TD10

Correction

Exercice 1

1. L'écoulement étant unidirectionnel, $u_y = 0$ et $u_z = 0$, il reste uniquement la composante $u_x(x,\ y,\ z,\ t)$. La condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ se réduit à $\partial u_x / \partial x = 0$. Les dérivées temporelles sont nulles aussi (écoulement permanent), de plus la conduite étant supposée infiniment large ($\ell \gg 2b$), u_x ne dépend pas de z. Par hypothèse, $g = 0$. Les équations de Navier-Stokes se réduisent à (en notant $u_x = u$) :

$$0 \quad = \quad -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dans la direction x et

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

dans la direction y. On en déduit donc que p ne dépend pas de y. En intégrant 2 fois selon y la conservation de la quantité de mouvement selon x on obtient

$$u \quad = \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

où C_1 y et C_2 sont des constantes d'intégration qui sont déterminées avec les conditions au limites $u(y = 0) = 0$ et $u(y = 2b) = 0$. On a donc $C_2 = 0$ et $C_1 = (b/\mu)\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Finalement,

$$u \quad = \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} - by \right).$$

2. On détermine le débit par unité de largeur. On a $\mathrm{d}q = u\mathrm{d}S$ avec $\mathrm{d}S = 1 \cdot \mathrm{d}y$. Ainsi,

$$Q \quad = \quad \int_0^{2b} u(y)\mathrm{d}y = -\frac{2}{3} \frac{b^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

On en déduit la vitesse moyenne U_m :

$$U_m \quad = \quad \frac{Q}{S} = -\frac{b^2}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

3. On détermine la contrainte de cisaillement.

$$\tau \quad = \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}(y - b).$$

4. On détermine la puissance dissipée ϕ par unité de largeur et unité de longueur. Localement $\mathrm{d}\phi = \tau \dot{\gamma} \mathrm{d}V$ avec $\dot{\gamma} = \partial u / \partial y$ le taux de cisaillement et $\mathrm{d}V = 1 \cdot 1 \cdot \mathrm{d}y$.

$$\phi \quad = \quad \int_0^{2b} \tau \dot{\gamma} dy = \frac{2}{3} \frac{b^3}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2.$$

Exercice 2

1. Débit dans une grosse artère : Le débit total est $Q = 5/6 \times 10^{-4}$ m^3/s, donc dans une artère on a

$$q = \frac{Q}{n} = 2,08 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}.$$

