Correction

Exercice 1

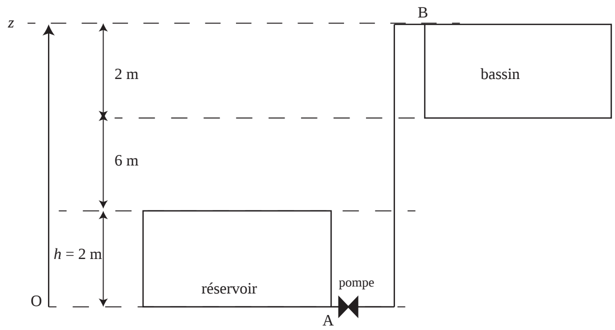


FIGURE 1 – Schéma du système hydraulique de pompage pour amener l'eau jusqu'au bassin. Le point A est situé dans la conduite à la sortie du reservoir. Le point B est situé dans la conduite juste avant l'entrée dans le bassin.

On considère que le débit est conservé, la section dans le tuyau reliant A à B étant constante cela donne $v_A = v_B = v$. La pression en B est la pression atmosphérique p_{atm}. La pression en A est $p_A = \varrho g h + p_{atm}$. De plus et $z_A = 0$, et $z_B = h_{tot}$. On ecrit maintenant la relation de Bernouilli au point A et au point B.

$$\Psi_A = \frac{\varrho v_A^2}{2} + \varrho g z_A + p_A = \frac{\varrho v^2}{2} + \varrho g h + p_{atm},$$
$$\Psi_B = \frac{\varrho v_B^2}{2} + \varrho g z_B + p_B = \frac{\varrho v^2}{2} + \varrho g h_{tot} + p_{atm}.$$

Le long d'une ligne de courant Ψ doit se conserver or :

$$\Psi_B - \Psi_A = \varrho g(h_{tot} - h).$$

Cela représente l'énergie qu'il faut fournir au système pour égaliser les potentiels et maintenir l'écoulement. Ce terme est l'énergie par unité de volume fournie par la pompe au fluide et est noté e :

$$e = \varrho g(h_{tot} - h).$$

Puisque l'on a un débit Q la puissance P à fournir pour maintenir cet apport en energie au flux est :

$$P = Qe = 3924 \text{ W}.$$

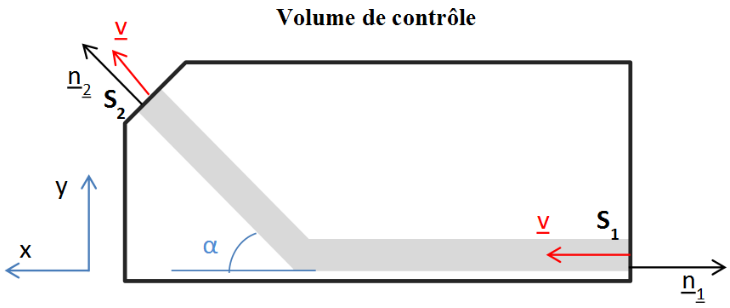
Exercice 2

On se place dans le référentiel de la torpille (car il faut se placer dans référentiel tel que l'écoulement est stationnaire pour pouvoir appliquer le théorème de Bernouilli). On considère une ligne de courant horizontale entre le nez de la torpille (point A) et un point très éloigné (non perturbé) en avant de celle-ci (point B). On écrit ensuite la loi de Bernouilli entre ces deux points (on négligera la pression atmosphérique)

$$\frac{1}{2}\varrho v_A^2 + \varrho g z_A + p_A = \frac{1}{2}\varrho v_B^2 + \varrho g z_B + p_B$$

Avec $z_A = z_B$, $v_A = 0$ m/s, $v_B = -13{,}89$ m/s (le signe négatif est du au fait qu'on est dans le réferenciel de la torpille) et $p_B = \varrho g h$ Pa avec $h = 10$ m on obtient

$$p_A = p_B + \varrho\left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}\right) = 194{,}55 \text{ kPa}.$$



Exercice 3

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

La conservation de masse s'écrit comme $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Étant donné que $S_1 = S_2 = S$ on a donc $v_1 = v_2 = v$. On est en régime stationnaire, donc l'équation d'Euler exprimée avec le théorème de transport dans le volume de contrôle ci-dessus s'écrit comme

$$\begin{aligned}
\sum \boldsymbol{F}_{ext} &= \int_S \varrho \mathbf{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S \\
&= \int_{S_1} \varrho \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \mathrm{d}S \\
&+ \int_{S_2} \varrho \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}\right] \mathrm{d}S \\
&= S\varrho \begin{pmatrix} -v^2 \\ 0 \end{pmatrix} + S\varrho v^2 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les forces externes sont les forces appliquées par le coude sur l'écoulement. Aussi on a $S = \pi R^2$ et $Q = vS$ et donc finalement

$$\boldsymbol{F}_{ext} = \frac{Q^2}{\pi R^2}\varrho \begin{pmatrix} 1 - \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

On se place dans une symétrie radiale pour le jet en considérant qu'après impact l'écoulement a une distribution de vitesses symétrique par rapport à l'axe du jet et nulles dans la direction x. Comme dans l'exercice précédent on écrit l'équation d'Euler :

$$\int_S \varrho \boldsymbol{v}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S = \sum \boldsymbol{F}_{ext}$$

avec :

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Qui donne :

$$\int_S \varrho \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}S + \int_S \varrho \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}S$$
$$= S\varrho \begin{pmatrix} -v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0$$
$$= \boldsymbol{F}_{ext}.$$

Où $S = \pi a^2$ donc

$$\boldsymbol{F}_{int} = -\boldsymbol{F}_{ext} = \pi a^2 \varrho \begin{pmatrix} v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

