Correction

Exercice 1

1. On suppose que $h = h_n$ au niveau du pont. En utilisant la formule de Jäggi, on calcule $K = 23{,}2/d_{90}^{1/6} = 30$ m$^{1/3}$ s^{-1}. L'équation de Manning-Strickler pour un canal infiniment large permet d'écrire :

$$h_{n2} = \left(\frac{Q}{BK\sqrt{i_{av}}}\right)^{3/5} = 0{,}81 \text{ m}. \tag{1}$$

   On trouve $h_{n2} < h_0$, donc la sécurité du pont est assurée. Note : comme 1,3 m est du même ordre de grandeur que B l'hypothèse du canal infiniment large est discutable, ici on l'a choisie uniquement pour simplifier les calculs.

2. On détermine tout d'abord le régime d'écoulement pour les tronçons 1 (amont) et 2 (aval). Pour cela on calcule la hauteur normale h_{n1} dans le tronçon 1 et la hauteur critique h_c (hauteur d'eau pour $\mathrm{Fr} = 1$) :

$$h_{n1} = \left(\frac{Q}{BK\sqrt{i_{am}}}\right)^{3/5} = 0{,}27 \text{ m} \tag{2}$$

$$h_c = \left(\frac{Q}{B\sqrt{g}}\right)^{2/3} = 0{,}61 \text{ m} \tag{3}$$

   On trouve $h_{n1} < h_c < h_{n2}$ m. L'écoulement passe donc d'un régime supercritique à un régime subcritique, il y a donc un ressaut qui se forme au changement de régime. Dans la zone où se produit le ressaut, l'écoulement est très turbulent, localement la hauteur d'eau peut être importante avec une forte érosion. On va donc déterminer la position du ressaut. Pour ce faire on va utiliser la méthode de conjugaison. Il faut commencer par tracer l'allure des courbes de remous en résolvant l'équation de Bresse pour une loi de Manning-Strickler (équation 5.12 p. 109 du cours)

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = i\frac{1-(h_n/h)^{10/3}}{1-(h_c/h)^3}. \tag{4}$$

   Dans le premier tronçon l'écoulement est partout supercritique car $h_{n1} < h_c$, le ressaut n'y aura pas lieu. Le ressaut va se situer quelque part dans le deuxième tronçon, nous allons donc tracer la courbe de remous afin d'estimer à quel endroit aura lieu le ressaut. On doit donc résoudre numériquement l'équation 4. La résolution se fait avec l'outil de Matlab ode45. On utilise une condition limite à l'amont car l'écoulement est initialement supercritique. On va considérer que la hauteur initiale est $h_0 = h_{n1} = 0{,}27$ m.

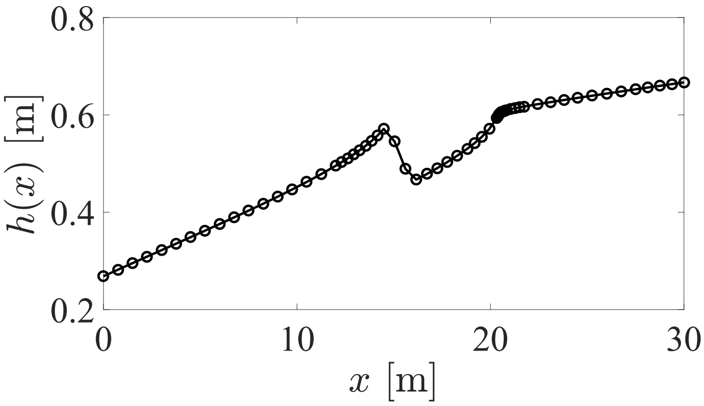


FIG. 1 – *Solution numérique de l'équation de remous dans la deuxième partie*

   On voit sur la figure 1 que la résolution numérique diverge autour de $x = 20$ m, c'est-à-dire quand $h \approx 0{,}61 =$ m qui est la hauteur critique. On va donc maintenant calculer la hauteur conjuguée par la formule de conjugaison

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right) \tag{5}$$

avec $\mathrm{Fr}_1 = q/(\sqrt{gh_1^3})$. Cette courbe est présentée sur la figure 2.