2. Vitesse moyenne :
   La vitesse moyenne est obtenue en divisant le débit dans l'artère par sa section
   $$\bar{u} = \frac{q}{\pi(d/2)^2} = 4,14 \text{ cm/s}$$
3. Le nombre de Reynolds se calcule à partir de la vitesse moyenne et du diamètre :
   $$\text{Re} = \frac{\bar{u}d}{\nu} = \frac{0,041 \times 8 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-6}} = 66$$
   L'écoulement n'est pas pleinement rampant, mais il n'est pas turbulent car Re $\ll 1000$. L'approximation d'écoulement de Stokes reste valable.
4. Pour répondre à cette question, on utilise la même démarche que pour l'exercice précédent. On suppose que l'écoulement est établi (c'est-à-dire permanent et uniforme), donc il n'y a pas de dépendance en z et t. Le système de coordonnée est cylindrique avec l'axe z sur l'axe de l'artère. Le problème étant symétrique par rapport à l'axe de la conduite, la vitesse et la pression ne peuvent pas dépendre de θ. De plus comme l'écoulement est dans la direction z uniquement et que u est seulement dépendant de r on a d'après l'équation d'incompressibilité $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ se réduit à $(1/r)\left(\partial(ru_r)/\partial r\right) = 0$, compte tenu de la condition aux limite sur la paroi du tube, cela impose que $u_r = 0$ les composantes u_r et u_θ sont nulles. Les équations de Navier-Stokes deviennent :
   $$-\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{1}$$
   $$-\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \tag{2}$$
   $$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = 0. \tag{3}$$
   Les équations 1 et 2 montrent que le champ de pression ne dépend que de z. Comme par ailleurs u_z ne dépend que de r, cela veut dire que dans l'équation 3, chaque terme est nécessairement une constante. Posons donc $a = \partial p/\partial z$ et intégrons le champ de vitesse
   $$\begin{aligned} -a + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) &= a\frac{r}{\mu} \\ r\frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{a}{2}\frac{r^2}{\mu} + b \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{a}{2}\frac{r}{\mu} + \frac{b}{r}, \\ u_z &= \frac{a}{4}\frac{r^2}{\mu} + b\ln r + c, \end{aligned}$$
   avec b et c une constante. Comme le profil de vitesse ne peut pas diverger en $r = 0$, on a $b = 0$ (de sorte que le terme $\ln r$ disparait), la condition de non-glissement aux parois implique que pour $r = R$ (avec $R = d/2$), on a $u_z(R) = 0$, soit encore $c = -aR^2/(4\mu)$. Le profil de vitesse est donc
   $$u_z = \frac{a}{4}\frac{r^2 - R^2}{\mu} = \frac{a}{4\mu}(r^2 - R^2).$$
5. Le débit correspond au flux de vitesse
   $$\begin{aligned} q &= \int_0^R u_z(r)2\pi r \mathrm{d}r = \frac{a\pi}{2\mu}\int_0^R (r^3 - R^2 r)\mathrm{d}r = \frac{a\pi}{2\mu}\left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}r^2R^2\right]_0^R \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\pi R^4}{8\mu}. \end{aligned}$$
6. Exprimons le gradient de pression en fonction du débit (la formule de Poiseuille que l'on vient de montrer)
   $$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p}{L} = -\frac{128\mu}{\pi d^4}q,$$

soit sur la longueur d'une artère on a donc $\Delta p_* = -13$ Pa soit un gradient de $\partial p/\partial z = -103$ Pa/m. L'aorte est l'artère qui relie le coeur à l'ensemble du système sanguin. Donc la pression à l'entrée de l'aorte est la pression du coeur ($p = 13$ kPa). La chute de pression relative entre l'entrée et la sortie de l'aorte vaut donc $((p - \Delta p_*) - p)/p = \Delta p_*/p = -0,001$. La chute de pression dans l'aorte est faible. En revanche, compte tenu de la dépendance en d^{-4} de la pression, la chute de pression sera beaucoup plus importante pour les petits vaisseaux ou lors de sténoses.

Exercice 3

L'écoulement est supposé établi dans la conduite et on se retrouve dans les conditions de l'exercice 2. On pourrait être tenté d'utiliser la formule de Torricelli qui découle de l'équation d'Euler pour cet exercice comme on a vu dans des exercices précédents mais cela n'est pas valable car l'écoulement est visqueux, donc dans ce cas la les équations d'Euler ne sont pas valables. Il faut donc utiliser les équations de Navier-Stokes.

1. Le gradient de pression $\partial p/\partial z$ de l'exercice précédent vaut dans ces conditions d'expérience $\varrho g H/L$. Ainsi on calcule $Q = 0,01$ ml/s.
2. $\bar{u} = 0,0032$ m/s, La vitesse maximal est $u_{max} = u_z(0) = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{R^2}{4\mu} = 0,064$ m/s.
3. La force de frottement sur les parois du tube circulaire peut être calculée en intégrant la contrainte sur les parois

$$F = \int\int_{paroi} \mu \frac{\partial u_z(R)}{\partial r} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = \int_0^L \mathrm{d}x \int_0^{2\pi} \mu \frac{\partial u_z(R)}{\partial r} R \mathrm{d}\theta = 4\pi L \mu u_{max}$$

$$F = 4 \text{ mN}$$

Exercice 4

Figure 1 – Bilan des forces sur la sphère

1. La force exercée par le fluide sur la particule est $\boldsymbol{F_d} = 3\pi\mu d\boldsymbol{u_p} = 3\pi\nu\varrho_f d\boldsymbol{u_p}$. Les autres forces qui s'appliquent sont la poussée d'Archimède $\boldsymbol{\Pi_a} = \pi(d^3/6)\varrho_f g\boldsymbol{e_z}$ et le Poids $\mathbf{F_g} = -\pi(d^3/6)\varrho_p g\boldsymbol{e_z}$
2. Au bout de très peu de temps on atteint une vitesse constante et d'après le principe fondamentale de la dynamique la somme des forces est nulle.

