Correction

Exercice 1

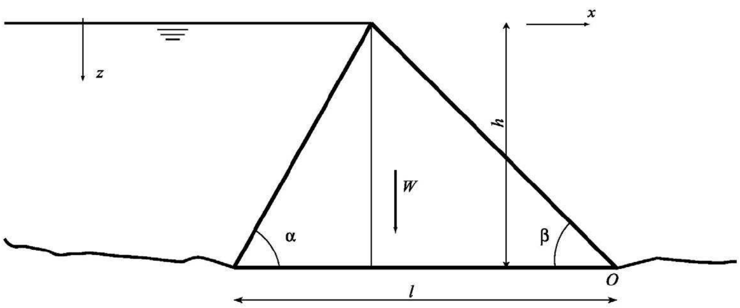

FIG. 1 – *Barrage-poids en béton*

1. Soit $\boldsymbol{n}$ la normale à la surface orientée de la surface vers le fluide. La force de pression qui s'applique au parement du barrage peut s'écrire :

$$\boldsymbol{F_p} = \int -p_e \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S$$

avec

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

et

$$p = \varrho_e g z$$

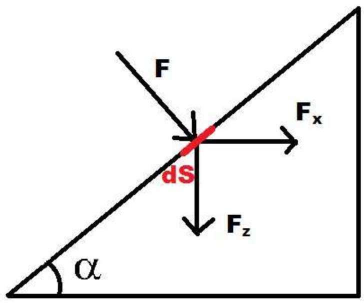

FIG. 2 – *Composantes de la force de pression*

Les composantes de $\boldsymbol{F_p}$ qui agissent sur dS sont

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F \sin\alpha$$
$$\mathrm{d}F_z = \mathrm{d}F \cos\alpha$$

On exprime dS en fonction de dz

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}z}{\sin\alpha}$$

Et l'intégrale devient

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} F_x \\ F_z \end{pmatrix} &= \int_0^h -\varrho_e g z \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}z}{\sin\alpha} \\ &= \varrho_e g \begin{pmatrix} 1 \\ \cot\alpha \end{pmatrix} \int_0^h z \,\mathrm{d}z \\ &= \varrho_e g \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \cot\alpha \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Il faut trouver la masse volumique minimale du béton pour avoir l'équilibre des moments en O. D'après la figure 3 on a donc $d_1 F_s + d_2 F_x = e_1 W_1 + e_2 W_2 + e_3 F_z$

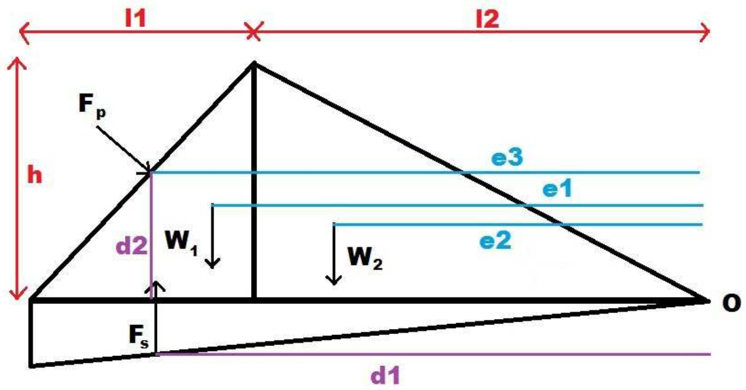

Fig. 3 – *Moments du barrage-poids*

Les composantes de la force de pression sont: $F_x = \varrho_e g \frac{h^2}{2}$ et $F_z = \varrho_e g \frac{h^2}{2} \cot\alpha$. Le point d'application de la force de pression se trouve en remarquant que le moment de la force de pression M_{F_p} par rapport au sommet du barrage s'écrit

$$M_{F_p} = x_p F_z + z_p F_x$$

avec x_p et z_p les coordonnées du point d'application de la force de pression. Du fait de l'inclinaison du barrage nous avons la relation $x_p = -z_p/\tan\alpha$. De plus nous pouvons calculer M_{F_p} par sa définition

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M_{F_p}} = -p_e \boldsymbol{x_p} \times \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S$$

avec $\boldsymbol{x_p} = (-z/\tan\alpha,\, z)$ la position le long de la face mouillée du barrage. Le produit vectoriel $\boldsymbol{x_p} \times \boldsymbol{n} = -z(\sin\alpha + \cos^2\alpha/\sin\alpha)\boldsymbol{e_y}$ n'a qu'une composante dans la direction y. On va donc s'intéresser uniquement à la norme du moment $\boldsymbol{M_{F_p}}$ qui s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M_{F_p} &= p_e z(1+\cot^2\alpha)\ \mathrm{d}z \\
\Rightarrow M_{F_p} &= \int_0^h \varrho_e g z^2 (1+\cot^2\alpha)\ \mathrm{d}z \\
&= \varrho_e g \frac{h^3}{3}(1+\cot^2\alpha).
\end{aligned}$$

