



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Christophe ANCEY

LABORATOIRE HYDRAULIQUE ENVIRONNEMENTALE (LHE)

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Écublens

CH-1015 Lausanne

---

Complément de cours

**Hydraulique à surface libre**

**Master GC**

**Outils mathématiques**

---

version 8.1 du 19 décembre 2015



# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Rappels de mathématiques</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Scalaire, vecteurs, et tenseurs . . . . .  | 3         |
| 1.1.1    | Coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques . . . . .                          | 3         |
| 1.1.2    | Produits . . . . .   | 5         |
| 1.2      | Opérations de différentiation . . . . .  | 8         |
| 1.2.1    | Dérivée . . . . .  | 8         |
| 1.2.2    | Différentielle . . . . .   | 8         |
| 1.3      | Quelques opérateurs . . . . .  | 12        |
| 1.3.1    | Opérateur gradient . . . . .   | 12        |
| 1.3.2    | Opérateur divergence . . . . .   | 14        |
| 1.3.3    | Opérateur laplacien . . . . .  | 15        |
| 1.3.4    | Dérivée totale ou dérivée matérielle ou dérivée particulière . . . . .                   | 16        |
| 1.3.5    | Quelques relations sur les opérateurs . . . . .  | 18        |
| 1.4      | Typologie des équations . . . . .  | 19        |
| 1.4.1    | Équation scalaire . . . . .  | 19        |
| 1.4.2    | Équation différentielle ordinaire . . . . .  | 19        |
| 1.4.3    | Équation aux dérivées partielles . . . . .   | 20        |
| 1.4.4    | Forme caractéristique des équations du premier ordre . . . . .                           | 21        |
| 1.4.5    | Équation variationnelle . . . . .  | 24        |
| 1.5      | Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre . . . . . | 25        |
| 1.5.1    | Équations hyperboliques . . . . .  | 28        |
| 1.5.2    | Solutions faibles des problèmes hyperboliques . . . . .                                  | 32        |
| 1.6      | Conditions aux limites pour les problèmes hyperboliques . . . . .                        | 33        |
| 1.7      | Méthodes analytiques de résolution des équations différentielles . . . . .               | 39        |
| 1.7.1    | Vue générale sur les méthodes de résolution des équations . . . . .                      | 39        |
| 1.7.2    | Méthode des caractéristiques . . . . .   | 39        |
| 1.7.3    | Méthode aux perturbations . . . . .  | 41        |
| 1.7.4    | Méthode asymptotique . . . . .   | 42        |
| 1.7.5    | Solutions auto-similaires . . . . .  | 43        |
| <b>2</b> | <b>Résolution des équations différentielles hyperboliques</b>                            | <b>51</b> |
| 2.1      | Résolution des équations hyperboliques du premier ordre . . . . .                        | 51        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.1.1    | Courbes caractéristiques et variables de Riemann . . . . .              | 52         |
| 2.1.2    | Formation d'un choc . . . . .   | 62         |
| 2.1.3    | Problème de Riemann pour des problèmes scalaires ( $n = 1$ ) . . . . .  | 64         |
| 2.1.4    | Systèmes de dimension $n = 2$ . . . . .                                 | 67         |
| 2.1.5    | Généralisation à des systèmes à $n$ dimensions . . . . .                | 79         |
| 2.1.6    | Quelques solutions analytiques au problème Riemann . . . . .            | 89         |
| 2.1.7    | Solution des équations avec un terme source . . . . .                   | 89         |
| 2.1.8    | Méthode de l'hodographe . . . . .                                       | 92         |
| <b>3</b> | <b>Méthodes numériques</b>  | <b>107</b> |
| 3.1      | Méthodes numériques . . . . .   | 109        |
| 3.1.1    | Méthode aux différences finies . . . . .                                | 109        |
| 3.1.2    | Méthode aux volumes finis . . . . .                                     | 113        |
| 3.2      | Méthode de résolution numérique des équations hyperboliques . . . . .   | 116        |
| 3.2.1    | Équation d'advection : schéma amont . . . . .                           | 116        |
| 3.2.2    | Schéma de Godunov pour les systèmes linéaires . . . . .                 | 118        |
| 3.2.3    | Schéma de Godunov pour les équations scalaires non linéaires . . . . .  | 121        |
| 3.2.4    | Schéma de Godunov pour les systèmes d'équations non linéaires . . . . . | 123        |
| 3.2.5    | Schéma de Godunov approché . . . . .                                    | 124        |
| 3.2.6    | Traitement des termes sources . . . . .                                 | 130        |
| 3.2.7    | Schémas d'ordre 2 . . . . .   | 131        |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>133</b> |

# Rappels de mathématiques

# 1

## 1.1 Scalaire, vecteurs, et tenseurs

En mécanique, on se sert de variables appelées *tenseurs* (de différentes dimensions) pour décrire des phénomènes physiques :

- une grandeur *scalaire* est une quantité représentée par un réel. Sa dimension est 0 : on dit aussi qu'un scalaire est un tenseur d'ordre 0. La différence entre nombre réel et nombre scalaire est qu'un scalaire est indépendant de la base physique dans lequel on l'exprime. Par exemple, la vitesse a une valeur réelle, mais n'est pas un scalaire car elle varie selon le référentiel dans lequel on fait la mesure. La masse d'un objet est invariante (sa valeur ne dépend pas du repère dans lequel on fait la mesure) : c'est donc une grandeur scalaire ;
- une grandeur vectorielle ou *vecteur* est représentée dans l'espace par un segment orienté ayant pour extrémités un point de départ et un point d'arrivée. L'emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance car seuls comptent sa longueur, sa direction, et son sens. Un vecteur est un tenseur de dimension 1 ;
- un *tenseur* est une fonction multilinéaire. Un tenseur est défini par son ordre, c'est-à-dire le nombre d'indices nécessaire pour le définir. Parmi les tenseurs les plus utiles, il y a les tenseurs d'ordre 2, dont les composantes dans une base donnée forment une *matrice* ; par exemple, un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 2 permet de relier deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de façon linéaire :  $\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$ . Dans une base particulière, si  $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$ ,  $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ , alors

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = m_{11}x_b + m_{12}y_b, \\ y_a = m_{21}x_b + m_{22}y_b, \end{cases}$$

avec  $m_{ij}$  la matrice  $\mathbf{M}$  composantes de  $\mathbf{T}$  dans la base choisie. Rappelons que la notation  $m_{ij}$  désigne la composante occupant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  dans la matrice  $\mathbf{M}$ . La notion de tenseur se généralise à des formes  $n$ -linéaires pour former des tenseurs d'ordre  $n$ . Par exemple, un tenseur d'ordre 3 permet de décrire des relations multilinéaires entre des tenseurs d'ordre 2.

Un *champ tensoriel* est un tenseur, dont les composantes varient dans l'espace.

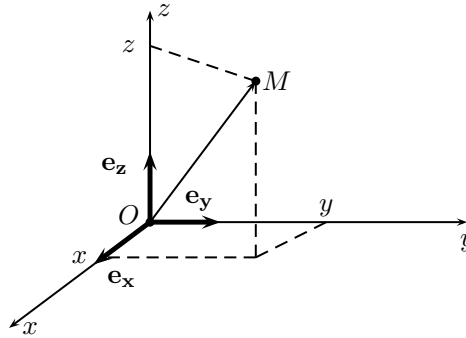
### 1.1.1 Coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques

Le plus souvent, on se sert de l'un des trois systèmes orthonormés suivants :

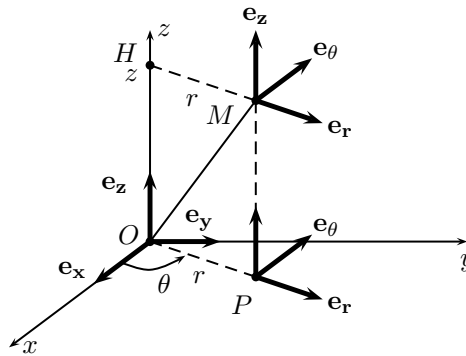
- coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  : voir figure 1.1 ;
- coordonnées cylindriques  $(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x), z)$  : voir figure 1.2 ;

- coordonnées sphériques ( $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ ) avec  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ : voir figure 1.3.

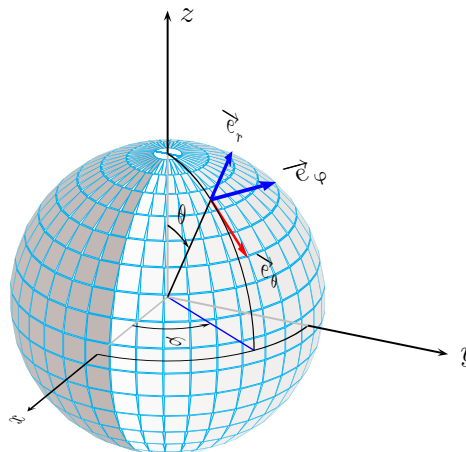
Pour des applications particulières, on peut être amené à utiliser des repères curvilignes plus complexes.



**Figure 1.1** : représentation d'un point dans un système de coordonnées cartésiennes.



**Figure 1.2** : représentation d'un point dans un système de coordonnées cylindriques.



**Figure 1.3** : représentation d'un point dans un système de coordonnées sphériques.

### 1.1.2 Produits

À partir de deux tenseurs, on peut réaliser une multitude d'opérations. Les plus simples sont les opérations d'addition et multiplication par un scalaire. On dispose également de plusieurs produits entre grandeurs tensorielles. Si de façon générique, on note le produit entre des tenseurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , et  $\mathbf{c}$  à l'aide du symbole  $\star$ , alors l'opération « produit » vérifie une ou plusieurs des règles suivantes :

- opération commutative :  $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a}$  ;
- opération associative :  $\mathbf{a} \star (\mathbf{b} \star \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \star \mathbf{c}$  ;
- opération distributive :  $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \star \mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \star \mathbf{c} + \mu \mathbf{b} \star \mathbf{c}$  pour tous scalaires  $\lambda$  et  $\mu$ .

Ainsi pour l'addition de tenseurs, les trois propriétés sont vérifiées.

#### Produit scalaire

Le *produit scalaire* de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est noté  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . C'est une application linéaire d'un espace  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ) vers  $\mathbb{R}$ . Du point de vue algébrique, si  $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$ ,  $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$  sont les composantes de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  dans une base orthonormée, alors

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b.$$

Le produit scalaire est commutatif et distributif, mais n'est pas associatif.

La norme d'un vecteur est ainsi :  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ . Du point de vue géométrique, le produit scalaire est relié à l'angle  $\alpha$  entre les deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de la façon suivante

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha.$$

On retiendra la propriété importante : deux vecteurs orthogonaux  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  ont un produit scalaire nul  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

Le produit scalaire peut s'appliquer à des tenseurs d'ordre quelconque ; on l'appelle alors parfois *produit simplement contracté* ou *produit contracté une fois*. Le produit scalaire de deux tenseurs est un tenseur d'ordre égal à la somme des ordres des termes moins 2. Par exemple, si on introduit un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 2 reliant deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de façon linéaire :  $\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$ , l'opération s'apparente bien à un produit scalaire car on bien  $\text{ord}(\mathbf{a}) = 1 = \text{ord}(\mathbf{T}) + \text{ord}(\mathbf{b}) - 2$ .

En mécanique, le produit tensoriel est d'usage courant. Par exemple, la puissance  $P$  d'une masse ponctuelle  $m$  animée d'une vitesse  $\mathbf{v}$  et soumise à une force  $\mathbf{f}$  est :  $P = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  ; son énergie cinétique est  $E_c = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$ .

---

**Exercice 1.1** Soit le vecteur  $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$ . Donnez une définition vectorielle du plan passant par le point origine et normal à  $\mathbf{n}$ . En déduire son équation cartésienne. ⊠

#### Produit vectoriel

Le *produit vectoriel* est une opération vectorielle (dans des espaces euclidiens orientés) de dimension 3. Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est noté de différentes façons selon les milieux :  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , ou bien  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . Si  $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$ ,  $\mathbf{b} = (x_b, y_b, z_b)$ , alors

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, le produit vectoriel est également relié à l'angle orienté  $\alpha$  entre les deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de la façon suivante

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha.$$

Le vecteur  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  est normal au plan formé par les deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sous réserve que ceux-ci ne soient pas colinéaires sinon  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Le produit vectoriel est distributif, mais n'est ni commutatif, ni associatif. Ainsi, contrairement au produit scalaire, l'ordre des termes dans le produit vectoriel a son importance :  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ . De même, on a

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$



**Ex** **Exercice 1.2** L'application  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ , où  $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$ , est linéaire. On peut la représenter par une matrice. Écrire cette matrice. Quelle est sa caractéristique ?

### Produit tensoriel

On introduit le *produit tensoriel* (appelé encore produit dyadique) de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  comme la construction d'un tenseur d'ordre  $n + m$  à partir de deux tenseurs d'ordre  $n$  et  $m$ . Le produit tensoriel est noté  $\mathbf{ab}$  ou bien  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ .

Lorsque  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont des vecteurs, c'est un opérateur linéaire qui a tout vecteur  $\mathbf{n}$  lui associe un autre vecteur tel que :

$$(\mathbf{ab})\mathbf{n} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\mathbf{a}.$$

Cet opérateur peut donc être représenté par une matrice si l'on se place dans un repère cartésien (ou dans d'autres types de repère). Par exemple, en dimension 2, on a :

$$(\mathbf{ab}) = \begin{bmatrix} x_a x_b & x_a y_b \\ y_a x_b & y_a y_b \end{bmatrix},$$

avec  $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$  et  $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ .

**Figure 1.4** : *produit tensoriel*.

Le produit tensoriel de deux vecteurs se rencontre fréquemment en mécanique ; par exemple, dans un fluide dont la vitesse locale est  $\mathbf{v}$ , on peut construire un tenseur d'inertie  $\mathbf{vv}$ , qui apparaît dans le terme de convection de l'équation de Navier-Stokes.

**Ex** **Exercice 1.3** En mécanique, on définit le tenseur de Reynolds comme étant  $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ . En régime laminaire stationnaire, en un point donné, la vitesse est constante ; en déduire que la matrice des composantes du tenseur de Reynolds dans une base cartésienne est symétrique. En régime turbulent, la vitesse fluctue au cours du temps autour d'une valeur moyenne  $\bar{\mathbf{u}}$  :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \bar{\mathbf{u}}$ , avec  $\mathbf{u}'$  la fluctuation instantanée de vitesse (sa moyenne dans le temps est nulle  $\overline{\mathbf{u}'} = 0$ ). Calculer le tenseur moyenné  $\overline{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}$  ; est-il égal à  $\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$  ?



### Produit tensoriel doublement contracté

Le produit tensoriel doublement contracté se rencontre essentiellement avec des tenseurs d'ordre 2: le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  se note  $\mathbf{S} : \mathbf{T}$  et correspond à la trace du produit  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$ :

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = S_{ij}T_{ji},$$

$S_{ij}$  et  $T_{kl}$  les composantes de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  dans une base orthonormée.

Cette opération peut se généraliser à des produits de tenseurs d'ordre  $n$  et  $m$ ; le résultat est un tenseur d'ordre  $n + m - 4$ .

Le produit doublement contracté est commutatif et distributif. On a les relations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \mathbf{T} &= \mathbf{T} : \mathbf{S}, \\ (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{T} : (\mathbf{a}\mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{T}) &= \mathbf{T} : (\mathbf{a}\mathbf{b}), \\ \mathbf{a}\mathbf{b} : \mathbf{c}\mathbf{d} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{a}\mathbf{c} : \mathbf{b}\mathbf{d} \end{aligned}$$

Le produit doublement contracté se rencontre plus rarement en mécanique. On le trouve par exemple pour définir la puissance d'énergie  $P$  dissipée localement en un point donné d'un fluide déformé avec un tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et où s'exerce un tenseur de contraintes  $\mathbf{T}$ :  $P = \mathbf{D} : \mathbf{T}$ ; c'est une généralisation de la puissance d'une masse ponctuelle que l'on a vue plus haut.

