Chapitre 2 : similitude

Mécanique des fluides

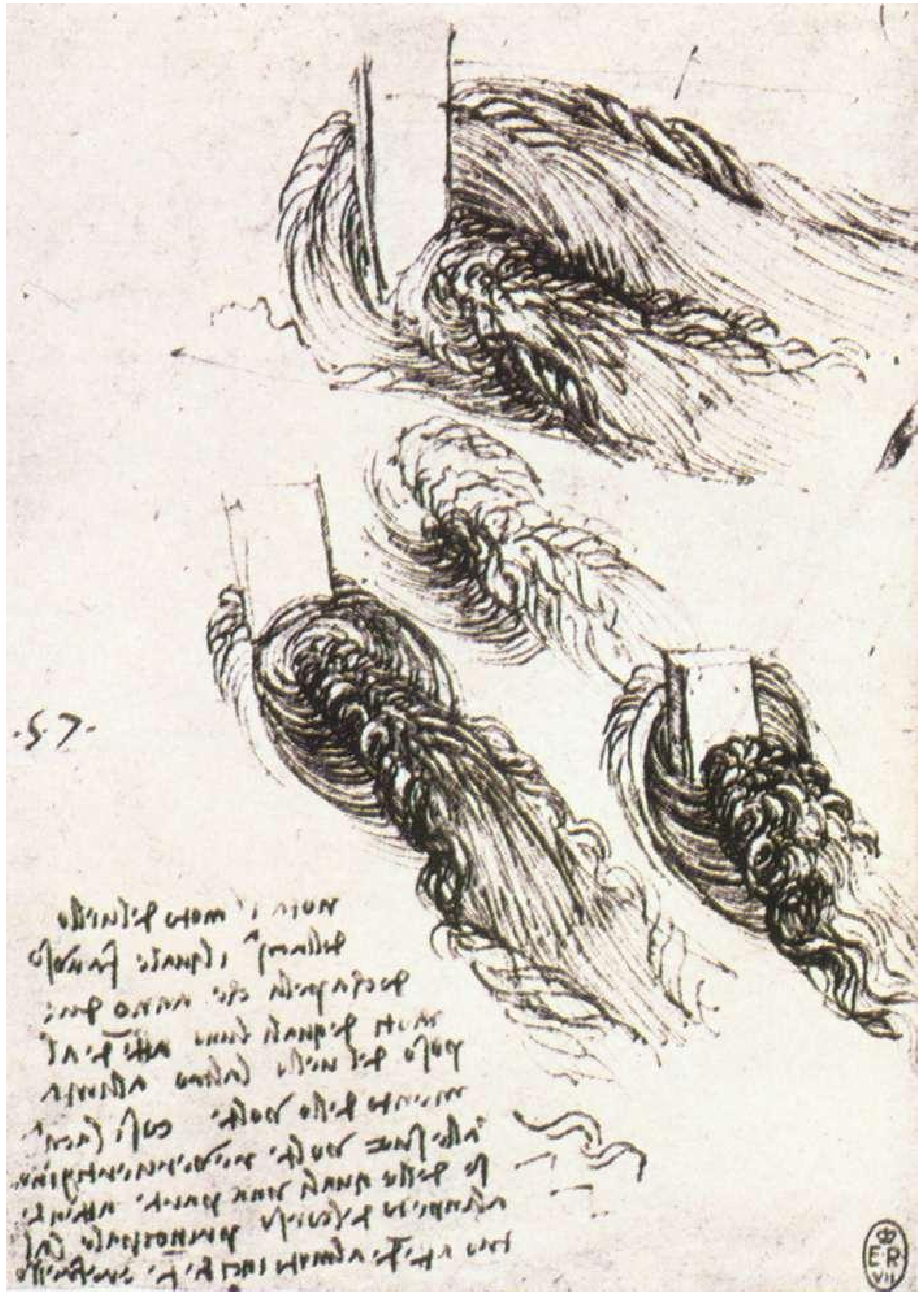
Christophe Ancey

Chapitre 2 : similitude

Plan du chapitre

- Théorie de la similitude
- Unités de mesure
- Principaux nombres adimensionnels
- Méthode de Rayleigh
- Théorème de Vaschy-Buckingham
- Applications en ingénierie

Un petit quiz pour s'échauffer



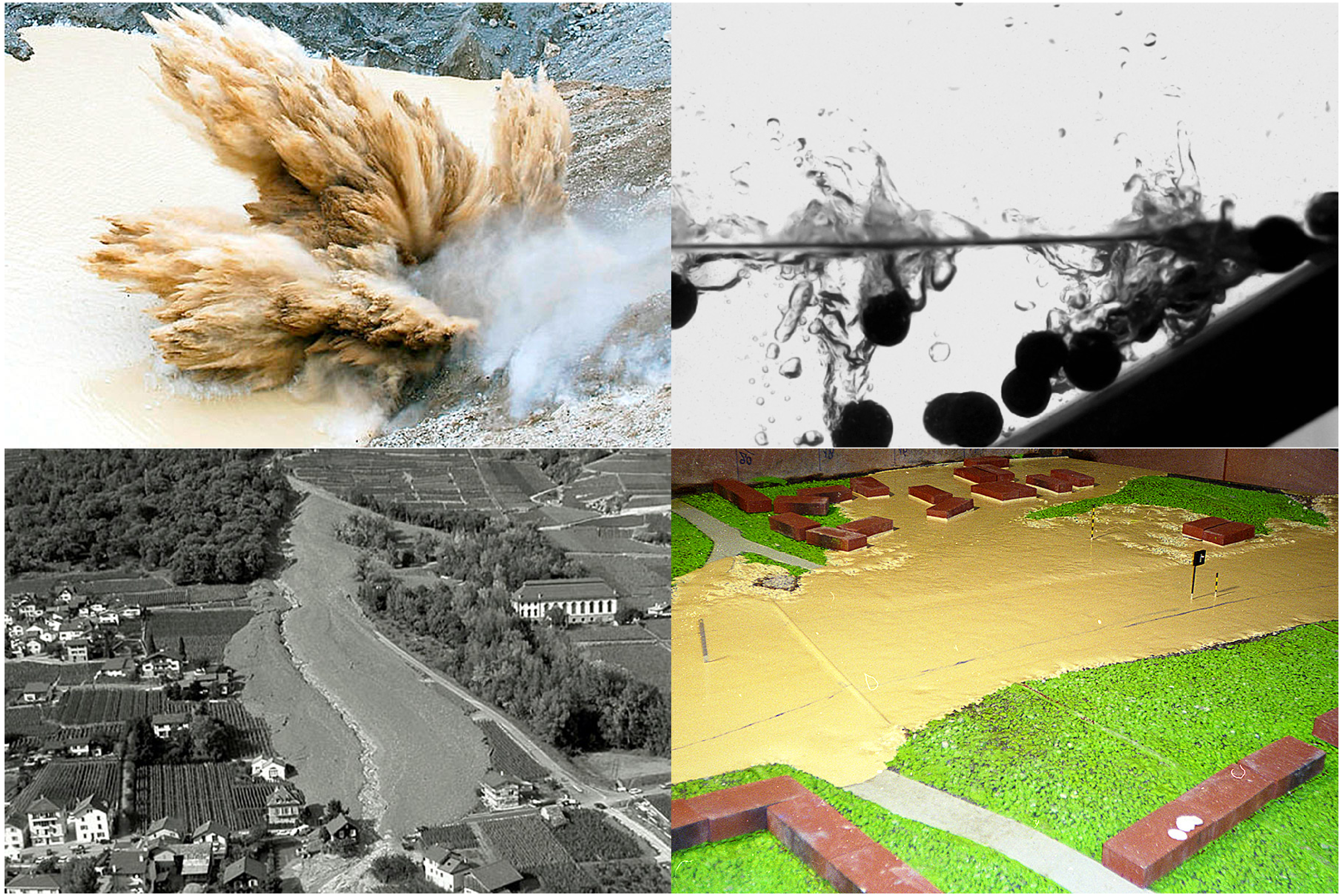
1. Si je réalise une expérience d'écoulement à l'échelle du 1 : 10 et que je mesure la vitesse, que vaut la vitesse réelle (à l'échelle 1) ?
   - le rapport géométrique étant de 10, la vitesse sera 10 fois plus grande que celle mesurée sur le modèle réduit ?
   - on ne peut pas répondre, il faudrait étudier la relation entre les équations du mouvement aux deux échelles ?
2. Que vaut l'unité Pa (pascal) dans le système international ?
   - 1 Pa $= 1$ kg$\cdot$m$^{-1}\cdot$s^{-2}
   - 1 Pa $= 1$ kg$\cdot$m$\cdot$s^{-2} ?

Théorie de la similitude

Une théorie utile pour :

- proposer des nombres adimensionnels ;
- simplifier les équations ;
- diminuer le nombre de paramètres pertinents pour l'étude d'un phénomène ;
- établir les critères de similitude entre des phénomènes à différentes échelles.

