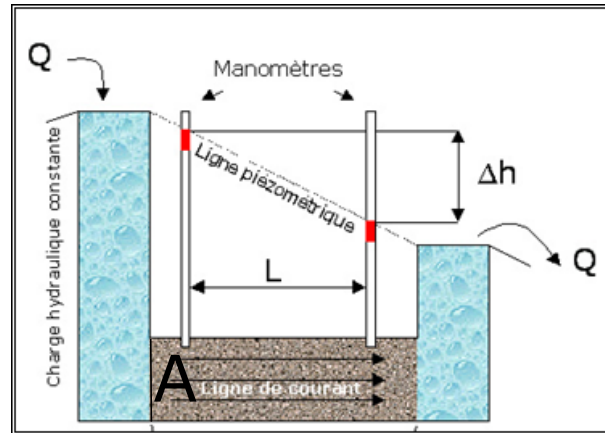


# Navier-Stokes : écoulements souterrains et lubrification

## Exercice 1 : écoulements dans les milieux poreux saturés, loi de Darcy



En 1856, l'ingénieur Henry Darcy s'intéressait à l'écoulement de l'eau à travers les sables pour les fontaines public de la ville de Dijon. Pour modéliser l'écoulement dans un milieu poreux (comme par exemple le sable d'un aquifère), il formulait la loi empirique suivante :

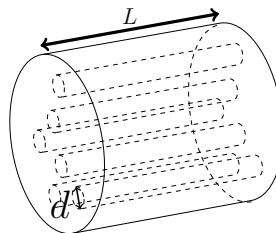
$$Q = KA \frac{\Delta H}{L},$$

où  $Q$  est le débit de fluide passant par un milieu poreux de section  $A$  et de longueur  $L$ .  $K$  est la conductivité hydraulique du milieu poreux exprimé en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .  $\Delta H$  est la différence de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval. Quelque 150 ans plus tard cette loi joue toujours un rôle majeur pour la modélisation d'écoulement souterrains.

1. On suppose le passage de l'eau dans un aquifère de sable fin de perméabilité  $K = 10^{-4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $\Delta H = 1 \text{ m}$ ,  $A = 2 \text{ m}^2$  et  $L = 10 \text{ m}$ . Donner le débit  $Q$  au sortir de la nappe.
2. On souhaite maintenant faire le lien entre la loi de Darcy et la mécanique des fluides dans le milieu poreux.

Sachant que la porosité d'un sable fin est de l'ordre de  $\Phi = 30 \%$ , déduire la vitesse moyenne dans le milieu poreux. Déterminer alors le nombre de Reynolds (on prendra comme taille caractéristique d'un pore la diamètre d'un grain  $D = 0,1 \text{ mm}$ ). Dans quel régime est-on ? (On rappelle la viscosité cinématique de l'eau à  $20^\circ\text{C}$  :  $\nu_{\text{eau}} = 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ).

On peut modéliser un milieu poreux comme un ensemble de capillaires rectilignes parallèles de diamètre individuel  $d$ , chacun se comportant comme un écoulement de Poiseuille.



La loi de Poiseuille dans un cylindre a été démontrée et lorsqu'on applique une différence de pression  $\Delta P$  dans un tube de longueur  $L$  et de diamètre  $d$  pour un fluide de viscosité  $\mu$ , on obtient le débit volumique :

$$Q_{\text{Poiseuille}} = \frac{\pi}{128\nu\varrho} \frac{\Delta P}{L} d^4.$$

3. Sachant que l'on a une densité de  $n$  pores par mètre carré, exprimer le débit total pour la surface  $A$ .

4. Exprimer le lien entre la porosité  $\Phi$ , la densité de pores  $n$  et le diamètre d'un pore  $d$ .
5. Exprimer  $\Delta P$  en fonction de  $\Delta H$ .
6. Comparer la formule obtenue avec la loi de Darcy et donner une évaluation du diamètre des capillaires connaissant  $\Phi$ ,  $K$ ,  $\rho_{\text{eau}}$ . Commenter.
7. À l'aide des équations de Navier-Stokes, (re)démontrer que

