Correction

Exercice 1

1. On note avec un indice m les grandeurs relatives à la maquette. L'égalité des deux nombres de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\varrho UL}{\mu} = \frac{\varrho U_m L_m}{\mu}$$

$$\frac{U_m}{U} = \frac{L}{L_m} = 10$$

Aussi curieux que cela puisse paraître, l'écoulement en soufflerie doit être 10 fois plus rapide si la maquette est à l'échelle 1/10. Cela pose problème car l'écoulement en soufflerie est alors (presque) supersonique même si l'avion a une vitesse largement subsonique. L'écoulement devient alors compressible et sa nature est radicalement modifiée (présence d'onde de choc).

2. La force de traînée a pour expression $F = \frac{1}{2}\varrho U^2 S C_x$, où S est le maître couple (aire de la section de l'avion en vue de face) et où le coefficient de traînée C_x dépend uniquement du nombre de Reynolds et de la géométrie (forme de l'avion et angle d'incidence par rapport à l'écoulement).

$$\frac{F_m}{F} = \frac{U_m^2 S_m}{U^2 S}.$$

La première question a montré $\frac{U_m}{U} = \frac{L}{L_m}$. Par ailleurs, le maître couple, qui est une aire, est homogène à une longueur au carré. Donc $\frac{S_m}{S} = \frac{L_m^2}{L^2}$. Finalement :

$$\frac{F_m}{F} = 1.$$

La traînée subit par la maquette est identique à celle de l'avion réel.

3. L'égalité des deux nombres de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\varrho UL}{\mu} = \frac{\varrho_m U_m L_m}{\mu_m}$$

$$\frac{U_m}{U} = \frac{\varrho \mu_m L}{\varrho_m \mu L_m} \approx 1$$

L'évaluation a été faite en prenant $\varrho_{air} \approx 1{,}3\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$. Cette fois, la vitesse dans la veine liquide a besoin d'être égale à la vitesse pour l'avion réel. Cela est réalisable. Il est fréquent d'utiliser des tunnels à eau pour l'étude des maquette d'avion.

Exercice 2

1. Étant donné que l'on suppose $R \sim E^a \varrho^b t^c$, on peut écrire l'équation aux dimensions suivante (dans le système d'unités MLT)

$$[L] = [ML^2T^{-2}]^a [ML^{-3}]^b [T]^c,$$
$$L^1 = M^{a+b} L^{2a-3b} T^c,$$

ce qui implique le système d'équation suivant

$$a + b = 0$$
$$2a - 3b = 1$$
$$c - 2a = 0.$$

Ce système comporte trois équations et trois inconnues, il est donc solvable. La résolution donne $a = 1/5$, $b = -1/5$ et $c = 2/5$ ce qui donne la relation suivante pour R

$$R \sim E^{1/5} \varrho^{-1/5} t^{2/5}.$$

Cette relation signifie que R est du même ordre que le produit des autres variables, cependant cette relation n'est pas exacte. Il pourrait y avoir une constante C sans dimensions telle que

$$R = C \times E^{1/5} \varrho^{-1/5} t^{2/5},$$

mais à ce stade de l'analyse et avec les outils dont nous somme dans l'impossibilité de le savoir.

2. On va cette fois utiliser le théorème de Buckingham-Π. Ce problème fait intervenir quatre variable, R, E, ϱ et t pour trois unités fondamentales, M, L et T. On peut donc construire $4 - 3 = 1$ variable adimensionnelle, que l'on notera Π_1. L'équation aux dimensions s'écrit donc comme

$$[\Pi_1] = [R]^a [E]^b [\varrho]^c [t]^d,$$
$$[-] = L^a \, M^b L^{2b} T^{-2b} \, M^c L^{-3c} \, T^d$$

ce qui donne le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} b + c &= 0 \\ a + 2b - 3c &= 0 \\ d - 2b &= 0. \end{aligned}$$

