TD1

Matlab & Courbes de remous

1 Ce qu'il faut savoir de Matlab

1.1 Introduction

Origine Le terme Matlab vient de la contraction de l'anglais "Matrix - Laboratory". Comme son nom l'indique, le logiciel Matlab sait essentiellement manipuler des tableaux (arrays) et matrices (matrix). C'est aujourd'hui un logiciel commercial (de la société MathWorks) mais qui a été initialement développé il y a une trentaine d'années par des universitaires américains.

Pour quoi faire ? Matlab est un logiciel de calcul numérique (à la différence de Maple ou Mathematica qui sont des calculateurs symboliques). Comme nous l'avons vu, Matlab est capable de manipuler et de faire des opérations complexes sur des matrices. Mais on peut aussi l'utiliser pour tracer des graphiques, courbes 2D ou 3D, visualiser des données, simuler des événements aléatoires, résoudre des équations différentielles, créer des interfaces ou interagir avec d'autres langages de programmation (C, C++, Fortran etc) et à bien d'autres fins. Pour cela, outre les fonctions classiques, il existe une multitude de "boites à outils" (Toolbox) qui remplissent des fonctions précises dans un domaine particulier. Par exemple, la boite à outils "Statistics Toolbox" donne accès à plusieurs fonctions utiles en statistique comme le calcul de fonctions de densité de probabilité ou de fonctions de distribution à partir d'échantillons de données.

Des alternatives Chaque logiciel de calcul scientifique a sa particularité, ses défauts et ses avantages. Il est donc important de savoir ce que l'on a besoin de faire avant de choisir tel ou tel logiciel. Il existe aussi des alternatives libres (et gratuites !) à Matlab qui permettent de faire globalement les mêmes choses. Scilab, par exemple, créé en France, est une puissante plateforme de calcul libre et gratuite (mais attention, la syntaxe est légèrement différente de celle de Matlab). GNU Octave est un logiciel libre plus compatible avec Matlab et permet globalement les mêmes opérations que ce dernier.

1.2 Commandes utiles

L'aide de Matlab est très bien documentée, il faut s'y référer à chaque utilisation d'une nouvelle fonction. On présente ci-dessous une liste de fonctions de bases utiles pour ce TD.

Fonction	Paramètres	Usage
0:0.1:1		Vecteur de nombres entre [0,1] espacés de 0.1, ie [0,0.1,0.2...1]
length(A)	A: vecteur, matrice ...	Donne la longueur du vecteur
$A.\hat{}B$ $A.{*}B$ $A./B$	A: vecteur, B : vecteur	Opération puissance, multiplication, division terme à terme entre A et B
find($A == c$)	A: vecteur, c: constante	Donne les indices i des éléments de A qui répondent à la condition $A_i == c$
plot(X,Y, 'b-')	X: vecteur, Y: vecteur	Créé un graphique de points (X_i,Y_i) et les relie entre eux par une ligne bleue

2 Rappels du cours

Équations Pour un écoulement en régime permanent dans un canal infiniment large, les équations de Saint-Venant se simplifient en une équation différentielle du premier ordre telle que :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{g\sin\theta - \frac{\tau_p}{\rho h}}{g\cos\theta - \frac{q^2}{h^3}} \tag{1}$$

La résistance à l'écoulement peut être calculée avec la loi de Manning-Strickler :

$$\tau_p = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{h^{1/3}} \tag{2}$$

K peut prendre des valeurs entre 100 et 10 $\mathrm{m}^{1/3}\mathrm{s}^{-1}$ suivant le type de rugosité.

Définitions

– La hauteur h_n est la hauteur d'eau normale solution de l'équation $\tau_p = \rho g h_n \sin\theta$.
– La hauteur h_c est la hauteur d'eau critique où le nombre de Froude devient égal à 1.

3 Questions

3.1 Préambule

1. Donner la hauteur normale en fonction de K, q et θ.
2. Donner la hauteur critique en fonction de q et θ.
3. Pour résoudre numériquement 1, nous allons nous servir de l'outil de Matlab **ode45** et d'une fonctionnelle évaluée en chaque point de calcul.
   Par exemple, pour résoudre l'équation différentielle paramétrique suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x y^2 + \beta y \,;\, y(0) = 1; \tag{3}$$

   On crée un fichier *fonction.m* contenant:

```
function fonction = fonction(x,y,p);
%p(1) alpha
%p(2) beta
fonction=p(1)*x*y*y+p(2)*y;
```

   On utilise ensuite l'outil **ode45** de la manière suivante :

```
%%[Variable1,Variable2]=
%% ode45(@fonction,[Borneinf Bornesup],Cond Ini,[],Paramètres)

[x,y]=ode45(@fonction,[0 .5],1,[],p)
plot(x,y)
```

   Reproduire l'exemple
4. Programmer la fonctionnelle correspondant à la courbe de remous