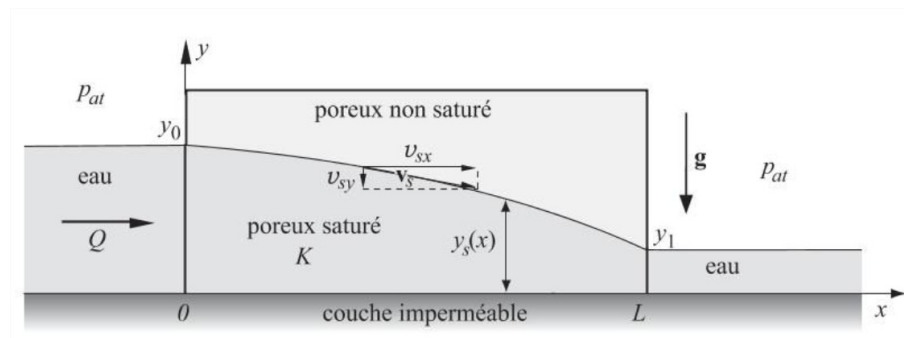
$$v(r) = \frac{\Delta P}{8L\rho\nu}(R^2 - r^2),$$

où  $v(r)$  est la vitesse dans un tube de diamètre  $d$  et  $r$  est la distance par rapport au centre du tube.

### Facultatif

8. On considère l'eau qui se trouve dans l'anneau cylindrique de longueur  $L$ , compris entre  $r$  et  $r + dr$ . Exprimer  $d\mathcal{P}_p$ , la puissance mécanique élémentaire de pression qui s'exercent sur ce système.
9. En déduire la puissance mécanique  $\mathcal{P}_p$  fournie par les forces de pression qui s'exercent sur un tube de longueur  $L$  et de diamètre  $d$ .
10. En déduire la puissance dissipée  $\mathcal{P}_\nu$  dans un tube et la puissance dissipée totale.
11. En supposant que toute l'énergie dissipée est convertie en chaleur et que l'aquifère est isolé, quelle est l'élévation maximale de l'eau entre l'amont et l'aval de l'aquifère ? On donne :  $c = 4,18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  la capacité calorifique de l'eau<sup>1</sup>.

## Exercice 2 : application de la loi de Darcy à l'écoulement dans un talus poreux



La loi de Darcy se généralise à 3 dimensions :

$$\mathbf{v}_s = \frac{Q\mathbf{n}_u}{A} = -\frac{K}{\rho g}\nabla p,$$

où  $\mathbf{n}_u$  est le vecteur unitaire de direction de l'écoulement et  $p$  est la pression.

A titre d'exemple, analysons l'écoulement à travers un talus poreux de perméabilité  $K$ , de longueur  $L$  et de largeur  $B$  qui sépare deux nappes d'eau de niveaux différents  $y_0$  et  $y_1$ . Nous supposons que l'on atteint un régime stationnaire où le niveau de l'eau  $y_s(x)$  à l'intérieur du massif est constant au cours du temps.

1. Si la pente de la surface libre est assez faible à l'intérieur du massif poreux, quelle hypothèse peut-on faire sur la direction de l'écoulement ?
2. Exprimer la pression  $p(y, x)$ .
3. Exprimez  $Q$  en fonction de  $h(x)$ ,  $v(x)$  et  $B$ , puis écrire l'équation différentielle.
4. Résoudre l'équation différentielle, puis donner l'expression du débit à l'intérieur du massif.
5. Donner l'expression de  $y_s(x)$  en fonction de  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $x$  et  $L$ .

1. On rappelle que la capacité calorifique est l'énergie qu'il faut fournir à un corps de 1 kg pour l'élever de 1 K

6. Vous êtes chargé de construire une digue de  $B = 10$  m de long entre deux bassins de rétention de produits pollués distants de  $L = 5$  m et d'une différence de hauteur d'eau de 0,2 m et des profondeurs dans chaque bassin de 1,5 m. Quel matériaux devriez-vous utiliser pour limiter le transfert entre les deux bassin ?

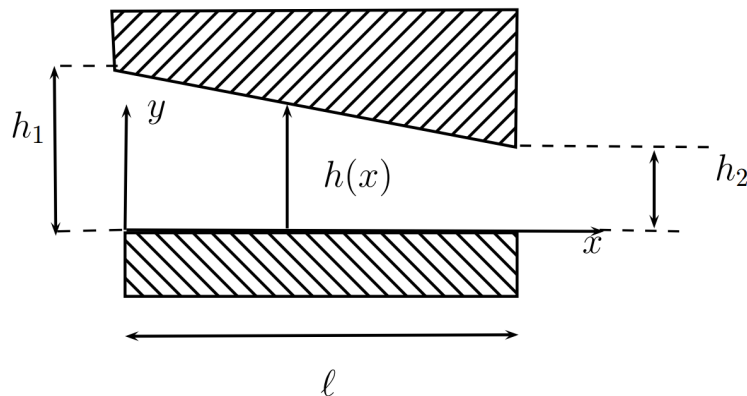
On vous donne la liste des matériaux disponibles :