Ce système comporte trois équations et quatre inconnues, on peut donc en déterminer trois avec une variable libre. Étant donné que l'on veut trouver une relation pour R nous allons choisir $a = 1$. On retrouve un système de trois équations à trois inconnues, comme pour la question précédente. On obtient donc $b = -1/5$, $c = 1/5$ et $d = -2/5$ et $\Pi_1 = RE^{-1/5} \varrho^{1/5} t^{-2/5}$. D'après le théorème de Buckingham-Π on peut donc écrire la relation

$$\Phi(\Pi_1) = 0,$$

ce qui veut dire que le nombre adimensionnel Π est constant puisque c'est le seul argument d'un fonction constante. On peut donc écrire

$$RE^{-1/5} \varrho^{1/5} t^{-2/5} = C \Leftrightarrow R = C \times E^{1/5} \varrho^{-1/5} t^{2/5}$$

qui est la relation que nous avions trouvé à la question précédente, avec la précision de la constante C. Dans la question précédente, nous étions arrivé à la conclusion que R était de l'ordre du produit des autres variables. Ici, le théorème de Buckingham-Π nous a permis de prouver que C était bien une constante. L'expérience permettra de déterminer sa valeur.

3. En prenant $t = 0{,}05$ s, $\varrho = 1{,}25$ kg/m^{3}et $R = 180$ m, nous obtenons

$$E = \frac{\varrho R^5}{t^2} = 9{,}45 \cdot 10^{13} \text{ J},$$

ce qui correspond à 22,5 kilotonnes (équivalent TNT). La vraie valeur de l'essaie Trinity était de 18,6 kilotonnes , nous sommes dans le bon ordre de grandeur.

Exercice 3

Dans cet exercice nous considérons l'écoulement à travers une ouverture triangulaire dans un bassin situé au dessous de cette ouverture. Les variables du problème sont le débit Q en $[L^3T^{-1}]$, la hauteur H en $[L]$, la vitesse de l'écoulement V en $[LT^{-1}]$, l'accélération gravitationnelle g en $[LT^{-2}]$ et l'angle ϕ en $[-]$. On voit tout de suite qu'il y a 5 variables pour 2 unités ce qui fait un nombre total de nombres adimensionnels de $5 - 2 = 3$. Le but étant d'exprimer ces deux variables et d'exprimer leur relation générale sous la forme

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0.$$

On va donc d'abord construire ces nombre sans dimensions en partant de la relation

$$\Pi_i = Q^a H^b V^c g^d \phi^e \quad i = 1,2,3.$$

On peut donc écrire l'équation aux dimensions suivante

$$[-] = L^{3a} T^{-a} \, L^b \, L^c T^{-c} \, L^d T^{-2d} [-]^e$$
$$[-] = L^{3a+b+c+d} T^{-a-c-2d}$$

qui donne le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} 3a + b + c + d &= 0 \\ -a - c - 2d &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc deux équations pour quatre inconnues, il faudra donc pour chaque Π_i fixer deux paramètres pour pouvoir résoudre le système. De plus, on a la variable ϕ ainsi que son exposant e qui interviennent sans pour autant affecter le système linéaire. On peut donc choisir $e = 1$ et $\Pi_1 = \phi$. Dans un premier temps, comme nous nous intéressons au débit, il est convenant de le choisir avec un exposant égal à un, soit $a = 1$. On peut maintenant se débarrasser d'une des variables, c'est-à-dire choisir son exposant comme étant égal à 0. En général il est avantageux d'éliminer une variable contenant le plus de dimensions possibles, donc U et g sont des candidats potentiels. Cependant les variables restantes doivent contenir toutes les dimensions du problème (dans notre cas L et T), car on veut pouvoir exprimer des nombres sans dimensions avec elles. Si elles ne contiennent pas cette dimension, cela devient impossible. Nous choisissons donc $c = 0$ (on s'affranchit de la vitesse de l'écoulement). Cela nous donne $b = -1/2$ et $d = -5/2$ et le nombre adimensionnel

