Théorème de Buckingham–Π

Exercice 1

Un avion de ligne d'envergure L vole à une vitesse de croisière U dans l'air. On souhaite étudier en soufflerie certaines propriétés de l'avion et pour cela on a recours à l'utilisation d'un modèle réduit à l'échelle $\varepsilon = 1/10$. On rappelle les viscosités dynamiques de l'air ($1{,}8 \times 10^{-5}$ Pa·s) et de l'eau ($1{,}0 \times 10^{-3}$ Pa·s).

1. Déterminer la vitesse que doit avoir l'écoulement en soufflerie afin de reproduire la réalité. Cette vitesse semble-t-elle réalisable ?
2. La force de traînée exercée par l'écoulement sur l'avion s'exprime comme $F_D = \varrho S U^2$ avec S la surface apparente de l'avion vu d'en face. On supposera que $S = L^2$. Calculer la force de traînée ressentie par le modèle réduit F_m ainsi que la force de traînée ressentie par l'avion F. Évaluer le rapport F_m/F. Ce rapport est-il satisfaisant ?
3. Au lieu d'une soufflerie à air, on utilise une veine liquide (tunnel à écoulement d'eau). Déterminer la vitesse que doit avoir l'eau afin de reproduire la réalité.

Exercice 2

Lors de l'explosion d'une bombe nucléaire, une onde de choc de forme hémisphérique se propage dans l'air suite au relâchement initial d'énergie. Comme l'étude complète de ce problème est compliquée (équations différentielles non linéaires, écoulement compressible, thermodynamique), on se propose d'estimer l'évolution dans le temps du rayon de cette onde de choc par une analyse dimensionnelle. Pour ce faire on va supposer que ce rayon R ne dépend que de la quantité d'énergie libérée E au moment de l'explosion, de la masse volumique ϱ du milieu dans lequel a lieu l'explosion et du temps t écoulé depuis l'instant initial. On va utiliser deux approches différentes pour y arriver, une approche « intuitive » entièrement basée sur l'analyse dimensionnelle et une approche basée sur le théorème de Buckingham–Π.

1. On suppose que le rayon de l'onde de choc est proportionnel à l'énergie libérée, à la masse volumique du fluide où se propage l'onde ainsi qu'au temps écoulé; c'est-à-dire $R \sim E^a \varrho^b t^c$. Trouver les valeur des coefficients a, b et c tels que cet équation soit homogène du point de vue dimensionnel.
2. En utilisant le théorème de Buckingham–Π, déterminer le nombre adimensionnel qui caractérise ce problème. En déduire la relation qui lie le rayon R de l'onde de choc aux autres variables du problème.
3. Estimer l'énergie relâchée lors de l'explosion de l'essai nucléaire Trinity sachant qu'après 0,05 s le rayon de l'onde de choc mesure 180 m.

Exercice 3

On étudie un seuil à paroi mince, avec un déversoir de forme triangulaire (angle ϕ) comme le montre la figure 1. Ce déversoir contrôle le débit dans un canal ; l'eau est déversée dans un canal en contrebas, qui n'a aucune action en retour sur l'écoulement amont (seuil dénoyé). La hauteur d'eau au niveau du déversoir est H. Le débit Q transitant est fonction de H, de la vitesse U à l'approche du déversoir (resserrement des lignes de courant dû à la contraction de la section d'écoulement), de l'accélération de la gravitation g, et naturellement de l'angle d'ouverture ϕ. A l'aide du théorème Buckingham–Π, identifiez les nombres adimensionnels qui décrivent le problème.