$$\mathbf{F_g} + \boldsymbol{\Pi_a} + \boldsymbol{F_d} = 0$$

. On déduit alors la vitesse de sédimentation :

$$\boldsymbol{u_p} = -\frac{\varrho_p - \varrho_f}{\varrho_f}\frac{gd^2}{18\nu}\boldsymbol{e_z}$$

Application numérique : $||\boldsymbol{u_p}|| = 90\ \mu$m/s.

3. Re $= 9 \cdot 10^{-4}$, on est bien en régime laminaire.
4. Le temps de sédimentation est de l'ordre de 46 h. La décantation est généralement un processus lent et on fait appelle à des techniques tel que la décantation lamellaire pour accélérer le processus en station d'épuration.

5. La vitesse de sédimentation devrait être de 10^8 m/s, légèrement plus faible que la vitesse de la lumière dans le vide ! Il faut évidement en conclure que la viscosité n'est pas le mécanisme dominant de frottement.
6. En condition normal de chute $\text{Re} = 1,2 \cdot 10^6$, Il s'agit d'un écoulement turbulent, il faut prendre en compte une force de trainé de type $F_d = C_d \varrho_f d^2 u^2$ comme on l'a vu pour la torpille par exemple.

Exercice 5

1. Par symétrie de rotation, il n'y a pas de variation de vitesse en fonction de θ. La vitesse et les dérivées suivant z sont nulles aussi. Ainsi on suppose un champ de vitesse de la forme :

$$\boldsymbol{u} = u_\theta(r)\boldsymbol{e_\theta}.$$

On le vérifie en utilisant l'équation de continuité qui devient $(1/r)\partial(ru_r)/\partial r = 0$. Comme $u_r(r = R_1) = 0$ et $u_r(r = R_2) = 0$, on a bien $u_r = 0$).

2. Les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations suivantes (en négligeant la gravité et en utilisant l'égalité donnée à la question 3) :

$$-\varrho\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{4}$$

$$0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r^2}\right), \tag{5}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{6}$$

3. L'égalité est facilement vérifiable en développant chacun des termes.
4. De (6) on a : $p = p(r,\ \theta)$. Avec la condition de raccordement $p(r,\ \theta = 0) = p(r,\ \theta = 2\pi)$, on déduit que $p = p(r)$. (5) devient donc :

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_\theta}{\partial r}\right).$$

Ainsi par intégrations successives, (5) devient une équation de la forme $u_\theta = Ar^{-1} + Br$, A et B étant des constantes d'intégrations. Pour déterminer ces dernières, on utilise les conditions aux limites (adhérence aux parois). $u_\theta(R_2) = 0$ et $u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1$.
On trouve finalement :

$$u_\theta = \Omega_1 r R^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_2^2}\right),$$

avec $R^2 = R_1^2 R_2^2/(R_2^2 - R_1^2)$.

5. Moment $\boldsymbol{Mo}$ exercé par le fluide sur le cylindre.
Les forces de frottements sont uniquement dues aux contraintes visqueuses sur la paroi, ici $-\tau_{r\theta} = \mu\left(\partial u_\theta/\partial r - u_\theta/r\right)$. On calcul le moment sur le cylindre intérieur de surface S_1 :

$$\boldsymbol{Mo} = -\iint_{S1} R_1 \tau_{r\theta}(r = R_1)\boldsymbol{e_z}\mathrm{d}S,$$

avec $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$. L'intégrale donne : $\boldsymbol{Mo} = -4\pi h\mu\Omega_1 R^2\boldsymbol{e_z}$.

Application numérique : on trouve $\mu = 1,34$ Pa s avec $C = Mo = 2,42 \cdot 10^{-3}$ Nm.