---

**Exercice 1.4** Montrer que  $\mathbf{S} : \mathbf{A} = 0$ , avec  $\mathbf{S}$  un tenseur symétrique et  $\mathbf{A}$  un tenseur antisymétrique. ✱

↪ *Réponse.* Une propriété de l'opérateur trace est son invariance quand il est composé avec l'opération de transposition: pour tout tenseur  $\mathbf{M}$ , on a  $\text{tr}(\mathbf{M}^\dagger) = \text{tr}(\mathbf{M})$ . Si on applique cette règle au produit  $\mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{S})] &= \text{tr}[\mathbf{S}^\dagger \cdot \mathbf{A}^\dagger], \\ &= \text{tr}[\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{A})], \\ &= -\text{tr}[\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}], \end{aligned}$$

car  $\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}$ , mais  $\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A}$ . Comme par ailleurs l'opérateur trace ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait le produit  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$  ( $\mathbf{S} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{S}$ ), on a dans le même temps

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{S})] &= \text{tr}[\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}], \\ &= \text{tr}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}]. \end{aligned}$$

Si on compare les équations ci-dessus, on aboutit à  $\text{tr}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}] = -\text{tr}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}]$ , donc nécessairement  $\text{tr}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}] = 0$ .  $\square$

### Produit mixte

En géométrie, le *produit mixte*  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$  des vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , et  $\mathbf{c}$  est l'équivalent de l'opérateur déterminant dans un cadre euclidien:  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \mathbf{M}$ , où  $\mathbf{M}$  est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , et  $\mathbf{c}$ . Sa valeur absolue s'interprète comme le volume du parallépipède dont les côtés sont donnés par  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , et  $\mathbf{c}$ . On a aussi

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Le produit mixte n'est pas commutatif.

## 1.2 Opérations de différentiation

En mécanique, nous faisons un usage intensif des opérations de différentiation. Ces opérations peuvent porter sur des fonctions scalaires ou tensorielles avec des arguments eux-mêmes scalaires ou tensoriels ; les fonctions peuvent donc être à une ou plusieurs variables.



En langue française, on dit qu'on dérive une fonction lorsqu'on calcule la dérivée d'une fonction à une variable, mais on différentie une fonction à plusieurs variables par rapport à une ou plusieurs de ses variables ; en bref, pour des fonctions à variable multiple, on ne dérive pas<sup>1</sup>, on *différentie* une fonction. Attention également à l'orthographe : « différencier » veut dire faire la différence.

### 1.2.1 Dérivée

Sur le plan mathématique, la définition de la dérivée est :

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x},$$

dont l'interprétation est donnée en termes de pente de la tangente :  $f'(x)$  représente la pente de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = f(x)$  au point d'abscisse  $x$ .

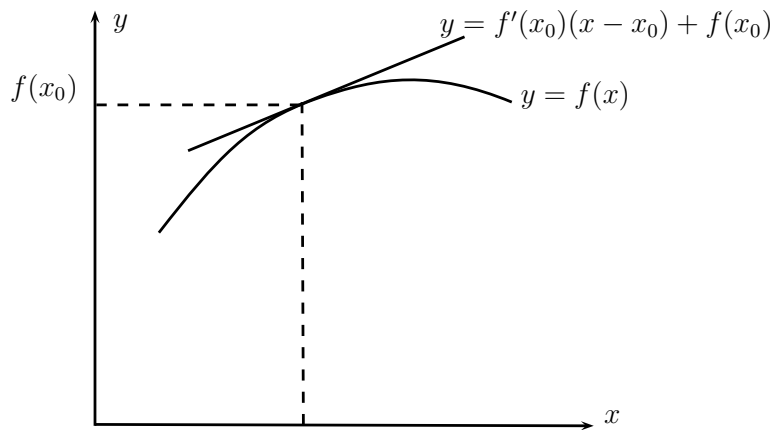


Figure 1.5 : interprétation de la dérivée en termes de droite tangente.

Ainsi, une petite variation de  $f$  autour de  $f(x_0)$  est donnée par :

$$df = f'(x_0)dx,$$

c'est-à-dire localement, quand  $x$  est très proche de  $x_0$ , les variations de  $f$  sont voisines de celles de sa tangente :  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots$ . Ces notions se généralisent sans problème à des fonctions de plusieurs variables.

### 1.2.2 Différentielle

La notion de *dérivée partielle* est une généralisation de la dérivée d'une fonction scalaire à des fonctions de plusieurs variables. Ainsi, Par exemple, pour une fonction  $f(x, y)$ , la

1. Il en est de même en langue anglaise : on dit « differentiating a function with respect to one variable », mais surtout on ne dit pas « deriving a function », qui a sens totalement différent (proche de « déduction de la fonction » car *to derive* = *déduire*).

différentiation par rapport à la variable  $x$  se définit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi, y) - f(x, y)}{\xi - x},$$

cela veut dire que l'on différencie par rapport à  $x$  en gardant  $y$  constant (on est dans le même cas que dans le cas scalaire). On emploie les notations équivalentes plus ou moins compactes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x.$$

♣ **Exemple.** – Par exemple, prenons :

$$f(x, y) = 1 + y \ln x.$$

On tire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y}{x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \ln x. \end{aligned}$$

□

Comme précédemment, on peut définir la *différentielle totale* de  $f$  autour d'un point  $(x_0, y_0)$  :

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

On peut interpréter  $df$  en termes de plan tangent : en effet si on interprète  $df \approx z - f(x_0, y_0)$ ,  $dx \approx x - x_0$ , et  $dy \approx y - y_0$ , alors l'équation précédente donne l'équation d'un plan :

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \times (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \times (y - y_0).$$

Cela peut se montrer de façon plus rigoureuse en considérant que toute surface  $\mathcal{S}$  a au moins une équation implicite de la forme  $\phi(x, y, z) = 0$ . Puis  $\phi = 0$ , on a aussi  $d\phi = 0$  pour tout point appartenant à la surface. Donc

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0.$$

Géométriquement, cela revient à dire qu'un vecteur incrément  $d\ell = (dx, dy, dz)$  autour d'un point  $M_0$  est perpendiculaire à  $(\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$  (on verra plus loin que c'est le gradient de  $\phi$ ). Puisque  $d\ell$  est un incrément (il est donc petit), il est à la fois sur la surface  $\mathcal{S}$  et dans le plan tangent  $\mathcal{P}$  (qui coïncide avec la surface au point  $M_0$  considéré). Si on prend un vecteur colinéaire à cet incrément, il ne sera plus nécessairement sur la surface  $\mathcal{S}$ , mais il sera nécessairement sur le plan tangent  $\mathcal{P}$ . Soit donc un scalaire quelconque  $\lambda$  tel que  $\mathbf{MM}_0 = \lambda d\ell$ . Les coordonnées du vecteur  $\mathbf{MM}_0$  sont  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(dx, dy, dz)$ . L'équation  $d\phi = 0$  nous donne

$$\lambda \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial \phi}{\partial z} (z - z_0) \right) = 0.$$

En divisant par  $\lambda$ , on obtient finalement

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial \phi}{\partial z} (z - z_0) = 0. \quad (1.1)$$

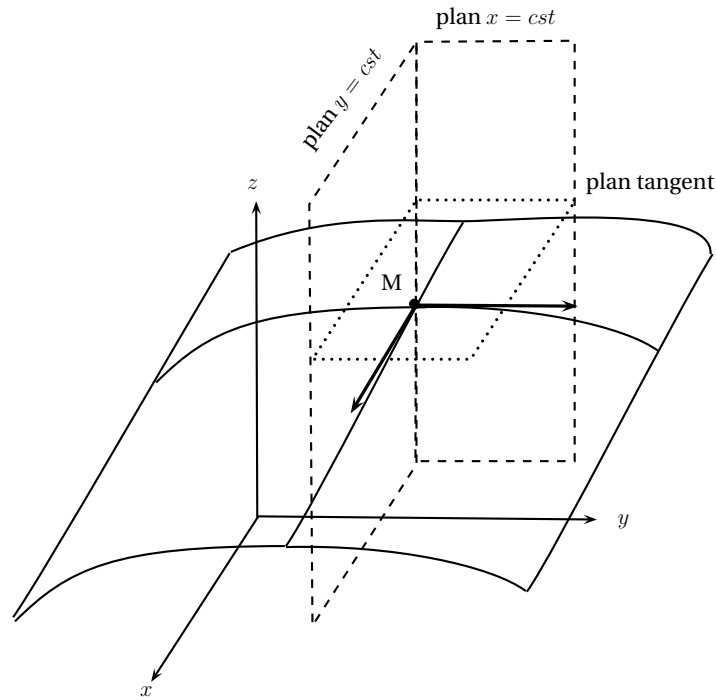


Figure 1.6 : interprétation des dérivées partielles en termes de plan tangent.

C'est l'équation du plan tangent pour une surface d'équation implicite  $\phi(x, y, z) = 0$ .

En dimension 2 (cela se généralise à d'autres dimensions), une expression différentielle  $\psi$  prend la forme  $\psi = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  avec  $A$  et  $B$  deux fonctions de  $x$  et  $y$ . On dit que cette expression est une *différentielle exacte* si elle correspond à la différentielle totale d'une fonction  $\Psi$ , autrement dit si on peut écrire que  $\psi = d\Phi$ . Par identification, on trouve que l'on doit avoir

$$\psi = A(x, y)dx + B(x, y)dy = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy \Rightarrow A = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ et } B = \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Comme l'ordre de différentiation n'est pas important, on en déduit le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

qui peut également être vu comme une condition que doivent vérifier  $A$  et  $B$  pour que  $\psi$  soit une différentielle exacte.

Notons que souvent lorsqu'on a des expressions différentielles telles que  $A(x, y)dx + B(x, y)dy$  on ne peut pas immédiatement trouver la primitive telle  $d\Phi = Adx + Bdy$ . Toutefois en multipliant par une fonction  $C(x, y)$ , on peut obtenir une différentielle exacte. La fonction  $C$  est appelée un *facteur intégrant*. Par exemple, l'expression  $2dx + \frac{x}{y}dy$  n'est pas une différentielle exacte, mais si on multiplie par  $C = xy$ , on obtient  $2xydx + x^2dy$ , dont une primitive est  $\Phi = x^2y$ .

✱ — **Exercice 1.5** Calculer la différentielle totale de  $f(x, y) = y \ln x$ .

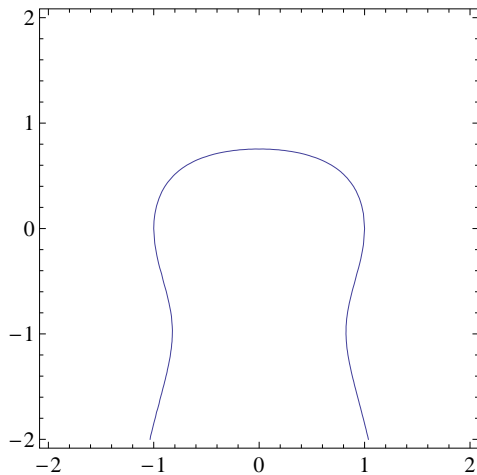
↪ Réponse.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{y}{x}dx + \ln x dy.$$

□

---

**Exercice 1.6** Dans le plan  $x - y$ , une courbe a pour équation cartésienne  $x^2 + y^2 + y^3 \cos x = 1$  ; voir figure 1.7. Calculer les coordonnées d'une normale  $\mathbf{n}$  à cette courbe et donner l'expression d'un vecteur tangent normé. ⊠



**Figure 1.7** : courbe d'équation  $x^2 + y^2 + y^3 \cos x = 1$ .

## 1.3 Quelques opérateurs

Pour se simplifier la vie, le physicien aime réduire la taille des équations. Il introduit pour cela des « opérateurs », c'est-à-dire des ensembles d'opérations différentielles groupés génériquement sous un seul terme. Ces opérateurs ont également des significations physiques.

### 1.3.1 Opérateur gradient

Le plus simple et le plus connu est l'opérateur *gradient* noté  $\text{grad}$  ou  $\nabla$  (appelé symbole *nabla*), qui à une fonction  $f$  lui associe le vecteur composé de toutes ses dérivées partielles. Par exemple si  $f(x, y, z)$ , alors :

$$\text{grad}f = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

♣ **Exemple.** – Considérons  $f(x, y, t) = xt + x^2y/t$ . On trouve que le gradient de  $f = xt + \frac{x^2}{t}y$  est le vecteur :

$$\text{grad}f = \left( t + 2\frac{x}{t}y, \frac{x^2}{t} \right).$$

□

**Notons que :**



- **Attention** dans l'exemple ci-dessus le gradient a concerné les variables d'espace  $x, y$  et non de temps  $t$  car en mécanique, l'opérateur gradient ne s'applique le plus souvent qu'aux variables spatiales ; dans ce cas :

$$\nabla f(x, y, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

On a mis un « ; » dans la liste des variables de la fonction pour séparer variables d'espace et de temps.

- Les expressions ci-dessus ne sont valables qu'en coordonnées cartésiennes. En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , il faut employer :

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- On a la relation :

$$\boxed{df(\mathbf{x}) = \text{grad}f \cdot d\mathbf{x}}$$

ce qui permet pour les plus téméraires d'introduire la dérivée selon un vecteur :  $\text{grad}f = df(\mathbf{x})/d\mathbf{x}$ .

- L'effet de l'opérateur gradient sur un objet de dimension  $n$  est d'obtenir un objet de dimension  $n + 1$ .
- On peut étendre la définition à un *champ vectoriel* ; par exemple si  $\mathbf{u} = (a(x, y), b(x, y))$ , alors

$$\text{grad} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

✱ **Exercice 1.7** Considérons une surface (resp. une courbe) dans un espace de dimension 3 (resp. de dimension 2) muni d'un repère cartésien  $(x, y, z)$ , dont l'équation implicite est  $\phi(x, y, z) = 0$ ; par exemple, dans le cas d'une sphère de rayon  $a$ , on a  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ . Montrer qu'un vecteur normal à cette surface est  $\mathbf{k} = \nabla\phi$ .

↪ *Réponse.* cela peut simplement se prouver en se rappelant que le plan tangent à la courbe  $\phi(x, y, z) = 0$  au point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  a pour équation cartésienne

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial\phi}{\partial z}(z - z_0) = 0,$$

ce qui est équivalent à écrire que

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{MM}_0 = 0,$$

pour tout point  $M(x, y, z)$  du plan tangent, ce qui montre bien que  $\nabla\phi$  est normale à la surface  $\phi = 0$ . Géométriquement, il s'ensuit que l'opérateur gradient peut être interprété comme le vecteur normal à une surface (resp. une courbe); par exemple, dans le cas de la sphère, cela donne  $\mathbf{k} = \nabla\phi = 2(x, y, z)$ . □

Physiquement, l'opérateur gradient sert dès lors qu'on a besoin de généraliser la notion de dérivée à des problèmes à plusieurs variables d'espace. Par exemple, dans un problème scalaire, le gradient de température  $T$  est noté  $\partial T/\partial x$ . Pour un problème dans l'espace, le gradient sera  $\nabla T$ . C'est ainsi que la loi de Fourier qui lie le *flux de chaleur* au gradient s'écrit

$$j_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x},$$

pour un problème unidirectionnel (transmission de chaleur dans un tube par exemple), mais dans le cas général s'écrit

$$\mathbf{j}_Q = -\kappa \nabla T,$$

avec  $\kappa$  la conductibilité thermique. Notons au passage que le flux de chaleur dans un problème tridimensionnel est un vecteur.

Quelques développements avec l'opérateur gradient :

- gradient d'un produit de 2 fonctions (cela donne un vecteur)

$$\text{grad}(fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g.$$

- gradient d'un produit d'une fonction et d'un vecteur (cela donne une matrice)

$$\text{grad}(f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{ grad } f + f \text{ grad } \mathbf{u}.$$

- gradient d'un produit scalaire (cela donne un vecteur)

$$\text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{ grad } \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\text{rot } \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\text{rot } \mathbf{u}),$$

où  $\times$  représente le produit vectoriel et  $\text{rot}$  l'opérateur rotationnel.

**Exercice 1.8** On définit l'opérateur suivant (en dimension 2) agissant sur des fonctions  $f(x, y)$  ⊠

$$\mathbf{u}\nabla : f \rightarrow (\mathbf{u}\nabla)f = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y},$$

où  $\mathbf{u} = (u, v)$  est un vecteur. Montrer que l'on a  $(\mathbf{u}\nabla)f = \mathbf{u} \cdot \nabla f$ . Que se passe-t-il si on applique maintenant cet opérateur à un vecteur  $\mathbf{a} = (a, b)$ , c'est-à-dire peut-on écrire  $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a}$ ?

