# Correction

## Exercice 1

*Le jet d'eau de Genève de diamètre initial 107 mm s'élève verticalement à une hauteur de 156 m. En négligeant les pertes par frottement, déterminer la vitesse à la base du jet et le débit injecté.*

*Réponse*

À $z = h_{max}$, $v_z = 0$. À $z = 0$, $v_z = \frac{Q}{S}$. Le théorème de Bernoulli donne :

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\varrho} = \text{constante}$$

Donc

$$\frac{1}{2}v_{haut}^2 + gz_{haut} + \frac{p_{haut}}{\varrho_{haut}} = \frac{1}{2}v_{bas}^2 + gz_{bas} + \frac{p_{bas}}{\varrho_{bas}}$$

Nous supposons que $p_{haut} = p_{bas} = p_{atm}$ et le fluide est incompressible, aussi on sait que la vitesse en haut est nulle.

$$\frac{1}{2}v_{bas}^2 = g \times z_{haut}$$

Puis

$$v_{bas} = \sqrt{2 \times 156 \times 9.81} = 55{,}3 \text{ m s}^{-1}$$

Et pour le débit :

$$Q = v_{bas}S = 55{,}3 \times \left(\frac{0{,}107}{2}\right)^2 \pi = 0{,}4975 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ou également 497,5 l/s.

## Exercice 2

*Une pompe installée sur une conduite aspire de l'eau à la base d'un réservoir (hauteur d'eau $h = 2$ m) pour la refouler dans un bassin à l'air libre dont la surface libre est située à une hauteur de $h_{tot} = 10$ m par rapport au fond du reservoir. Le débit de la pompe est de 50 l/s. Calculer la puissance de cette pompe*

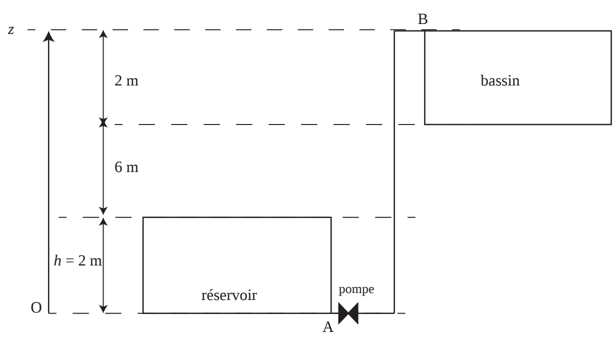



FIGURE 1 – Schéma du système hydraulique de pompage pour amener l'eau jusqu'au bassin. Le point A est situé dans la conduite à la sortie du reservoir. Le point B est situé dans la conduite juste avant l'entrée dans le bassin.

*Reponse*

On considère que le débit est conservé, la section dans le tuyau reliant A à B étant constante cela donne $v_A = v_B = v$. La pression en B est la pression atmosphérique $p_{atm}$. La pression en A est $p_A = \rho g h + p_{atm}$. De plus et $z_A = 0$, et $z_B = h_{tot}$.

On ecrit maintenant la relation de Bernouilli au point A et au point B.

$$\Psi_A = \frac{\varrho v_A^2}{2} + \varrho g z_A + p_A = \frac{\varrho v^2}{2} + \rho g h + p_{atm}$$

$$\Psi_B = \frac{\varrho v_B^2}{2} + \varrho g z_B + p_B = \frac{\varrho v^2}{2} + \rho g h_{tot} + p_{atm}$$

Le long d'une ligne de courant $\Psi$ doit se conserver or :

$$\Psi_B - \Psi_A = \rho g(h_{tot} - h)$$

Cela représente l'énergie qu'il faut fournir au système pour égaliser les potentiels et maintenir l'écoulement. Ce terme est l'énergie par unité de volume fournie par la pompe au fluide et est noté $e$.

$$e = \varrho g(h_{tot} - h)$$

Puisque l'on a un débit $Q$ la puissance $P$ à fournir pour maintenir cet apport en energie au flux est :

$$P = Qe = 3924 \text{ W}.$$

# Exercice 3

*Quelle est la pression qui s'exerce sur le nez d'une torpille se déplaçant sous 10 m d'eau à la vitesse de 50 km/h ?*

*Reponse* On se place dans le référentiel de la torpille (car il faut se placer dans référentiel tel que l'écoulement est stationnaire), en considérant une ligne de courant horizontale entre le nez de la torpille A et un point B très éloigné (non perturbé) en avant de celle-ci. On écrit ensuite la loi de Bernouilli entre ses deux points (on négligera la pression atmosphérique)

$$\frac{1}{2}\varrho v_A^2 + \varrho g z_A + p_A = \frac{1}{2}\varrho v_B^2 + \varrho g z_B + p_B$$

