Correction

Exercice 1

1. Coupe en travers de la conduite cylindrique.

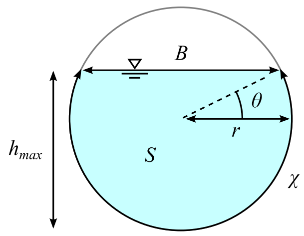

Figure 1 : coupe en travers de la conduite cylindrique.

2. L'hydraulique à surface libre se différencie de l'hydraulique en charge par l'existence d'une *surface libre*, c'est-à-dire d'une surface où l'écoulement est en contact direct avec l'atmosphère. La conduite n'étant que partiellement remplie d'eau, l'écoulement est bien à surface libre. La gravité est l'agent moteur des écoulements à surface libre, alors que, pour les écoulements en charge, c'est le gradient de pression.
3. Soit r le rayon de la conduite et θ l'angle tels que dessinés sur la figure 1, on a

$$\chi = r(\pi + 2\theta) = 2,21 \text{ m},$$

$$S = r^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \sin\theta\cos\theta\right) = 0,67 \text{ m}^2,$$

$$R_H = \frac{S}{\chi} = 0,30 \text{ m}.$$

4. D'après la loi de Manning-Strickler,

$$Q = SR_H^{2/3}\sqrt{i}K$$

en régime permanent uniforme (c.-à-d. lorsque les caractéristiques de l'écoulement, comme la vitesse et la hauteur d'eau, ne varient ni dans le temps, ni le long de la direction d'écoulement). Ici, le débit est constant dans le temps et l'écoulement est établi ; le régime est donc permanent. La conduite est uniforme (toutes les sections en travers sont identiques) et il n'y a aucun ouvrage hydraulique suceptible de perturber l'écoulement, le régime est donc uniforme.

5. $Q = 0,77 \text{ m}^3/\text{s}$.

Exercice 2

Soit S_1 la surface mouillée et R_{H1} le rayon hydraulique à l'état neuf ; et soit S_2 la surface mouillée et R_{H2} le rayon hydraulique à l'état érodé. La pente du canal est notée i et l'angle que fait chaque berge avec la verticale est noté θ.

Les surfaces mouillées peuvent s'écrire

$$S_1 = L_1^2 \cos\theta \sin\theta \text{ et } S_2 = L_2^2 \cos\theta \sin\theta$$

et les rayons hydrauliques peuvent s'écrire

$$R_{H1} = \frac{L_1^2 \cos\theta \sin\theta}{2L_1} \text{ et } R_{H2} = \frac{L_2^2 \cos\theta \sin\theta}{2L_2}.$$

Le régime étant permanent uniforme dans chacun des états, la loi de Manning-Strickler permet d'écrire

$$Q = S_1 R_{H1}^{2/3} \sqrt{i} K \text{ pour l'état neuf et } Q = S_2 R_{H2}^{2/3} \sqrt{i} \frac{K}{2} \text{ pour l'état érodé.}$$

En égalisant les deux expressions pour Q et en substituant les expressions pour les surfaces mouillées et les rayons hydrauliques, on trouve

$$L_2 = 2^{3/8} L_1 = 2,59 \text{ m.}$$

Exercice 3

1. La hauteur critique h_c est la hauteur d'eau lorsque le nombre de Froude $\mathrm{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh}$ vaut 1, avec $\bar{u}$ la vitesse moyenne de l'écoulement et h la hauteur d'eau. Puique $\bar{u} = q/h$, avec q le débit par unité de largeur, on démontre facilement que $h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$. Ici, $h_c = 0,30$ m.

2. La charge hydraulique totale s'écrit

$$H = y + h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

avec y la cote du fond, h la hauteur d'eau et q le débit par unité de largeur. La charge totale représente l'énergie totale du fluide en un point donnée. Son expression est directement dérivée de l'équation de Bernoulli.

Puisque les effets visqueux sont négligés, la charge totale se conserve au passage de la marche. On peut donc écrire

$$y_1 + h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2} = y_2 + h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2},$$

avec l'indice $_1$ référant à la section amont et l'indice $_2$ à la section aval. En isolant h_2 dans cette équation, on obtient une équation du troisième degré. Une alternative à la résolution de cette équation pour trouver h_2 est d'utiliser le diagramme de l'énergie spécifique adimensionelle (donc vrai pour toute configuration) qui donne la charge spécifique H_s en fonction de la hauteur d'eau h. Le diagramme est disponible dans le cours.