Matériaux	Conductivité hydraulique $K$
graviers sans éléments fins	$10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
sables non argileux	$10^{-2}$ à $10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
sables fins et argileux	$10^{-4}$ à $10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Argiles franches	$10^{-8}$ à $10^{-13} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

### Exercice 3 : lubrification d'une flaque d'huile

Si on fait glisser une feuille de papier parallèlement à la surface horizontale d'une table lisse, la présence du film d'air entre la table et la feuille favorise le glissement ; au contraire, si la feuille est percée de quelques trous, elle glisse très mal. De même, on glisse très facilement sur flaque d'huile ou d'eau à la sortie de la douche. Pourquoi ?

Considérons la situation où l'on marche sur une flaque d'huile. On va considérer le pied et le sol comme étant deux plans mobiles. Il y a une couche de fluide entre deux plans mobiles espacés par une hauteur variable  $h(x)$ . La variation de hauteur est faible, et la hauteur moyenne  $\bar{h} = (h_1 + h_2)/2$  est petite devant la longueur des plans c'est-à-dire :  $\bar{h} \ll \ell$ . Le plan inférieur (on inverse le problème par simplicité dans la calcul) se déplace à vitesse constante  $u_p = 0,1$  m/s. On considère comme échelles caractéristiques du problème  $\ell = L_* = 0,1$  m,  $H_* = \bar{h} = 0,001$  m. La viscosité dynamique  $\mu$  de l'huile est de l'ordre de 1 Pa·s, sa masse volumique  $\rho$  est de l'ordre de 1100 kg/m<sup>3</sup>. Le rapport d'aspect est défini comme  $\varepsilon = H_*/L_* = 10^{-2} \ll 1$ . On considère l'écoulement comme étant stationnaire et on néglige la gravité



1. Calculer le nombre de Reynolds du problème. Peut on considérer l'écoulement comme laminaire ?
2. À l'aide des échelles caractéristiques du problème, écrire l'équation de continuité sous forme adimensionnelle. Trouver la relation entre  $U_*$  et  $V_*$ .
3. On introduit l'échelle caractéristique de pression  $P_* = \mu U_*/(\varepsilon H_*)$ . Écrire les équations de Navier-Stokes sous forme adimensionnelle.
4. Montrer que les équations de Navier-Stokes se réduisent à

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

5. Calculer le champ de vitesse  $u(x, y)$ .  
*Indication* : penser aux conditions aux limites, notamment que l'une des deux plaques bouge.
6. Exprimer le débit par unité de largeur  $q$  entre les deux plaques métalliques.  
*Indication* : intégrer le champ de vitesse entre 0 (le plan inférieur) et  $h(x)$  (le plan supérieur).

7. Le débit est conservé entre les deux plans métalliques. Montrer que le gradient de pression s'écrit alors

$$\frac{dp}{dx} = \frac{12\mu}{h^3(x)} \left( \frac{u_p h^2(x)}{2} - q \right).$$

8. Exprimer la pression en un point  $x$  en fonction de  $q$ ,  $h(x)$ ,  $\mu$  et  $u_p$  sachant que la pression en  $x = 0$  vaut  $p_1$ .
9. On suppose que la pression en  $x = \ell$  vaut  $p_2 = p_1 = p_0$  (en d'autres termes les deux extrémités de la couche d'huile sont à pression atmosphérique). On considère un variation linéaire de hauteur

$$h(x) = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{\ell} x.$$

Calculer le débit  $q$ .

*Application numérique* :  $h_1 = 1,1$  mm et  $h_2 = 0,9$  mm.

10. On s'intéresse maintenant à la force normale  $F_N$  et la force tangentielle  $F_T$  ressentie par le plan supérieur dû à la présence de la couche d'huile. Calculer ces deux forces et réaliser une approximation dans le cas où l'épaisseur  $h_1$  est très supérieure à l'épaisseur minimale  $h_2$ .
11. Comparer  $F_N$  et  $F_T$ . Qu'en déduisez-vous ?
12. Faire l'application numérique pour une flaque d'huile avec les valeurs numériques ci-dessus.

## Équations de Navier-Stokes

Coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x, \\ \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y, \\ \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z. \end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$

Conservation de la masse :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho g_r, \\ \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \rho g_\theta, \\ \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z. \end{aligned}$$