$$\Pi_2 = \frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}}.$$

Nous procédons de manière similaire pour le troisième nombre adimensionnel. Cette fois ci nous voudrions avoir une information sur la vitesse de l'écoulement, donc nous choisissons $c = 1$. Même principe, nous nous débarrassons d'une variable contenant le plus de dimensions possible (g et Q sont donc des candidats potentiels) tout en gardant un jeu de variables contenant toutes les dimensions. Nous nous affranchissons donc de Q, ce qui implique que $a = 0$. La résolution du système linéaire induit donc $b = -1/2$ et $d = -1/2$, ce qui correspond au nombre sans dimensions

$$\Pi_3 = \frac{U}{\sqrt{gH}} = \mathrm{Fr}.$$

Exercice 4

Dans cet exercice nous considérons un modèle réduit de digue faite de blocs de béton de masse 1 kg. Elle est construite à l'échelle 1/20 par rapport à la réalité. Cette digue est censée protéger contre la houle jusqu'à une hauteur de 30 cm dans le modèle réduit, hauteur à partir de laquelle les blocs de béton sont arrachés. On connait l'expression de la condition de soulèvement des blocs de béton, $F_p/F_a = \varepsilon$, on on veut appliquer cette condition à la digue réelle. Notons avec u indice m les variable du modèle réduit et avec un indice r les variables correspondant à la réalité. Nous avons donc les conditions d'arrachement qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{F_{p,m}}{F_{a,m}} &= \frac{F_{p,r}}{F_{a,r}} = \varepsilon, \\ \Rightarrow \frac{m_m g}{U_m^2 L_m^2} &= \frac{m_r g}{U_r^2 L_r^2}, \\ m_r &= m_m \frac{L_r^2}{L_m^2} \frac{U_r^2}{U_m^2}. \end{aligned}$$

Étant donné que l'échelle géométrique est $e = 1/20$, nous avons que $L_r^2/L_m^2 = 1/e^2$. Égalisons maintenant les nombres de Froude, cela donne

$$\mathrm{Fr}_m = \mathrm{Fr}_r \Rightarrow \frac{U_m}{\sqrt{gH_m}} = \frac{U_r}{\sqrt{gH_r}} \Rightarrow \frac{U_m}{U_r} = \sqrt{\frac{H_m}{H_r}}.$$

Or comme le rapport H_r/H_m doit respecter l'échelle géométrique (similitude géométrique), nous avons donc que $U_r^2/U_m^2 = 1/e$ et donc finalement

$$m_r = m_m \frac{L_r^2}{L_m^2} \frac{U_r^2}{U_m^2} = \frac{m_m}{e^3} = m_m \times 8000 = 8000 \text{ kg}$$

Exercice 5

Dans cet exercice nous nous intéressons à la chute de pression (où gradient de pression) $\mathrm{d}P/\mathrm{d}x$ le long d'une conduite circulaire. Le but étant de déterminer le nombre d'expériences nécessaires pour déterminer cette chute de pression.

1. Les différentes variables qui contrôlent cet écoulement sont la masse volumique ϱ de l'eau exprimée en $[ML^{-3}]$, la viscosité dynamique μ de l'eau exprimée en $[ML^{-1}T^{-1}]$, le rayon R de la conduite exprimé en $[L]$, la vitesse V de l'écoulement exprimé en $[LT^{-1}]$ et la chute de pression par unité de longueur $\mathrm{d}P/\mathrm{d}x$ de l'eau exprimée en $[ML^{-2}T^{-2}]$ dans un système d'unités MLT. On pourrait imaginer de faire une expérience où l'on fait varier le débit à travers une conduite (ce qui équivaut à faire varier la vitesse) et où l'on mesure la chute de pression correspondant à cette variation de vitesse.
2. Étant donné que l'on a cinq variables pour trois dimensions, il y a donc $5-3=2$ nombres adimensionnels qui caractérisent cet écoulement. Ils s'écrivent donc de la forme

$$\Pi_i = \varrho^a \mu^b R^c V^d (\mathrm{d}P/\mathrm{d}x)^e \quad i = 1{,}2.$$

   On peut donc écrire l'équation aux dimensions suivante

$$\begin{aligned}[-] &= [ML^{-3}]^a [ML^{-1}T^{-1}]^b [L]^c [LT^{-1}]^d [ML^{-2}T^{-2}]^e,\\ [-] &= M^{a+b+e} L^{-3a-b+c+d-2e} T^{-b-d-2e}.\end{aligned}$$