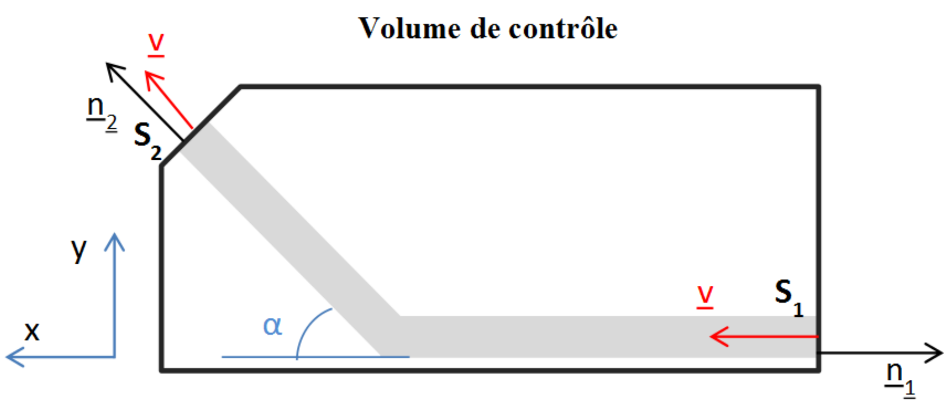
Avec $z_A = z_B$, $v_A = 0$, $v_B = -13{,}89$ m/s et $p_B = \varrho g h$ avec $h = 10$ m cela donne

$$p_A = p_B + \varrho\left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}\right) = 194{,}55 \text{ kPa}.$$

# Exercice 4

*Une conduite circulaire de rayon $R$ transporte un fluide de masse volumique $\varrho$ avec un débit $Q$. Tout d'abord horizontale, la conduite subit une inflexion d'un angle $\alpha$. Calculer la force subie par le coude en considérant un volume de contrôle englobant ce coude.*

*Reponse*



$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

La conservation de masse s'écrit comme $v_1S_1 = v_2S_2$. Étant donné que $S_1 = S_2 = S$ on a donc $v_1 = v_2 = v$. On est en régime stationnaire, donc l'équation d'Euler exprimée avec le théorème de transport dans le volume de contrôle ci-dessus s'écrit comme

$$\begin{aligned}
\sum \mathbf{F}_{ext} &= \int_S \varrho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S \\
&= \int_{S_1} \varrho \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}S \\
&+ \int_{S_2} \varrho \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right] dS \\
&= S\varrho \begin{pmatrix} -v^2 \\ 0 \end{pmatrix} + S\varrho v^2 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les forces externes sont les forces appliquées par le coude sur l'écoulement. Aussi on a $S = \pi R^2$ et $Q = vS$ et donc finalement

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{Q^2}{\pi R^2}\varrho \begin{pmatrix} 1-\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

# Exercice 5

*Un jet circulaire de rayon a projette horizontalement un fluide de masse volumique $\varrho$ sur un mur vertical avec une vitesse $v$. Calculer la force d'impact du jet.*

*Réponse*

On se place dans une symétrie radiale pour le jet en considérant qu'après impact l'écoulement aune distribution de vitesses symétrique par rapport à l'axe du jet et nulles dans la direction x. Comme dans l'exercice précédent on écrit l'équation d'Euler :

$$\int_S \varrho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S = \sum \mathbf{F}_{ext}$$

avec :

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_S \varrho \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}S \quad &+ \quad \int_S \varrho \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}S \\
&= S\varrho \begin{pmatrix} -v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \\
&= \mathbf{F}_{ext}.
\end{aligned}$$

Où $S = \pi a^2$ donc

$$\mathbf{F}_{int} = -\mathbf{F}_{ext} = \pi a^2 \varrho \begin{pmatrix} v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

# Exercice 6

*Vous travaillez pour Ingénieurs du Monde dans une vallée reculée des montagnes du Népal. Vous devez estimer la vitesse de l'eau dans une rivière d'une petite vallée située à 5 jours de marche de la route la plus proche avec les moyens rudimentaires à disposition sur place.*
*Reponse :*

On va utiliser le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux extrémités du tuyau. On suppose que la vitesse d'entrée est celle de la rivière, ce qui suppose de se placer ni trop près du tuyau (perturbations de l'écoulement par le tuyau), ni trop loin (dissipation sur le lit de la rivière non prise en compte). Bien sûr l'ensemble est à la pression atmosphérique. On utilise l'indice R pour indiquer la rivière et S pour indiquer le seau.

$$\frac{\varrho v_R^2}{2} + \varrho g z_R + p_R = \frac{\varrho v_S^2}{2} + \varrho g z_S + p_S$$

$z_R = -h_1$, $z_S = h_2$, $p_S = p_{atm}$, $p_R = p_{atm} + \varrho g h_1$, et $t$, le temps à remplir le seau, est lié au débit par $Q = V/t$ où $V$ est la volume du seau, et la section du tuyau, $S_{tuyau} = \pi d^2/4$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\varrho v_R^2}{2} &= \frac{\varrho v_S^2}{2} + \varrho g h_2 \\
\Rightarrow v_R^2 &= v_S^2 + 2gh_2 \\
&= \left(\frac{Q}{S_{tuyau}}\right)^2 + 2gh_2 \\
&= \left(\frac{V}{td^2\pi/4}\right)^2 + 2gh_2 \\
\Rightarrow v_R &= \sqrt{\left(\frac{4V}{td^2\pi}\right)^2 + 2gh_2}.
\end{aligned}$$