Or nous avons que

$$M_{F_p} = x_p F_z + z_p F_x = \varrho_e g \frac{h^2}{2}(1+\cot^2\alpha) z_p.$$

En égalisant les deux expression on obtient $z_p = 2h/3$ et $x_p = -2h/(3\tan\alpha) = -2l_1/3$ avec $l_1 = h/\tan\alpha$ et $l_2 = h/\tan\beta$ (voir figure 3). Par conséquent $e_3 = l_2 - x_p = l_2 + 2l_1/3$ et $d_2 = h - z_p = h/3$.
La force de sous-pression peut être vue comme la force de l'eau que le barrage a remplacé. Ce serait $F_s = \varrho_e g h l/2$, et si elle varie linéairement le long de cette face, on peut utiliser la même formule pour voir que $d_1 = 2l/3 = 2(h/\tan\alpha + h/\tan\beta)/3$.
Le poids du barrage peut être décomposé en deux partie :

$$W_1 = \varrho_b g \frac{h l_1}{2} \quad \text{et} \quad W_2 = \varrho_b g \frac{h l_2}{2}$$

avec pour points d'application:

$$e_1 = l_2 + \frac{1}{3} l_1 \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{2}{3} l_2$$

Reprenons l'équation d'équilibre du moment en O $d_1 F_s + d_2 F_x = e_1 W_1 + e_2 W_2 + e_3 F_z$ et substituons les termes

$$\varrho_e g \frac{hl^2}{3} + \varrho_e g \frac{h^3}{6} = \left(l_2 + \frac{l_1}{3}\right) \varrho_b g \frac{hl_1}{2} + \frac{2l_2}{3} \varrho_b g \frac{hl_2}{2} + \left(l_2 + \frac{2l_1}{3}\right) \varrho_e g \frac{h^2}{2} \cot\alpha$$

Avec $\varrho_e = 1000$ kg/m3, $h = 30$ m , $\alpha = 65°$ et $\beta = 45°$ on obtient alors $l_1 = \frac{h}{\tan\alpha} = 14$ m, $l_2 = \frac{h}{\tan\beta} = 30$ m, $l = l_1 + l_2 = 44$ m, $d_1 = 29{,}3$ m, $d_2 = 10{,}0$ m, $e_1 = 34{,}67$ m, $e_2 = 20$ m et $e_3 = 39{,}3$ m. Ainsi, $F_x = 4410$ kN/m, $F_z = 2056{,}4$ kN/m, $F_s = 6468$ kN/m, et donc $\varrho_b = 957{,}7$ kg/m^3. La masse volumique de béton est d'environ $2{,}5 \times 10^3$ kg/m^3, il n'y a donc pas de risques de soulèvement.

3. Une limitation de ce modèle est qu'il ne considère pas l'ancrage du barrage (pas de frottements). Il faudrait vérifier que la force F_x ne fait pas glisser la digue.

Exercice 2

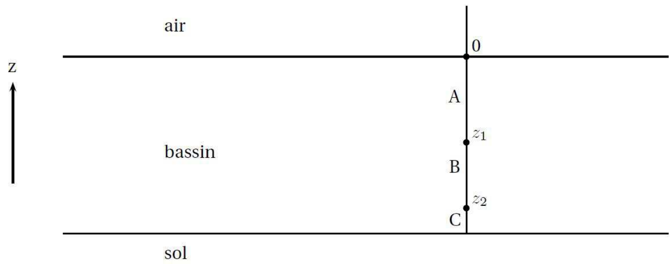

Fig. 4 – *Schéma des 3 panneaux plans*

1. Ici la définition de la force de pression pour calculer la force exercée sur chaque panneau :

$$F_A = \int_{z_1}^{0} -\varrho g z \, \mathrm{d}z = \varrho g \frac{z_1^2}{2},$$
$$F_B = \int_{z_2}^{z_1} -\varrho g z \, \mathrm{d}z = \frac{\varrho g}{2}(z_2^2 - z_1^2),$$
$$F_C = \int_{h}^{z_2} -\varrho g z \, \mathrm{d}z = \frac{\varrho g}{2}(h^2 - z_2^2).$$

Comme nous voulons que $F_A = F_B = F_C$, cela nous donne les conditions :

$$z_1^2 = \frac{z_2^2}{2},$$
$$z_1^2 = h^2 - z_2^2.$$

En résolvant ces equations, on obtient $z_2 = h\sqrt{2/3} = -7{,}35$ m et $z_1 = z_2/\sqrt{2} = h/\sqrt{3} = -5{,}2$ m, ou bien $H_A = 5{,}2$ m, $H_B = z_2 - z_1 = 2{,}15$ m et $H_C = h - z_2 = 1{,}65$ m.