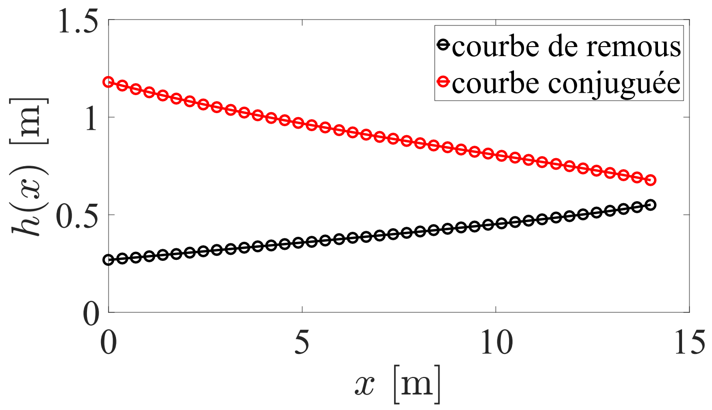


FIG. 2 – *Solution numérique de l'équation de remous dans la deuxième partie avec sa courbe conjuguée*

Il faut maintenant déterminer le point d'intersection entre la courbe conjuguée et la courbe de remous en aval du ressaut. Cette courbe se calcule en résolvant l'équation 4 en régime subcritique, car on sait qu'après le ressaut hydraulique l'écoulement change de régime. Il nous faut donc une condition limite à l'aval loin du ressaut, par exemple $h_0 = h_{n2} = 1{,}3$ m en $x = 20$ m (au niveau du pont). On utilise à nouveau l'outil ode45 de Matlab. On peut voir les courbes sur la figure 3.

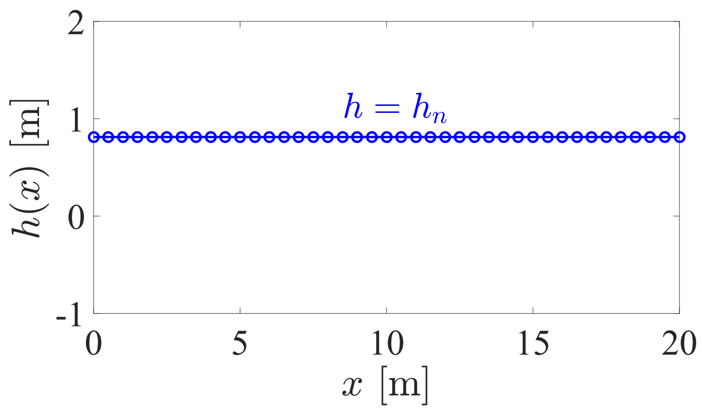


FIG. 3 – *Solution numérique de l'équation de remous en aval du ressaut avec sa courbe conjuguée*

On peut voir qu'après le ressaut l'écoulement est partout à hauteur normale. On va maintenant chercher la position de l'intersection entre les courbes de remous et les conjugués. Le résultat est présenté sur la figure 4. Graphiquement on estime donc la position du ressaut à $x_r = 10$ m.

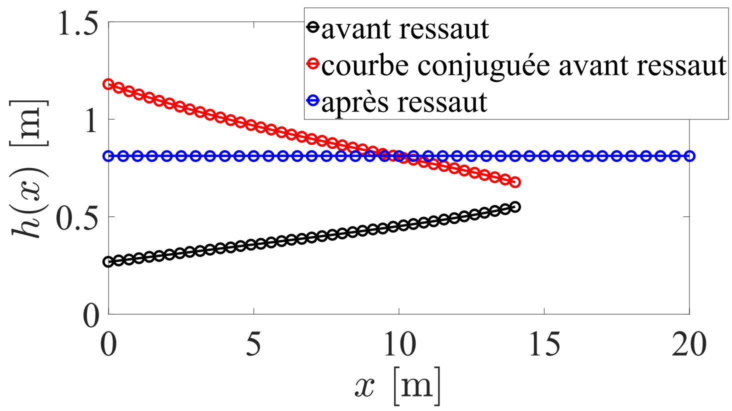


FIG. 4 – *Solution numérique de l'équation de remous en aval du ressaut avec sa courbe conjuguée*