La charge hydraulique spécifique s'écrit

$$H_s = h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

et représente l'énergie totale du fluide à une cote donnée (l'énergie potentielle n'est pas prise en compte). En remaniant l'équation de la conservation de la charge totale, on peut écrire

$$(h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2}) = (h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}) - (y_2 - y_1),$$

ou encore

$$H_{s2} = H_{s1} - (y_2 - y_1).$$

La différence de charge spécifique entre les points 1 et 2 est donc égale à la hauteur de la marche (c.-à-d. à la différence d'énergie potentielle entre les deux points). Il suffit maintenant de lire sur le diagramme la valeur de h_2.

Pour cela, on adimensionalise les différentes variables d'interêt en les divisant par la hauteur critique h_c :

$$\xi_1 = \frac{h_1}{h_c} = 2,30 \;;$$

$$H_{*1} = \frac{H_{s1}}{h_c} = 2,39 \;;$$

$$H_{*2} = H_{s1}^{*} - \frac{y_2 - y_1}{h_c} = 1,89.$$

.
Par lecture graphique, on a $\xi_2 = 1,7$ ou $\xi_2 = 0,6$, soit $h_2 = 0,5$ m ou $h_2 = 0,2$ m (en multipliant par h_c). La première solution est la bonne, car pour la seconde si on suit la courbe cela voudrait dire au'il y aurait un gain d'énergie spécifique (car on remonte la courbe du diagramme pour arriver à H_{*2}). Or un gain d'énergie spécifique (donc gain d'énergie piézométrique ou cinétique) veut dire une perte d'énergie potentielle donc une diminution de la cote y, ce qui n'est pas le cas.

On retrouve le même résultat en résolvant l'équation du troisième degré (tirée de l'équation de la courbe)

$$H^*_{s2} = \xi_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_2^2}$$

pour ξ_2.

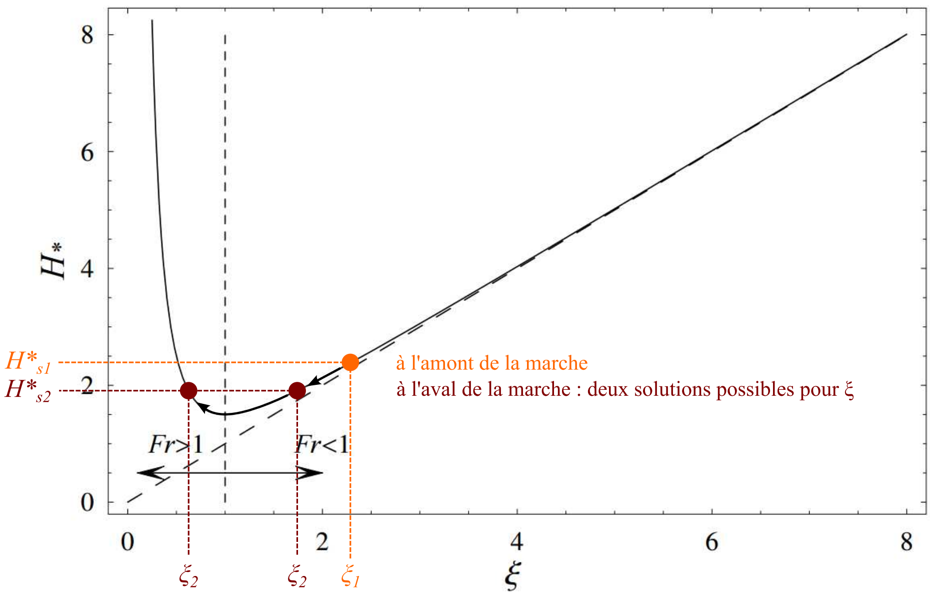

Figure 2 : variation de la charge spécifique au passage de la marche.

Exercice 4

1. $B = 13$ m, $\chi = 16,31$ m, $S = 36$ m^2 et $R_H = 2,21$ m.
2. L'écoulement étant permanent uniforme, la loi de Manning-Strickler donne
$$Q = SR_H^{2/3}\sqrt{i}K.$$
En résolvant pour i on trouve $i = 1,7 \cdot 10^{-3}$. La pente est de $0,17$ %.
3. L'écoulement étant permanent uniforme, la hauteur d'eau h dans le canal est égale à la hauteur normale h_n. On a donc $h_n = 4$ m. La formule $h_n = (q/(K\sqrt{i}))^{3/5}$ n'est valide que pour des canaux infiniment larges (c.-à-d. lorsque B est très grand devant h), ce qui n'est pas le cas ici.
4. $\mathrm{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh} = Q/(S\sqrt{gh}) = 0,44$. Puisque $\mathrm{Fr} < 1$, le régime est subcritique (fluvial).
5. La hauteur critique h_c est la hauteur d'eau quand $\mathrm{Fr} = 1$. Puique l'expression de Fr en fonction de h est ici
$$\mathrm{Fr} = \frac{Q}{(bh + h^2)\sqrt{gh}},$$
on a
$$\frac{Q}{(bh_c + h_c^2)\sqrt{gh_c}} = 1 \text{ ou encore } h_c^{5/2} + bh_c^{3/2} - \frac{Q}{\sqrt{g}} = 0.$$
En résolvant cette équation pour h_c avec la méthode de Newton, on trouve $h_c = 2,60$ m.
Puisque $h > h_c$, le régime est subcritique. Ce résultat etait attendu au vu de la réponse à la question précédente.