2. Pour le centre de pression z_c, on utilise le fait que le calcul du moment de la force de pression au point C est nul (car la résultante de la force de pression agit en ce point). Donc

$$\boldsymbol{M_C} = \int_{z_a}^{z_b} \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0.$$

Cela donne donc dans notre cas

$$M_C = \int_{z_a}^{z_b} (z - z_c)\varrho g z \, \mathrm{d}z = 0.$$

Donc pour chaque panneau cela s'écrit

$$\varrho g \left[\frac{z^3}{3} - z_c \frac{z^2}{2} \right]_{z_a}^{z_b} = 0$$

$$\Rightarrow z_c = \frac{2}{3} \frac{(z_b^3 - z_a^3)}{(z_b^2 - z_a^2)}.$$

Cela donne pour A ($z_a = z_1 = -5{,}2$ m, $z_b = 0$) $z_{c_A} = \frac{2}{3} z_1 = -3{,}46$ m. Pour B ($z_a = z_2 = -7{,}35$ m, $z_b = z_1 = -5{,}2$ m) $z_{c_B} = -6{,}33$ m. Pour C ($z_a = h = -9$ m, $z_b = z_2 = -7{,}35$ m) $z_{c_C} = -8{,}2$ m.

3. La force qui agit sur chaque panneau, $F_A = F_B = F_C = \varrho g z_1^2/2 = 1{,}35 \times 10^5$ N/m.

Exercice 3

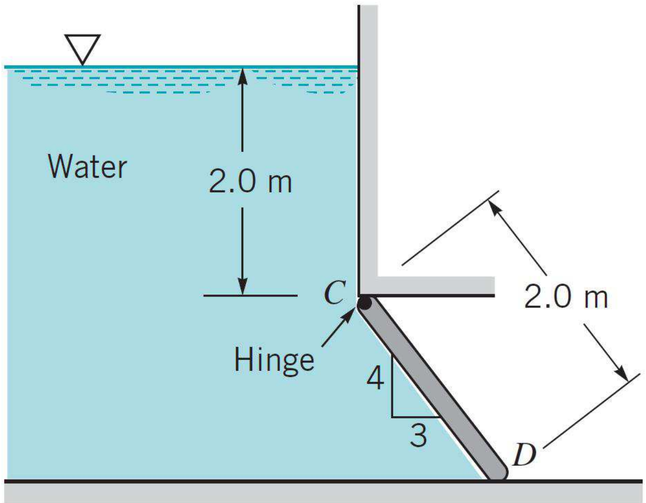

Fig. 5 – *Vanne de fond*

Pour commencer il faut trouver le moment en O dû à la force de pression. Cette force élémentaire s'écrit comme

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F_p} = -\boldsymbol{n} p(r)\ \mathrm{d}s,$$

où $\boldsymbol{n} = (-\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta)$ le vecteur normal à la surface de la vanne, $p(r) = \varrho g(h + r\cos\theta)$ la pression hydrostatique et $\mathrm{d}s = L\mathrm{d}r$ la surface élémentaire. On note h la profondeur d'eau jusqu'au niveau du pivot (2 m). On peut donc écrire

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M_{O,F_p}} = \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} p(r) L\ \mathrm{d}s,$$

où $\boldsymbol{r} = (r\sin\theta,\ 0,\ r\cos\theta)$. Pour obtenir le moment résultant on intègre cette expression. En notant que $-\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} = (0,\ 1,\ 0)$ on peut calculer l'intensité du moment comme

$$M_{O,F_p} = \int_0^l r p(r) L\ \mathrm{d}r,$$

ce qui devient :

$$\int_0^l r p(r) L\ \mathrm{d}r = L\varrho g \int_0^l r(h + r\cos\theta)\ \mathrm{d}r = \varrho g L \left[\frac{hr^2}{2} + \frac{r^3}{3}\cos\theta \right]_0^l$$

Le moment en O dû au poids s'écrit comme (avec $\boldsymbol{r_g} = l/2(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$ la position du centre de gravité de la vanne)

$$M_{O,F_{poids}} = \|\boldsymbol{r_g} \times \boldsymbol{F_{poids}}\| = \frac{l}{2} mg\sin\theta$$