Exercice 2

1. Calculons la hauteur critique dans la première partie :

$$h_{c1} = \left(\frac{Q}{B_1\sqrt{g}}\right)^{2/3} = 0{,}74 \text{ m}. \tag{6}$$

Calculons la hauteur critique dans la deuxième partie :

$$h_{c2} = \left(\frac{Q}{B_2\sqrt{g}}\right)^{2/3} = 1{,}18 \text{ m}. \tag{7}$$

2. Calculons la hauteur normale dans la première partie. Pour ce faire nous allons utiliser la loi de Manning-Strickler sans faire l'approximation du canal infiniment large, soit $R_H = Bh_n/(B+2h_n)$. Cela donne :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= K\sqrt{i}R_H^{2/3} \text{ avec } \bar{u} = Q/Bh_n \\ Q &= K\sqrt{i}Bh_n\left(\frac{Bh_n}{B+2h_n}\right)^{2/3} \\ B+2h_n &= \left(\frac{K\sqrt{i}}{Q}\right)^{3/2}(Bh_n)^{5/2} \\ \Rightarrow f(h) &= \alpha h_n^{5/2} - 2h_n - B \text{ avec } \alpha = B^{5/2}\left(\frac{K\sqrt{i}}{Q}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

On va appliquer la méthode de Newton pour résoudre cette équation. On rappelle que la méthode de Newton est une procédure de calcul itératif du zéro d'une fonction :

$$h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)},$$

où l'on a introduit :

$$f'(h) = \frac{5\alpha}{2}h_n^{3/2} - 2.$$

avec $\alpha = 15{,}67$. Comme valeur initiale h_0 on prendra la hauteur normale pour un canal infiniment large calculée avec la loi de Manning-Strickler, c'est-à-dire :

$$h_0 = \left(\frac{Q}{BK\sqrt{i}}\right)^{3/5} = 0{,}89 \text{ m}$$

avec $B = 10$ m. Pour calculer K, nous avons utilisé la formule de Jäggi : $K = 23{,}2/d_{90}^{1/6} = 34{,}1 \text{ m}^{1/3}\text{ s}^{-1}$. La méthode de Newton converge vers $h_{n1} = 0{,}96$ m en 4 itérations.

Dans la deuxième partie du canal, les calculs sont identiques. Il faut prendre $h_0 = 1{,}08$ m comme valeur initiale dans l'application de la méthode de Newton, $\alpha = 4{,}93$, $K = 50$ m$^{1/3}$ s^{-1} et $B = 5$ m. La méthode de Newton converge en 4 itérations vers $h_{n2} = 1{,}27$ m.

3. On se réfère à la page 129 des notes de cours au paragraphe « Passage d'un seuil ou d'un déversoir ». On sait que la charge hydraulique au niveau du seuil vaut

$$H = h_{c2} + \frac{Q^2}{2B^2 h_{c2}^2 g} + p = 2{,}77 \text{ m.}$$

car au pour un seuil suffisamment long l'écoulement est partout à la hauteur critique au niveau du seuil. On va supposer qu'il n'y a pas de pertes entre l'amont et le seuil, donc que la charge hydraulique H se conserve. On peut donc écrire que juste en amont du seuil la charge vaut

$$H = h_a + \frac{u^2}{2g} = h_a + \frac{Q^2}{2B^2 h_a^2 g}.$$

où h_a est la hauteur juste en amont. On a donc une équation polynomiale de degré 3, on va donc appliquer la méthode de Newton avec

$$f(h_a) = h_a^3 - H h_a^2 + + \frac{Q^2}{2B^2 g}$$

et

$$f'(h_a) = 3h_a^2 - 2H h_a$$

Comme le seuil est haut on suppose que $h_a \approx H$, ce qui justifie que l'on prenne comme valeur initiale $h_0 = H = 2{,}77$ m. La méthode de Newton converge en 3 itération vers $h_a = 2{,}65$ m.