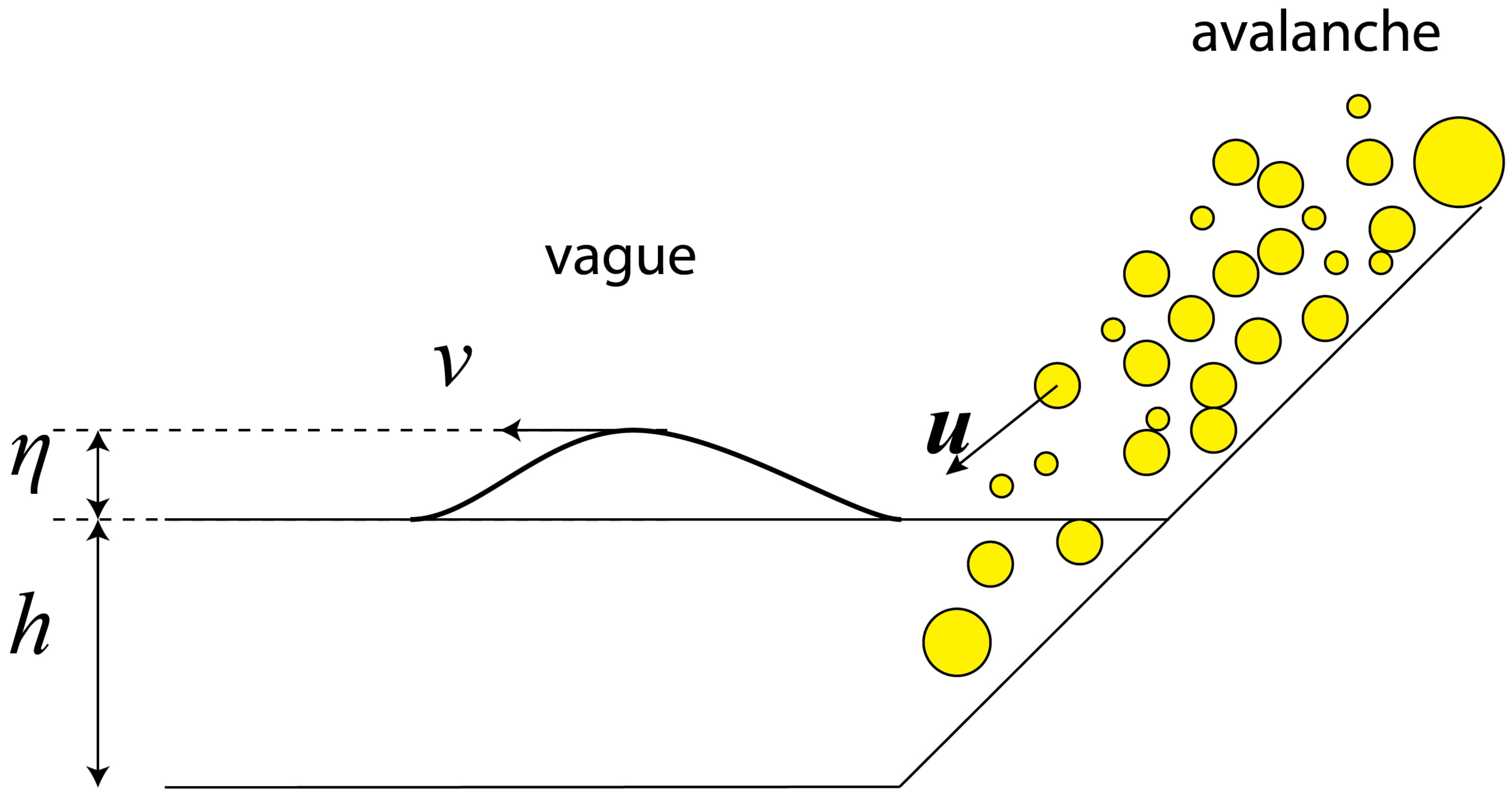
Exemples pratiques : modèles réduits

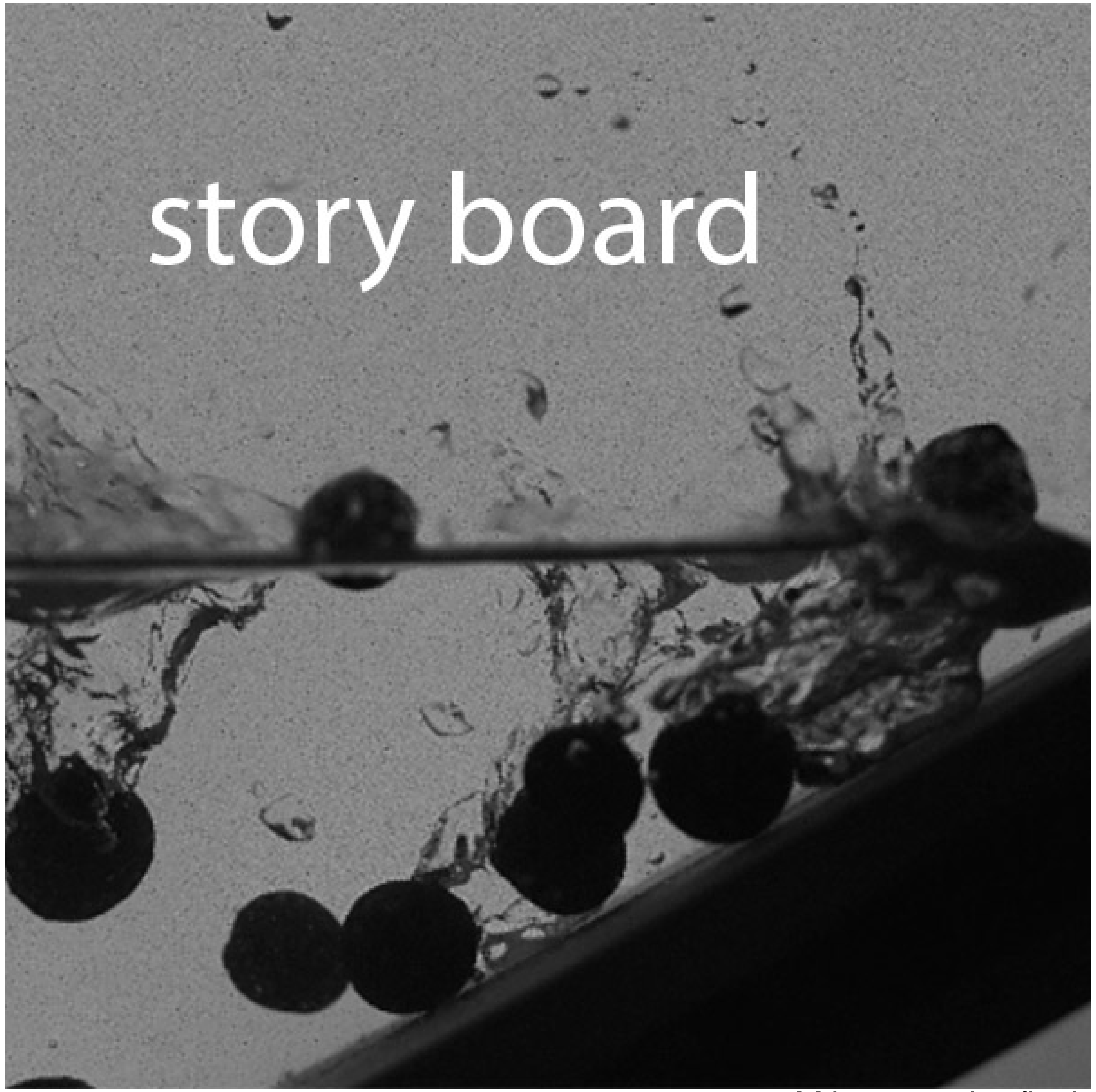


Similitude géométrique : transformation isomorphe

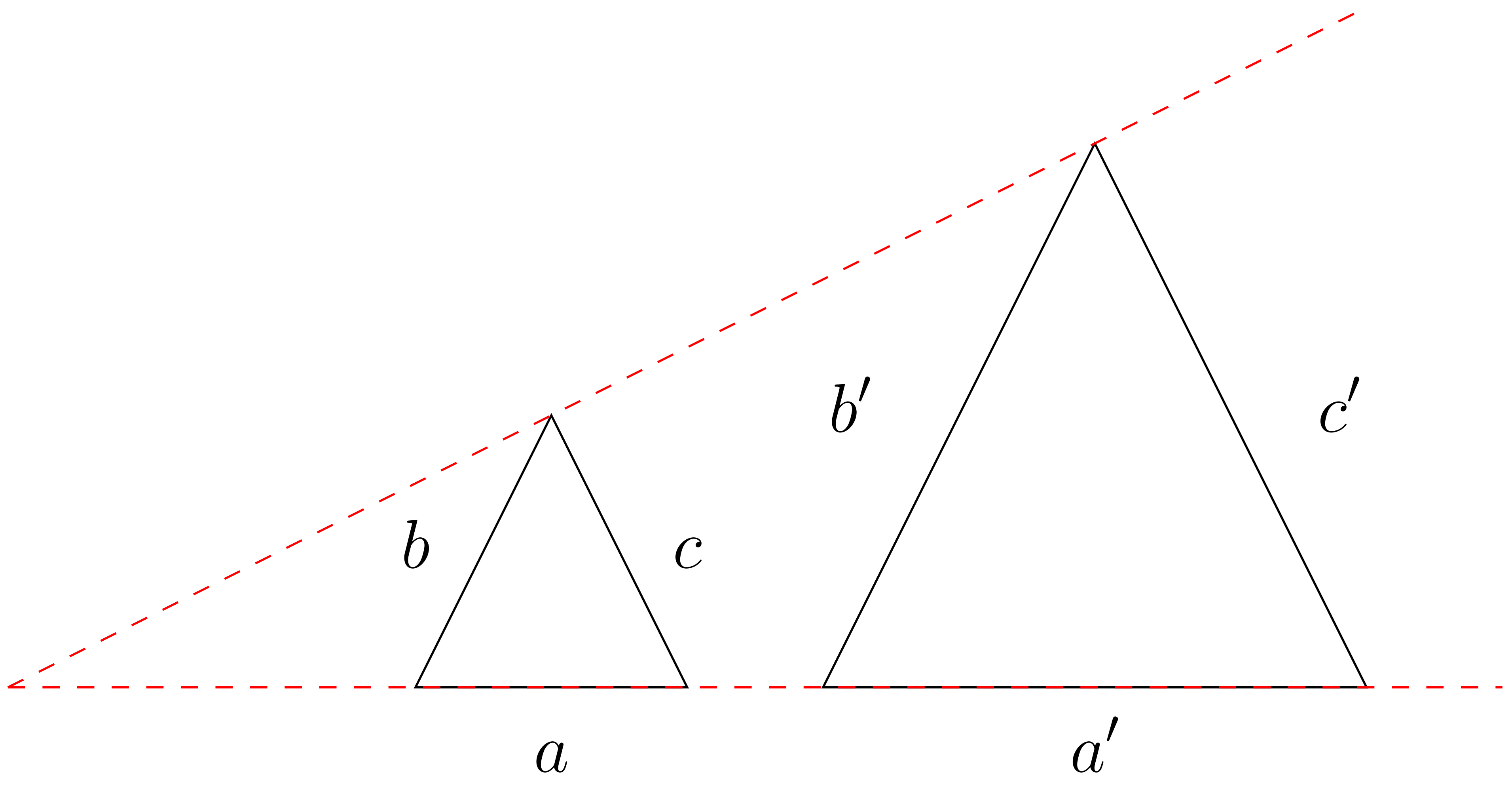
Que se passe-t-il quand une avalanche entre dans un lac d'accumulation ?