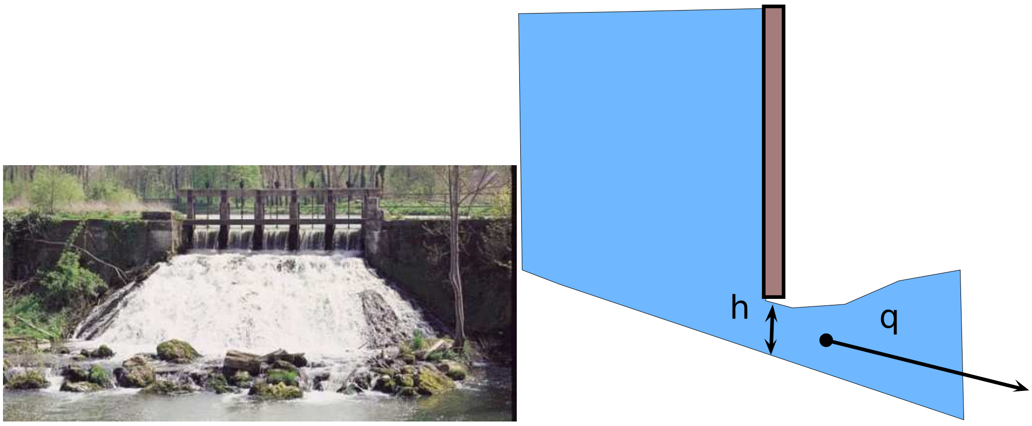
3.2 Étude d'une vanne

1. Étudier la courbe de remous d'une vanne de $h_0 = 2$cm de hauteur, d'un débit de $q = 0{,}1\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1}$. On prendra une pente de $\theta = 0{,}8°$ et un coefficient de Manning $K = 50\mathrm{m}^{1/3}\mathrm{s}^{-1}$ (figure 1).
2. Dans quel régime d'écoulement se trouve t'on à la sortie de la vanne?
3. Que devient cet écoulement loin à l'aval de la vanne?
4. Étudier la courbe de remous d'une vanne de $h_0 = 5$cm de hauteur, d'un débit de $q = 0{,}1\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1}$. On prendra une pente de $\theta = 0{,}25°$ et un coefficient de Manning $K = 50\mathrm{m}^{1/3}\mathrm{s}^{-1}$.
5. Dans quel régime d'écoulement se trouve t'on à la sortie de la vanne?
6. Jusqu'à quelle distance x_1 le calcul numérique reste t-il valide?

Les courbes obtenues sont présentées sur la figure 2.

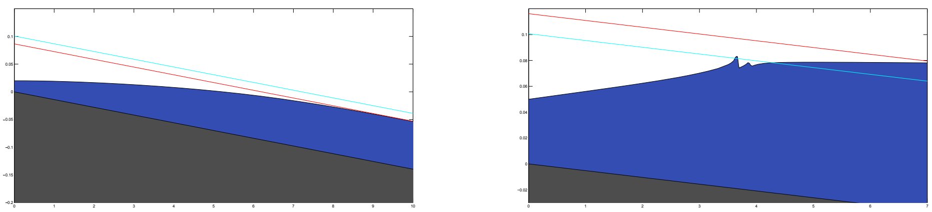
3.3 Etude d'un barrage

1. Etudier la courbe de remous d'un barrage de hauteur $h_0 = 1$m, d'une débitance de $q = 0{,}1\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1}$. On prendra une pente de $\theta = 0{,}3°$ et un coefficient de Manning $K = 50\mathrm{m}^{1/3}\mathrm{s}^{-1}$. *(Attention au sens de calcul !!) (figure 3)*



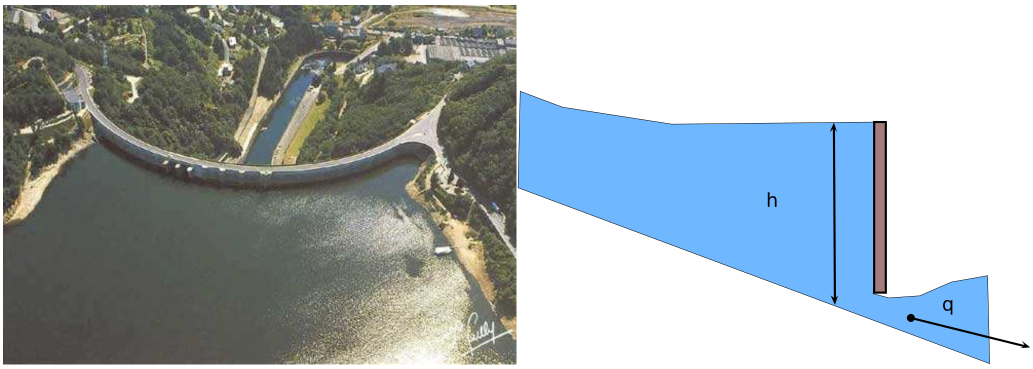
(a) Vanne d'un petit barrage (b) Modèle de vanne