Exercice 5

Le canal est de section rectangulaire. Puisque

$$\mathrm{Fr} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{Q}{S\sqrt{gh}} = \frac{Q}{Bh\sqrt{gh}},$$

on a

$$Q = Bh\sqrt{gh}\mathrm{Fr}.$$

En égalisant les débits des sections amont et aval, on obtient

$$B_1 h\sqrt{gh}\mathrm{Fr}_1 = B_2\frac{h}{2}\sqrt{g\frac{h}{2}}\mathrm{Fr}_2.$$

En résolvant pour B_2 on trouve $B_2 = 1,89$ m.

Exercice 6

Rappel : on note h_n la hauteur normale, h_c la hauteur critique, $\bar{u}$ la vitesse moyenne de l'écoulement, S la section mouillée, χ le périmètre mouillé et R_H le rayon hydraulique.

1. La formule généralisée de Keulegan permet d'exprimer la contrainte à la paroi τ_p (c.-à.-d. le frottement au fond) en fonction de la hauteur d'eau h et de la vitesse moyenne de l'écoulement $\bar{u}$:

   $$\tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2(\frac{11h}{k_s})}\varrho\bar{u}^2.$$

   En régime permanent uniforme, le frottement au fond reprend le poids de la colonne d'eau (qui est la force motrice de l'écoulement) et on peut écrire que $\tau_p = \varrho g R_h \sin\theta \approx \varrho g R_H i$ pour des pentes faibles, avec θ l'angle du fond avec l'horizontale et i la pente du fond. Ici, on ne peut pas faire l'approximation $R_H \approx h$ car le canal ne peut pas être considéré comme infiniment large.

   Pour $h = h_0$, on a $\bar{u} = Q/Bh_0$ et $R_H = h_0B/(2h_0 + B)$. On peut donc écrire

   $$\varrho g R_H i = \frac{\kappa^2}{\ln^2(\frac{11R_H}{k_s})}\varrho\frac{Q^2}{B^2h_0^2},$$

   ou encore

   $$k_s = 11R_H \exp\left(\pm\sqrt{\frac{\kappa^2}{gR_Hi}\frac{Q^2}{B^2h_0^2}}\right).$$

   On trouve $k_s = 1,56$ m (l'autre solution de l'équation, $k_s = 147,44$ m, n'est pas réaliste, on rappelle que $k_s \approx 2d_{90}$).

   On remarque que $h/k_s < 10$. La formule généralisée de Keulegan est donc valide dans notre cas. Cependant, il faut garder à l'esprit que cela ne signifie pas qu'elle est forcément la loi la plus adaptée.
2. D'après la loi de Manning-Strickler, $Q = SR_H^{2/3}\sqrt{i}K$. Ici, $S = Bh_0$ et $R_H = h_0B/(2h_0+B)$. En résolvant pour K on trouve $K = 16,5$ m$^{1/3}$s^{-1}. Cette valeur indique que le canal est très rugueux.
3. En utilisant $k_s = 1,56$ m et $K = 16,5$ m$^{1/3}$s^{-1} on trouve

   $$Q_1 = \sqrt{\frac{B^2h_1^2gR_Hi\ln^2(\frac{11R_H}{k_s})}{\kappa^2}} = 17,1 \text{ m}^3/\text{s}$$

   pour la formule généralisée de Keulegan et

   $$Q_1 = KR_H^{2/3}\sqrt{i}Bh_1 = 16,1 \text{ m}^3/\text{s}$$

   pour la loi de Manning-Strickler.