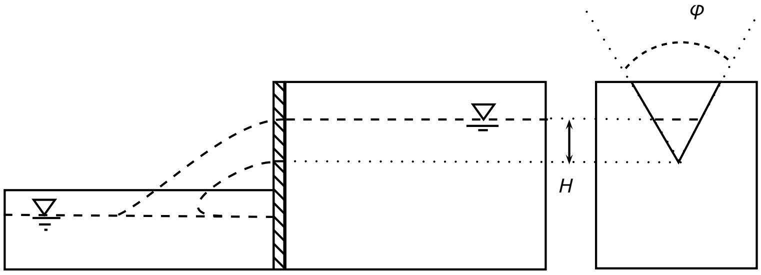

Fig. 1 – *déversoir mince.*

Exercice 4

Une maquette de digue à l'échelle 1/20 est constituée d'un empilement de blocs en béton de masse 1 kg. Cette digue est censée protéger un port contre la houle. On a observé qu'il n'y avait aucun dommage tant que la hauteur H de la houle ne dépassait pas 30 cm sur le modèle réduit. Quel doit être le poids minimal des blocs en béton pour que la digue résiste à une houle géométriquement et dynamiquement similaire à celle du modèle réduit sachant que la houle peut atteindre 6 m de haut ?

Indications : Supposer que le soulèvement d'un corps exposé aux vagues intervient lorsque $F_p/F_a = \varepsilon$ avec F_p le poids du corps, F_a la force d'arrachement due à l'eau et ε une constante ***indépendante*** *de l'échelle. En première approximation on considérera que F_a est proportionnelle à la surface apparente du corps et au carré de la vitesse de l'eau ($F_a \propto U^2 L^2$ avec U la vitesse de l'eau et L la longueur caractéristique du corps). Égaliser ensuite les nombres de Froude.*

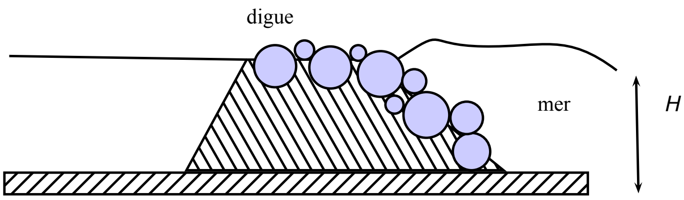

Fig. 2 – *Digue de protection contre la houle.*

Exercice 5

Vous êtes chargés d'étudier en laboratoire la chute de pression par unité de longueur dans un tuyau de section circulaire.

1. Identifier les paramètres qui contrôlent cet écoulement. Sans utiliser le théorème Buckingham–Π, quel plan d'expérience envisageriez-vous pour réaliser cette expérience?
2. Utiliser maintenant le théorème Buckingham–Π pour connaître les nombres sans dimensions sur lesquelles se construit le phénomène physique. Quel plan d'expérience peut-on maintenant envisager ?
3. Ci-dessous (Figure 5) est tracé le diagramme de Moody, célèbre ingénieur américain qui a tracé à partir d'expériences l'évolution du coefficient de frottement de Darcy-Weissbach défini par :

$$f = \frac{2d}{\rho U^2} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$

   en fonction de Re pour un tube cylindrique de diamètre d.
   Sur la base de ce que vous avez déterminé avec le théorème Buckingham–Π, expliquer l'intérêt de ce graphique ? Voit-on un degré de liberté supplémentaire? Indiquer le nombre d'expériences nécessaires pour décrire le phénomène pour $\mathrm{Re} \gg 10^5$ et avec une rugosité de $\frac{\epsilon}{D} = 0.03$