# Exercice 7

1. Dans le référentiel du terrain, le ballon fait tourner localement l'air autour de lui. $V_A(R_{terrain}) = \omega * a$ et $V_B(R_{terrain}) = -\omega * a$. Dans le référentiel du ballon (en translation rectiligne par rapport au terrain, c'est à dire sans rotation), tout se passe comme si l'air est animé de la vitesse du ballon en sens opposé, $V_A(R_{balle}) = \omega * a - V$ et $V_B(R_{balle}) = -\omega * a - V$.

2.

$$1/2\rho V_A^2 + P_A = 1/2\rho V_B^2 + P_B$$

d'où

$$P_A - P_B = 1/2\rho\left((V_B)^2 - (V_A)^2\right) = 1/2\rho\left((-\omega * a - V)^2 - (\omega * a - V)^2\right) = 1/2\rho\left(4V\omega * a\right)$$

$P_A - P_B$ est positif donc la balle va subir une force vers le bas sur le schéma.

3. On intègre la force sur la surface de la sphère et on trouve que la force exercé est la différence de pression fois l'aire du disque :

$$|| \vec{F_{Magnus}} || = (P_A - P_B) * \pi a^2 = \rho 2V\omega\pi a^3$$

4. On égalise la force centrifuge $Fc = mR\omega^2 = mv^2/R$ avec la force de Magnus et on trouve l'expression du rayon :

$$R = \frac{mv}{\rho 2\omega\pi a^3}$$

5. Nous avons maintenant l'ensemble des données nécessaires pour trouver la distance $D$. Il faut pour cela faire un peu de trigonométrie. Sur la figure, ci-dessous, on a tracé la courbe de la trajectoire de rayon R, dont la tangente en C fait un angle $\alpha$ avec AC. On trouve le point B en traçant la perpendiculaire à AC, passant par A et coupant l'arc, le point B correspond au point où la balle quitte le terrain.

Le triangle OBC est isocèle donc on a la relation

$$\beta + 2\gamma = \pi$$

. On observe que l'angle $\eta = \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}$ Le triangle ABC est rectangle donc

$$tan(\eta) = D/l$$

Donc

$$D = ltan(\alpha - \beta/2)$$

Il faut encore déduire l'angle $\beta$, on utilise pour cela l'approximation des petits angles on disant que l est approximativement égal à l'arc entre B et C. Ainsi

$$\beta = \frac{l}{R}$$

D'où

$$D = ltan(\alpha - \frac{l}{2R})$$

AN : $D = 3{,}6$ m donc le ballon rentre bien dans les cages puisque elles font 7,3 m de large.

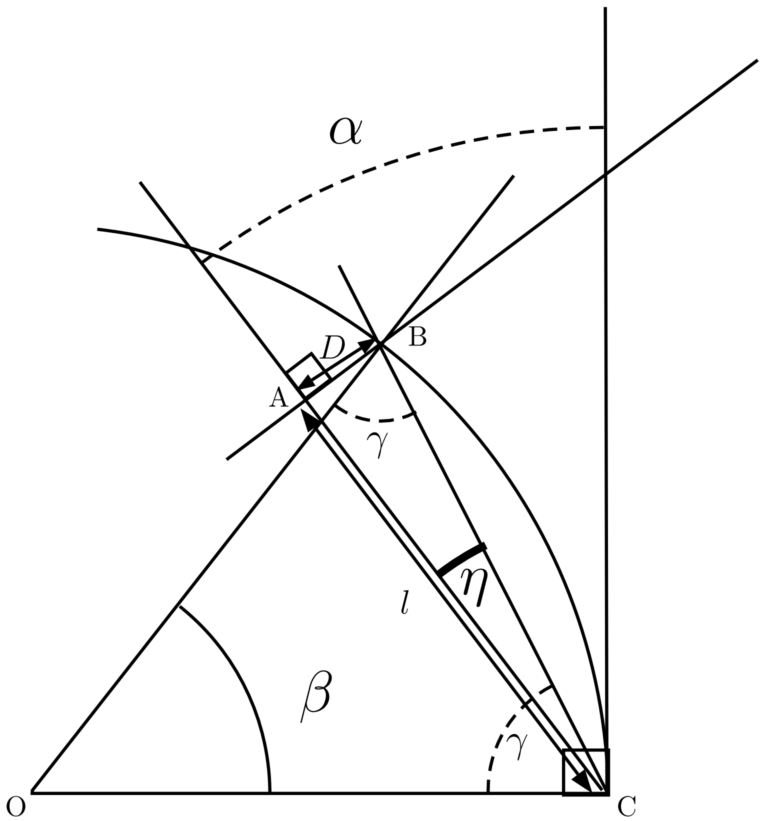



FIGURE 2 – Resolution trigonométrique