Analyse dimensionnelle

Exercice 1

Soit F une force, P une pression, a une accélération, E une énergie et x une longueur, quelles sont les dimensions dans le système MLT de a, F, P, $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}^3P/\mathrm{d}x^3$, $\int F\mathrm{d}x$, E ?

Exercice 2

Lors d'un examen, des étudiants ont utilisé les formules suivantes :
- $a = Ut/l$ où U est une vitesse, t un temps, l une longueur ;
- $F = \varrho VU/t$ où F est une force, V un volume, ϱ une masse volumique ;
- $E = mVgz$ où g est la constante de gravité, V un volume, z une hauteur et m une masse.

Identifier celles qui sont fausses à l'aide d'arguments dimensionnels.

Exercice 3

Si p est une pression, V une vitesse et ϱ une masse volumique, quelles sont les dimensions de p/ϱ, $p\varrho V$ et $p/(\varrho V^2)$?

Exercice 4

Retrouver la dimension de la viscosité dynamique μ puis celle de la viscosité cinématique $\nu = \mu/\varrho$, où ϱ est la masse volumique du fluide. Soit V une vitesse et l une longueur, identifier les combinaisons adimensionnelles parmi les suivantes : $\nu l V$, lV/ν, νV^2 et $V/(\nu l)$.

Exercice 5

Déterminer les dimensions des coefficients A et B de l'équation homogène suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Bx = 0 \tag{1}$$

où x est une longueur et t un temps.

Exercice 6

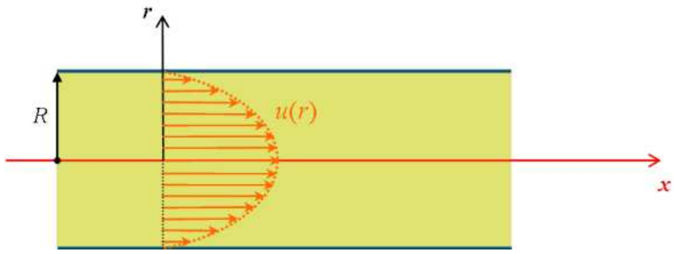

FIGURE 1 – Profil de vitesse d'un écoulement de Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille est un écoulement laminaire d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique rectiligne. Le débit total à travers une telle conduite s'exprime comme

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu l} \tag{2}$$

où R est le rayon de la conduite, Δp la chute de pression le long de la conduite, μ la viscosité dynamique du fluide et l la longueur de la conduite. Déterminer la dimension de la constante $\pi/8$. Peut-on qualifier cette équation d'homogène ? Expliquer.

Exercice 7

La différence de pression Δp à travers une obturation partielle (appelée sténose) d'une artère peut être estimée par l'équation

$$\Delta p = K_v \frac{\mu V}{D} + K_u \left(\frac{A_0}{A_1} - 1 \right)^2 \varrho V^2 \tag{3}$$

où V est la vitesse du sang, μ la viscosité du sang, ϱ la masse volumique du sang, D le diamètre de l'artère, A_0 la section de l'artère avant l'obturation et A_1 la section de la sténose. Déterminer les dimensions des constantes K_v et K_u. Cette équation est-elle valide dans n'importe quel système d'unités ?

Exercice 8

Le coefficient de Strickler, K, est largement utilisé pour modéliser des canaux. Pour des surfaces rugueuses ce coefficient peut être calculé par la relation empirique de Meyer-Peter & Müller :

$$k = \frac{26}{d_s^{1/6}} \tag{4}$$

où d_s est la longueur caractéristique de la rugosité de fond. En considérant que le coefficient de Strickler s'exprime en $\mathrm{m}^{1/3}\mathrm{s}^{-1}$, l'équation (4) est-elle valable dans n'importe quel système d'unité ? Donner l'unité de la constante de l'équation et expliquer.