FIG. 1: Problème 1 : Vanne



(a) Cas 1 (b) Cas 2

FIG. 2: Problème 1 : solutions

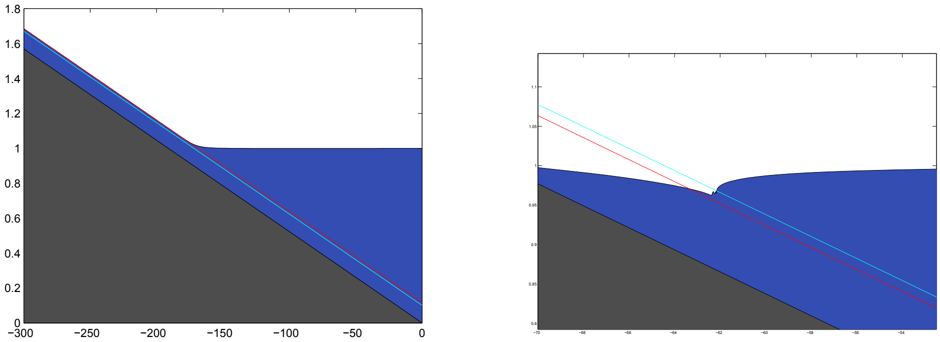


(a) Barrage (b) Modèle de Barrage

FIG. 3: Problème 2 : Barrage

2. Dans quel régime d'écoulement se trouve t'on à l'amont du barrage?
3. Que devient cet écoulement près du barrage? Tracer la vitesse de l'écoulement en fonction de la distance. Jusqu'à quelle distance à l'amont l'écoulement est-il modifié par la présence du barrage?
4. On projette de construire un barrage 2,5 km en aval d'un petit village. Quelle est la hauteur maximale que peut prendre le barrage avant l'inondation du village?
5. Étudier la courbe de remous d'un barrage de hauteur $h_0 = 1$m, d'un débit de $q = 0{,}1\text{m}^3\text{s}^{-1}$. On prendra une pente de $\theta = 0{,}8°$ et un coefficient de Manning $K = 50\text{m}^{1/3}\text{s}^{-1}$.
6. Dans quel régime d'écoulement se trouve t'on à l'amont du barrage?
7. Jusqu'où le calcul numérique est-il valide?

Les courbes obtenues sont présentées sur la figure 4.



(a) Cas 1 (b) Cas 2

FIG. 4: Problème 2 : Ressaut hydraulique

3.4 Étude d'un ressaut hydraulique entre une vanne et un barrage

On associe sur un cours d'eau une vanne de $h_1 = 5$ cm de hauteur en $x_1 = 0$ m puis un barrage de $h_2 = 30$ cm de hauteur en $x_2 = 20$ m. Le débit est pris égal à $q = 0{,}1$ m^3 s^{-1} et $K = 50$ m$^{1/3}$ s^{-1} sur une pente moyenne de $\theta = 0{,}8°$.

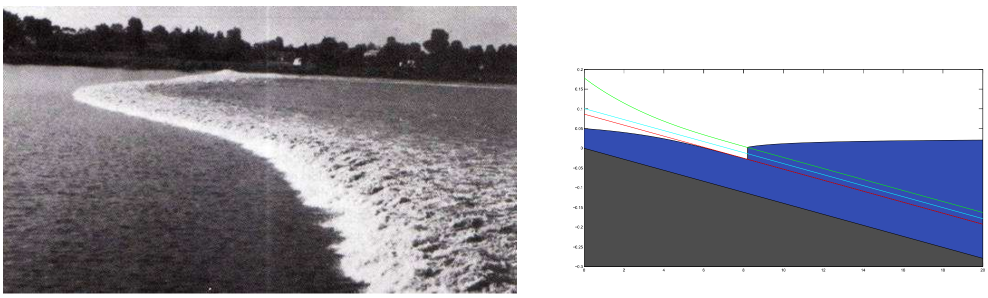
Il se forme un ressaut entre la vanne et le barrage et nous voulons connaitre sa position et ses caractéristiques (hauteur, perte de charge) (figure 5).

1. Calculer numériquement la hauteur $h_1(x)$ depuis la condition limite amont. *(On prendra des pas de calcul définis, par exemple **[0:0.1:1000]**)*

2. Calculer la hauteur conjuguée h_2^* en fonction de la hauteur h_1 calculée précédemment grâce à la formule:

$$\frac{h_2^*}{h_1} = 0{,}5\left(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1\right) \tag{4}$$

3. Calculer numériquement la hauteur $h_2(x)$ depuis la condition limite aval. *(On prendra les mêmes pas de calcul que dans* (1)*)*
4. Trouver le point x_c où les courbes h_2 et h_2^* se croisent.
5. Donner la hauteur du ressaut, et la perte de charge engendrée par celui ci.



(a) Ressaut sur une rivière (b) Modélisation

FIG. 5: Problème 3 : Ressaut hydraulique