   De cette équation aux dimensions on tire les système d'équations linéaires suivant

$$\begin{aligned} a+b+e &= 0\\ -3a-b+c+d-2e &= 0\\ -b-d-2e &= 0.\end{aligned}$$

   Il y a cinq variables pour trois équations, on peut donc choisir librement deux paramètres parmi les cinq (a, b, c, d ou e). Néanmoins comme on cherche avant toute chose le gradient de pression en fonction des autres paramêtre posons $e=1$ et $b=0$ (ce dernier choix est arbitraire on décide de ne pas avir la viscosité dans ce nombre adimensionnel).
   La résolution du système d'équations donne donc $a=-1$, $c=1$ et $d=-2$. Le nombre adimensionnel correspondant est

$$\Pi_1 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\frac{R}{\varrho V^2}.$$

   Dans un deuxième temps on fixe $b=1$ et $e=0$. La résolution du système d'équations donne donc $a=-1$, $c=-1$ et $d=-1$. Le nombre adimensionnel correspondant est

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\varrho V R} = \frac{1}{\mathrm{Re}}.$$

   On peut sans perte de généralité décider que $\Pi_2 = \mathrm{Re}$ et non $\Pi_2 = 1/\mathrm{Re}$.
   Le théorème de Buckingham-Π affirme que la loi recherchée est sou la forme

$$\Phi(\mathrm{Re},\Pi_1) = 0,$$

   ce qui veut que par le théorème des fonctions implicites on peut écrire

$$\Pi_2 = f(\mathrm{Re}).$$

   On peut donc maintenant envisager une seule expérience où l'on ferait varier le nombre de Reynolds et ou l'on mesurerai la chute de pression par unité de longueur correspondante.
3. La combinaison du théorème de Buckingham-Π et du théorème des fonctions implicites nous a permis d'affirmer que $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}x)R/(\varrho V^2) = f(\mathrm{Re})$. Or c'est exactement la signification du diagramme de Moody, si l'on remarque que le coefficient de frottement de Darcy-Weissbach f est équivalent à Π_2 à un facteur 2 près. Ce diagramme est présenté sur la figure 1.
   L'analyse du diagramme de Moody permet de mettre en évidence une variable cachée, à savoir la rugosité (axe vertical sur la droite du diagramme). On peut voir que pour une conduite donnée (ayant sa propre