Problématique





Similitude géométrique : transformation isomorphe

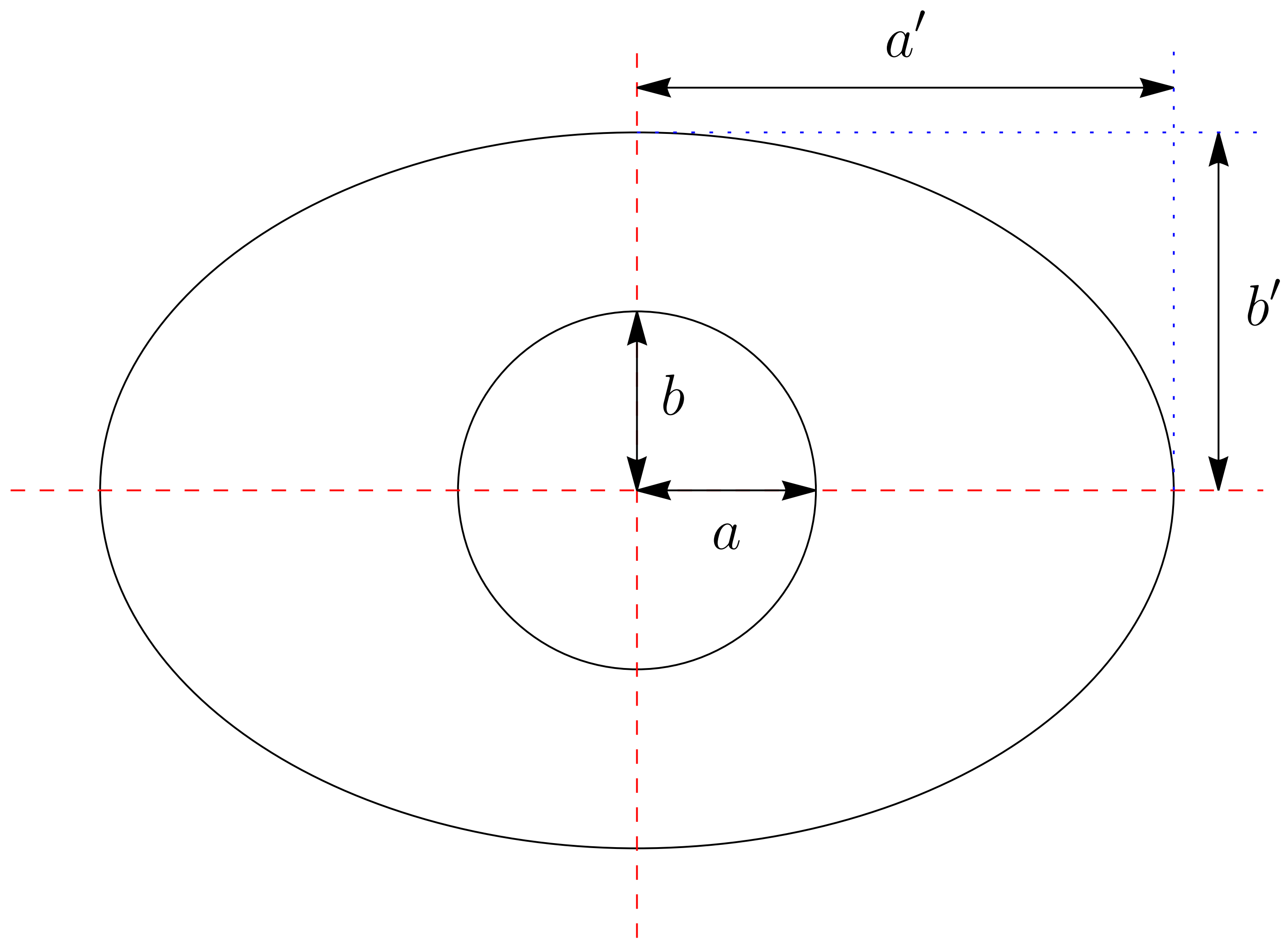


Les triangles sont *similaires* géométriquement si :

$$\lambda = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

avec λ le rapport de similitude, le facteur d'échelle, ou l'échelle. On parle de *transformation isomorphe*.

Similitude géométrique : transformation affine

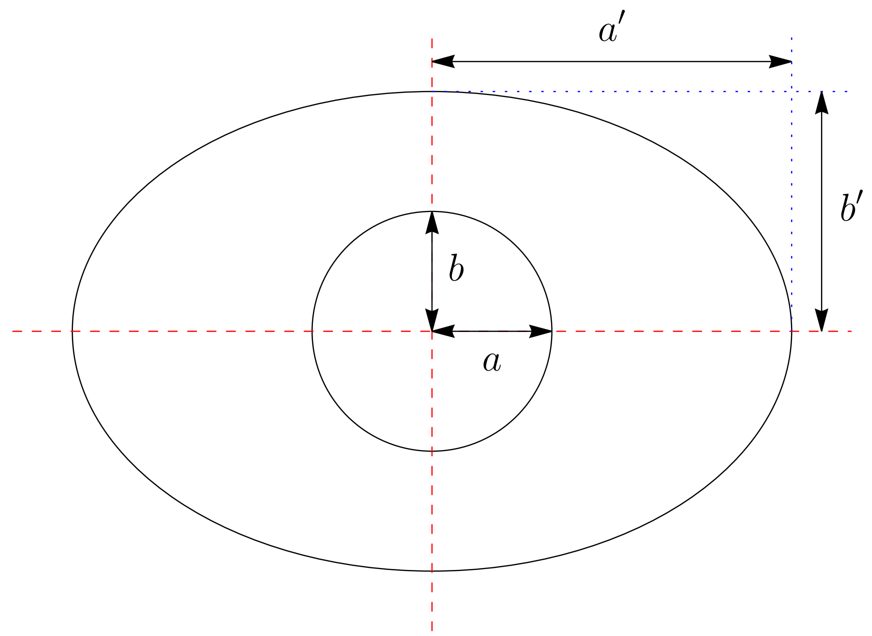


Généralisation : une transformation affine conserve les rapports de longueur, avec des rapports différents selon les axes

$$\lambda_x = \frac{a'}{a} \text{ et } \lambda_y = \frac{b'}{b},$$

avec λ_x et λ_y les rapports selon l'horizontale et la verticale.

Similitude géométrique : invariant



Lors d'une transformation affine,

- certaines quantités sont conservées. On parle d'*invariant*. Par exemple le rapport de la surface S et du produit des demis axes :

$$s = \frac{S}{ab} = \frac{S'}{a'b'} = \pi.$$

- d'autres quantités ne le sont pas. Par exemple le périmètre

$$P = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

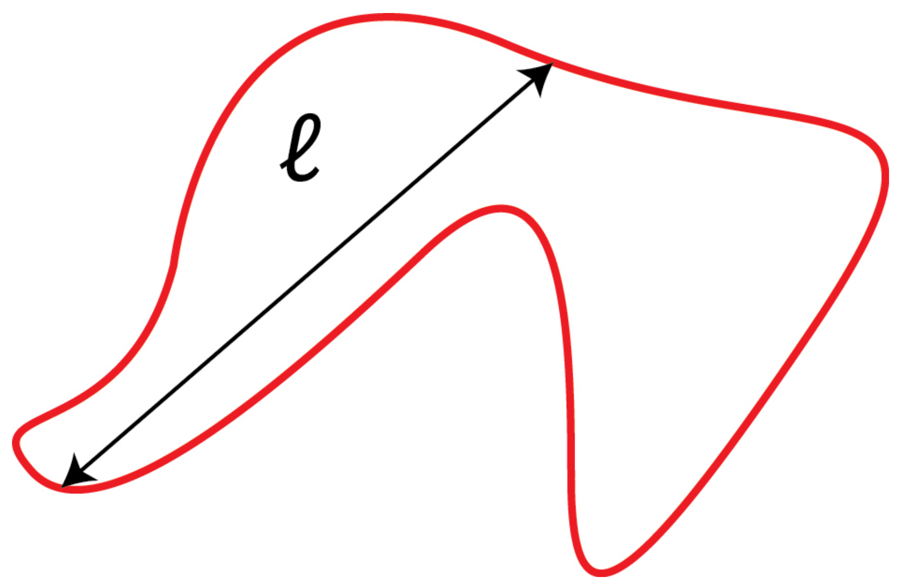
Similitude géométrique : loi d'échelle

Pourquoi certaines quantités se conservent et d'autres non ?

On parle de *loi d'échelle* pour définir la relation de proportionnalité entre une certaine grandeur et l'échelle (ici géométrique) du problème :

- le périmètre $P \propto \ell$,
- la surface $S \propto \ell^2$,
- le volume $V \propto \ell^3$,

avec ℓ une *échelle caractéristique* de l'objet.



Similitude géométrique : loi d'échelle

Dans le cas de la transformation cercle (rayon $a = b$) $\rightarrow$ ellipse

$$P' = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a'^2 \cos^2\theta + b'^2 \sin^2\theta} \mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\lambda_x^2 \cos^2\theta + a^2\lambda_y^2 \sin^2\theta} \mathrm{d}\theta.$$

En introduit $r = \lambda_y/\lambda_x$ et $P = 2\pi a$, on peut écrire :

$$\frac{P'}{P} = f(\lambda_x, \lambda_y) = \frac{2\lambda_x}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{2\lambda_x}{\pi}\mathrm{E}(1 - r^2),$$

avec E une fonction spéciale dite intégrale elliptique complète. Le périmètre P' est donc proportionnel à P via un coefficient f qui dépend des deux paramètres d'échelle λ_x et λ_y.

$\leadsto$ La théorie de la similitude cherche à prédéterminer les dépendances entre variables et échelle(s) du problème.

Unités physiques du système international

On utilise les unités du système international ou système métrique décimal. Ce système repose sur 7 unités fondamentales :

- longueur : le mètre [m] ;
- masse : le kilogramme [kg] ;
- temps : la seconde [s]
- intensité électrique : l'ampère [A] ;
- température : le kelvin [K] ;
- intensité lumineuse : le candela [cd] ;
- quantité de matière : la mole [mol].

Symboles usuels des mesures

Chaque mesure est associée à un symbole, dont la typographie a été fixée :

- force : le newton [N] ($1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$) ;
- pression : le pascal [Pa] ($1\ \text{Pa} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$) ;
- vitesse : [m/s] ;
- masse volumique : [kg/m^3] ;
- accélération : [m/s^2] ;
- surface : [m^2] ;
- débit : [m^3/s] ;
- énergie : le joule ($1\ \text{J} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$) ;
- puissance : le watt ($1\ \text{W} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3$).

Comment retrouver les unités physiques fondamentales ?

On peut utiliser un petit moyen mnémotechnique pour décomposer une unité physique quelconque en unités fondamentales. Prenons l'exemple du joule ; le joule sert comme unité pour l'énergie et le travail. Le travail d'une force, c'est une force multipliée par une distance, donc on a :

$$\text{travail} = \text{force} \times \text{longueur} = \text{N} \cdot \text{m} = (\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2) \times \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Nombres adimensionnels : le nombre de Reynolds

Le *nombre de Reynolds* est défini comme

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho u \ell}{\mu},$$

avec ℓ une échelle de longueur, u une échelle de vitesse, μ la viscosité du fluide, et ϱ sa masse volumique. Le nombre de Reynolds est le plus souvent interprété comme le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité. Il sert notamment à classer le régime d'écoulement en distinguant :

- les écoulements laminaires $(\mathrm{Re} \ll 1)$;
- les écoulements turbulents $(\mathrm{Re} \gg 1)$.

Si on introduit ν la viscosité cinématique du fluide ($\nu = \mu/\varrho_f$ avec ϱ_f la masse volumique du fluide), alors on a aussi : $\mathrm{Re} = u\ell/\nu$.

Nombres adimensionnels : le nombre de Stokes

Le *nombre de Stokes* est défini comme

$$\mathrm{St} = \frac{t_p}{t_f},$$

avec t_p le temps de relaxation de la particule (le temps typique de variation de la vitesse quand on perturbe l'état d'équilibre de la particule) et le temps caractéristique du fluide (l'échelle de temps sur laquelle le fluide s'ajuste à tout changement de la particule). Ce nombre sert à quantifier le couplage entre phases dans les suspensions :

- $\mathrm{St} \ll 1$: la phase solide est entièrement gouvernée par la phase fluide ;
- $\mathrm{St} \gg 1$: les deux phases sont découplées.

Nombres adimensionnels : le nombre de Froude

Le *nombre de Froude* est défini comme

$$\mathrm{Fr} = \frac{u}{\sqrt{gh}},$$

avec h une échelle de hauteur, u une échelle de vitesse, g l'accélération de la gravité. Le nombre de Froude est le plus souvent interprété comme le rapport de l'énergie cinétique sur l'énergie potentielle. Il sert notamment en hydraulique à classer le régime d'écoulement en distinguant :

- $\mathrm{Fr} > 1$ les écoulements supercritiques (appelés aussi torrentiels) ;
- $\mathrm{Fr} < 1$: les écoulements subcritiques (appelés aussi fluviaux).