### 1.3.2 Opérateur divergence

Un autre opérateur est la *divergence*, notée  $\text{div}$  ou  $\nabla \cdot$  (faire bien attention au point en position centrale après le symbole), qui à un vecteur  $\mathbf{u}$  lui associe la fonction résultant de la somme des dérivées partielles de ses composantes. Par exemple si on écrit

$$\mathbf{u} = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)),$$

alors :

$$\text{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

♣ **Exemple.** – Reprenant l'exemple précédent, on trouve que la divergence du gradient de  $f(x, y; t) = xt + \frac{x^2}{t}y$  est la fonction :

$$\text{div}(\text{grad} f) = \frac{\partial}{\partial x} \left( t + 2\frac{x}{t}y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{t} \right) = \frac{2y}{t}.$$

□

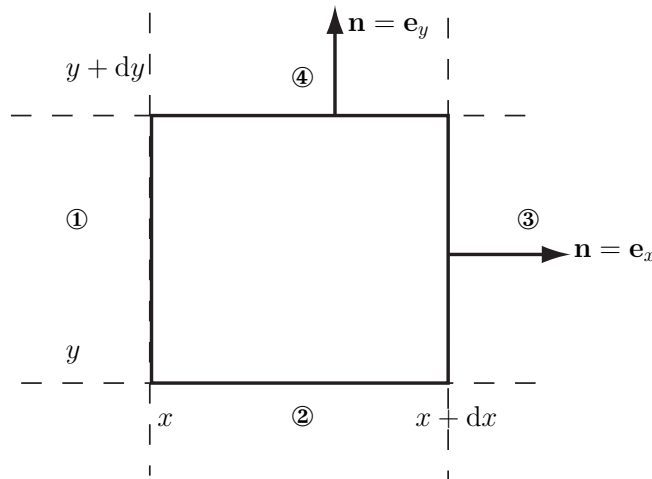


Figure 1.8 : flux à travers une surface de contrôle.

Physiquement, l'opérateur divergence apparaît fréquemment dans les problèmes de flux d'une quantité à travers une surface ou un volume. Considérons en effet le flux d'une quantité  $\mathbf{f}$  de composantes  $(a(x, y), b(x, y))$  à travers la surface  $\mathcal{S}$  entourant un petit volume infinitésimal  $dx dy$  (voir figure 1.8). Ce flux se définit comme

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS,$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à la surface. Ici, cette définition peut donner lieu à une décomposition sur chacune des facettes ① à ④. On a ainsi

$$\Phi = - \int_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS + \int_3 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS - \int_2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y dS + \int_4 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y dS.$$

Prenons les deux premiers termes du membre de droite, on a

$$- \int_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS + \int_3 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS = \int_y^{y+dy} (a(x+dx, y) - a(x, y)) dy = \frac{\partial a}{\partial x} dx dy + o(dx dy).$$



On fait de même avec les deux derniers termes et on additionne les quatre termes pour obtenir l'approximation

$$\Phi = \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) dx dy + o(dx dy) \approx \nabla \cdot \mathbf{f} dx dy.$$

On voit donc que le flux de  $\mathbf{f}$  équivaut au terme de divergence multiplié par le volume (ici une surface) du volume de contrôle  $dx dy$ . Le résultat important à retenir est la relation entre flux et opérateur divergence. On peut démontrer un théorème dit de *Green-Ostrogradski* qui généralise ce résultat. Le théorème de Green-Ostrogradski (appelé encore théorème de la divergence) énonce le résultat suivant

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.}$$

Un corollaire du théorème de Green-Ostrogradski est le suivant

$$\int_V \operatorname{grad} f dV = \int_S f \mathbf{n} dS.$$

Quelques relations utiles de composition avec l'opérateur divergence :

- divergence du produit d'un champ scalaire et d'un champ vectoriel (cela donne un scalaire)

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

- divergence du produit d'un champ vectoriel et d'un tenseur d'ordre 2 (matrice) (cela donne un scalaire)

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} : \operatorname{grad} \mathbf{u},$$

où le symbole ‘:’ représente le double produit contracté :

$$\mathbf{A} : \operatorname{grad} \mathbf{u} = \operatorname{trace}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}).$$

---

**Exercice 1.9** Considérons un solide indéformable dont la vitesse du centre de gravité est  $\mathbf{u}_G$  et sa vitesse de rotation propre est  $\boldsymbol{\Omega}$ . La vitesse  $\mathbf{u}(M)$  d'un point M dans ce solide est donnée par l'équation :

$$\mathbf{u}(M) = \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GM}.$$

Montrer que la divergence de ce champ vectoriel est nulle.

### 1.3.3 Opérateur laplacien

Le dernier opérateur est le *laplacien*, noté<sup>2</sup>  $\Delta$ , soit encore

$$\Delta f(x, y, z) = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

en coordonnées cartésiennes.

Physiquement, cet opérateur se rencontre chaque fois que l'on fait un calcul de flux avec une quantité qui dérive d'une gradient. Par exemple, on a vu plus haut que le flux de température était relié au gradient *via* la loi de Fourier. Un simple bilan d'énergie permet d'écrire que l'accroissement de chaleur (énergie) par unité de temps doit correspondre à la variation



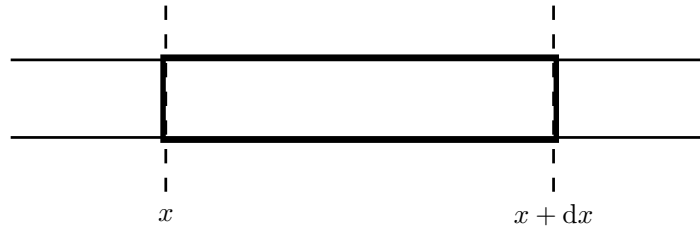


Figure 1.9 : transmission de chaleur dans un barreau.

de ce qui entre et de ce qui sort d'un certain volume (c'est-à-dire le flux de chaleur) s'il n'y a pas de création de chaleur.

En dimension 1 (problème scalaire), cela s'énonce

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} dx,$$

accroissement de chaleur par unité de temps = flux de chaleur,

avec  $c$  la chaleur massique,  $\rho$  la masse volumique ; le bilan est fait pour un barreau de largeur unitaire dans la direction  $x$  et de longueur infinitésimale  $dx$ . On aboutit finalement à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

avec  $\alpha = \kappa/(\rho c)$ . La généralisation à un espace à deux ou trois dimensions ne pose pas de problème ; on a

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \Delta T.$$

### 1.3.4 Dérivée totale ou dérivée matérielle ou dérivée particulière

Jusqu'à présent, il n'y a pas eu de difficultés particulières puisque le calcul différentiel considère tour à tour chacune des variables en prenant toutes les autres constantes, puis on différentie par rapport à cette variable, ainsi de suite. Plus difficile est le cas où les variables ne sont plus indépendantes, mais dépendantes. C'est ce cas qui sera le plus fréquent en mécanique des fluides.

On appelle *dérivée matérielle* (appelée encore *dérivée particulière* ou *dérivée totale* par rapport au temps ou *dérivée de Lagrange*) d'une fonction  $f(x, y, z, t)$  la quantité suivante (dans le cas de coordonnées cartésiennes)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla f}_{\text{terme d'advection}},$$

avec  $(u, v, w)$  les coordonnées de la vitesse locale. Notons que certains auteurs emploient parfois le signe  $D()/Dt$  pour  $d()/dt$  pour mettre l'accent sur le fait qu'il s'agit d'une dérivée matérielle, mais l'emploi de  $d()/dt$  est tout aussi logique car, en fin de compte, si  $x$  et  $y$  sont des fonctions de  $t$ , alors  $f$  n'est qu'une fonction de  $t$  et cela a un sens de parler de  $df/dt$ .

---

2. noté également  $\nabla^2$  car  $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$

♣ **Exemple.** – Considérons le cas :

$$f(x, y, z) = xz + \frac{x^2}{z}y$$

Si les variables sont indépendantes, on a :

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = z + 2\frac{x}{z}y,$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{x^2}{z},$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = x - \frac{x^2}{z^2}y,$$

et la différentielle totale s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \left(z + 2\frac{x}{z}y\right)dx + \frac{x^2}{z}dy + \left(x - \frac{x^2}{z^2}y\right)dz.$$

Admettons maintenant qu'il y ait une dépendance de  $x, y, z$  en fonction de  $t$ . On peut définir une nouvelle dérivée par rapport au temps sous la forme :

$$\frac{df}{dt},$$

qui n'est généralement pas égale à  $\partial f/\partial t$ . Pour preuve, divisons l'expression donnant  $df$  par  $dt$  :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \left(z + 2\frac{x}{z}y\right) \frac{dx}{dt} + \frac{x^2}{z} \frac{dy}{dt} + \left(x - \frac{x^2}{z^2}y\right) \frac{dz}{dt}.$$

Cette relation vaut  $\partial f/\partial t$  uniquement lorsque  $dx/dt = 0$ ,  $dy/dt = 0$ , et  $dz/dt = 0$  c'est-à-dire lorsque les variables  $x, y$ , et  $z$  sont indépendantes de  $t$ . Considérons maintenant un exemple où il y a une dépendance de la forme :

$$x(t) = t, y(t) = t^2 \text{ et } z(t) = t.$$

On a donc :

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ et } \frac{dy}{dt} = 2t.$$

On tire :

$$\frac{df}{dt} = \left(t + 2\frac{t}{t}t^2\right) + \frac{t^2}{t}2t + \left(t - \frac{t^2}{t^2}t^2\right) = 2t + 3t^2.$$

Notons que si on remplace  $x, y$ , et  $z$  par leur expression dans  $f(x, y, z) = xz + \frac{x^2}{z}y$ , on a :  $f(t) = t^2 + t^3$ , dont la dérivée donne bien :  $f'(t) = 2t + 3t^2$ .  $\square$

Physiquement, l'opérateur de dérivée matérielle joue un très grand rôle en mécanique des fluides puisqu'on ne suit pas individuellement toutes les particules du fluide, mais qu'on regarde ce qui se passe localement (description dite eulérienne du mouvement). Considérons ainsi la composante  $u$  du champ de vitesse  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ . On se place à un endroit repéré par le point  $M(x, y, z)$ . Dans un voisinage infinitésimal autour de ce point passent des particules. Ainsi une particule en  $M$  à l'instant  $t$  sera en  $M'$  ( $x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t$ ) à l'instant  $t + \delta t$

et elle aura la vitesse  $(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w)$ . L'accélération selon la direction  $x$  au point M est donc

$$a_x = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u.$$

On fait de même avec les autres composantes. L'accélération locale au point M est donc la somme de l'accélération locale des particules et d'un terme non linéaire  $+\mathbf{u} \cdot \nabla u$  qui est le taux de convection de  $u$ , c'est-à-dire le taux de variation de  $u$  dans l'espace. On parle également d'advection pour qualifier ce terme. Transport par convection ou advection signifie ici la même chose.

La dérivée matérielle s'exprime différemment dans chaque système de coordonnées

– coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , on a

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

– coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , on a

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_\theta &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

**Ex** **Exercice 1.10** Soit un champ de vitesse  $\mathbf{u} = (3r^2 \cos \theta, -2r \sin \theta)$  dans un plan  $r - \theta$  (coordonnées cylindriques). Est-ce que ce champ dérive d'un potentiel? Calculer l'accélération radiale et l'accélération orthoradiale? Quelle est la dérivée totale de  $\mathbf{u}$ ?

**Ex** **Exercice 1.11** Une particule de fluide a la trajectoire :

$$x = \frac{3x_0 y_0 t^2}{z_0}, \quad y = \frac{5x_0 z_0 t}{y_0}, \quad \text{et } z = \frac{2z_0 y_0 t^3}{x_0}.$$

Calculer la vitesse et l'accélération de cette particule.

### 1.3.5 Quelques relations sur les opérateurs

Les relations suivantes peuvent être utiles :

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g, \\ \nabla \cdot (f\mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \mathbf{a}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}), \\ \nabla \cdot \nabla \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}), \\ \nabla \cdot \mathbf{ab} &= \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} \\ \mathbf{1} : \nabla \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a}, \\ \nabla \cdot (f\mathbf{1}) &= \nabla f, \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^\dagger, \\ \frac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}}{x} \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \\ \mathbf{ab} : (\nabla \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{c},\end{aligned}$$

avec  $x = |\mathbf{x}|$ .

## 1.4 Typologie des équations

### 1.4.1 Équation scalaire

Une équation est dite *scalaire* si elle ne fait intervenir que des grandeurs scalaires, sans terme différentiel. Il est assez rare en mécanique d'avoir à résoudre directement des équations scalaires, la plupart des problèmes étant différentiels. Une exception notable est l'équation de Bernoulli qui énonce que la quantité

$$\psi = \rho \frac{u^2}{2} + \rho g z + p$$

est constante sous certaines conditions d'écoulement, avec  $u$  la vitesse du fluide,  $\rho$  est la masse volumique,  $p$  sa pression,  $g$  la gravité, et  $z$  une altitude par rapport à un plan de référence.

### 1.4.2 Équation différentielle ordinaire

Une *équation différentielle ordinaire* est une équation différentielle où la fonction n'est différenciée que par rapport à une seule variable (dite indépendante). Les équations différentielles ordinaires sont assez courantes :

- soit parce que le problème est à la base un problème de dimension 1 ;
- soit parce qu'à l'aide de transformations, on peut se ramener d'un problème aux dérivées partielles à un problème différentiel ordinaire, qui est beaucoup plus simple à résoudre analytiquement ou numériquement.

♣ **Exemple.** – L'équation de Pascal en statique des fluides est une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0,$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $p$  sa pression,  $g$  la gravité, et  $z$  une altitude par rapport à un plan de référence. En hydraulique à surface libre, l'équation de la courbe de remous

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3},$$

fournit la variation de la hauteur d'eau  $h(x)$  dans un canal large de pente  $i$  lorsqu'une loi de Chézy est employée pour le frottement ; on a introduit la hauteur  $h_n = (q^2/(C^2 i))^{1/3}$  et la hauteur critique  $h_c = (q^2/g)^{1/3}$ , avec  $q$  le débit par unité de largeur et  $C$  le coefficient de Chézy. □

L'*ordre* d'une équation différentielle ordinaire est défini comme celui de la dérivée la plus élevée. L'ordre détermine le nombre de conditions initiales nécessaires pour résoudre l'équation différentielle.

♣ **Exemple.** – Une équation différentielle d'ordre 2 telle que  $y'' + ay' + by = c$  nécessite de spécifier deux conditions à la limite. Celles-ci peuvent être données en un point (par exemple, on peut poser  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ ) ou bien en des points différents (par exemple, on peut poser  $y(0) = 0$  et  $y'(1) = 1$ ). Dans le premier cas, on parle de problème aux valeurs initiales (*initial value problem*) alors que dans le dernier cas, on parle de problème aux frontières (*boundary value problem*)<sup>3</sup>. □

Une équation différentielle ordinaire est dite *linéaire* si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées de la fonction et de la fonction elle-même. Par exemple,  $x^3y'' + y' = 0$  est linéaire (en  $y$ ), mais  $y'y'' + x^3 = 0$  est non linéaire. Une équation est dite *quasi-linéaire* si elle est constituée d'une combinaison linéaire des dérivées, mais pas nécessairement de la fonction. Par exemple,  $yy' + x^2y = 1$  n'est pas linéaire, mais quasi-linéaire.

Une équation différentielle ordinaire quasi-linéaire du premier ordre peut se mettre sous la forme

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u, x)}{g(u, x)},$$

avec  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $u$  et  $x$ . Cette équation peut se mettre sous une forme dite différentielle

$$g(u, x)du - f(u, x)dx = 0.$$

### 1.4.3 Équation aux dérivées partielles

La plupart des équations fondamentales de la mécanique telles les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire qu'elles décrivent comment varie un processus – en fonction du temps et selon l'endroit dans l'espace – en reliant des dérivées spatiales et temporelles. Il existe une très grande variété de problèmes aux dérivées partielles que nous allons dévoiler dans ce qui suit.

Il existe plusieurs façons d'écrire une équation aux dérivées partielles. Par exemple, l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

peut s'écrire sous forme condensée :  $u_t = u_{xx}$  ou bien  $\partial_t u = \partial_{xx} u$ .