On va utiliser le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux extrémités du tuyau. On suppose que la vitesse d'entrée est celle de la rivière, ce qui suppose de se placer ni trop près du tuyau (perturbations de l'écoulement par le tuyau), ni trop loin (dissipation sur le lit de la rivière non prise en compte). Bien sûr l'ensemble est à la pression atmosphérique. On utilise l'indice R pour indiquer la rivière et S pour indiquer le seau.

$$\frac{\varrho v_R^2}{2} + \varrho g z_R + p_R = \frac{\varrho v_S^2}{2} + \varrho g z_S + p_S.$$

$z_R = -h_1$, $z_S = h_2$, $p_S = p_{atm}$, $p_R = p_{atm} + \varrho g h_1$, et t, le temps à remplir le seau, est lié au débit par $Q = V/t$ où V est la volume du seau, et la section du tuyau, $S_{tuyau} = \pi d^2/4$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\varrho v_R^2}{2} &= \frac{\varrho v_S^2}{2} + \varrho g h_2 \\ \Rightarrow v_R^2 &= v_S^2 + 2gh_2 \\ &= \left(\frac{Q}{S_{tuyau}}\right)^2 + 2gh_2 \\ &= \left(\frac{V}{td^2\pi/4}\right)^2 + 2gh_2 \\ \Rightarrow v_R &= \sqrt{\left(\frac{4V}{td^2\pi}\right)^2 + 2gh_2}. \end{aligned}$$

Exercice 7

1. Dans le référentiel du terrain, le ballon fait tourner localement l'air autour de lui. $v_{A,t} = \omega * a$ et $v_{B,t} = -\omega * a$. Dans le référentiel du ballon (en translation rectiligne par rapport au terrain, c'est à dire sans rotation), tout se passe comme si l'air est animé de la vitesse du ballon en sens opposé, $v_{A,b} = \omega a - v_{ballon}$ et $v_{B,b} = -\omega a - v_{ballon}$.
2. On se place dans le référenciel du ballon car dans ce dernier l'écoulement est permanant. On va supposer $z_A = z_B$. D'après le théorème de Bernoulli ce qui permet d'écrire

$$\frac{\varrho v_{A,b}^2}{2} + p_A = \frac{\varrho v_{B,b}^2}{2} + p_B$$

d'où

$$p_A - p_B = \frac{\varrho}{2}\left(v_{B,b}^2 - v_{A,b}^2\right) = \frac{\varrho}{2}\left((-\omega a - v_{ballon})^2 - (\omega a - v_{ballon})^2\right) = \frac{\varrho}{2}\left(4\omega a v_{ballon}\right).$$

$p_A - p_B$ est positif donc la balle va subir une force vers le bas sur le schéma.

3. On intègre la force sur la surface de la sphère et on trouve que la force exercé est la différence de pression fois l'aire du disque :

$$\| \boldsymbol{F_{Magnus}} \| = F_{Magnus} = (p_A - p_B)\pi a^2 = 2\pi\varrho\omega a^3 v_{ballon}.$$

4. On égalise la force centrifuge $F_c = mR\omega^2 = mv_{ballon}^2/R$ avec la force de Magnus F_{Magnus} et on trouve l'expression du rayon :

$$R = \frac{mv}{2\pi\varrho\omega a^3}$$

5. Nous avons maintenant l'ensemble des données nécessaires pour trouver la distance D. Il faut pour cela faire un peu de trigonométrie. Sur la figure, ci-dessous, on a tracé la courbe de la trajectoire de rayon R, dont la tangente en C fait un angle α avec AC. On trouve le point B en traçant la perpendiculaire à AC, passant par A et coupant l'arc, le point B correspond au point où la balle quitte le terrain. Le triangle OBC est isocèle donc on a la relation

$$\beta + 2\gamma = \pi.$$

On observe que l'angle $\eta = \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}$. Le triangle ABC est rectangle donc

$$\tan \eta = D/l.$$

Donc

$$D = l \tan(\alpha - \beta/2).$$

Il faut encore déduire l'angle β, on utilise pour cela l'approximation des petits angles on disant que l est approximativement égal à l'arc entre B et C. Ainsi

$$\beta = \frac{l}{R}.$$

D'où

$$D = l \tan(\alpha - \frac{l}{2R}).$$

Application numérique : $D = 3{,}6$ m donc le ballon rentre bien dans les cages puisque elles font 7,3 m de large.

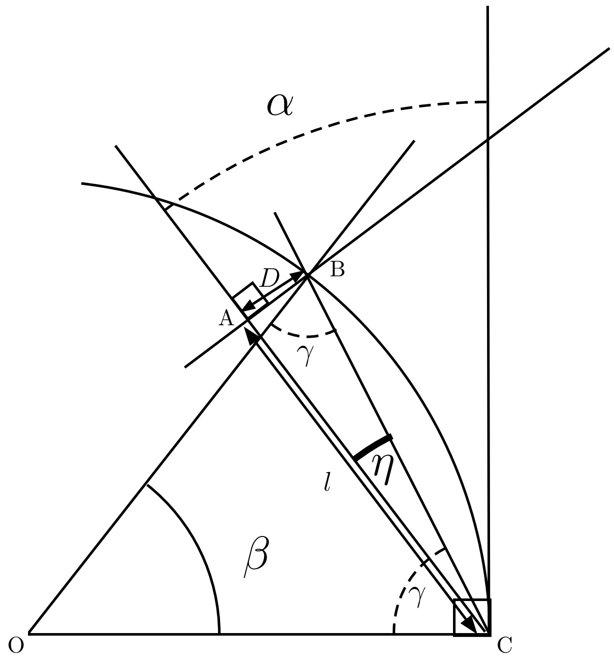


FIGURE 2 – Resolution trigonométrique