4. On trouve
$$\mathrm{Fr} = \frac{Q_1}{Bh_1\sqrt{gh_1}} = 0,11$$
qui indique un écoulement subcritique (fluvial) et
$$\mathrm{Re} = \frac{4R_H\bar{\mathrm{u}}}{\nu} = 5 \cdot 10^9$$
qui indique un écoulement turbulent.
5. Le débit dans chacun des canaux secondaires vaut $Q_1/2$. En appliquant la loi de Manning-Strickler dans un des canaux secondaires on peut donc écrire
$$\frac{Q_1}{2} = KR_H^{2/3}\sqrt{i_s}Bh_2.$$
En exprimant R_H en fonction de h_2 et en résolvant pour h_2, on trouve $h_2 = 3,73$ m.
6. En partant de la définition de la hauteur critique et de la formule du nombre de Froude on trouve
$$h_c = \left(\frac{Q_1/2}{B\sqrt{g}}\right)^{2/3} = 0,64 \text{ m}.$$
On remarque que $h_2 > h_c$ dans les canaux secondaires, ce qui indique que le régime est subcritique (fluvial). Le régime ne change donc pas du canal principal aux canaux secondaires. Il n'y a ni chute (passage de fluvial à torrentiel) ni ressaut hydraulique (passage de torrentiel à fluvial).
7. Doivent figurer sur le schéma la hauteur d'eau h (c.-à.-d. la surface libre), la hauteur normale h_n et la hauteur critique h_c pour chaque bief ; ainsi que les éventuels ouvrages hydrauliques et ressauts hydrauliques. Ici, de l'amont vers l'aval,
   — $h = h_n$ loin de l'embranchement (régime permanent uniforme) ;
   — $h_c < h < h_n$ à l'approche de l'embranchement (la hauteur diminue mais il n'y a pas de changement de régime, c.-à.-d. que h ne croise pas h_c) ;
   — après le changement de pente, h tend vers la nouvelle valeur de h_n (le régime redevient permanent uniforme loin de l'embranchement).

   Puisque le régime est subcritique (fluvial) dans les deux biefs, h et h_n sont toujours au dessus de h_c.

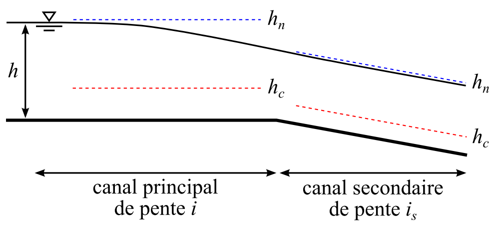

Figure 3 : courbe de remous qualitative au passage du canal principal aux canaux secondaires.

8. Par soucis de simplification, on note ici Q le débit, h la hauteur d'eau et i la pente dans chacun des canaux secondaires.

   Dans le cas de la section trapézoidale on a

   $S = h(b + 3h)$ pour la section mouillée,

   $\chi = b + 2h\sqrt{10}$ pour le périmètre mouillé et

   $R_H = \frac{h(b+3h)}{b+2h\sqrt{10}}$ pour le rayon hydraulique.

   La loi de Manning-Strickler permet d'écrire
$$Q^2 - S^2R_H^{4/3}K^2i = 0$$

On note $f(h)$ cette fonction. La solution peut être approximée par la méthode itérative de Newton qui dit que

$$h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)}.$$

On calcule donc $f'(h)$:

$$f'(h) = -2\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}h} \cdot SR_H^{4/3}K^2 i - \frac{4}{3}S^2\frac{\mathrm{d}R_h}{\mathrm{d}h}R_h^{1/3}K^2 i$$

d'où

$$f'(h) = -K^2 iS\left(2\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}h}R_H^{4/3} + \frac{4}{3}S\frac{\mathrm{d}R_h}{\mathrm{d}h}R_h^{1/3}\right)$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}h} = b + 6h$$

et

$$\frac{\mathrm{d}R_h}{\mathrm{d}h} = \frac{b^2 + 6hb + 12h^2\sqrt{10} - 6h\sqrt{10}}{(b + 2h\sqrt{10})^2}.$$

La valeur initiale h_0 de h est obtenu avec l'hypothèse d'un canal infiniement large ($R_h \approx h$) et d'une section rectangulaire simple ($S = bh$). Pour $Q = 8$ m^3/s, $K = 16,5$ m$^{1/3}$s^{-1}, $i = 0,01$ et $b = 3$ m, on trouve

$$h_0 = \left(\frac{Q^2}{b^2K^2 i}\right)^{3/10} = 1,38 \text{ m}.$$

On iterre ensuite jusqu'à convergence de h_{n+1} :

$$h_1 = h_0 - \frac{f(h_0)}{f'(h_0)} = 1,1335 \text{ m},$$

$$h_2 = h_1 - \frac{f(h_1)}{f'(h_1)} = 1,0695 \text{ m},$$

$$h_3 = 1,0751 \text{ m}, \ h_4 = 1,0741 \text{ m, etc.}$$

Astuce : il est utile d'utiliser la touche ANS de sa calculatrice à la place de h pour automatiser le calcul : $>> ANS - f(ANS)/f'(ANS)$.

h converge vers 1,07 m. Le nombre de Froude vaut 0,37, le régime est subcritique (fluvial).