#### Un peu de vocabulaire

L'*ordre* d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre du terme différentiel le plus élevé. Par exemple, l'équation  $u_t = u_{xx}$  est d'ordre 2. La *variable dépendante* est la fonction que l'on différencie par rapport aux *variables indépendantes*; dans l'exemple précédent,  $u$  est la variable dépendante alors que  $x$  et  $t$  sont les variables indépendantes. Le nombre de variables indépendantes constituent la *dimension* de l'équation aux dérivées partielles. Comme pour une équation différentielle ordinaire, une équation aux dérivées partielles est linéaire si elle est linéaire par rapport à la variable dépendante; l'équation  $u_t = u_{xx}$  est une équation linéaire car elle dépend linéairement de  $u$  ou de ses dérivées.

---

3. On est amené à distinguer les deux types de conditions car numériquement les techniques de résolution sont très différentes. Lorsque les conditions sont données en des points différents, il faut par exemple employer des « méthodes de tir » pour résoudre les équations numériquement.

### Classification des équations linéaires du second ordre

La seule classification générale d'équations aux dérivées partielles concerne les équations linéaires du second ordre (voir § 1.5). Ces équations sont de la forme suivante

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (1.2)$$

avec  $a, b, c, d, e, f$ , et  $g$  des fonctions réelles de  $x$  et  $y$ . Lorsque  $g = 0$ , l'équation est dite *homogène*. On classe les équations linéaires selon le signe de  $\Delta = b^2 - ac > 0$  :

- si  $\Delta = b^2 - ac > 0$ , on dit que l'équation (1.7) est *hyperbolique*. L'équation des ondes (1.11) en est un exemple. En mécanique des fluides, les équations de transport sont souvent hyperboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0 \text{ ou bien } u_{xy} + \dots = 0,$$

où les points de suspension représentent ici des termes liés à  $u$  ou des dérivées d'ordre 1 ;

- si  $\Delta = b^2 - ac < 0$ , on dit que l'équation (1.7) est *elliptique*. L'équation de Laplace (1.9) en donne un exemple. Les équations traduisant un équilibre sont le plus souvent de nature elliptique. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0$$

- si  $\Delta = b^2 - ac = 0$ , on dit que l'équation (1.7) est *parabolique*. L'équation de la chaleur (1.10) en offre un exemple. Les équations de diffusion sont souvent paraboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{yy} + \dots = 0.$$

Il y a un lien fort entre le nom donné aux équations différentielles et le nom des coniques. En effet, si l'on suppose ici que les coefficients de l'équation (1.7) sont constants et l'on substitue dans l'équation (1.7)  $u_{xx}$  par  $x^2$ ,  $u_x$  par  $x$ ,  $u_{yy}$  par  $y^2$ ,  $u_y$  par  $y$ , et  $u_{xy}$  par  $xy$ , on obtient l'équation générale d'une conique qui selon le signe de  $\Delta = b^2 - ac > 0$  donne une parabole ( $\Delta = 0$ ), une ellipse ( $\Delta < 0$ ), ou bien une hyperbole ( $\Delta > 0$ ) comme le montre la figure 1.10. Cette figure montre que les termes différentiels sont liés et varient selon des contraintes imposées par chaque type de courbe. On note par exemple que pour les équations hyperboliques, il existe deux branches et que toute une partie de l'espace n'est pas traversée par la courbe, ce qui va autoriser des sauts discontinus d'une branche à l'autre ; de tels sauts existent dans les équations différentielles et sont appelés *chocs* : une équation hyperbolique est capable de générer des solutions qui deviennent discontinues, c'est-à-dire subissent un choc même si initialement elles sont continues.

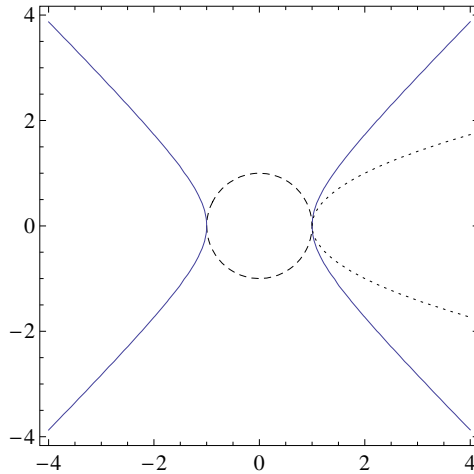
#### 1.4.4 Forme caractéristique des équations du premier ordre

Les équations aux dérivées partielles du premier ordre, quasi-linéaires sont des équations linéaires par rapport aux termes différentiels ; elles peuvent se mettre sous la forme :

$$P(x, y, u)\partial_x u + Q(x, y, u)\partial_y u = R(x, y, u). \quad (1.3)$$

La solution implicite d'une telle équation peut s'écrire  $\psi(x, y, u(x, y)) = c$  (avec  $c$  une constante). On dit que  $\psi$  est une intégrale première du champ vectoriel  $(P, Q, R)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \partial_x \psi(x, y, u(x, y)) &= 0 = \psi_x + \psi_u u_x, \\ \partial_y \psi(x, y, u(x, y)) &= 0 = \psi_y + \psi_u u_y. \end{aligned}$$



**Figure 1.10 :** coniques d'équation  $ax^2 + cy^2 + dx = 1$ . La courbe à trait continu est une hyperbole d'équation  $x^2 - y^2 = 1$  ( $a = 1$ ,  $c = -1$ , et  $d = 0$ ); la courbe en tireté est une ellipse (cercle ici) d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  ( $a = 1$ ,  $c = 1$ , et  $d = 0$ ); la courbe en pointillé est une parabole d'équation  $x - y^2 = 1$  ( $a = 0$ ,  $c = -1$ , et  $d = 1$ ).

Soit encore :  $u_x = -\psi_x/\psi_u$  et  $u_y = -\psi_y/\psi_u$ . On obtient donc une expression plus symétrique :

$$P\psi_x + Q\psi_y + R\psi_u = 0,$$

qui peut encore se mettre sous une forme vectorielle plus facile à interpréter :

$$(P, Q, R) \cdot \nabla\psi = 0. \quad (1.4)$$

Cela veut dire qu'au point M considéré la normale de la courbe solution doit être normale au champ vectoriel  $(P, Q, R)$ . Si le point O :  $(x, y, u)$  et le point voisin O' :  $(x + dx, y + dy, u + du)$  appartiennent à la surface solution, alors le vecteur  $\mathbf{OO}'$  :  $(dx, dy, du)$  doit être normal à  $(P, Q, R)$  :  $\psi_x dx + \psi_y dy + \psi_u du = 0$ . Comme cela doit être vrai pour tout incrément  $dx$ ,  $dy$ , et  $du$ , on en tire les *équations caractéristiques* :

$$\boxed{\frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} = \frac{du}{R(x, y, u)}} \quad (1.5)$$

Chaque paire d'équations définit une courbe dans l'espace  $(x, y, u)$ . Ces courbes définissent une famille à deux paramètres (il y a 3 équations, donc 3 invariants mais seuls 2 sont indépendants) : par exemple, si  $p$  est une *intégrale première* de la première paire d'équations, une courbe solution de la première paire est donnée par une équation de la forme :  $p(x, y, u) = a$ , avec  $a$  une constante. De même pour la deuxième paire :  $q(x, y, u) = b$ . La relation fonctionnelle  $F(a, b) = 0$  définit la surface solution.

À noter que toutes les solutions ne se mettent pas nécessairement sous la forme  $F(a, b) = 0$ . C'est le cas, notamment, des *solutions singulières* des équations différentielles.

La mise sous forme d'équation caractéristique permet souvent de résoudre simplement les équations quasi-linéaires du premier ordre.

♣ **Exemple.** – On veut trouver une solution générale à l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u^2.$$



En identifiant les fonctions  $P$ ,  $Q$ , et  $R$ , on trouve :  $P = x$ ,  $Q = -y$ , et  $R = u^2$ . L'équation caractéristique est donc

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{du}{u^2}.$$

Une intégrale première de la première égalité est

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = -\ln y + \ln a,$$

avec  $a$  une constante d'intégration. On a donc  $a = xy$ . Une intégrale première de

$$-\frac{dy}{y} = \frac{du}{u^2} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{u} + b,$$

avec  $b$  une constante d'intégration. On a donc  $b = \ln y - 1/u$ . Les solutions générales sont de la forme

$$F(a, b) = 0 \Rightarrow F\left(xy, \ln y - \frac{1}{u}\right) = 0.$$

C'est la forme implicite de la solution (la plus générale). Une forme explicite est de supposer qu'il existe une fonction  $G$  telle que  $\ln y - 1/u = G(xy)$ , soit encore

$$u = \frac{1}{\ln y - G(xy)}.$$

La fonction  $G$  reste à déterminer en fonction des conditions aux limites.  $\square$

### Conditions aux limites

En mécanique, on doit résoudre des équations comprenant des variables d'espace et le temps. En général, il faut donc pour déterminer une solution particulière  $u$  à une équation aux dérivées partielles :

- les conditions aux limites qui précisent comment varie  $u$  à la frontière du domaine (sur tout ou partie de ce domaine) à tout temps ;
- les conditions initiales qui précisent comment varie  $u$  à l'instant initial pour tout point du domaine.

On doit résoudre alors ce qu'on appelle un problème aux limites avec des conditions initiales (*boundary initial value problem*). Dans certains cas, on n'a pas besoin d'autant d'information. Par exemple, pour certaines équations hyperboliques, on a besoin uniquement des conditions initiales tandis que les problèmes elliptiques ne nécessitent que des conditions aux limites (elles reflètent en général des processus stationnaires).

On distingue également :

- les conditions aux limites de type *Dirichlet* : la condition aux limites spécifie la valeur  $u_0$  que doit prendre la fonction en un point ou une série de points

$$u(\mathbf{x} ; t) = u_0(t)$$

le long d'une courbe  $\Gamma$  ;

- les conditions aux limites de type *Neuman* : la condition aux limites spécifie la dérivée que doit prendre la fonction en un point ou une série de points. Physiquement, cela traduit souvent une condition de flux aux frontières du domaine.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{n} ; t) = \phi(t)$$

le long d'une courbe  $\Gamma$ , avec  $\mathbf{n}$  la normale de  $\Gamma$  et  $\phi(t)$  une fonction de flux connue.

On se reportera au § 1.6 pour les conditions aux limites dans les problèmes hyperboliques.

### 1.4.5 Équation variationnelle

Il existe en mécanique un principe dit *variationnel* selon lequel si un processus  $J[u]$  (avec  $J$  une fonctionnelle et  $u$  une fonction) est stationnaire et stable, alors il doit rester insensible aux petites variations de  $u$ . Cela s'écrit  $\delta J = 0$ . Une fonctionnelle est une fonction généralisée qui fait intervenir à la fois  $u$ , ses dérivées, et ses intégrales. Pour des problèmes de dimension 1, une forme générique de  $J$  est par exemple de la forme

$$J[u] = \int L(t, u, \dot{u}, \dots) dt, \quad (1.6)$$

avec  $L$  une fonction de  $u(t)$ ,  $t$ , et ses dérivées.

Par exemple, le principe de Hamilton affirme qu'une particule bouge de telle sorte que l'action intégrale qui représente la différence entre énergies cinétique et potentielle soit minimisée

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (\text{énergie cinétique} - \text{énergie potentielle}) dt.$$

Un problème variationnel de la forme  $\delta J = 0$  avec  $J$  donné par l'équation (1.6) peut se ramener à un problème purement différentiel. On peut en effet montrer que  $u(t)$  est également solution de l'équation différentielle dite d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{u}} \right) + \dots = 0.$$

♣ **Exemple.** – Par exemple si  $y$  désigne la position d'une masse ponctuelle  $m$  attachée à un ressort de raideur  $k$ , alors le mouvement  $y(t)$  est la solution de  $\delta J = 0$ , avec

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (m\dot{y}^2 - ky^2) dt.$$

Par identification on a  $L(y, \dot{y}) = (m\dot{y}^2 - ky^2)/2$ . On a alors  $L_y = -ky$  et  $L_{\dot{y}} = m\dot{y}$ . L'équation d'Euler-Lagrange correspondante est donc

$$-ky - \frac{d}{dt} m\dot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{m}y,$$

qui est l'équation de Newton pour une masse oscillante.  $\square$

## 1.5 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre

Le problème de la classification des équations linéaires du second ordre a été traité de façon exhaustive dans plusieurs ouvrages (Garabedian, 1964; Zauderer, 1983; Kevorkian, 2000). On va ici s'intéresser principalement à des équations du second ordre à deux variables et à des systèmes de deux équations différentielles du premier ordre.

La forme générique de toute équation différentielle linéaire du second ordre à deux variables est la suivante

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (1.7)$$

avec  $a, b, c, d, e, f$ , et  $g$  des fonctions réelles de  $x$  et  $y$ . On écrit également cette équation sous la forme d'un opérateur linéaire

$$L[u] + fu = g, \quad (1.8)$$

avec

$$L = a\partial_{xx} + 2b\partial_{xy} + c\partial_{yy} + d\partial_x + e\partial_y.$$

Parmi les équations linéaires du second ordre, on recense

– l'équation de Laplace avec  $a = c = 1$  et les autres fonctions nulles

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad (1.9)$$

– l'équation de la chaleur (la variable  $y$  étant remplacée ici par la variable  $t$ ) avec  $k = -a/e = \text{cte}$  le coefficient de diffusion

$$u_t = ku_{xx}; \quad (1.10)$$

– l'équation des ondes (la variable  $y$  étant remplacée ici par la variable  $t$ ) avec  $\gamma = \sqrt{-a/e} = \text{cte}$  la célérité des ondes

$$u_{tt} = \gamma^2 u_{xx}. \quad (1.11)$$

En supposant que  $a \neq 0$  (au moins localement), on transforme les opérateurs d'ordre 2 de la façon suivante

$$\partial_x^2 + \frac{2b}{a}\partial_x\partial_y + \frac{c}{a}\partial_y^2 = (\partial_x - \omega^+\partial_y)(\partial_x - \omega^-\partial_y) + (\partial_x\omega^- - \omega^+\partial_y\omega^-)\partial_y$$

où  $\omega^-$  et  $\omega^+$  sont les racines de l'équation  $a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$

$$\omega^\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Les racines sont donc réelles sous réserve que  $\Delta = b^2 - ac > 0$ . Une première application de cette transformation est le passage d'une équation différentielle d'ordre 2 à un système d'équations différentielles d'ordre 1. Pour cela, posons par exemple

$$v = (\partial_x - \omega^+\partial_y)u,$$

ce qui permet d'écrire l'équation (1.7) sous la forme

$$a(v_x - \omega^-v_y + (\partial_x\omega^- - \omega^+\partial_y\omega^-)u_y) + du_x + eu_y + fu = g.$$

L'intérêt de cette transformation est évident quand on peut transformer l'équation de départ en deux équations du premier ordre indépendantes ou faiblement dépendantes. Par exemple, l'équation des ondes (1.11) peut se transformer en

$$\begin{cases} u_t - \gamma u_x = v, \\ v_t + \gamma v_x = 0. \end{cases}$$

Quoique le système soit couplé, on peut résoudre la seconde équation indépendamment, puis résoudre la première équation. Dans le cas général, la transformation n'amène pas de résultat qui puisse être utilisé de façon systématique et on n'en parlera donc pas plus longtemps.

On classe les équations linéaires selon le signe de  $\Delta$  :

- si  $\Delta = b^2 - ac > 0$ , les deux racines  $\omega^-$  et  $\omega^+$  sont positives, on dit que l'équation (1.7) est *hyperbolique*. L'équation des ondes (1.11) en est un exemple. En mécanique des fluides, les équations de transport sont souvent hyperboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0 \text{ ou bien } u_{xy} + \dots = 0,$$

où les points de suspension représentent ici des termes liés à  $u$  ou des dérivées d'ordre 1 ;

- si  $\Delta = b^2 - ac < 0$ , les deux racines  $\omega^-$  et  $\omega^+$  sont complexes, on dit que l'équation (1.7) est *elliptique*. L'équation de Laplace (1.9) en donne un exemple. Les équations traduisant un équilibre sont le plus souvent de nature elliptique. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0$$

- si  $\Delta = b^2 - ac = 0$ ,  $\omega^-$  et  $\omega^+$  sont égales, on dit que l'équation (1.7) est *parabolique*. L'équation de la chaleur (1.10) en offre un exemple. Les équations de diffusion sont souvent paraboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{yy} + \dots = 0.$$

Les formes canoniques vues ci-dessus peuvent être déduites de l'équation (1.7) en faisant un changement de variables de la forme

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y), \end{aligned}$$

en supposant que le jacobien de la transformation est non nul

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} + u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x, \end{aligned}$$

et ainsi de suite avec les ordres supérieures des dérivées partielles. On peut alors transformer l'équation (1.7) en

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Bu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (1.12)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + c\xi_y^2 + 2b\xi_x\xi_y, \\ B &= a\xi_x\eta_x + c\xi_y\eta_y + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x), \\ C &= a\eta_x^2 + c\eta_y^2 + 2b\eta_x\eta_y, \\ D &= L(\xi), \\ E &= L(\eta), \end{aligned}$$

alors que  $F = f$  et  $G = g$  restent inchangées. Notons que l'on a aussi  $\Delta = b^2 - ac = (B^2 - AC)/J$ , ce qui montre que la nature d'une équation différentielle (elliptique, parabolique, hyperbolique) ne peut pas être modifiée lors d'un changement de variables. Comme on est libre du changement de variable, on cherche des jeux de fonctions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  telles que les fonctions  $A$ ,  $B$ , ou  $C$  puissent devenir identiquement nulles. Par exemple, en choisissant  $\xi$  et  $\eta$  comme étant les solutions de  $av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$ , on impose que  $A = C = 0$  et on se ramène alors à la forme générique  $u_{\xi\eta} + \dots = 0$ .