Nombres adimensionnels : le nombre de capillarité

le *nombre de capillarité* est défini comme

$$\mathrm{Ca} = \frac{\mu u}{\gamma}$$

avec u une échelle de vitesse, μ la viscosité du fluide, et γ la tension de surface. Ce nombre sert à évaluer les effets de tension de surface, par exemple lorsqu'on étale un fluide ou bien dans un milieu poreux :

- $\mathrm{Ca} \ll 1$, les effets de tension l'emportent sur les forces visqueuses ;
- $\mathrm{Ca} \gg 1$, la viscosité est tellement grande que les effets de tension de surface à l'interface sont négligeables.

Le nombre de Bond, de Weber, et de Kapitza sont également des variantes courantes du nombre de capillarité.

Nombres adimensionnels : interprétation physique

Tout nombre sans dimension peut être interprété comme un rapport soit de longueurs, soit de forces (contraintes), soit de temps, p. ex. :

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho u \ell}{\mu} = \frac{\varrho u^2}{\mu \frac{u}{\ell}} \propto \frac{\text{inertie}}{\text{contrainte de cisaillement}}.$$

On peut également, dans le cas particulier du nombre de Reynolds, interpréter le nombre sans dimension comme un rapport de temps caractéristiques :

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho u \ell}{\mu} = \frac{u \ell^2}{\ell \, \nu} = \frac{t_{turb.}}{t_{ec.}},$$

avec $t_{ec.} = \ell / u$ le temps de relaxation de la particule ou de la structure turbulente (temps représentatif mis par la particule pour parcourir une distance égale à son diamètre) et $t_{turb.} = \ell^2 / \nu$ un temps caractéristique de diffusion de la turbulence.

Nombres adimensionnels : interprétation physique

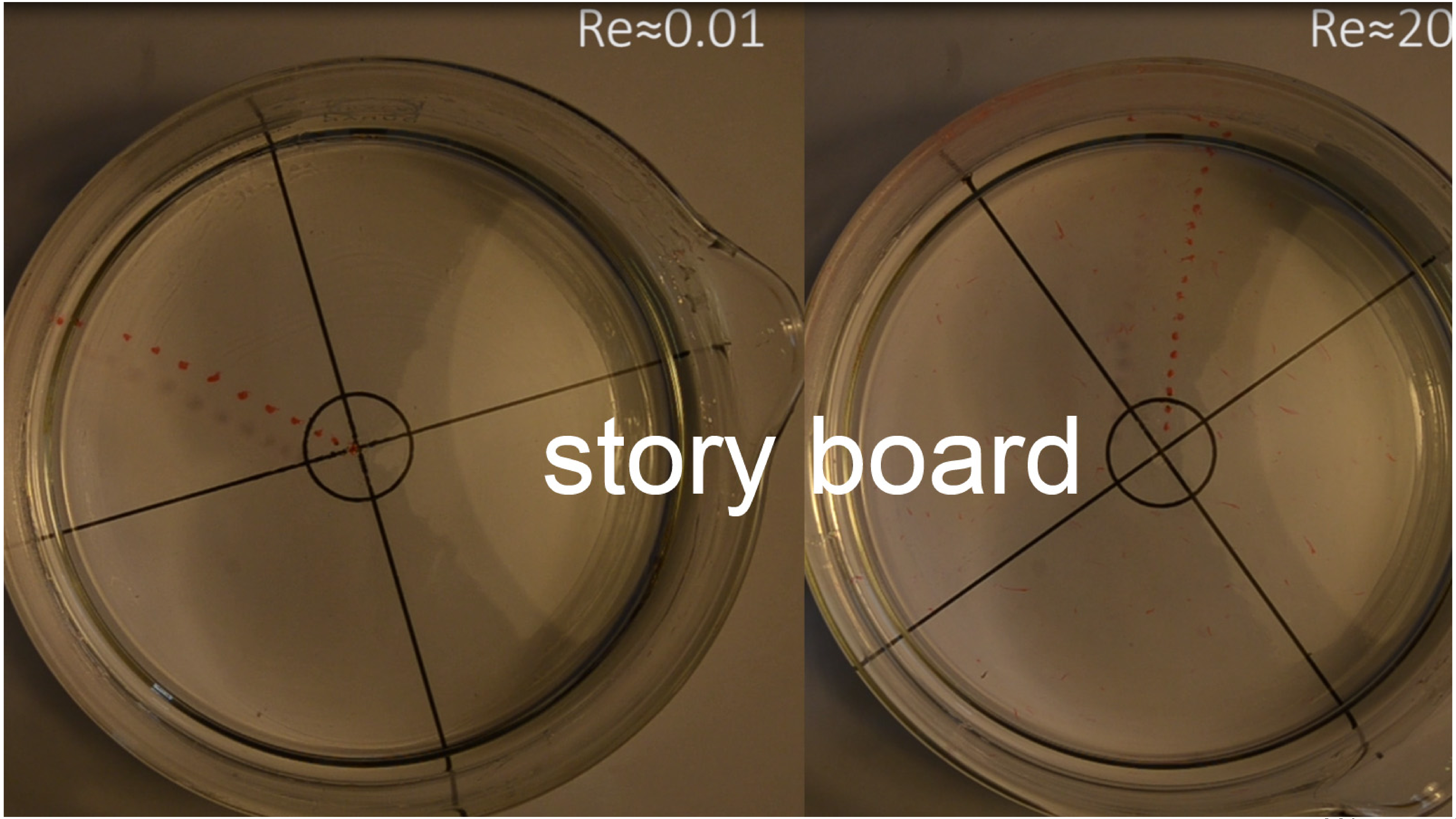
On peut montrer qu'il s'agit aussi d'un rapport de longueurs caractéristiques :

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho u \ell}{\mu} = \ell \frac{u}{\nu} = \frac{\ell_{part.}}{\ell_{turb.}},$$

avec $\ell_{part.} = \ell$ la longueur caractéristique de la particule et $\ell_{turb.} = \nu/u$ la taille caractéristique des tourbillons de la turbulence.

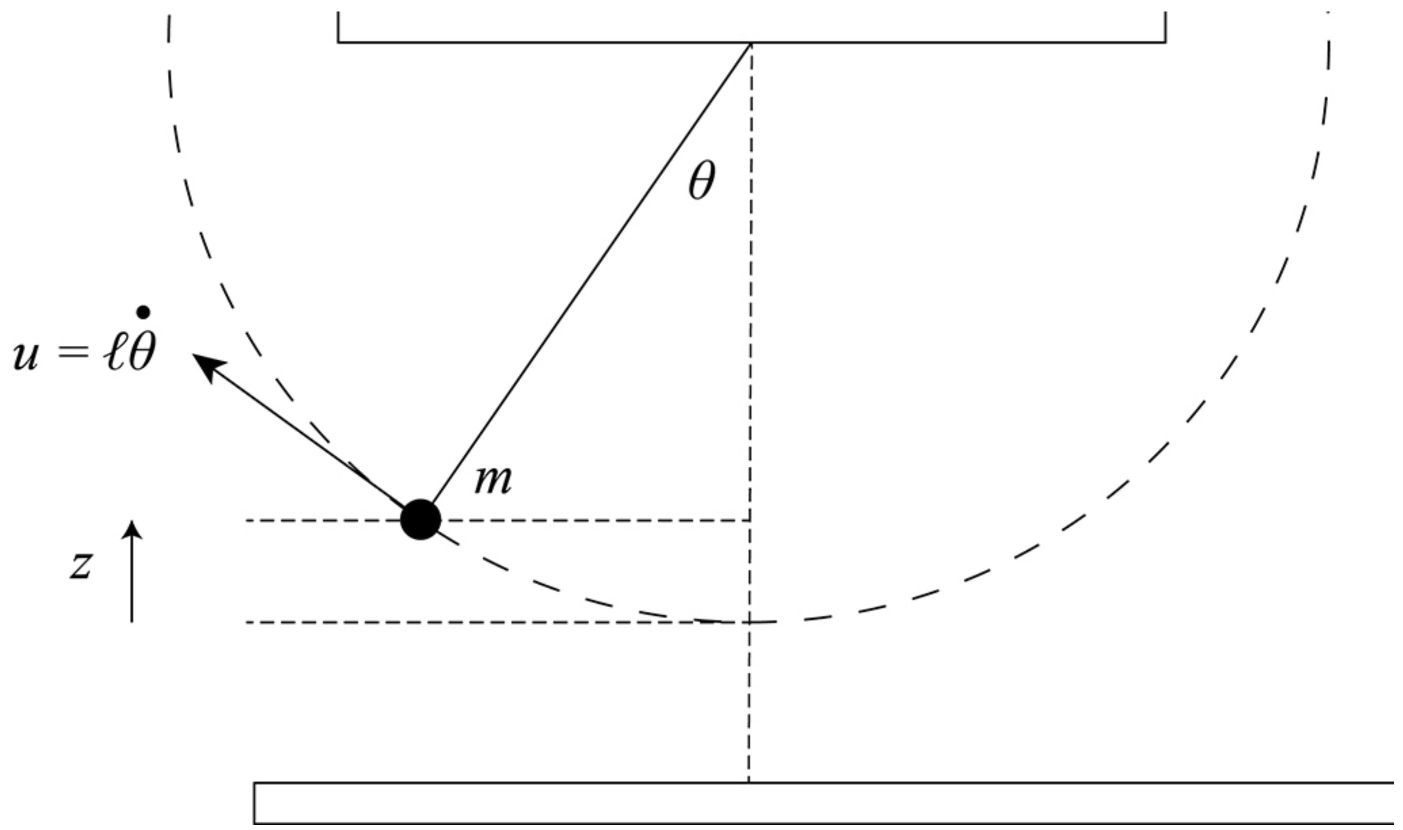
$\leadsto$ **À noter** : les échelles sont en général des grandeurs macroscopiques caractérisant le système étudié. Par exemple, on parle de *nombre de Reynolds macroscopique* ou bien de *nombre de Reynolds de l'écoulement*. Si maintenant dans cet écoulement, on étudie la sédimentation de particules fines de rayon moyen a, on introduit un *nombre de Reynolds local* appelé encore *nombre de Reynolds particulaire* : $\mathrm{Re} = u_s a/\nu$, avec u_s la vitesse de sédimentation.