4. On va calculer les nombre de Froude dans chaque bief.

$$\mathrm{Fr}_1 = \frac{Q}{B_1 h_{n1}^{3/2} \sqrt{g}} = 0{,}68 \tag{8}$$

L'écoulement est en régime subcritique dans le premier bief.

$$\mathrm{Fr}_2 = \frac{Q}{B_2 h_{n2}^{3/2} \sqrt{g}} = 0{,}89 \tag{9}$$

L'écoulement est en régime subcritique dans le second bief.
Note : on aurait pu répondre à cette question sans calculer le nombre de Froude en notant que dans les deux biefs la hauteur normale est supérieur à la hauteur critique : $h_{n1} = 0{,}96 > 0{,}74 = h_{c1}$ et $h_{n2} = 1{,}27 > 1{,}18 = h_{c2}$.

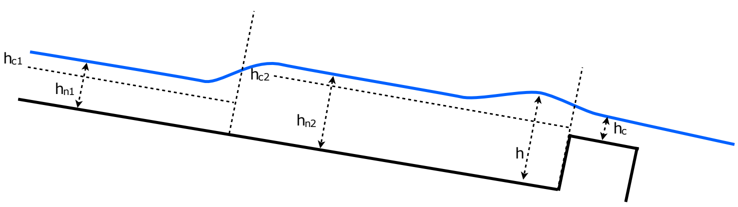
5. 

FIG. 5 – *Courbe de remous du canal*

Exercice 3

1. On va calculer la force de pression par unité de largeur qui s'exerce sur le barrage. En considérant la pression atmosphérique comme $p_{atm} = 0$ Pa, on peut écrire la distribution de pression hydrostatique le long du barrage comme $p = \varrho g(h_0 - y)$. On a prit le fond du lac comme altitude 0. On sait que la force de pression totale s'exprime comme:

$$\boldsymbol{F} = \int_S -p\boldsymbol{n} \mathrm{d}s$$

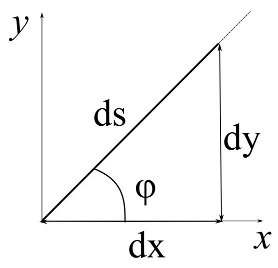


FIG. 6 – *Incrément de surface infinitésimale sur le barrage*

Étant donné la géométrie du problème (voir figure 6) on peut exprimer ds en fonction de la hauteur du barrage comme suit : d$s = l\mathrm{d}y/\sin\phi = 2l\mathrm{d}y$, où l est la largeur (inconnue) du barrage. On veut calculer l'intensité de force de pression qui s'exerce sur le barrage, c'est-à-dire la norme de $F = \|\boldsymbol{F}\|$.

$$F = \|\boldsymbol{F}\| = \left\| \int_S -p\boldsymbol{n}\mathrm{d}s \right\| = \int_S \|-p\boldsymbol{n}\|\, \mathrm{d}s = \int_S p\mathrm{d}s$$

Car $\|\boldsymbol{n}\| = 1$. On peut donc écrire:

$$F = \int_0^{h_0} \varrho g(h_0 - y)l\mathrm{d}y = 2\varrho gl[h_0 y - \frac{1}{2}y^2]_0^{h_0} = \varrho g l h_0^2 \tag{10}$$

La force de pression totale par unité de largeur est donc $f = F/l = \rho g h_0^2$. L'application numérique donne: $f = 981$ kN/m

2. En se servant de la formule de Torricelli, on peut évaluer la vitesse de l'écoulement en sortie de la buse

$$u = \sqrt{2gh_0} = 14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Le débit correspondant à cette vitesse est

$$Q = uS_{\text{buse}} = u\frac{\pi D^2}{4} = 2{,}75\,\mathrm{m^3\ s^{-1}} \tag{11}$$

3. Soit h_{sortie} la hauteur de l'écoulement dans le canal juste en aval de la buse et $S_{\text{sortie}} = \ell h_{\text{sortie}}$ la surface de l'écoulement dans le canal juste en aval de la buse. On a supposé que l'écoulement occupe toute la largeur du canal. La conservation du débit impose

$$Q = uS_{\text{sortie}} = u\ell h_{\text{sortie}} \Rightarrow h_{\text{sortie}} = \frac{Q}{u\ell} = 3{,}9 \text{ cm}$$

4. En appliquant la formule de Jäggi:

$$K = \frac{23.2}{d_{90}^{1/6}} = 44{,}52 \approx 45 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$$