### 1.5.1 Équations hyperboliques

Nous commençons par rechercher  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  solutions de  $av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$  de telle sorte que  $A = C = 0$ . Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre, qui peut se résoudre à l'aide de l'équation caractéristique. L'équation  $av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$  peut se mettre sous la forme

$$H(x, y, v, p, q) = ap^2 + 2bpq + cq^2 = 0, \quad (1.13)$$

avec les notations usuelles  $p = v_x$  et  $q = v_y$ . Une des équations caractéristiques est

$$ds = \frac{dv}{pH_p + H_q},$$

qui ici nous donne  $dv/ds = 0$ , avec  $s$  une abscisse curviligne le long d'une courbe  $\mathcal{C}$  telle que  $dx/ds = H_p$  et  $dy/ds = H_q$ . On a donc  $v = cte$  le long de  $\mathcal{C}$ . On a donc

$$v_x dx + v_y dy = p dx + q dy = 0, \quad (1.14)$$

le long de cette courbe. En éliminant  $p$  et  $q$  des équations (1.14) et (1.14), on tire que

$$ady^2 + 2bdxdy + cd x^2 = 0.$$

Cette équation quadratique a donc pour solution

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (1.15)$$

Les intégrales premières de cette équation forment donc les fonctions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  recherchées. Les courbes du plan  $\xi(x, y) = cte$  et  $\eta(x, y) = cte$  sont appelées les courbes *caractéristiques* de l'équation (1.7). Dans un plan  $\xi - \eta$ , ces courbes sont des lignes droites parallèles aux axes. Les variables  $\xi$  et  $\eta$  sont également appelées les *coordonnées caractéristiques*.

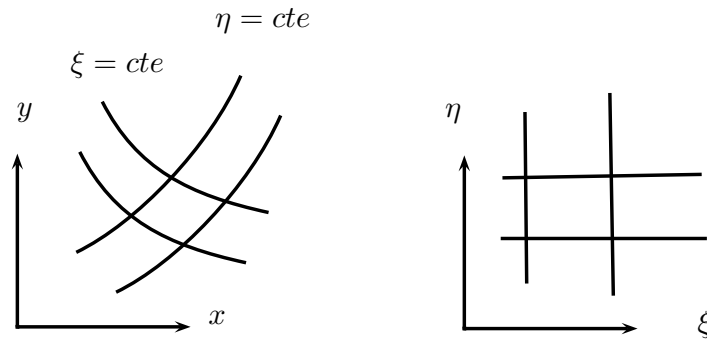


Figure 1.11 : réseau de caractéristiques.

### Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy pour une équation hyperbolique est constitué d'une équation, dont la forme canonique est

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1.16)$$

où  $f$  est une fonction qui dépend continûment de ses arguments  $x, y, u, p = u_x$ , et  $q = u_y$ . On adjoint une condition aux limites de la forme

$$u = u_0(s), p = p_0(s), q = q_0(s), \tag{1.17}$$

le long d'une courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $x = x(s)$  et  $y = y(s)$ , où  $s$  est une coordonnée curviligne. Notons que  $u(s), p(s)$ , et  $q(s)$  ne peuvent être choisies indépendamment, mais doivent vérifier une condition de compatibilité

$$\frac{du}{ds} = p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds}, \tag{1.18}$$

le long de  $\mathcal{C}$ . Cette courbe  $\mathcal{C}$  est quelconque, mais ne peut pas coïncider avec l'une des courbes caractéristiques sous peine de perdre l'unicité de la solution (Garabedian, 1964, voir pp. 102–103); notons ici que puisque l'équation est sous sa forme canonique, les courbes caractéristiques sont les droites  $x = cste$  et  $y = cste$ .  $\mathcal{C}$  ne doit pas non plus être tangente à ces courbes. Autrement dit,  $\mathcal{C}$  a pour équation cartésienne  $y = y_0(x)$ , avec  $y_0$  une fonction strictement monotone de  $x$ .

Considérons tout d'abord la solution spéciale à l'équation (1.16) lorsque  $f = 0$ . Trivialement, on a

$$u = \phi(x) + \psi(y).$$

Les conditions aux limites imposent

$$\phi(x) + \psi(y) = u_0(x, y), \phi'(x) = p_0(x), \text{ et } \psi'(y) = q_0(y),$$

quand  $(x, y)$  décrivent la courbe  $\mathcal{C}$ , ce qui donne

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (u_0(x) + u_0(y)) + \frac{1}{2} \int_{x_0(y)}^x p(x') dx' + \frac{1}{2} \int_{y_0(x)}^y p(y') dy'.$$

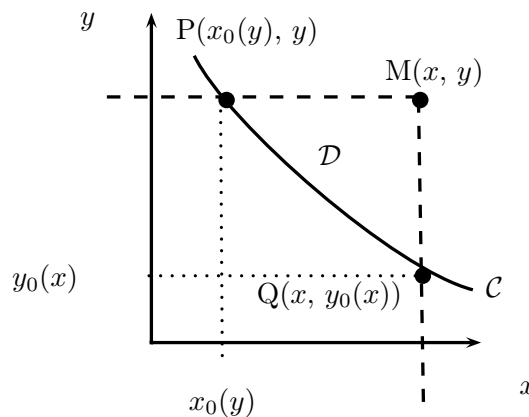


Figure 1.12 : problème de Cauchy.

L'expression se généralise aisément dans le cas d'équation non homogène de la forme

$$u_{xy} = g(x, y).$$

La linéarité de l'équation permet d'écrire la solution comme la somme d'une solution générale et d'une solution particulière, cette dernière étant obtenue par une double intégration de  $g$

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (u_0(x) + u_0(y)) + \frac{1}{2} \int_{x_0(y)}^x p(x') dx' + \frac{1}{2} \int_{y_0(x)}^y p(y') dy' + \int_{x_0(y)}^x \int_{x_0(y)}^y g(x', y') dy' dx',$$

que l'on peut écrire sous une forme générale

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (u_0(P) + u_0(Q)) - \frac{1}{2} \int_P^Q (q(y') dy' - p(x') dx') + \int_{\mathcal{D}} g(x', y') dy' dx'.$$

### Fonction de Riemann

Nous examinons maintenant le problème suivant

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1.19)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$u = u_0(s), \quad p = p_0(s), \quad q = q_0(s), \quad (1.20)$$

sur une courbe  $\mathcal{C}$ .

L'idée est d'interpréter l'opérateur

$$L = \partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c,$$

en termes de divergence, ce qui permet d'appliquer le théorème de Green. À cet effet, on introduit un nouvel opérateur  $M[v]$ , que l'on appellera *opérateur adjoint*, opérant sur une nouvelle fonction  $v$ , qui reste à préciser. Cet opérateur est défini de telle sorte que

$$vL[u] - uM[v] = \nabla \cdot \mathbf{U} = U_x + V_y,$$

avec  $\mathbf{U} = (U, V)$  un champ vectoriel qui reste à définir. Pour déterminer  $M$ , examinons les termes de  $vL[u]$  que l'on intègre par partie

$$\begin{aligned} vu_{xy} &= (vu_x)_y - v_y u_x = (vu_x)_y + v_{xy}u - (v_y u)_x, \\ vau_x &= (uav)_x - u(av)_x, \\ vbu_y &= (vbu)_y - u(bv)_y, \end{aligned}$$

dont la somme est

$$\begin{aligned} vL[u] &= (vu_x)_y + v_{xy}u - (v_y u)_x + (uav)_x - u(av)_x + (vbu)_y - u(bv)_y + cuv \\ &= (vu_x)_y + (vbu)_y - (v_y u)_x + (uav)_x + cvu + u(v_{xy} - (av)_x - (bv)_y). \end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$M[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv,$$

et

$$U = -v_y u + uav \quad \text{et} \quad V = vu_x + vbu.$$

Afin de rendre symétriques les expressions de  $U$  et  $V$ , on les transforme légèrement en notant par exemple que pour  $U$

$$\frac{1}{2}(-v_y u)_x = \frac{1}{2}(-(vu)_y + u_y v)_x,$$

et de même pour  $V$

$$\frac{1}{2}(u_x v)_y = \frac{1}{2}((vu)_x - v_x u)_y,$$



et en sommant les deux expressions, on peut faire disparaître les termes en  $(vu)_x$  et  $(vu)_y$ . On aboutit alors à

$$U = auv + \frac{1}{2}vu_y - \frac{1}{2}v_yu \text{ et } V = buv + \frac{1}{2}vu_x - \frac{1}{2}v_xu. \quad (1.21)$$

L'application du théorème de Green amène à

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (vL[u] - uM[v])dxdy &= \int_{\mathcal{C}} \left( auv + \frac{1}{2}vu_y - \frac{1}{2}v_yu \right) dy - \left( buv + \frac{1}{2}vu_x - \frac{1}{2}v_xu \right) dx. \\ &= v(M)u(M) - \frac{1}{2}v(P)u(P) - \frac{1}{2}v(Q)u(Q) \\ &+ \int_Q^M (av - v_y)udy - \int_P^M (bv - v_x)udx + \int_P^Q B[u, v], \end{aligned}$$

avec

$$B[u, v] = \left( auv + \frac{1}{2}vu_y - \frac{1}{2}v_yu \right) dy - \left( buv + \frac{1}{2}vu_x - \frac{1}{2}v_xu \right) dx.$$

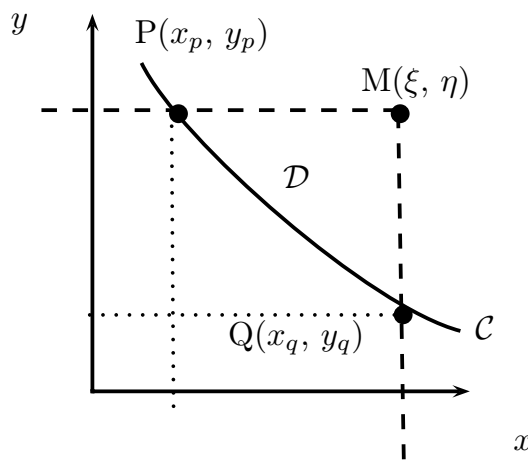


Figure 1.13 : problème de Cauchy.

Comme on peut choisir librement la fonction  $v$ , on peut considérer une fonction  $v$  telle que

$$M[v] = 0, v(M) = 1, v_y = av, \text{ sur } QM \text{ et } v_x = bv \text{ sur } PM.$$

L'intégration de ces équations donne

$$\begin{aligned} v(\xi, y) &= \exp \left( \int_{\eta}^y a(\xi, s) ds \right), \\ v(x, \eta) &= \exp \left( \int_{\xi}^x b(s, \eta) ds \right), \end{aligned}$$

où  $(\xi, \eta)$  désigne les coordonnées de  $M$ . La fonction  $v$  ainsi formée est appelée *fonction de Riemann*. On écrit

$$R(x, y; \xi, \eta) = v(x, y),$$

pour montrer que la fonction de Riemann dépend tout à la fois du couple  $(x, y)$  et  $(\xi, \eta)$ . Avec cette fonction en main, on peut maintenant écrire la solution  $v(M)$  en fonction de données aux frontières et de la fonction de Riemann

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}R(P; \xi, \eta)u(p) + \frac{1}{2}R(Q; \xi, \eta)u(Q) \\ &- \int_P^Q B[u, R(x, y; \xi, \eta)] + \int_{\mathcal{D}} f(x, y)R(x, y; \xi, \eta)dxdy. \end{aligned} \quad (1.22)$$

♣ **Exemple.** – La fonction de Riemann  $v$  peut être déterminée pour quelques problèmes (Garabedian, 1964, voir problème 9, § 5.1, p 150). Par exemple, pour une équation différentielle de la forme

$$u_{xy} + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{x+y} (u_x + u_y) = 0, \quad (1.23)$$

le problème adjoint est donc

$$M[v] = 0, \text{ avec } M[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \text{ avec } a = b = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{x+y},$$

et où  $c = 0$ . En suivant Garabedian (1964), on pose

$$v = \frac{(x+y)^\lambda}{(x+\eta)^{\lambda/2}(x+\eta)^{\lambda/2}} W(\zeta), \text{ avec } \zeta = \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x+\eta)(y+\xi)}.$$

On trouve que  $W$  vérifie l'équation

$$-\lambda^2 W(\zeta) + 4(1 - (\lambda + 1)\zeta)W'(\zeta) + \zeta(1 - \zeta)W''(\zeta) = 0,$$

dont la solution est

$$W(\zeta) = F \left[ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 1, \zeta \right],$$

avec  $F$  la fonction hypergéométrique. On peut également se servir des propriétés de la fonction hypergéométrique pour mettre sous une forme un peu différente cette fonction. On a en effet (Abramowitz & Stegun, 1964, voir p. 559)

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-b} F \left( c-a, b, c, \frac{z}{z-1} \right),$$

ce qui ici nous donne

$$F \left[ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, z \right] = (1-z)^{-\frac{3}{2}} F \left[ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{z}{z-1} \right].$$

Une nouvelle transformation amène à interpréter cette fonction en termes de fonction de Legendre (Abramowitz & Stegun, 1964, voir p. 562)

$$F \left[ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, z \right] = P \left[ \frac{1}{2}, 0, 1 - 2z \right].$$

où  $P$  désigne ici la fonction de Legendre de degré  $1/2$  et d'ordre  $0$ . La solution finale est donc

$$u(x, y) = \frac{(x+y)^{3/2}}{(a+b)^{3/2}} P \left[ \frac{1}{2}, 0, 1 - \frac{2(a-x)(b-y)}{(a+b)(x+y)} \right].$$

### 1.5.2 Solutions faibles des problèmes hyperboliques

Contrairement aux équations elliptiques et paraboliques, les équations différentielles hyperboliques ne lissent pas les discontinuités qui apparaissent dans les conditions aux limites, mais les propagent le long des caractéristiques. L'existence de discontinuité dans le domaine de calcul entre en conflit avec les hypothèses de continuité et de dérivabilité sous-jacentes au problème différentiel, ce qui amène à s'interroger sur la notion de solution.

Il faut tout d'abord se rappeler que les équations différentielles étudiées concernent des problèmes physiques et sont en général obtenues par application des lois de conservation

sur un volume de contrôle: l'équation différentielle est obtenue à partir d'une hypothèse de continuité sur tout le volume de contrôle. Si une telle hypothèse n'est pas valide, il nous reste toujours la formule macroscopique originelle. Cette formulation fournit en fait des conditions de correspondance entre solutions continues de deux domaines adjacents. Une solution au problème différentiel écrit sous sa forme intégrale est appelée *solution faible*; une solution continue est appelée en général solution régulière.