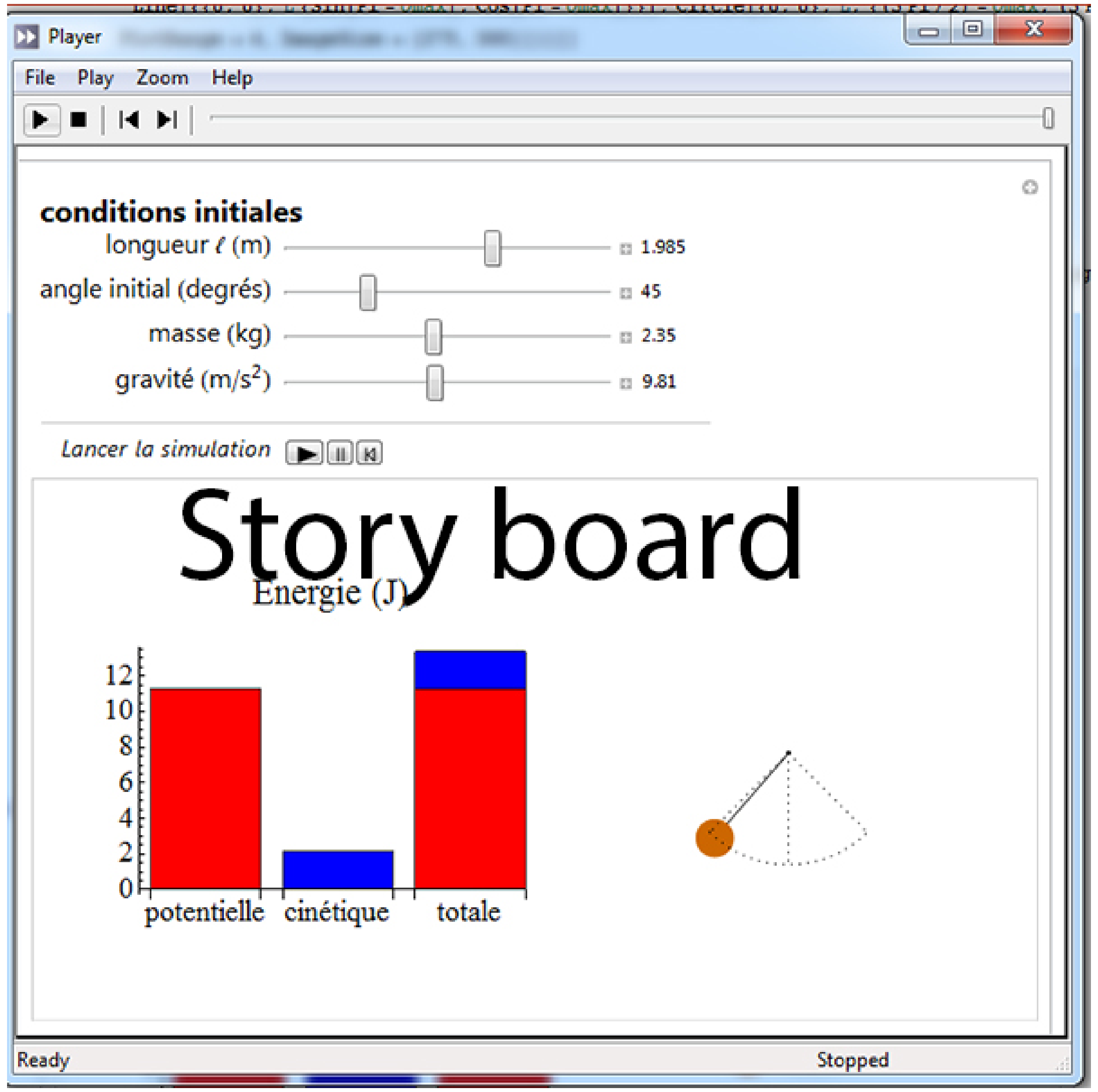
Effet du nombre de Reynolds



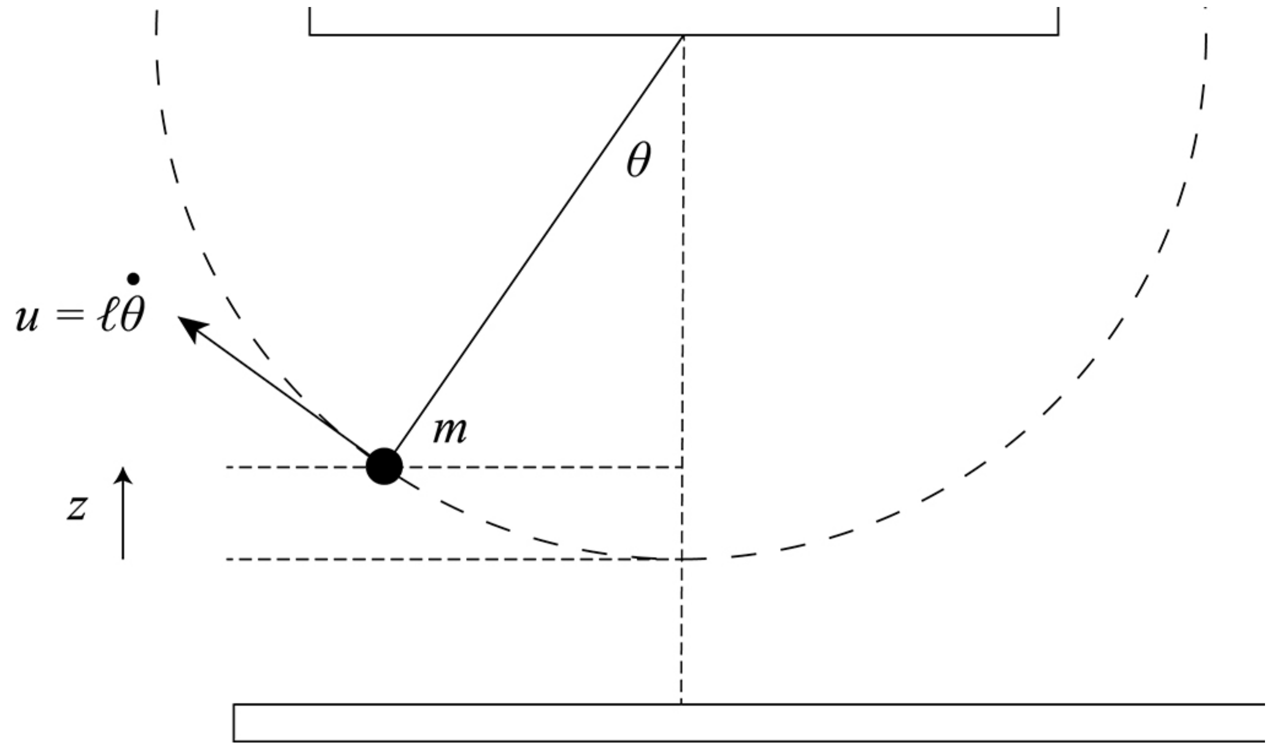
Similitude en physique

Un problème similaire aux transformations affines en géométrie... si ce n'est que l'on travaille avec des unités physiques.





Similitude en physique : exemple du pendule



Équation du mouvement : conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}mu^2 + mgz = \text{cste},$$

avec $u = \ell\dot{\theta}$, et $z = \ell(1 - \cos\theta)$, $\dot{\theta} = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. En différentiant par rapport au temps et simplifiant par m et $\dot{\theta}$, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta.$$

Similitude en physique : exemple du pendule

- Variables du problème : θ [–], longueur ℓ [m], temps t [s].
- Échelles du problème : $\Theta = \theta_0$ [–], longueur $L = \ell$ [m], période T [s].
- Constante du problème : g [m·s^{-2}].

Sous quelle condition l'équation du mouvement est-elle invariante par changement d'unité

$$\ell \to \lambda \ell' \text{ et } t \to \lambda^a t',$$

avec λ le rapport d'échelle des longueurs et λ^a le rapport d'échelle des temps ?

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\lambda^{2a}\mathrm{d}t'^2} = -\frac{g}{\lambda\ell'}\sin\theta.$$

On trouve :

$$a = \frac{1}{2}.$$

Similitude en physique : exemple du pendule

Deux conséquences :

- Puisque $a = 1/2$, on a :

$$\lambda = \frac{\ell}{\ell'} = \left(\frac{t}{t'}\right)^2 = \left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

  Si on connaît ce qui passe à une certaine échelle (donc les variables ℓ et T), on peut déduire ce qui se passe à une autre échelle : $T' = T\sqrt{\ell'/\ell}$.

- Si on introduit la variable adimensionnelle : $\tilde{t} = t/T$, alors

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tilde{t}^2} = -\frac{gT^2}{\ell}\sin\theta,$$

  où apparaît un nombre sans dimension :

$$\Pi = \frac{gT^2}{\ell}.$$

Similitude en physique : exemple du pendule

L'adimensionalisation de l'équation du mouvement permet de passer d'une équation dimensionnelle

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

à une équation sans dimension physique et donc invariante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tilde{t}^2} = -\Pi\sin\theta \text{ avec } \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \text{ et } \Pi = \frac{gT^2}{\ell}.$$

Le paramètre Π est une constante qui ne peut dépendre ici que de θ_0. Posons $\Pi = f^2(\theta_0)$, ce qui montre que :

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}}f(\theta_0).$$

Similitude en physique : exemple du pendule

À noter que dans la limite $\theta \ll 1$, on peut trouver une solution approchée en posant $\sin\theta \sim \theta$, soit

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tilde{t}^2} = -\Pi\theta \text{ avec } \theta(0) = \theta_0, \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0,$$

soit encore :

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\Pi}\tilde{t}\right) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\Pi}\frac{t}{T}\right) = \theta_0 \cos\left(f(\theta_0)\frac{t}{T}\right),$$

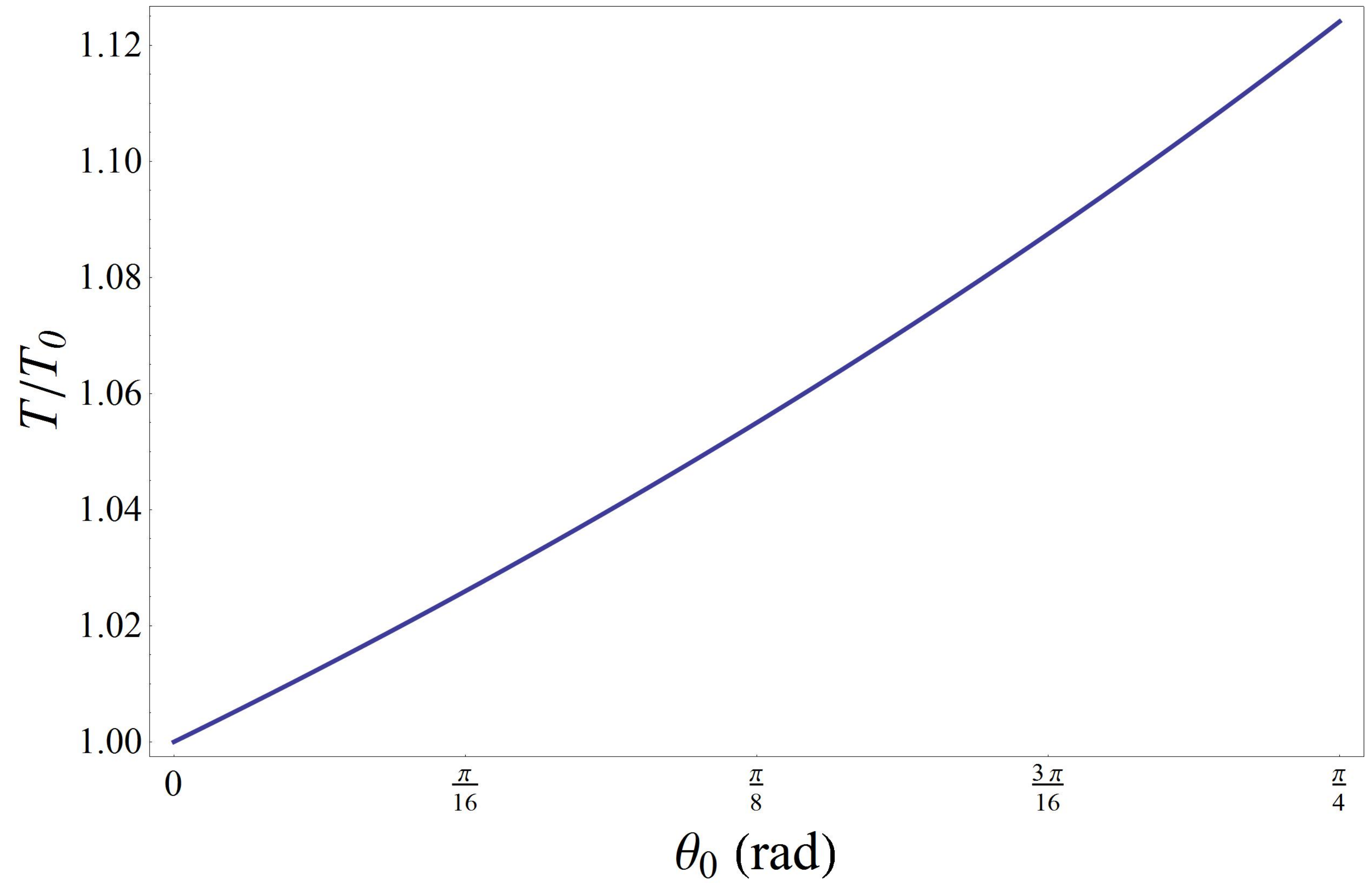
or par définition de la période $\theta = \theta_0 \cos(2\pi t/T)$, on trouve que :