5. Nous allons utiliser la loi de Manning-Strickler pour calculer la hauteur normale h_n, c'est-à-dire la hauteur de l'écoulement en régime permanent et uniforme. Comme nous supposons le canal infiniment large ($\ell \gg h$), le rayon hydraulique devient :

$$R_H = \frac{\ell h_n}{\ell + 2h_n} = \frac{h_n}{1 + \frac{2h_n}{\ell}} \approx h_n$$

En utilisant la loi de Manning-Strickler et $u = Q/h_n\ell$ il vient:

$$\begin{aligned} \tau_p = \frac{\varrho g}{K^2}\frac{u^2}{h_n^{1/3}} &= \varrho g i R_H \\ \Rightarrow h^{1/3} &= \frac{u^2}{K^2 i R_H} \\ \Rightarrow h_n^{1/3} &= \frac{Q^2}{h_n^3 \ell^2 K^2 i} \\ \Rightarrow h_n &= \left(\frac{Q}{\ell K\sqrt{i}}\right)^{3/5} \end{aligned}$$

L'application numérique donne $h_n = 56{,}5$ cm

6. La hauteur critique du canal se calcule en considérant l'écoulement comme étant à nombre de Froude égal à 1. Soit

$$\mathrm{Fr} = 1 = \frac{u}{\sqrt{gh_c}} = \frac{Q}{\ell h_c \sqrt{gh_c}}$$
$$\Rightarrow h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{\ell^2 g}} = 31{,}4\,\mathrm{cm}$$

7. Lorsque l'écoulement est permanent et uniforme la hauteur d'eau est h_n (par définition). On peut donc calculer le nombre de Froude pour cette hauteur d'eau:

$$\mathrm{Fr} = \frac{u}{\sqrt{gh_n}} = \frac{Q}{\ell h_n^{3/2}\sqrt{g}} = 0{,}41$$

L'écoulement est en régime subcritique.

8. La charge spécifique est défini comme :

$$H_s = h + \frac{u^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2\ell^2 h^2 g} \tag{12}$$

On fait l'hypothèse que le seuil soit suffisamment épais pour que l'écoulement soit à la hauteur critique au niveau du seuil (voir les notes de cours page 129). La charge spécifique vaut donc $H_s = 0{,}47$ m.

9. On suppose qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie (question 8), on peut donc dire que la charge totale se conserve. La charge totale étant défini comme :

$$H = H_s + p = 1{,}47 \text{ m}$$

avec p la hauteur du seuil. On peut exprimer la charge totale en amont comme une fonction de la hauteur en amont h_a :

$$H = \frac{Q^2}{2\ell^2 h_a^2 g} + h_a$$
$$\Rightarrow f(h) = h_a^3 - H h_a^2 + \frac{Q^2}{2\ell^2 g}$$

Afin de résoudre cette équation polynomiale du troisième ordre, on va utiliser la méthode de Newton (comme dans l'exercice 2, question 2). Comme indiqué dans le cours, si la vitesse est très faible en amont du seuil on peut estimer que $H \approx h_a$. On va donc utiliser $h_0 = H = 1{,}47$ m comme valeur initiale dans le calcul de la méthode de Newton. Elle converge vers la valeur $h_a = 1{,}46$ m en 5 itérations.

10.

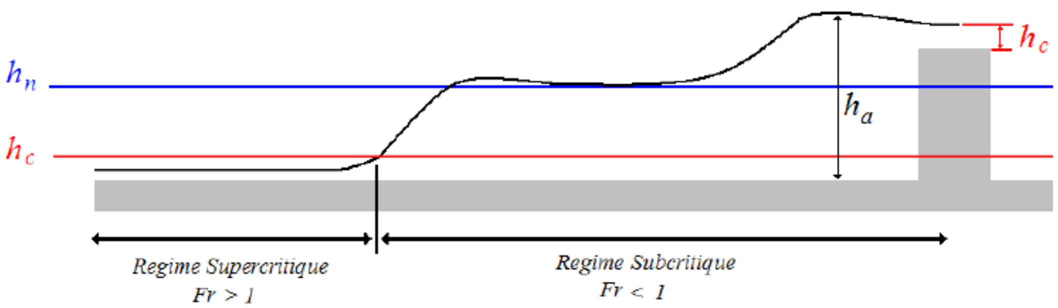


FIG. 7 – *Courbe de remous du canal*