (sachant que $p_a = p_b = p_{atm}$)

$$\varrho g h_1 = \frac{1}{2}\varrho v_b^2,$$

avec $v_b = Q/(\pi r^2)$. On déduit :

$$\varrho g h_1 = \frac{1}{2}\varrho(Q/\pi r^2)^2, \tag{7}$$

ce qui nous permet de déterminer le débit :

$$Q = \pi r^2 \sqrt{2gh_1} = 3{,}9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}. \tag{8}$$

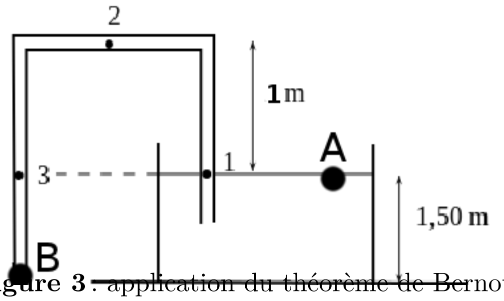

Figure 3 : application du théorème de Bernoulli.

Le débit est conservé tout au long du siphon car la masse se conserve. Comme la section est constante tout au long du siphon, la vitesse est la même en tout point du siphon, donc $v_1 = v_2 = v_3 = v_b$. De plus les points 1 et 3 se situent à la même altitude. On a donc $p_1 = p_3$. Appliquons le théorème de Bernoulli entre les points A et 1 afin d'obtenir p_1 :

$$p_a + \frac{1}{2}\varrho v_a^2 + \varrho g z_a = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g z_1,$$

d'où

$$0 = \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1.$$

On a donc :

$$p_1 = -\frac{1}{2}\varrho v_1^2 = -14{,}7\ \mathrm{kPa}. \tag{9}$$

En utilisant $v_1 = Q/(\pi r^2) = 5{,}51$ m/s.

Appliquons le théorème de Bernoulli entre les points A et 2 :

$$p_a + \frac{1}{2}\varrho v_a^2 + \varrho g z_a = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g z_2,$$

soit encore

$$\varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g h_2,$$

et après simplification

$$p_2 = \varrho g(h_1 - h_2) - \frac{1}{2}\varrho v_2^2.$$

Cela fait donc :

$$p_2 = -24{,}5\ \mathrm{kPa}. \tag{10}$$

Exercice 4

1. On suppose le niveau du réservoir constant. On peut donc appliquer la formule de l'exercice 3 :

$$Q = \sqrt{2gz_1}\pi\frac{D^2}{4} = 0{,}0778\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}. \tag{11}$$

2. On applique le théorème de la conservation de la quantité de mouvement en régime permanent sur un volume de contrôle délimité par la surface S (voir figure 4) :

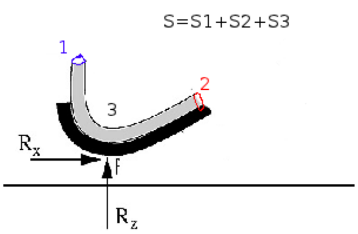

Figure 4 : volume de contrôle S.

$$\begin{aligned}\int_S \varrho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}\mathrm{d}S &= \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{R},\\ &= \int_{S_1} \varrho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}\mathrm{d}S + \int_{S_2} \varrho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}\mathrm{d}S,\\ &= -\varrho v_1 \boldsymbol{v_1} S_1 + \varrho v_2 \boldsymbol{v_2} S_2.\end{aligned} \tag{12}$$

Si Q est constant, alors $v_1 S_1 = v_2 S_2$, donc on obtient :

$$\boldsymbol{R} = \varrho Q(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}) = \begin{bmatrix} \varrho Q v_2 \cos\alpha \\ \varrho Q(v_2 \sin\alpha + v_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 667 \\ 1155 \end{bmatrix} \text{ N} \tag{13}$$

en supposant $v_1 = v_2$.

3. L'énergie cinétique verticale se transforme en énergie potentielle au point le plus haut du jet :

$$\frac{1}{2}\varrho(v_2 \sin\alpha)^2 = \varrho g z_b. \tag{14}$$

Donc on trouve la hauteur maximale du jet :

$$z_b = \frac{\left(\dfrac{Q}{\pi r^2}\sin\alpha\right)^2}{2g} = 1{,}25 \text{ m}. \tag{15}$$

Exercice 5

Soit $d = 0{,}02$ m le diamètre intérieur du tube, $z_1 = 0{,}2$ m l'altitude du niveau de l'eau de la piscine par rapport au fond de la piscine et $z_2 = -0{,}23$ m l'altitude du bout du siphon par rapport au fond de la piscine. Nous appliquons le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2 afin de déterminer la vitesse à la sortie du siphon ainsi que le débit :

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g z_2.$$

Sachant que $p_1 = p_2 = p_{atm}$ et $v_1 = 0$ m/s, on obtient :

$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = 2{,}90 \text{ m/s}$$

De plus on sait que :

$$Q = S v_2 = \pi(d/2)^2 v_2 = \pi(0{,}02/2)^2 \times 2{,}90 = 9{,}11 \times 10^{-4} \text{ m}^3\text{s}^{-1}.$$

Exercice 6

1. On applique le théorème de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g z_2,$$

avec $z_1 = z_2$, $p_1 = 0$, et $v_1 \approx 0$, $v_2 = 90$ km/h. On obtient :

$$p_2 = -\frac{1}{2}\varrho v_2^2 = 0{,}5 \times 1{,}225 \times 25^2 = -0{,}382 \text{ kPa}.$$

À l'aide de l'équilibre des forces sur les deux colonnes du tube en U, on établit que :

$$p_2 + \varrho_{water} g h = \varrho_{oil} g \times 0{,}025.$$

Ainsi, on a

$$h = \frac{\varrho_{oil} g 0{,}025 - p_2}{\varrho_{water} g} = \frac{900 \times 9{,}81 \times 0{,}025 - (-382)}{900 \times 9{,}81} = 0{,}0614 \text{ m}.$$

2. L'application du théorème de Bernoulli donne

$$p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g z_2 = p_3 + \frac{1}{2}\varrho v_3^2 + \varrho g z_3.$$

Avec $z_2 = z_3$ and $v_3 = 0$ on déduit

$$p_3 - p_2 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 = 0{,}5 \cdot 1{,}225 \cdot 25^2 = 0{,}382 \text{ kPa}.$$