Considérons par exemple l'équation des ondes

$$L[u] = 0,$$

avec  $L = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$ . On considère un domaine de calcul  $\mathcal{D}$  dans le plan  $x - t$  et des fonctions tests  $v$  à support compact et régulières, telles que  $v$  soient nulles en dehors de  $\mathcal{D}$  (cela implique notamment que  $v$  et ses dérivées sont nulles sur les frontières de  $\mathcal{D}$ ). Calculons maintenant

$$\int_{\mathcal{D}} (vL[u] - uL[v]) dxdt.$$

En se servant de

$$\begin{aligned} \partial_t(v\partial_t u - u\partial_t v) &= v\partial_{tt} u - u\partial_{tt} v + \partial_t u \partial_t v - \partial_t u \partial_t v, \\ &= v\partial_{tt} u - u\partial_{tt} v, \end{aligned}$$

on tire

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (vL[u] - uL[v]) dxdt &= \int_{\mathcal{D}} \left[ \partial_t(v\partial_t u - u\partial_t v) + \partial_x(-c^2 v\partial_x u + c^2 u\partial_x v) \right] dxdt, \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} \begin{pmatrix} -c^2 v\partial_x u + c^2 u\partial_x v \\ v\partial_t u - u\partial_t v \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} ds, \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'après le théorème de la divergence et où  $\partial\mathcal{D}$  représente le contour orienté de  $\mathcal{D}$  et  $\mathbf{n}$  une normale à ce contour. Comme  $v$  et sa dérivée s'annulent sur le contour de  $\mathcal{D}$ , on en déduit que l'intégrale est nulle. On arrive finalement à

$$\int_{\mathcal{D}} vL[u] dxdt = \int_{\mathcal{D}} uL[v] dxdt.$$

Si  $u$  est continûment différentiable et vérifie  $L[u] = 0$ , alors elle vérifie aussi

$$\int_{\mathcal{D}} uL[v] dxdt = 0. \quad (1.24)$$

Inversement toute fonction continue et deux fois différentiable qui vérifie cette relation intégrale doit également vérifier  $L[u] = 0$ . On dit alors que  $u$  est une solution classique ou régulière du problème différentiel  $L[f] = 0$ . Si une fonction n'est pas deux fois différentiable, mais vérifie la relation intégrale (1.24), alors on dit qu'il s'agit d'une *solution faible*.

## 1.6 Conditions aux limites pour les problèmes hyperboliques

On a vu que tout problème hyperbolique peut se ramener après changement de variables à une équation canonique de la forme

$$u_{xt} + a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t).$$

On va tout d'abord expliciter le problème des conditions aux limites avec l'exemple de l'équation des ondes.

## Équation des ondes

Considérons l'équation des ondes

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

qui peut se transformer en

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

avec  $\xi = x + ct$  et  $\eta = x - ct$ , où  $c$  représente la vitesse caractéristique de propagation des ondes. Si on intègre cette équation sur un domaine de calcul prédéfini  $\mathcal{D}$ , dont le contour  $\partial\mathcal{D}$  est orienté (dans le sens positif), on peut mettre en relief le rôle des conditions aux limites dans le calcul de la solution. On fera ici un usage important du théorème de la divergence (ou de façon équivalente de la formule de Green). En tout point du contour, la normale est notée  $\mathbf{n}$ . Le théorème de la divergence nous permet de passer d'une formulation sur un volume (ce qui représente l'équation à résoudre) à une formulation sur un contour (ce qui fait apparaître les conditions aux limites)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{D}} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx dt, \\ &= \int_{\mathcal{D}} (\partial_t u_t + \partial_x (-c^2 u_x)) dx dt, \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} (c^2 u_x, -u_t) \cdot \mathbf{n} ds, \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} (u_t dx + c^2 u_x dt), \end{aligned}$$

car  $\mathbf{n} ds = (dt, -dx)$ . On va voir que selon le type de conditions que l'on impose, il faut imposer des contours différents; les conditions imposées sur ce contour jouent également un rôle différent, ce qui va nous amener à distinguer les frontières temporelles (sur un axe  $Ot$ ) et les frontières spatiales (sur un arc  $Ox$ ).

Considérons en premier lieu le problème suivant: on cherche à résoudre l'équation des ondes, avec la condition initiale suivante sur l'axe des  $x$ :

$$u(x, 0) = f(x) \text{ et } u_t(x, 0) = g(x).$$

On cherche à calculer la solution en un point  $M$ . On peut tracer deux caractéristiques émanant des points  $A$  et  $B$  situés sur l'axe  $Ox$ . On considère alors le domaine triangulaire  $AMB$ . Calculons tout d'abord l'intégrand  $u_t dx + c^2 u_x dt$  sur la caractéristique  $BM$  d'équation  $x + ct = cste$

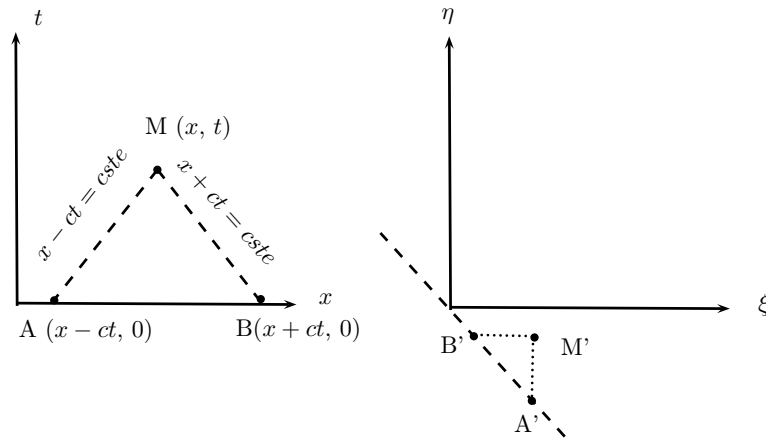
$$\int_{BM} (u_t dx + c^2 u_x dt) = \int_{BM} (-cu_t + c^2 u_x) dt,$$

or  $u_t - cu_x$  est la dérivée de  $u$  selon la caractéristique  $BM$ , donc  $u_t - cu_x = du/dt$  sur  $BM$ . On a donc

$$\int_{BM} (u_t dx + c^2 u_x dt) = \int_{BM} (-c) \frac{du}{dt} dt = - \int_{BM} c du.$$

On aboutit à

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}} (u_t dx + c^2 u_x dt) &= - \int_{BM} c du + \int_{MA} c du + \int_{AB} u_t dx, \\ &= -2cu(x, t) + cu(x + ct, 0) + cu(x - ct, 0) + \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(x, 0) dx, \\ &= 0, \end{aligned}$$



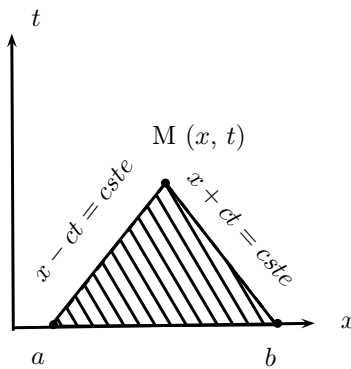
**Figure 1.14 :** le triangle des caractéristiques dans le plan physique  $x - t$  (à gauche) et dans le plan caractéristique  $\xi - \eta$  (à droite).

Soit finalement

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(x, 0) dx,$$

qui est une forme spéciale de la solution d'Alembert.

Il est manifeste qu'avec ce type de conditions aux limites, où l'on fixe ce qui se passe sur un arc donné (par exemple, un segment de l'axe  $Ox$  compris entre  $x = a$  et  $x = b$ ), on ne peut renseigner que sur un domaine triangulaire, appelé *domaine d'influence*, qui est rempli par les caractéristiques  $x - ct$  et  $x + ct$ . Un tel problème aux limites est appelé *problème de Cauchy* et la frontière où l'on a imposé les conditions aux limites est dite *frontière spatiale*.



**Figure 1.15 :** domaine d'influence.

Si on veut remplir tout le premier quadrant, il faut fournir une condition supplémentaire sous la forme d'une condition aux limites le long de l'axe  $Ot$ . Pour cette raison, une telle frontière est appelée *temporelle*. On impose une condition aux limites de la forme suivante

$$u(0, t) = h(t);$$

c'est une condition aux limites de type *Dirichlet*. Pour calculer ce qui se passe au point  $M$ , il faut calculer ce qui se passe sur trois caractéristiques comme le schématise la figure 1.16. En faisant comme précédemment une décomposition selon les différentes caractéristiques, on

obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}} (u_t dx + c^2 u_x dt) &= - \int_{BM} c du + \int_{MC} c du - \int_{CA} c du + \int_{AB} u_t dx, \\ &= -2cu(x,t) + cu(x+ct,0) + 2cu\left(0, t - \frac{x}{c}\right) - cu(ct-x,0) + \int_{ct-x}^{x+ct} u_t(x,0) dx, \\ &= 0, \end{aligned}$$

soit

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(x,0) dx + h\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

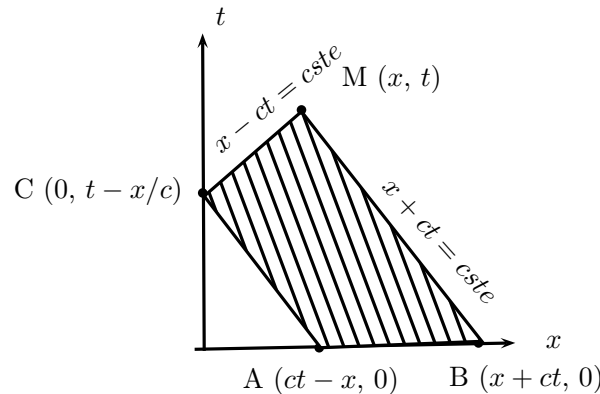


Figure 1.16 : domaine de calcul avec une frontière temporelle.

Notons que si les conditions initiales et aux limites ne se recoupent pas au point origine, c'est-à-dire si  $f(0) \neq h(0)$ , alors une discontinuité (appelée encore choc) se produit. Si les conditions aux limites sont un peu plus complexes, par exemple sous une forme d'une condition de *Neumann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h(t),$$

ou bien mixte

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \beta u(0,t) = h(t),$$

le problème se résout de la même façon. Si l'on ajoute un terme source dans l'équation des ondes, il n'y a pas de difficulté supplémentaire: le terme source apparaît dans la solution sous la forme d'une (double) intégrale sur le domaine  $\mathcal{D}$  (Zauderer, 1983, voir pp. 298–299). D'une façon générale, ce que l'on voit apparaître, ce sont deux domaines dans le premier quadrant, séparés par la caractéristique  $x = ct$  émanant du point origine. Le domaine I est entièrement contrôlé par les conditions initiales, alors que le domaine II nécessite de connaître les conditions aux limites comme le montre la figure 1.17.

Le cas des frontières mobiles est plus intéressant. Imaginons que la frontière bouge. Sa position est donnée par  $x = h(t)$  et donc sa vitesse par  $u_f = \dot{h}(t)$ . On cherche à résoudre l'équation des ondes  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  avec pour conditions aux limites

$$u(x,t)|_{x=h(t)} = \dot{h},$$

et pour conditions initiales

$$u(x,0) = f(x) \text{ et } u_t(x,0) = g(x).$$

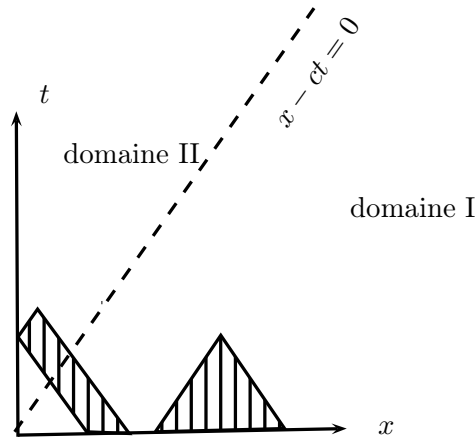


Figure 1.17 : domaine de calcul avec des conditions initiales et aux limites.

Si la vitesse du piston est supérieure à la vitesse caractéristique  $c$ , le problème est mal posé. Cela peut se comprendre en examinant la figure 1.18(a). Pour un point M tel que reporté sur cette figure, sa vitesse  $u$  équivaut à la vitesse de la frontière mobile et à celle impulsée initialement, ce qui n'est pas possible sauf cas exceptionnel où vitesses initiale et aux frontières seraient tout le temps égales. Une telle condition aux limites implique en fait l'apparition d'un choc. Pour le cas plus sympathique où  $\dot{h} < c$ , le problème est bien posé puisqu'on peut en tout point M construire une solution comme on l'a fait juste au-dessus avec le problème sur le premier quadrant.

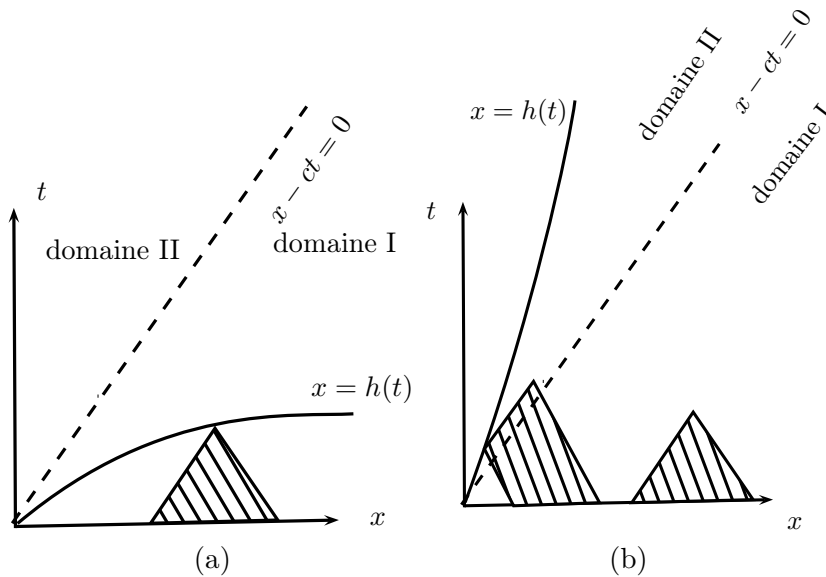


Figure 1.18 : (a) frontière mobile avec  $\dot{h} > c$ ; avec  $\dot{h} < c$ .

## Vocabulaire

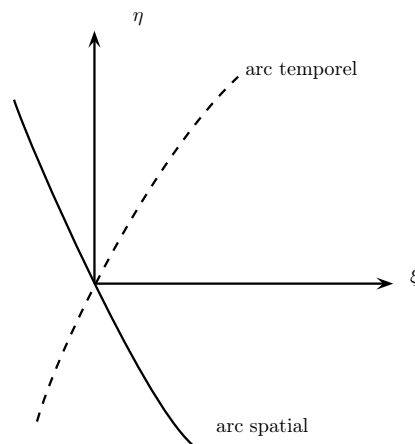
Ce qui a été dit à propos de l'équation de la chaleur peut se généraliser à tout problème différentiel hyperbolique du second ordre. Notamment, quand on étudie l'équation des ondes,

on parle

- de frontière temporelle (*time-like curve*) lorsque la courbe  $x = h(t)$  est au-dessus de la caractéristique  $\dot{h} < c$ . Toute frontière de ce type peut servir à fournir une condition aux limites ;
- de frontière spatiale (*space-like curve*) lorsque la courbe  $x = h(t)$  est au-dessous de la caractéristique  $\dot{h} > c$ . Ce type de frontière sert à donner une condition initiale.

Ces définitions se généralisent en examinant la position de la frontière dans le plan caractéristique  $\xi - \eta$  : si les droites caractéristiques  $\xi = cste$  et  $\eta = cste$  émanent de la frontière en restant dans le même domaine, on parle d'*arc spatial*. Inversement, si les droites caractéristiques sont situées de part et d'autre de l'arc, alors on parle d'arc temporel.

Les théorèmes d'existence ont été prouvés lorsqu'on a un problème avec une frontière spatiale, mais l'unicité de la solution est un problème beaucoup plus ardu lorsque la frontière est temporelle.



**Figure 1.19** : définition d'un arc spatial/temporel selon la position des caractéristiques.



## 1.7 Méthodes analytiques de résolution des équations différentielles

### 1.7.1 Vue générale sur les méthodes de résolution des équations

L'INGÉNIEUR a à sa disposition une grande variété de méthodes de résolution des équations différentielles. S'il n'existe pas d'outils universels, de solveur qui permette de résoudre tout type d'équation, il existe un certain nombre de techniques qui marchent dans la plupart des cas d'intérêt pratique. Parmi les méthodes exactes, on peut citer :

- *séparation des variables* : cette technique permet de transformer une équation (hyperbolique) aux dérivées partielles du premier ordre en une équation différentielle ordinaire ;
- *séparation des variables* : cette technique permet de transformer une équation aux dérivées partielles en une série d'équations différentielles ;
- *transformation intégrale* : la transformée de Fourier ou de Laplace permet de transformer une équation aux dérivées partielles linéaire en une équation différentielle ordinaire lorsque le domaine de résolution est infini (ou semi-infini) ;
- *méthode de Green* : pour les équations linéaires avec des conditions aux limites également linéaires, il est possible d'exploiter la linéarité en cherchant d'abord à résoudre un problème de Green, c'est-à-dire la même équation différentielle mais avec des conditions aux limites faisant appel à des « impulsions » (Dirac). La solution finale est obtenue en additionnant la réponse à chaque impulsion élémentaire ;
- *groupes d'invariance* : il s'agit d'exploiter des transformations géométriques (formant ce qu'en mathématiques, on appelle un groupe) qui laissent invariante une équation. Parmi les plus fréquentes, les invariances par translation et étirement permettent de trouver des solutions auto-similaires. Ces méthodes permettent de simplifier le problème en transformant l'équation aux dérivées partielles en équation différentielle ordinaire ;
- *méthode de l'hodographe* : certaines équations sont plus simples à résoudre quand on intervertit le rôle des variables dépendantes et indépendantes ;
- *développement en fonctions propres* : la solution d'une équation différentielle linéaire (avec des conditions aux limites également linéaires) est recherchée sous la forme d'une série infinie de fonctions propres.