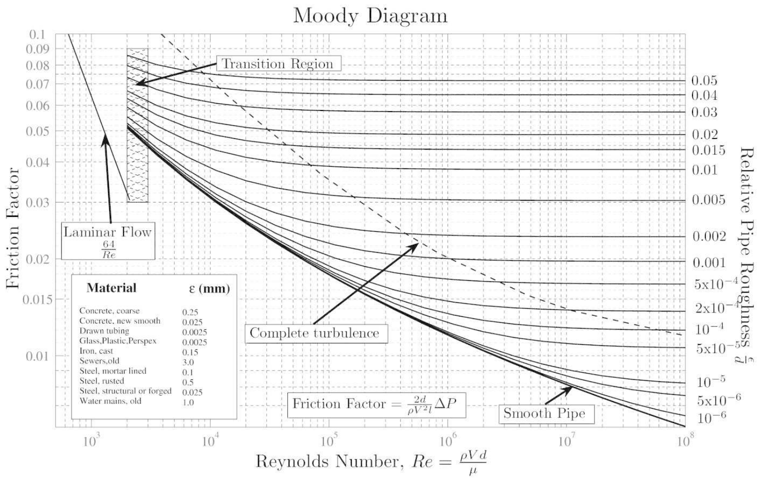

FIG. 3 – *Diagramme de Moody* - $\frac{\Delta P}{l} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$

Exercice 6

On introduit une plaque rectangulaire de largeur w et de hauteur h dans un écoulement. Celle-ci est placée perpendiculairement à l'écoulement de sorte à provoquer une forte traînée. En supposant qu'elle ne dépend que de w, h, la viscosité μ du fluide, sa masse volumique ϱ_f et sa vitesse v, déterminer les termes Π nécessaires à l'étude expérimentale de ce problème.

Exercice 7

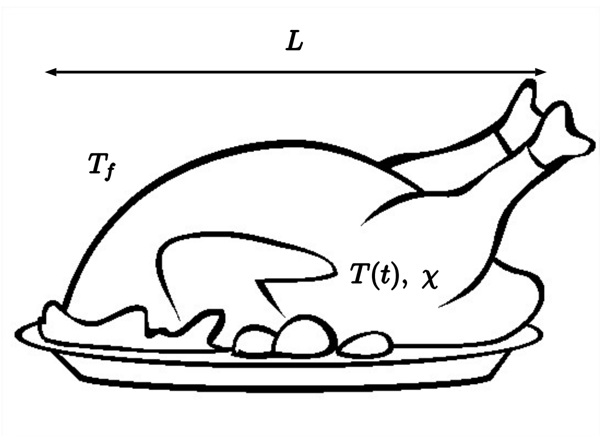

FIG. 4 – *Dinde*

Une dinde sera cuite à point lorsque la température en son centre atteint une valeur T_c donnée (mesurée avec une sonde). Pour permettre l'estimation du temps de cuisson t_c les livres de cuisines traditionnels indiquent le nombre de minutes de cuisson par kilogramme de dinde, quand celle-ci est placée dans un four à température T_f constante et uniforme. Par exemple : « pour une dinde de 3 à 4 kg, il faut compter environ 50 mn par kg. »

1. Nous avons une dinde de 6 à 7 kg, estimer alors le temps de cuisson t_c en considérant que le temps de cuisson est linéaire avec le poids de la dinde. Qu'en pensez vous?

   On souhaite affiner cette première approche. Une analyse dimensionnelle de la cuisson de la dinde doit nous permettre de déterminer la relation entre le temps de cuisson et la taille L de la volaille. Le transfert de chaleur dans la dinde se fait par conduction donc le temps de cuisson t_c dépend notamment de la longueur L, de la diffusivité thermique χ de la chair ainsi que de la température que l'on veut atteindre

T_c en comparaison avec la température du four T_f.

Pour rappel, voici l'équation de la chaleur qui est ici pour vous aider à percevoir le lien entre ces différentes grandeurs (il ne faut pas la résoudre) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

2. Utiliser le théorème de Buckingham–Π pour établir une relation générale reliant la température dans la dinde au temps passé dans le four et aux paramètres sans dimensions du problème.
3. En supposant que, quand elles grossissent, les dindes restent géométriquement semblables et gardent les mêmes valeurs de ρ et de χ, trouver la relation entre masse et temps de cuisson dans un four à température T_f.
4. Application numérique : dans ces conditions, quel est le temps de cuisson d'une dinde de 6 à 7 kg ? Comparer le temps de cuisson nécessaire avec celui trouvé en 1.