$$f(\theta_0) = 2\pi \text{ quand } \theta \to 0,$$

et

$$T_0 = \lim_{\theta_0 \to 0} T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Similitude en physique : exemple du pendule



Solution analytique

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{avec} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

avec K une fonction spéciale dite *intégrale elliptique complète de première espèce*.

Similitude en physique : quelques leçons à tirer

- Les invariants (comme Π pour le pendule) sont toujours des quantités sans dimension.
- On peut simplifier considérablement l'étude d'un problème en procédant à son adimensionalisation. Toute solution peut s'écrire comme fonction de nombres adimensionnels.
- On peut définir des conditions qui permettent de considérer deux phénomènes à deux échelles comme similaires (généralisation de la notion de transformation affine en géométrie). Pour cela il faut disposer des critères de similitude (nombres sans dimension) pour passer d'une échelle à l'autre ($\Pi = cste$ pour le pendule).

$\rightsquigarrow$ **Question :** comment déterminer les bons critères de similitude ?

Méthode de Rayleigh

Supposons qu'on souhaite exprimer une variable x en fonction de n paramètres y_i. On écrit que dimensionnellement on a :

$$[x] = [y_1]^a [y_2]^b \cdots [y_n]^s,$$

où a, b, ..., s sont des coefficients à déterminer de telle sorte que le produit des unités des a_i soit cohérent avec l'unité de x.

Exemple du pendule : calculons la période des oscillations d'un pendule de longueur ℓ et de masse m dans un champ de gravité g. On pose

$$T \propto \ell^a m^b g^c.$$

Méthode de Rayleigh : exemple du pendule

Sous forme dimensionnelle :

$$[T] = [\ell]^a [m]^b [g]^c \Rightarrow s = \mathrm{m}^a \mathrm{kg}^b \left(\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right)^c .$$

On déduit pour chaque unité fondamentale :

- masse (kg) : $0 = b$;
- longueur (m) : $0 = a + c$;
- temps (s) : $1 = -2c$.

Soit $c = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, et $b = 0$. Donc :

$$T \propto \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Théorème de Vaschy-Buckingham : problématique

Nous cherchons à calculer une variable a_1 dépendant de $n-1$ autres variables indépendantes a_k. On doit résoudre un problème implicite

$$\Phi(a_1,\, a_2, \ldots,\, a_n) = 0,$$

ou bien explicite

$$a_1 = \phi(a_2,\, a_3, \cdots,\, a_n),$$

ces variables sont définies dans un système de m mesures faisant appel à p unités fondamentales D_i (en général, $p = 3$ avec comme unités fondamentales : le mètre, la seconde, le kilogramme). La question qui se pose est : de combien de nombres adimensionnels a-t-on besoin pour représenter la solution du problème ?

Théorème de Vaschy-Buckingham : énoncé

Le théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème Π) répond à cette question en affirmant que $k = n - r$ nombres sans dimension indépendants sont nécessaires, avec r le rang de la matrice dimensionnelle associée au problème. Au lieu d'étudier un problème de dimension n : $a_1 = \phi(a_2, a_3, \cdots, a_{n-1})$, on peut se ramener à un problème de dimension $k < n$ exprimé en termes de nombres sans dimension :

$$\Pi_1 = \psi(\Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_k).$$

Rappel : en algèbre linéaire, le rang d'une matrice est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants ; c'est aussi la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes (ou colonnes). En pratique, on a souvent $r = p$.

Théorème de Vaschy-Buckingham : idée de démonstration

Chaque variable a_j est dimensionnellement homogène à un produit de monômes des unités de base

$$[a_j] = D_1^{\alpha_j} D_2^{\beta_j} \dots D_p^{\gamma_j}.$$

Par exemple, lorsque $p = 3$, on a en général une longueur $D_1 = L$, une masse $D_2 = M$, et un temps $D_3 = T$ comme unités de base $[a] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$, ce qui donne pour les n variables

$$[a_1] = M^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1},$$
$$[a_2] = M^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{\gamma_2}, \dots$$

avec α_j, β_j, et γ_j des coefficients déterminés à l'avance en examinant la dimension des variables.

Théorème de Vaschy-Buckingham : idée de démonstration

Il est possible de former des nombres sans dimension en faisant des produits de monômes

$$\Pi_i = a_1^{k_1^i} a_2^{k_2^i} \dots a_n^{k_n^i}.$$

La dimension de Π_j est

$$[\Pi_j] = \left(D_1^{\alpha_1} D_2^{\beta_1} \dots D_p^{\gamma_1}\right)^{k_1^j} \left(D_1^{\alpha_2} D_2^{\beta_2} \dots D_p^{\gamma_2}\right)^{k_2^j} \dots \left(D_1^{\alpha_n} D_2^{\beta_n} \dots D_p^{\gamma_n}\right)^{k_n^j}.$$

Or on veut que $[\Pi_j] = 0$. On est donc amené à résoudre le système de p équations

$$\begin{aligned}
\text{Pour } D_1 \ &: \ 0 = \alpha_1 k_1^j + \alpha_2 k_2^j + \dots \alpha_n k_n^j, \\
\text{Pour } D_2 \ &: \ 0 = \beta_1 k_1^j + \alpha_2 k_2^j + \dots \beta_n k_n^j, \\
\vdots &= \vdots \\
\text{Pour } D_p \ &: \ 0 = \gamma_1 k_1^j + \gamma_2 k_2^j + \dots \gamma_n k_n^j.
\end{aligned}$$

Théorème de Vaschy-Buckingham : idée de démonstration

Ces équations définissent un système d'équations linéaires de p équations et n inconnues k_i^j $(1 \leq i \leq n)$. Si le déterminant

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_n \\ \vdots \\ \gamma_1 \, \gamma_2 \ldots \gamma_n \end{bmatrix}$$

est différent de 0 et le rang de cette matrice est r, alors il existe $n-r$ solutions linéairement indépendantes.

Théorème de Vaschy-Buckingham : mise en pratique

En pratique, on procède ainsi. Il faut :

1. isoler les quantités physiques du problème donné et leur nombre n ;
2. écrire les dimensions de chaque variable dans le système de base (en général, $p = 3$ unités de base sont nécessaires en mécanique) ;
3. déterminer le rang r de la matrice dimensionnelle associée (on a souvent $r = 2$ ou $r = 3$) ;
4. rechercher les $n - r$ nombres sans dimension.

$\rightsquigarrow$ On prendra soin de définir des nombres sans dimension ayant une signification physique. À noter que ces nombres sans dimension peuvent être obtenus sans passer par le théorème Π en examinant les équations du mouvement et en les rendant sans dimension.

Calcul de la force de traînée

On veut calculer la force F dite de traînée exercée par un fluide newtonien (incompressible) sur une particule sphérique de diamètre $2r$ et de masse volumique ϱ_p.

On a 5 variables : (1) la force F que l'on cherche à calculer, (2) la viscosité dynamique μ, (3) la masse volumique ϱ de l'eau, (4) le rayon de la particule r, et (5) sa vitesse relative par rapport au fluide $u = |\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_f|$. On ne prend pas en compte la masse volumique de la particule car la force exercée par le fluide ne peut pas être influencée par cette variable, mais elle l'est par les dimensions géométriques de la sphère (d'où le fait que l'on retienne r et non ϱ_p).

Calcul de la force de traînée

La première chose à faire est de déterminer les unités de ces grandeurs physiques dans le système international en ne faisant appel qu'aux grandeurs fondamentales, à savoir :

- unité de distance : le mètre [m],
- unité de temps : la seconde [s],
- unité de masse : la masse [kg].

Les unités ou dimensions physiques sont reportées dans le tableau suivant.

variable	F	u	ϱ	μ	r
unité (SI)	kg m s^{-2}	m s^{-1}	kg m^{-3}	kg m^{-1} s^{-1}	m
exposant	a	b	c	d	e

Calcul de la force de traînée

On cherche une relation générale de la forme $\psi(F,\ u,\ \varrho,\ \mu,\ r) = 0$, soit en termes dimensionnels :

$$[F]^a[u]^b[\varrho]^c[\mu]^d[r]^e = 0,$$

soit encore en se servant des unités des variables :

$$a + c + d = 0,\ a + b - 3c - d + e = 0,\ \text{et}\ -2a - b - d = 0.$$

On a 3 équations pour 5 inconnues ; on ne peut donc en déterminer que 3 et les 2 inconnues restantes doivent être considérées comme des variables libres (ou ajustables). La relation générale $\psi(F,\ u,\ \varrho,\ \mu,\ r) = 0$ de dimension 5 peut en fait se réduire à une relation de dimension 2 que l'on note génériquement sous la forme $\psi(\Pi_1,\ \Pi_2) = 0$. Les nombres Π_1 et Π_2 sont des *nombres sans dimension*.

Calcul de la force de traînée

Prenons par exemple a et d comme variables libres et déterminons les autres paramètres b, c, et e. On trouve :

$$b = -(2a + d),\ c = -(a + d),\ e = b = -(2a + d).$$

On a une infinité de choix selon la valeur de a et d, mais il faut les deux critères :

- trouver des nombres avec une signification physique ;
- trouver des nombres indépendants.