Pour certaines équations, il existe des méthodes spécifiques que nous ne détaillons pas.

Par exemple, les transformations conformes offrent une application de la théorie des fonctions à variable complexe pour résoudre l'équation de Laplace.

Parmi les méthodes approchées, on peut citer :

- les *méthodes aux perturbations* : on transforme un problème non linéaire en une série d'équations linéaires qui permettent d'approcher l'équation non linéaire ;
- les *méthodes asymptotiques* : on cherche à simplifier les équations en supprimant les termes dont l'ordre de magnitude est petit devant les autres termes ;
- les *méthodes numériques* : on discrétise les équations et résout les équations ainsi trouvées par des méthodes itératives à l'aide d'un ordinateur. D'autres méthodes numériques : les méthodes de type Galerkin cherchent numériquement les solutions en les décomposant sous la forme de fonctions connues (spline, polynôme, ondelette, etc.).

### 1.7.2 Méthode des caractéristiques

Cette méthode s'applique aux équations différentielles hyperboliques du premier ordre (ou bien aux systèmes d'équations hyperboliques) en une équation différentielle ordinaire du

premier ordre, qui décrit la variation d'une certaine quantité le long d'une courbe appelée *courbe caractéristique*. Voyons cela de façon plus précise. Admettons que l'on ait une équation de la forme

$$a(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} + b(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = c(x, t, u). \quad (1.25)$$

Si on différentie  $u(x, t)$  par rapport à une variable (non définie pour l'heure)  $s$ , la règle de composition des différentielles donne :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Supposons maintenant que l'on définisse la variable  $s$  comme étant la coordonnée curviligne le long d'une courbe d'équation paramétrique dans le plan  $x - t$

$$\frac{\partial t}{\partial s} = a(x, t, u), \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = b(x, t, u). \quad (1.27)$$

Alors, l'équation (1.25) peut s'écrire

$$\frac{du}{ds} = c(x, t, u). \quad (1.28)$$

On a donc transformé une équation aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires (1.26)–(1.28), qui peut être plus simple à résoudre. Cette méthode a aussi l'avantage de pouvoir une interprétation physique en termes de transmission d'informations dans une direction donnée (par la courbe caractéristique).

♣ **Exemple.** – Prenons l'exemple suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -xt,$$

avec pour condition initiale :

$$u = f(x) \text{ à } t = 0,$$

avec  $f$  une fonction connue. Formons maintenant

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial s} &= 1, \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= t^2, \end{aligned}$$

alors l'équation différentielle à résoudre est

$$\frac{du}{ds} = -xt.$$

La condition initiale peut s'écrire de façon paramétrique

$$\begin{aligned} t(s=0) &= 0, \\ x(s=0) &= x_1, \\ u(s=0) &= f(x_1), \end{aligned}$$

où  $x_1$  est une constante quelconque. Le système d'équations de la courbe caractéristique simplement

$$\begin{aligned}t(s, x_1) &= s, \\x(s, x_1) &= \frac{1}{3}s^3 + x_1.\end{aligned}$$

Finalement l'équation à résoudre pour  $u$  est

$$\frac{du}{ds} = -xt = s \left( \frac{1}{3}s^3 + x_1 \right),$$

avec  $u(s=0) = f(x_1)$ . L'équation s'intègre facilement pour donner

$$u(s) = \frac{1}{12}s^4 + \frac{x_1}{2}s^2 + f(x_1).$$

Pour se ramener aux variables d'origine  $x$  et  $t$ , il faut inverser le système donnant l'équation paramétrique de la courbe caractéristique

$$\begin{aligned}s &= t, \\x_1 &= x - \frac{1}{3}t^3.\end{aligned}$$

La solution est donc finalement

$$u(x, t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{x_1}{2}t^2 + f\left(x - \frac{1}{3}t^3\right).$$

Il n'est pas toujours possible de revenir aux variables d'origine.  $\square$

### 1.7.3 Méthode aux perturbations

Il est assez fréquent en mécanique d'aboutir à des équations différentielles assez complexes, mais dont certains termes sont pondérés par des coefficients qui prennent des valeurs relativement faibles par rapport aux autres contributions. L'idée est alors

- d'approcher la solution par une série de fonctions, dont l'ordre de grandeur décroît ;
- de substituer cette expression dans l'équation originale ;
- de regrouper les termes de même ordre pour former une hiérarchie d'équations ;
- de résoudre itérativement des équations.

**♣ Exemple.** – Prenons un exemple avec une équation simple du second ordre

$$y'' + \epsilon y' + y = 0, \tag{1.29}$$

avec comme conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$  ; on suppose que  $\epsilon$  est petit devant 1 (par exemple  $\epsilon = 0,1$ ). On forme le développement suivant

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2 + \dots \epsilon^n y_n + \dots,$$

avec  $y_k$  une fonction de  $x$  telle que  $O(y_k) = 1$  sur l'intervalle considéré. On substitue cette expression dans l'équation (1.29) pour obtenir

$$\begin{aligned} & (y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2 + \dots \epsilon^n y_n + \dots)'' + \\ & \epsilon (y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2 + \dots \epsilon^n y_n + \dots)' + \\ & (y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2 + \dots \epsilon^n y_n + \dots) = 0 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites fournissent

$$\begin{aligned} y_0(0) + \epsilon y_1(0) + \epsilon^2 y_2(0) + \dots \epsilon^n y_n(0) + \dots &= 1, \\ y_0'(0) + \epsilon y_1'(0) + \epsilon^2 y_2'(0) + \dots \epsilon^n y_n'(0) + \dots &= 0. \end{aligned}$$

À l'ordre  $\epsilon^0$ , on collecte les termes et on tire

$$y_0'' + y_0 = 0,$$

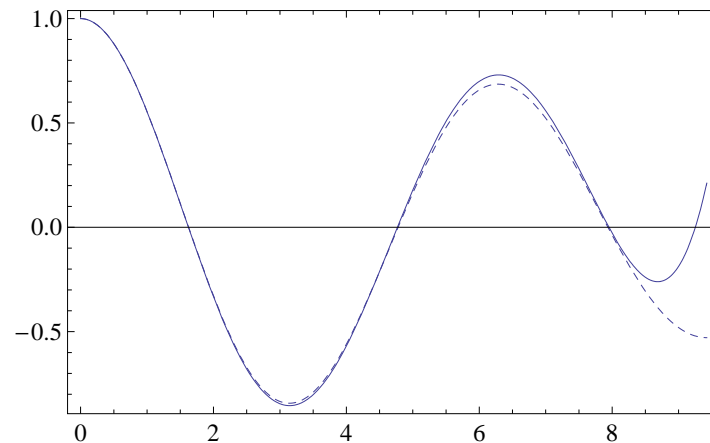
avec pour conditions aux limites  $y_0(0) = 1$  et  $y_0'(0) = 0$ . L'intégration donne :  $y_0(x) = \cos x$ .

À l'ordre  $\epsilon^1$ , on collecte les termes et on tire

$$y_1'' + y_1 = -y_0',$$

avec pour conditions aux limites  $y_1(0) = 0$  et  $y_1'(0) = 0$ . L'intégration donne :  $y_1(x) = \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x)$ . Le calcul peut se poursuivre ainsi indéfiniment. Au final, la solution approchée à l'ordre  $O(\epsilon^2)$  de l'équation est

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\epsilon(\sin x - x \cos x) + O(\epsilon^2).$$



**Figure 1.20** : comparaison entre la solution exacte (trait solide) et approchée à l'ordre 2 (trait discontinu) de l'équation (1.29) avec  $\epsilon = 0,1$ .

La figure 1.20 montre le bon accord entre solutions exacte et approchée.  $\square$

#### 1.7.4 Méthode asymptotique

Dans les équations où plusieurs termes apparaissent, il est rare que tous les termes aient localement le même poids. En recherchant quels sont les termes dominants, on peut arriver à

avoir une solution asymptotique vers laquelle la vraie solution tend localement. En général, on cherche à traduire un équilibre entre deux, exceptionnellement trois, termes.

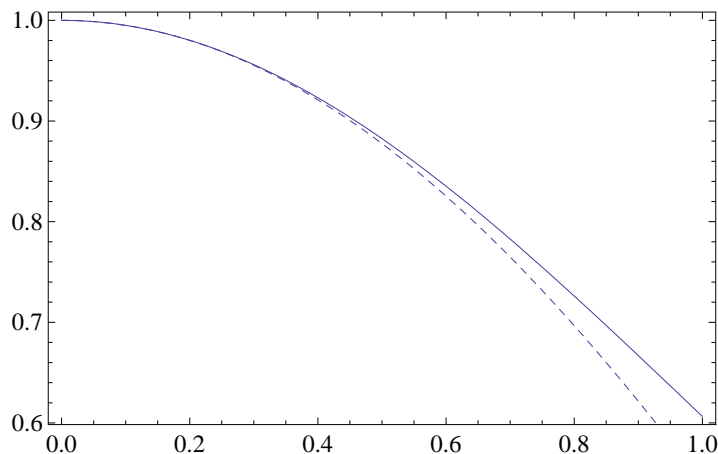
♣ **Exemple.** – Considérons l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0, \quad (1.30)$$

avec pour conditions initiales:  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ . Notons que la solution est  $y = \exp(-x^2/2)$ . On cherche à approcher la solution pour  $x \rightarrow 0$  sans utiliser notre connaissance de la vraie solution. Pour cela on va examiner deux à deux les contributions de l'équation :

- supposons que  $y'' \ll y$ . On doit donc résoudre  $x\tilde{y}' + \tilde{y} = 0$ , dont une intégrale première est  $x\tilde{y} = a$ , avec  $a$  une constante. Il n'est pas possible de satisfaire les conditions aux limites. Un tel équilibre n'est donc pas possible ;
- supposons que  $y \ll y''$ . L'équilibre dominant est donc  $\tilde{y}'' + x\tilde{y}' = 0$ , dont la seule solution est  $\tilde{y} = 1$ . L'hypothèse  $y \ll y''$  n'est pas vérifiée, donc l'équilibre n'est pas le bon ;
- la seule possibilité est donc  $xy' \ll y$ , ce qui amène à l'équilibre dominant  $\tilde{y}'' + \tilde{y} = 0$ , dont la solution est  $\tilde{y} = \cos x$ . On vérifie bien que  $x\tilde{y}' = -x \sin x$  est bien plus petit que  $\tilde{y}$  quand  $x \rightarrow 0$ .

L'approximation de l'équation (1.30) est donc  $\tilde{y} = \cos x$ , ce qui fournit une représentation assez correcte de la solution quand  $x \rightarrow 0$  comme le montre la figure 1.21.  $\square$



**Figure 1.21 :** comparaison entre la solution exacte  $y = \exp(-x^2/2)$  (trait solide) et approchée  $\tilde{y} = \cos x$  (trait discontinu) de l'équation (1.30).

### 1.7.5 Solutions auto-similaires

Nous allons ici voir deux techniques pour déterminer des solutions auto-similaires à une équation aux dérivées partielles (si de telles solutions existent) à deux variables :

- dans la première méthode, nous allons voir que lorsque l'analyse dimensionnelle de l'équation aux dérivées partielles et de ses conditions initiales et aux limites montre qu'il n'y a que deux nombres sans dimensions qui définissent le problème, c'est-à-dire si la solution peut se mettre sous la forme  $\Pi_1 = \phi(\Pi_2)$ , alors on peut construire une solution auto-similaire ;
- dans la seconde méthode, on rend les équations à résoudre adimensionnelles, puis on cherche à savoir si elles sont invariantes par une transformation de type « étirement ».

Dans un tel cas, on peut réduire l'ordre de l'équation aux dérivées partielles et la transformer en équation différentielle ordinaire, plus simple à résoudre.

Ces deux méthodes sont étudiées à travers l'exemple de l'équation de la chaleur.

### Apport de l'analyse dimensionnelle

Reconsidérons l'équation de la chaleur en dimension 1 dans un barreau de section  $S$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.31)$$

avec  $\alpha$  la diffusion thermique,  $T(x, t)$  la température,  $x$  une abscisse dans la direction du barreau. L'énergie thermique  $E$  se conserve

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx = V = \frac{E}{cS}, \quad (1.32)$$

avec  $c$  la capacité calorimétrique. Il existe donc  $n = 5$  variables :  $T$ ,  $x$ ,  $t$ ,  $\alpha$ , et  $V$  ; les autres variables ( $E$ ,  $c$ , et  $S$  sont introduites uniquement *via*  $V$ ).

La matrice dimensionnelle est la suivante

|                            | $T$ | $x$ | $t$ | $\alpha$          | $V$   |
|----------------------------|-----|-----|-----|-------------------|-------|
| homogène à                 | K   | m   | s   | m <sup>2</sup> /s | m · K |
| Décomposition en monômes : |     |     |     |                   |       |
| puissance de m             | 0   | 1   | 0   | 2                 | 1     |
| puissance de s             | 0   | 0   | 1   | -1                | 0     |
| puissance de K             | 1   | 0   | 0   | 0                 | 1     |

C'est une matrice  $3 \times 5$  de rang 3 (la quatrième colonne s'obtient par combinaison linéaire des colonnes 2 et 3 ; la colonne 5 est la somme des colonnes 1 et 2). On peut donc former  $k = n - r = 2$  nombres sans dimension. Posons

$$\Pi_1 = x \alpha^a t^b V^c \text{ et } \Pi_2 = T \alpha^{a'} t^{b'} V^{c'}.$$

Pour que  $[\Pi_1] = 0$ , il faut que

$$[\text{m} (\text{m}^2/\text{s})^a \text{s}^b (\text{mK})^c] = 0,$$

soit le système à résoudre

$$\text{pour m : } 0 = 2a + c + 1,$$

$$\text{pour s : } 0 = -a + b,$$

$$\text{pour K : } 0 = c,$$

dont la solution est  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ , et  $c = 0$ . On forme donc le premier nombre sans dimension

$$\Pi_1 = \frac{x}{\sqrt{\alpha t}}.$$

Pour que  $[\Pi_2] = 0$ , il faut que

$$[\text{K} (\text{m}^2/\text{s})^{a'} \text{s}^{b'} (\text{mK})^{c'}] = 0,$$

soit le système à résoudre

$$\begin{aligned} \text{pour m} : 0 &= 2a' + c', \\ \text{pour s} : 0 &= -a' + b', \\ \text{pour K} : 0 &= c' + 1, \end{aligned}$$

dont la solution est  $a' = \frac{1}{2}$ ,  $b' = \frac{1}{2}$ , et  $c' = -1$ . On forme le second nombre sans dimension

$$\Pi_2 = \frac{T\sqrt{\alpha t}}{V}.$$

L'analyse dimensionnelle nous amène à poser la solution sous la forme  $\Pi_2 = F(\Pi_1)$ . On va donc substituer  $T$  par l'expression

$$T = \frac{V}{\sqrt{\alpha t}} F(\xi),$$

avec  $\xi = x/\sqrt{\alpha t}$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{V}{t^{3/2}\sqrt{\alpha}} F(\xi) - \frac{1}{2} \xi \frac{V}{t^{3/2}\sqrt{\alpha}} F'(\xi) \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{V}{t\alpha} F'(\xi), \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{V}{(t\alpha)^{3/2}} F''(\xi), \end{aligned}$$

ce qui amène à écrire l'équation de la chaleur sous la forme d'une équation différentielle ordinaire du second ordre

$$-\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}\xi F' = F'',$$

qui peut s'intégrer facilement

$$\frac{1}{2}\xi F + F' = a_0,$$

avec  $a_0$  une constante d'intégration. Si la propagation se fait dans les deux sens  $x \rightarrow \infty$  et  $x \rightarrow -\infty$ , la solution est paire et donc en  $\xi = 0$ ,  $F' = 0$  (tangente horizontale), soit finalement  $a_0 = 0$ . Une nouvelle intégration donne

$$\frac{F'}{F} = -\frac{1}{2}\xi \Rightarrow F = a_1 \exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right)$$

avec  $a_1$  une constante d'intégration. En se servant de l'équation (1.32) et puisque  $\int_{\mathbb{R}} F d\xi = 1$ , on tire  $a_1 = 1/(2\sqrt{\pi})$ .