Exercice 9

Une formule pour estimer le débit Q au-dessus du trop-plein d'un barrage est :

$$Q = C\sqrt{2g}B(H + V^2/2g)^{3/2} \tag{5}$$

où C est une constante, g l'accélération de la gravité, B la largeur du trop-plein, H la profondeur de l'eau au-dessus du trop-plein, et V la vitesse de l'eau juste à l'amont du barrage. Cette équation est-elle valide dans n'importe quel système d'unités ? Expliquer.

Exercice 10

Utiliser le tableau 1 pour exprimer les quantités suivantes en unités SI : 10,2 in/min ; 4,81 slugs ; 3,02 lb ; 73,1 $\mathrm{ft/s^2}$; 0,0234 $\mathrm{lb \cdot s/ft^2}$.

TABLE 1 – tableau de conversion

Unités anglaises	Conversion SI
in (pouce)	$2{,}540 \cdot 10^{-2}$ m
slug (unité de masse)	$1{,}459 \cdot 10^{1}$ kg
lb (livre-force)	4,448 N
ft (pied)	$3{,}048 \cdot 10^{-1}$ m

Exercice 11

Le but de cet exercice est de calculer une vitesse de sédimentation. On se place dans de l'air de masse volumique ϱ_f et nous considérons la chute d'une sphère de rayon $R = 5$ cm et de masse volumique ϱ_s. Faire un bilan des forces qui s'exercent sur la sphère et calculer sa vitesse limite. La force de traînée est donnée par l'équation suivante :

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \varrho_f S v^2 \tag{6}$$

où C_D est le coefficient de traînée qui peut être estimé par l'abaque de la figure suivante (C_D en fonction du nombre de Reynolds), S la surface projetée de la sphère (πR^2), et v sa vitesse. On supposera le nombre de Reynolds très grand. Une fois la vitesse limite calculée, vérifier cette dernière hypothèse. Nous utiliserons les données suivantes : $\varrho_f = 1,2$ kg/m^3, $\mu_f = 2 \times 10^{-5}$ Pa · s et $\varrho_s = 1000$ kg/m^3.

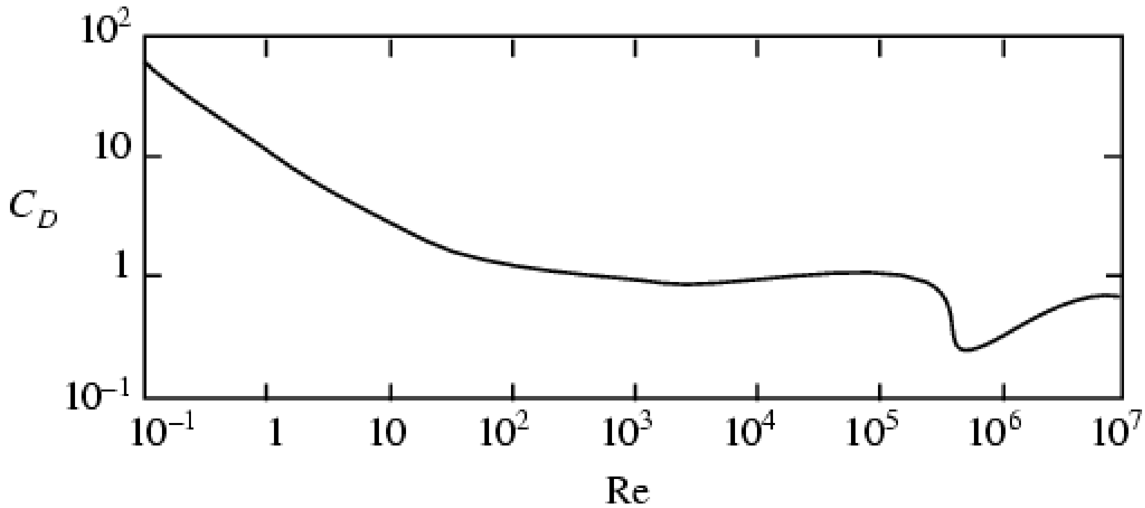

FIGURE 2 – variation de C_D en fonction du nombre de Reynolds.