Pour Π_1, considérons par exemple $a = 1$ et $d = 0$, on a alors $b = -2$, $c = -1$, $e = -2$, soit :

$$\Pi_1 = \frac{F}{\varrho r^2 u^2}.$$

Calcul de la force de traînée

Pour Π_2, considérons par exemple $a = 0$ et $d = 1$, on a alors $b = -1$, $c = -1$, $e = -1$, soit :

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\varrho r u} = 2\frac{1}{\mathrm{Re}}.$$

Toute fonction de Π_1 et/ou Π_2 peut être utilisée pour définir des nombres sans dimension. Ainsi, arbitrairement du point de vue mathématique (mais cela a un sens physique), on définit les nombres sans dimension utiles pour notre problème :

$$\Pi_1 = \frac{F}{\pi \varrho r^2 u^2} \text{ et } \Pi_2 = \mathrm{Re} = \frac{2\varrho r u}{\mu}.$$

Calcul de la force de traînée

La relation recherchée doit nécessairement s'écrire sous la forme $\psi(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ ou bien encore $\Pi_1 = \phi(\Pi_2)$. Soit ici

$$C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi \varrho r^2 u^2} = \phi(\mathrm{Re}).$$

On appelle C_d le *coefficient de traînée* ; F est la force de traînée. On montre théoriquement en résolvant les équations de Navier-Stokes dans le cas $\mathrm{Re} \ll 1$:

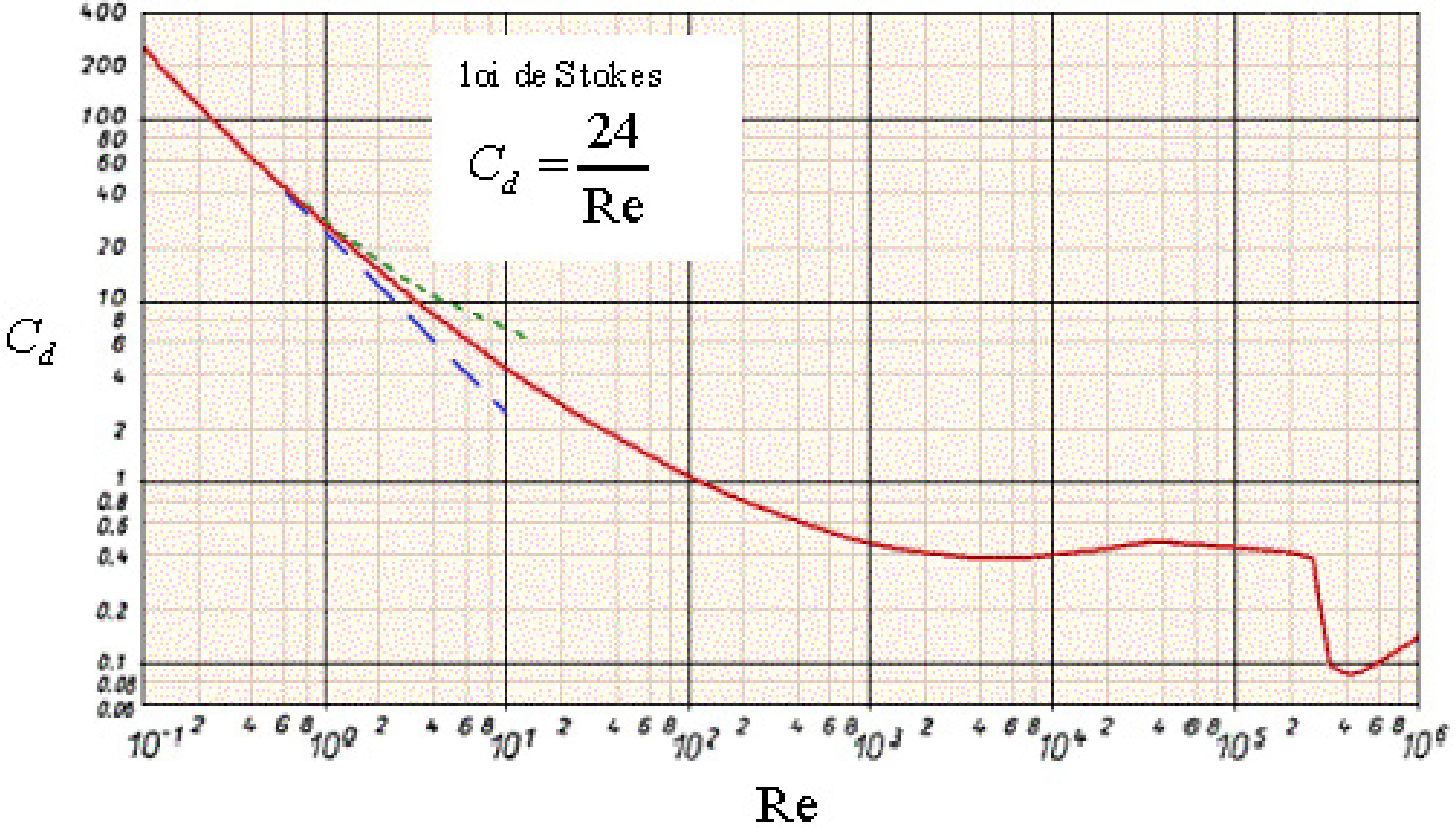
$$C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi \varrho r^2 u^2} = \phi(\mathrm{Re}) = \frac{24}{\mathrm{Re}} \text{ quand } \mathrm{Re} \to 0.$$

Cette relation est appelée *loi de Stokes*. À grand nombre de Reynolds ($\mathrm{Re} \gg 1$), les expériences montrent que :

$$C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi \varrho r^2 u^2} = \phi(\mathrm{Re}) \approx 0{,}4 - 0{,}5 \text{ quand } \mathrm{Re} \to \infty.$$

Calcul de la force de traînée

Variation du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds particulaire avec $C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi \varrho r^2 u^2}$ et $\mathrm{Re} = \frac{2\varrho r u}{\mu}$:



Loi de Manning-Strickler

On s'intéresse à décrire un écoulement d'eau dans une rivière, on part avec quatre paramètres, dont un est sans dimension : $\bar{u}$ [m/s], h [m], g [m/s^2], et θ [–]. Pour simplifier on met g et θ ensemble, ce qui fait qu'en pratique on ne dispose que $n = 3$ variables physiques. Il y a $r = 2$ unités fondamentales : m et s. On peut former $n - r = 1$ groupe sans dimension. On trouve immédiatement qu'il s'agit du nombre de Froude $\mathrm{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh\sin\theta}$. La relation serait donc

$$\mathrm{Fr} = cst \Rightarrow \bar{u} \propto \sqrt{gh\sin\theta}.$$

On aboutit donc à la loi de Chézy.

Mais comment tenir compte de la rugosité du lit ?

Loi de Manning-Strickler : similitude complète

Introduisons donc k_s [m] l'échelle de rugosité. En refaisant l'analyse dimensionnelle du problème, on a maintenant $n = 4$ et toujours $r = 2$ unités. On peut donc former 2 nombres sans dimension, par exemple : $\Pi_1 = \mathrm{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh\sin\theta}$ et $\Pi_2 = k_s/h$. Il existe une relation entre ces deux nombres de la forme :

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \Rightarrow \bar{u} = f(k_s/h)\sqrt{gh\sin\theta}.$$

comme la hauteur d'eau est souvent grande par rapport à k_s, donc $k_s/h \to 0$ et on s'attend à ce que la fonction $f(k_s/h)$ tende vers une constante. Ce type de comportement asymptotique est très classique et s'appelle une *similitude complète*. Mais on retombe ici sur une loi de Chézy...

Loi de Manning-Strickler : similitude incomplète

Une autre possibilité est que la fonction f se comporte comme une loi puissance

$$f(\zeta) = \alpha\zeta^n,$$

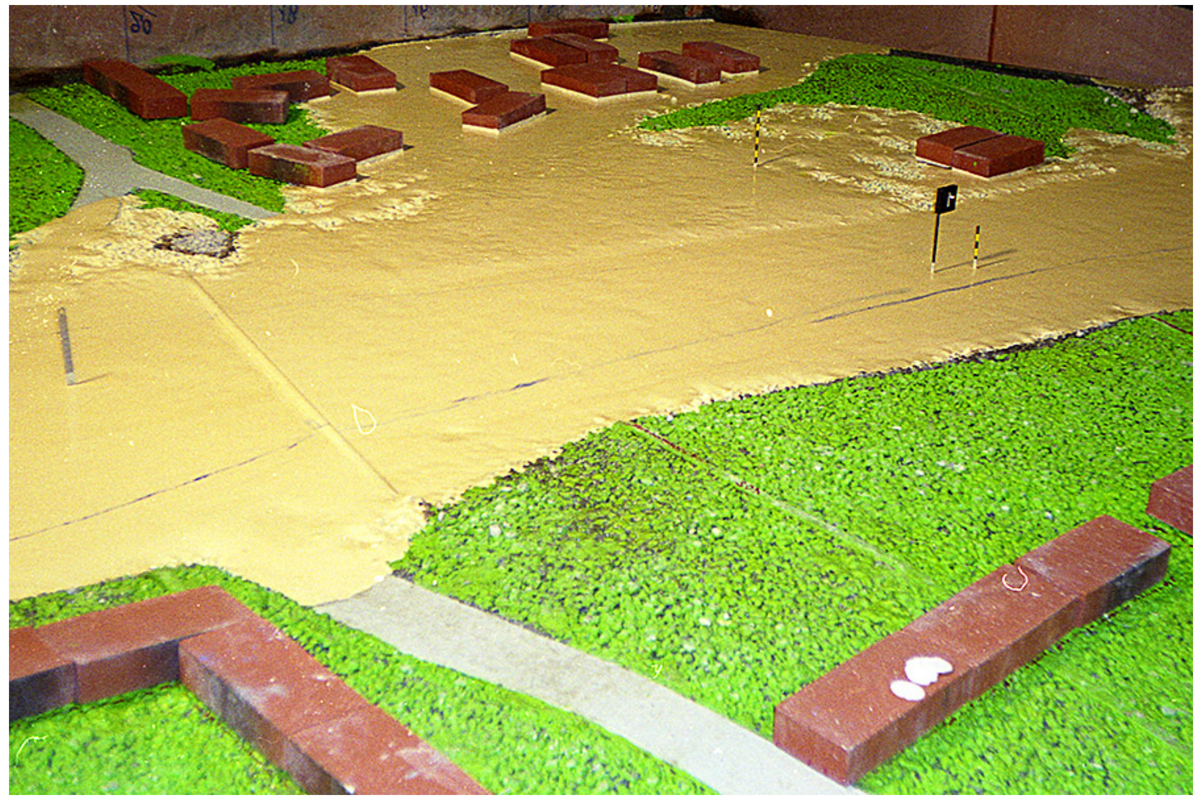
avec $\zeta = k_s/h$, α un nombre sans dimension, et n un exposant. Ce comportement est une *similitude incomplète*. Avec cette hypothèse, on aboutit à

$$\Pi_1 = \alpha\Pi_2^n \Rightarrow \bar{u} = \alpha k_s^n h^{1/2-n}\sqrt{g\sin\theta}.$$

Dans ce cas-là, on note qu'en prenant $n = -1/6$, on retombe sur l'équation de Manning-Strickler. Il s'ensuit que le coefficient de Strickler K est relié à la rugosité par

$$K = \alpha\sqrt{g}k_s^{-1/6}.$$

Similitude en ingénierie



En ingénierie on utilise souvent des modèles réduits présentant la même forme que le modèle en grandeur réelle (similitude géométrique) et on recherche des matériaux et des conditions d'écoulement en laboratoire pour créer des écoulement en similitude (dynamique). La similitude du modèle réduit avec le phénomène à étudier est assurée quand tous les paramètres de similitude sont identiques aux deux échelles.