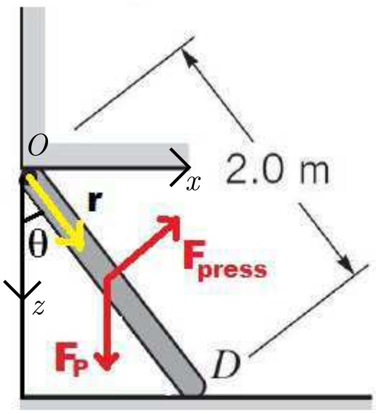

FIG. 6 – *Vanne de fond avec forces*

La condition d'équilibre s'écrit donc $M_{O,F_{poids}} = M_{O,F_p}$, d'où

$$m = \frac{2\varrho L}{\sin\theta}\left(\frac{hl}{2} + \frac{l^2}{3}\cos\theta\right) = 180 \text{ kN}$$

soit une masse de $m = 18{,}4$ tonnes.

Exercice 4

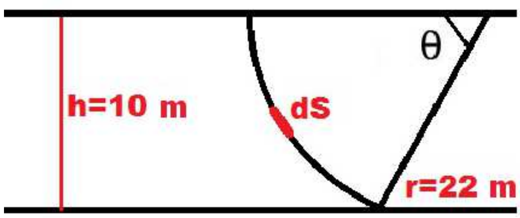

FIG. 7 – *Vanne semi-circulaire avec dimensions*

On veut calculer la résultante des forces de pression sur le barrage.

$$\begin{gathered} \mathrm{d}\boldsymbol{F} = -p\boldsymbol{n}\mathrm{d}s, \\ p(z) = \varrho g z, \\ \mathrm{d}s = rL\mathrm{d}\theta \end{gathered}$$

où z est la profondeur, ϱ la masse volumique de l'eau, L la longueur de vanne (perpendiculaire à la page), et r et θ définis comme sur la figure 7. La norme de la résultante des forces sur la vanne s'écrit:

$$\mathrm{d}F = \varrho g z r L \ \mathrm{d}\theta$$

avec $z = r\sin\theta$. On peut donc écrire chacune des composantes de dF comme

$$\begin{gathered} \mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\theta = \varrho g r^2 L \sin\theta\cos\theta \ \mathrm{d}\theta, \\ \mathrm{d}F_z = \mathrm{d}F\sin\theta = \varrho g r^2 L \sin^2\theta \ \mathrm{d}\theta. \end{gathered}$$

Donc

$$\begin{aligned}
F_x &= \int_0^{\theta_{max}} \varrho g r^2 L \sin\theta \cos\theta \ \mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{\rho g r^2 L}{2} \sin^2\theta\right]_0^{\theta_{max}} \\
&= \frac{\rho g h^2 L}{2}
\end{aligned}$$

Car $r \sin\theta_{max} = h$.

$$\begin{aligned}
F_z &= \int_0^{\theta_{max}} \varrho g r^2 L \sin^2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\theta_{max}} \varrho g r^2 L \frac{(1-\cos 2\theta)}{2} d\theta \\
&= \left[\frac{\varrho g r^2 L}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]_0^{\theta_{max}} \\
&= \frac{\varrho g r^2 L}{2}\left(\theta_{max} - \sin\theta_{max}\cos\theta_{max}\right) \\
&= \frac{\varrho g r^2 L}{2}\left(\arcsin\left(\frac{h}{r}\right) - \frac{h}{r}\sqrt{1-\frac{h^2}{r^2}}\right)
\end{aligned}$$

Comme la vanne est circulaire et que la pression est normale à la surface de la vanne, cette dernière agit sur le rayon de la vanne (force centripète). La résultante de la force de pression passe donc à travers le pivot. Pour le vérifier il faut calculer le centre de pression (voir exercice 2) et montrer que le moment en A de la force de pression s'annule.

Exercice 5

À $z = h_{\max}$, $v_z = 0$. À $z = 0$, $v_z = \frac{Q}{S}$. Le théorème de Bernoulli dit:

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\varrho} = constante,$$

Donc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{S}\right)^2 + g \times 0 + \frac{p_0}{\varrho_0} = \frac{1}{2}(0)^2 + g h_{\max} + \frac{p_h}{\varrho_h}.$$

Supposons que $p_h = p_0 = p_{atm}$ et la fluide est incompressible,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{S}\right)^2 &= g h_{\max}, \\
h_{\max} &= \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{S}\right)^2
\end{aligned}$$