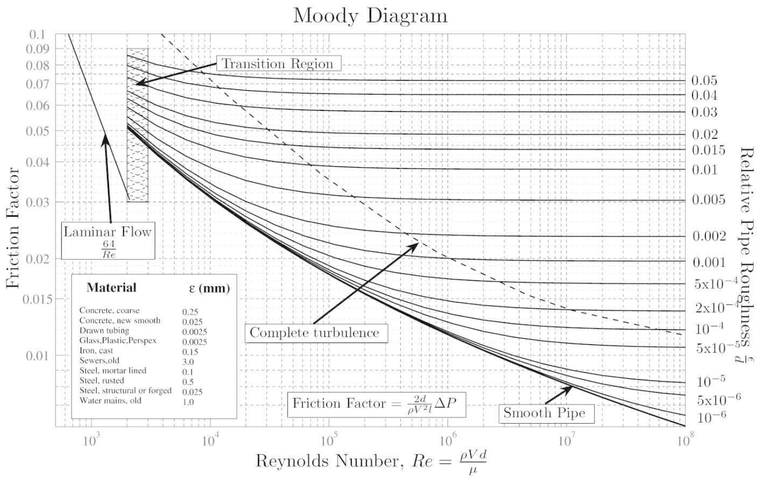

FIG. 1 – *Diagramme de Moody* - $\Delta p = \mathrm{d}P/\mathrm{d}x$

rugosité) et pour un nombre de Reynolds suffisamment élevé, le coefficient f est constant (la chute de pression est constante). Donc si l'on se donne pour objectif de déterminer f pour une conduite de rugosité $\varepsilon/D = 0{,}03$ à un nombre de Reynolds $\mathrm{Re} > 10^5$, on peut voir sur le diagramme que pour cette rugosité f devient constant à partir de $\mathrm{Re} \approx 1{,}110^4$. Il ne nous faudra donc qu'une seule expérience pour déterminer f, soit notre chute de pression.

Exercice 6

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de variables adimensionnelles qui caractérisent ce problème afin de pouvoir l'étudier expérimentalement. Les variables du problème sont la masse volumique ϱ du fluide exprimée en $[ML^{-3}]$, la viscosité dynamique μ du fluide exprimée en $[ML^{-1}T^{-1}]$, la largeur w de la plaque exprimé en $[L]$, la hauteur h de la plaque exprimé en $[L]$, la vitesse v de l'écoulement exprimé en $[LT^{-1}]$ et la force de traînée F_D exprimée en $[MLT^{-2}]$, le tout exprimé dans un système d'unités MLT. Étant donné que l'on a six variables pour trois dimensions, il y a donc $6 - 3 = 3$ nombres adimensionnels qui caractérisent cet écoulement. Ils s'écrivent donc de la forme

$$\Pi_i = \varrho^a \mu^b v^c h^d w^e F_D^f \quad i = 1{,}2{,}3.$$

On peut donc écrire l'équation aux dimensions suivante

$$\begin{aligned}[-] &= [ML^{-3}]^a [ML^{-1}T^{-1}]^b [LT^{-1}]^c [L]^d [L]^e [MLT^{-2}]^f, \\ [-] &= M^{a+b+f} L^{-3a-b+c+d+e+f} T^{-b-e-2f}.\end{aligned}$$

De cette équation aux dimensions on tire les système d'équations linéaires suivant

$$\begin{aligned} a + b + f &= 0 \\ -3a - b + c + d + e + f &= 0 \\ -b - c - 2f &= 0. \end{aligned}$$

Il y a six variables pour trois équations, on peut donc choisir librement trois paramètres parmi les cinq (a, b, c, d, e et f). On choisi b et f car ils correspondent aux variables qui contiennent le plus de dimensions. On choisi aussi d pour s'affranchir de l'une des deux dimensions de la plaque. Dans un premier temps on fixe $b = 0$, $d = 0$ et $f = 1$. La résolution du système d'équations donne donc $a = -1$, $c = -2$ et $e = -2$. Le nombre adimensionnel correspondant est

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\varrho w^2 v^2}.$$

Dans un deuxième temps on fixe $b = 0$, $d = 1$ et $f = 0$. La résolution du système d'équations donne donc $a = 0$, $c = 0$ et $e = -1$. Le nombre adimensionnel correspondant est

$$\Pi_2 = \frac{h}{w}.$$

Finalement on fixe $b = 0$, $d = 1$ et $f = 0$. La résolution du système d'équations donne donc $a = -1$, $c = -1$ et $e = -1$. Le nombre adimensionnel correspondant est

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\varrho v w} = \frac{1}{\mathrm{Re}}.$$

On peut réécrire $\Pi_1 = \mathrm{Re}$ au lieu de $\Pi_1 = 1/\mathrm{Re}$ sans perte de généralité.