Similitude en ingénierie

Il n'est pas toujours possible de respecter strictement les critères de similitude. Cela n'a pas les mêmes conséquences selon le problème en question :

- en aérodynamique, la similitude se fonde sur le nombre de Reynolds. On observe que le coefficient de traînée $C_d(\mathrm{Re})$ tend vers une constante quand $\mathrm{Re} \gg 1$. La valeur exacte de Re n'est donc pas très importante ;
- en sédimentologie, la force de traînée est en Re^{-1}, donc la vitesse peut être très sensible au nombre de Reynolds !

Similitude en ingénierie

Il est possible de contourner la difficulté :

- en modifiant le rapport de similitude géométrique. On parle de *distorsion géométrique* par exemple quand, pour modéliser une rivière, on emploie une échelle de largeur différente de l'échelle de longueur ;
- en ne gardant qu'une partie des critères de similitude. On parle de *similitude incomplète*. C'est souvent le cas en transport solide dans les rivières où il est difficile de satisfaire la similitude dynamique (nombre de Reynolds).

Attention : la diminution d'échelle peut donner lieu à de nouveaux phénomènes. Dans le cas de la simulation d'une rivière, si l'on diminue trop l'échelle d'observation au laboratoire, il y a de fortes chances qu'un écoulement d'eau soit influencé par des phénomènes de tension de surface.

Similitude en hydraulique

En hydraulique à surface libre, les modèles réduits sont construits sur la base d'une similitude dynamique fondée sur le nombre de Froude. Pour que des écoulements à des échelles différentes soient dynamiquement similaires, il faut que les nombres de Froude soient égaux

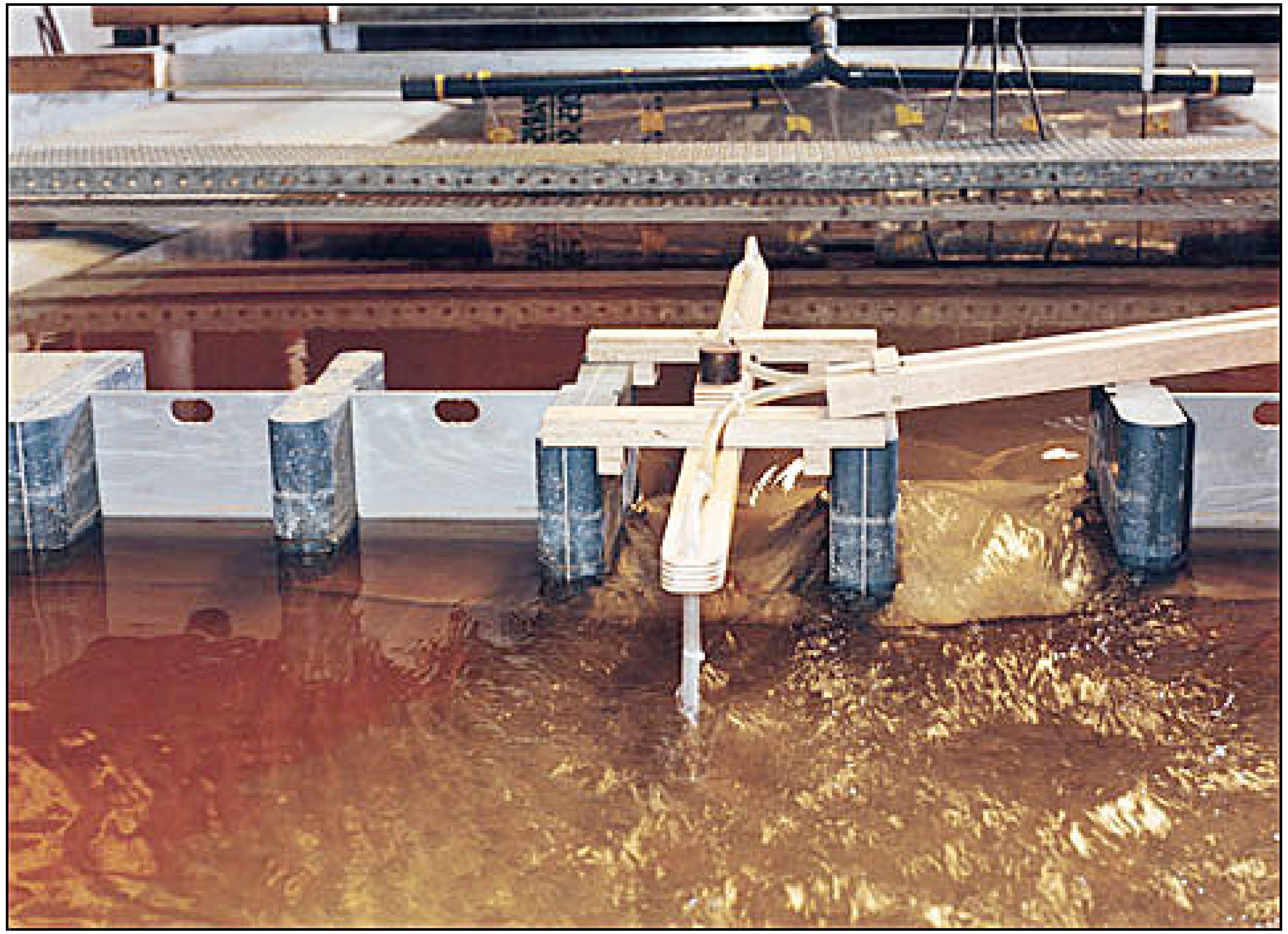
$$\left(\frac{\bar{u}^2}{gh}\right)_1 = \left(\frac{\bar{u}^2}{gh}\right)_2,$$

où les indices 1 et 2 désignent les échelles. Quand cela est possible, il est également souhaitable que les nombres de Reynolds soient également égaux

$$\left(\frac{\bar{u}h}{\nu}\right)_1 = \left(\frac{\bar{u}h}{\nu}\right)_2.$$

Une fois connu le rapport de réduction (h_2/h_1) entre le modèle réduit et la réalité, on peut en principe déterminer les relations existant entre paramètres du problème.

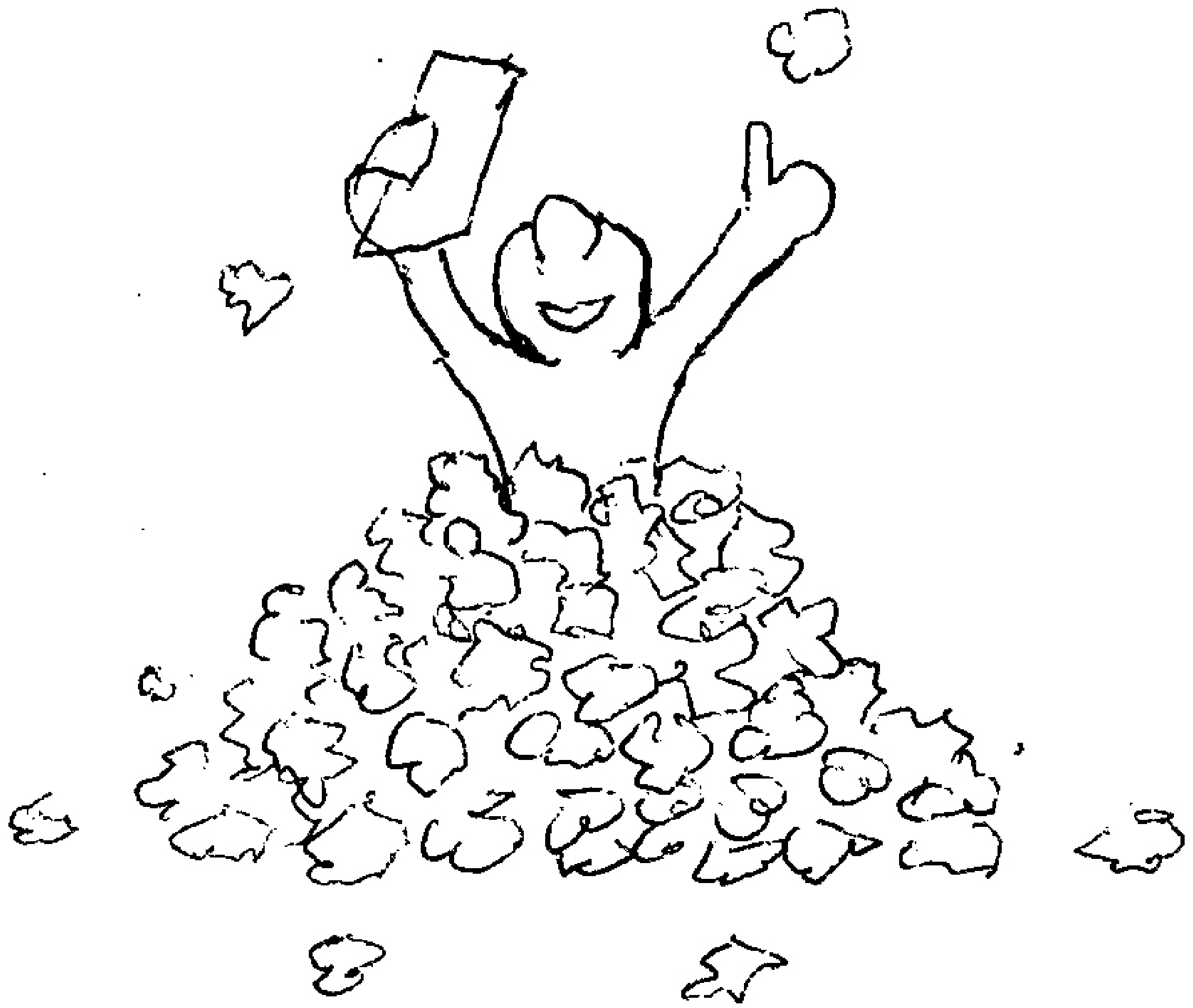
Synthèse



L'apport de la similitude

- homogénéité des équations
- mise sous forme adimensionnelle des équations
- nombre sans dimensions : Reynolds, Froude
- simplification des solutions
- passage d'une échelle à l'autre
- structure de la solution

Réponse au quiz



1. Si je réalise une expérience d'écoulement à l'échelle du 1 : 10 et que je mesure la vitesse, que vaut la vitesse réelle (à l'échelle 1) ?
   - ~~Le rapport géométrique étant de 10, la vitesse sera 10 fois plus grande que celle mesurée sur le modèle réduit.~~
   - On ne peut pas répondre, il faudrait étudier la relation entre les équations du mouvement aux deux échelles.
2. Que vaut l'unité Pa (pascal) dans le système international ?
   - $1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
   - $\cancel{1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}}$?