Exercice 7

1. D'après les livres de cuisine, il faut 50 minutes pour cuire 1 kg de dinde, ce qui pour une dinde de 6 à 7 kg nous donne un temps de cuisson d'à peu près 300 minutes, soit 5 h. Ce temps semble relativement long. On voit bien qu'il semble judicieux d'affiner cette approximation.
2. L'équation de la chaleur s'écrit comme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

ce qui nous permet de définir les unités du coefficient de diffusion thermique comme $[\chi] = [L^2 T^{-1}]$. Les variables importantes du problème sont la température de la dinde T exprimée en K, la température du four T_f exprimée en K, la taille ℓ de la dinde exprimée en L, le temps de cuisson t_c de la dinde exprimé en T et la masse m de la dinde exprimé en M. Le tout est exprimé dans un système d'unités $KMLT$ ou K est la température. Étant donné que l'on a six variables pour quatre dimensions, il y a donc $6 - 4 = 2$ nombres adimensionnels qui caractérisent cet écoulement. Ils s'écrivent donc de la forme

$$\Pi_i = T^a T_f^b \chi^c \ell^d t_c^e m^f \quad i = 1{,}2.$$

On peut donc écrire l'équation aux dimensions suivante

$$\begin{aligned} [-] &= [K]^a [K]^b [L^2 T^{-1}]^c [L]^d [T]^e [M]^f, \\ [-] &= M^f L^{2c+d} T^{e-c} K^{a+b}. \end{aligned}$$

De cette équation aux dimensions on tire les système d'équations linéaires suivant

$$\begin{aligned} f &= 0 \\ 2c + d &= 0 \\ e - c &= 0 \\ a + b &= 0. \end{aligned}$$

Il y a six variables pour trois équations, on peut donc choisir librement trois paramètres parmi les cinq (a, b, c, d, e et f). Cependant on voit tout de suite que $f = 0$ quelque soit le choix des paramètres. On a donc finalement plus que deux choix libres. On choisi a et c car le premier paramètre correspond à la température, soit la variable physique qui nous intéresse réellement, et le deuxième paramètre correspond à la variable qui contient le plus de dimensions. Dans un premier temps on fixe $c = 0$ et $a = 1$. La résolution du système d'équations donne donc $b = -1$ et $f = c = d = e = 0$. Le nombre adimensionnel correspondant est

$$\Pi_1 = \frac{T}{T_f}.$$

Dans un deuxième temps on fixe $c = 1$ et $a = 0$. La résolution du système d'équations donne donc $e = -1$, $d = -2$ et $f = b = e = 0$. Le nombre adimensionnel correspondant est

$$\Pi_2 = \frac{\chi}{\ell^2 t_c}.$$

3. On suppose que les propriétés physique de la dinde ne changent pas avec la température, ce qui veut dire que χ et ϱ sont constant malgré le changement de température. On va utiliser le nombre Π_2 pour estimer la relation entre les temps de cuisson pour deux dindes de tailles différentes (soit de masse différentes).

$$\left(\frac{\chi t_c}{\ell^2}\right)_1 = \left(\frac{\chi t_c}{\ell^2}\right)_2,$$
$$\Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = \left(\frac{t_{c1}}{t_{c2}}\right)^0.5.$$

Maintenant on peut exprimer le rapport des longueur des dindes par un rapport des masses des dindes, en supposant que $m = \varrho\ell^3$. On a donc que $m_1 = \varrho\ell_1^3$ et $m_2 = \varrho\ell_2^3$, ce qui nous permet d'écrire la relation entre les masses et les longueurs

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/3}.$$

En remplaçant cette expression dans l'expression des temps nous obtenons donc

$$\frac{t_{c2}}{t_{c1}} = (\frac{m_2}{m_1})^{2/3}.$$

4. En utilisant le temps de cuisson fourni à la question 1, on peut estimer le temps de cuisson pour une dinde de 3 à 4 kg. Ce temps sera notre temps $t_{c1} = 150$ min. On peut donc maintenant estimer le temps de cuisson d'une dinde de 6 à 7 kg sachant le rapport des masses. On a donc

$$t_{c2} = t_{c1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3} = 150\left(\frac{6}{3}\right)^{2/3} = 238 \text{ min}.$$

Le temps de cuisson est donc bien inférieur à notre première approximation. Bon appétit !