La solution finale s'écrit donc

$$T = \frac{V}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\alpha t}\right).$$

### Recherche directe des formes auto-similaires

On commence par rendre l'équation (1.31) sans dimension en introduisant des variables adimensionnelles

$$\begin{aligned} T &= T_* \hat{T}, \\ t &= \tau_* \hat{t}, \\ x &= L_* \hat{x}, \end{aligned}$$

avec  $T_*$ ,  $\tau_*$ , et  $L_*$  des échelles de température, de temps, et de distance;  $\hat{T}$ ,  $\hat{t}$ , et  $\hat{x}$  sont des températures, temps, distances adimensionnels. Si on substitue ce changement de variable dans l'équation (1.31), on trouve que  $L_*^2 = \alpha\tau_*$  tandis que la condition aux limites (1.32) impose  $L_*T_* = V$ . Il manque une troisième condition pour déterminer toutes les échelles; on considère donc ici que l'on connaît  $\tau_*$  et qu'on déduit les deux autres échelles à l'aide des relations ci-dessus.

La forme sans dimensions des équations (1.31) et (1.32) est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx = 1, \quad (1.34)$$

où l'on a enlevé les chapeaux sur les variables pour simplifier les notations.

On parle de *solution auto-similaire* d'une équation aux dérivées partielles de la forme  $G(x, t, T) = 0$  si on peut trouver un jeu de coefficients  $a$  et  $b$  tels que, pour tout scalaire  $\lambda$ , on ait  $G(\lambda x, \lambda^a t, \lambda^b T) = 0$ . Cela veut dire que la fonction solution  $T(x, t)$  de l'équation  $G = 0$  est invariante quand on « étire » les variables en les multipliant par un certain facteur de proportionnalité. Recherchons ces coefficients en considérant l'étirement suivant, dont l'intensité est fonction du paramètre  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \lambda x', \\ t &\rightarrow \lambda^a t', \\ T &\rightarrow \lambda^b T', \end{aligned}$$

avec  $a$  et  $b$  deux constantes à déterminer. On substitue ces expressions dans l'équation de la chaleur (1.33), ce qui donne

$$\frac{\lambda^b}{\lambda^a} \frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\lambda^b}{\lambda^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2}. \quad (1.35)$$

Cette équation est identique à l'équation (1.33) si on prend  $a = 2$ . La condition aux limites (1.34) nous fournit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^b \lambda T(x, t) dx = 1, \quad (1.36)$$

ce qui impose de prendre  $b = -1$ .

On montre que les solutions invariantes par cette transformation « étirement » sont alors données par l'équation caractéristique associée

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{at} = \frac{dT}{bT}. \quad (1.37)$$

☞ **Démonstration.** Si une solution est auto-similaire, alors on a  $G(\lambda x, \lambda^a t, \lambda^b T) = 0$ . Différencions cette équation par rapport à  $\lambda$  et posons ensuite  $\lambda = 1$ ; on tire la relation:

$$x' \frac{\partial G}{\partial x'} + at' \frac{\partial G}{\partial t'} + bT' \frac{\partial G}{\partial T'} = 0.$$

L'interprétation géométrique en est simple: le vecteur  $\nabla G$  est perpendiculaire au vecteur  $(x', at', bT')$ . Si un point M de coordonnées  $(x', t', T')$  est sur la surface solution, alors un point voisin M'  $(x' + dx', t' + dt', T' + dT')$  doit l'être aussi et le vecteur incrément entre M et M'  $(dx', dt', dT')$  doit également être normal à la surface solution, puisqu'au premier ordre on a

$$G(x' + dx', t' + dt', T' + dT') = 0,$$



soit encore en faisant un développement limité au premier ordre :

$$dx' \frac{\partial G}{\partial x'} + dt' \frac{\partial G}{\partial t'} + dT' \frac{\partial G}{\partial T'} = 0.$$

En comparant les deux équations, cela veut dire que  $(dx', dt', dT')$  et  $(x', at', bT')$  sont parallèles. L'équation (1.37) ne fait qu'exprimer cette condition de parallélisme entre les deux vecteurs. Cela peut sembler plus complexe que l'équation originale puisqu'on a remplacé un système de deux équations par un système de 3 égalités. En fait on a gagné en simplicité puisqu'on sait résoudre simplement les équations précédentes deux à deux.  $\square$

L'équation caractéristique associée à l'équation (1.33) est

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = -\frac{dT}{T},$$

dont il existe deux intégrales premières :  $\xi = x/t^{1/2}$  (obtenue avec les deux membres de gauche) et  $\tau = Tt^{1/2}$ . Les solutions auto-similaires sont donc à rechercher sous la forme  $\tau(\xi)$ , soit encore :

$$T = \frac{1}{\sqrt{t}} H(\xi).$$

Substituant cette expression dans l'équation (1.33), on trouve

$$-\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}\xi H' = H'',$$

dont la solution est  $a_2 \exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right)$ , avec  $a_2$  une constante d'intégration, dont la condition aux limites (1.34 nous fournit la valeur :  $a_2 = 1/(2\sqrt{\pi})$ ). La solution sous forme adimensionnelle est donc

$$\hat{T} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\hat{t}}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\hat{x}^2}{\hat{t}}\right),$$

soit sous forme dimensionnelle

$$T = \frac{V}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\alpha t}\right).$$

## Synthèse

La première méthode permet de construire pas à pas la solution auto-similaire (quand elle existe) et a l'avantage d'être une approche physique, mais nécessite pas mal de travail. La seconde méthode, un peu plus mathématique, permet de savoir rapidement si des solutions auto-similaires existent et, le cas échéant, de les déterminer.

En pratique, si on considère une équation aux dérivées partielles de la forme  $F(u, x, t)$  avec  $u$  la variable dépendante,  $x$  et  $t$  les variables indépendantes, on fait une transformation de type « extension » à un paramètre  $\lambda$  :

$$u \rightarrow u' = \lambda^\alpha u, \tag{1.38}$$

$$t \rightarrow t' = \lambda^\beta t, \tag{1.39}$$

$$x \rightarrow x' = \lambda x. \tag{1.40}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes à déterminer ; elles sont déterminées en substituant ces expressions dans l'équation  $F(u, x, t)$  et dans les conditions initiales/aux limites et en cherchant

ensuite pour quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ , ces équations transformées sont indépendantes de  $\lambda$ . Une fois que ces constantes sont trouvées, on forme l'équation caractéristique :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\beta t} = \frac{du}{\alpha u}.$$

Cette équation montre que la solution auto-similaire que l'on recherche pour  $F(u, x, t)$  s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = t^{\alpha/\beta} f(x/t^{1/\beta}). \quad (1.41)$$

## Exercices

---

**Exercice 1.12** Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'équation suivante: ✱

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0.$$

↪ *Réponse.* On recherche des solutions harmoniques de la forme :

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}.$$

La relation de dispersion est :

$$\omega = k - k^3.$$

On déduit que la vitesse de phase est

$$c = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2,$$

c'est-à-dire une fonction de  $k$ . Il s'agit donc d'une onde dispersive. La vitesse de groupe est

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2,$$

qui est bien inférieure à la vitesse de phase.  $\square$



# Résolution des équations différentielles hyperboliques

## 2.1 Résolution des équations hyperboliques du premier ordre

En hydraulique, nous sommes amenés à étudier des équations hyperboliques ou des systèmes de  $n$  équations hyperboliques :

- dimension 1 : équation de convection non linéaire, par exemple l'équation d'onde cinématique qui sert à décrire l'évolution d'une crue lente :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + K\sqrt{i}\frac{\partial h^{5/3}}{\partial x} = 0,$$

avec  $h$  la profondeur d'eau,  $K$  le coefficient de Manning-Strickler, et  $i$  la pente moyenne ;

- dimension 2 : équations de Saint-Venant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}, \quad (2.2)$$

avec  $\bar{u}$  la vitesse moyenne,  $h$  la hauteur d'eau,  $\theta$  la pente locale,  $\tau_p$  la contrainte au fond ;

- dimension 3 : équations de Saint-Venant avec advection d'un polluant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (2.5)$$

avec  $\varphi$  la concentration en polluant.

Toutes ces équations différentielles sont du premier ordre et sont des équations d'évolution. On ne va s'intéresser ici qu'à des problèmes avec une variable d'espace  $x$ , mais ce que l'on va en dire se généralise à deux (ou plus) variables d'espace.

On va donc étudier ici des systèmes différentiels de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} + \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{A}$  une matrice de dimension  $n$ .  $\mathbf{B}$  est un vecteur de dimension  $n$  appelé « terme source » ou « source ». Le système est dit *homogène* ou sans (terme) source si  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ . On parle de *lois de conservation* quand on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Notons qu'un système homogène peut se mettre sous cette forme si  $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ . Si cette transformation est toujours possible en dimension 1, elle ne l'est pas toujours en dimension  $n > 1$  ; dans un tel cas, si on ne peut transformer les termes  $\mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x$  en  $\partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U})$ , on parle de terme non conservatif. Ces termes posent problèmes dans le traitement numérique par la méthode aux volumes finis.

On va voir que les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{A}$  représentent les vitesses de propagation de l'information. Ce sont les zéros du polynôme  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0$ . Un système est dit *hyperbolique* si  $\mathbf{A}$  admet  $n$  valeurs propres réelles. Dans le cas linéaire (c'est-à-dire lorsque  $\mathbf{A}$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $t$ ), la solution sera hyperbolique dans tout l'espace  $x-t$  alors que pour un problème non linéaire, la solution peut n'être hyperbolique que localement selon la nature des valeurs propres (réelle ou complexe).

On parle de *système conservatif* ou de *loi de conservation* pour désigner des systèmes d'équation qui se mettent sous la forme donnée par l'équation (2.7). Si cela a du sens d'un point de vue mathématique, cela n'en a pas nécessairement du point de vue physique. En effet, si une grandeur – appelons-la  $u(x, t)$  – vérifie une équation de conservation de la forme :

$$u_t + [f(u)]_x = 0,$$

alors on peut créer une infinité d'équations de conservation de la forme :  $[g(u)]_t + [h(u)]_x = 0$  – sous la condition que  $g$  et  $h$  vérifient  $h' = g' f'$  – qui soient équivalentes à l'équation originelle. Tant que la fonction  $u(x, t)$  est continûment différentiable, cela n'amène guère de problèmes. En revanche, si l'on s'intéresse aux solutions dites *faibles* (c'est-à-dire présentant une discontinuité), alors les solutions ne sont pas équivalentes. Il faut donc bien utiliser l'équation de conservation qui a un sens physique. La question est naturellement : comment savoir si une équation de conservation a une origine physique ou non. En général, les équations utilisées en physique sont tirées de bilans macroscopiques. Par exemple, l'équation de conservation de la masse  $m$  implique que sur un volume de contrôle  $\mathcal{V}$

$$\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = 0 ;$$

de là on tire que :  $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ . Or comme les solutions faibles sont toujours obtenues en réintégrant les équations locales (voir *infra*), il convient donc de se ramener au problème de formulation physique d'origine. À noter que du point de vue mathématique, le passage d'une équation de bilan macroscopique à une équation locale se fait sans problème ; en revanche, le processus inverse induit la perte d'unicité de la solution.

### 2.1.1 Courbes caractéristiques et variables de Riemann

L'élément-clé dans la résolution des équations différentielles hyperboliques tourne autour de la notion de l'information. On a vu précédemment à travers l'exemple de l'équation des ondes et celui de l'équation de convection qu'une équation aux dérivées partielles traduit un processus physique où de l'information se propage. Les questions qui se posent sont donc : dans quelle direction se propage cette information ? Est-ce que l'information se conserve ou

bien s'atténue-t-elle? La réponse à ces questions passe par les notions de *courbe caractéristique* (propagation de l'information) et *variables de Riemann* (quantité d'information transportée).

Dans un premier temps, on va donner une interprétation géométrique aux termes différentiels qui apparaissent dans l'équation (2.6). Par exemple, dans le cas  $n = 1$ , on introduit la *courbe caractéristique* comme étant le lieu géométrique le long duquel on va pouvoir interpréter le terme  $\partial_t u(x, t) + a \partial_x u(x, t)$  – avec  $a$  une constante ou une fonction de  $u$ ,  $x$ , et  $t$  – comme une dérivée matérielle  $du(x, t)/dt$ .

Ensuite, dans le cas  $n = 2$ , il y a deux variables indépendantes ( $x$  et  $t$ ) et deux courbes caractéristiques, ce qui permet de faire un changement de variables (introduction des variables de Riemann), qui est souvent profitable, surtout dans le cas non linéaire.

Pour le cas  $n > 2$ , ce changement de variables ne sera plus possible puisqu'on aura  $n$  caractéristiques pour seulement deux variables de Riemann indépendantes.

### Cas trivial : dimension du problème $n = 1$

Considérons le cas  $n = 1$  ( $\mathbf{A}$  se réduit alors à un scalaire  $a$ ) et une équation (2.6) homogène :

$$\partial_t u(x, t) + a(u) \partial_x u(x, t) = 0, \quad (2.8)$$

sujette à une condition initiale de la forme :

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ à } t = 0, \quad (2.9)$$

Une courbe caractéristique est une courbe  $x = x_c(t)$  le long de laquelle l'équation aux dérivées partielles  $\partial_f U + a \partial_x U = 0$  est équivalente à une équation différentielle ordinaire. Considérons une solution  $u(x, t)$  du système différentiel. Le long de la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $x = x_c(t)$ , on a :  $u(x, t) = u(x_c(t), t)$  et le taux de variation est :

$$\frac{du(x_c(t), t)}{dt} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{dx_c}{dt} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Admettons maintenant que la courbe  $\mathcal{C}$  vérifie l'équation  $dx_c/dt = a(u)$ . Alors on a immédiatement :

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (2.10)$$

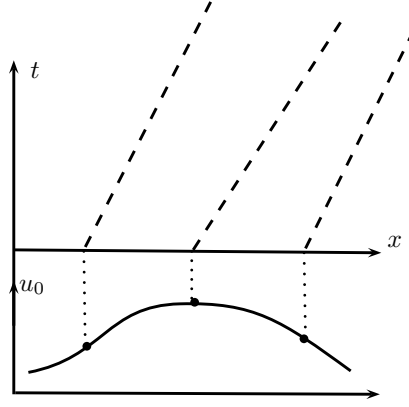
Puisque  $du(x, t)/dt = 0$  le long de  $x_c(t)$  cela veut dire que  $u(x, t)$  se conserve sur cette courbe. Puisque  $u$  est constant,  $a(u)$  est également constant, donc les courbes  $\mathcal{C}$  sont des droites. Sur la figure 2.1, on a tracé trois caractéristiques ; la pente de ces droites est donnée par la condition initiale  $u_0(x)$ .

De ces quelques manipulations mathématiques, on doit retenir que les équations (2.8) et (2.10). Toute équation de convection peut donc se mettre sous une forme caractéristique :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + a(u) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{du(x, t)}{dt} = 0 \text{ le long de droites } \mathcal{C} \text{ d'équation } \frac{dx}{dt} = a(u).} \quad (2.11)$$

Lorsque cette équation est sujette à une condition initiale de la forme (2.9), l'équation caractéristique (2.10) se résout simplement. Cherchons tout d'abord l'équation des droites caractéristiques. Intégrons l'équation différentielle caractéristique en se rappelant que  $u$  est constant le long de la droite caractéristique :

$$\frac{dx}{dt} = a(u) \Rightarrow x - x_0 = a(u)(t - t_0),$$



**Figure 2.1** : caractéristiques (droites tiretées) pour le problème en dimension 1.

or à  $t_0 = 0$ , on a  $u(x, t) = u_0(x)$ , donc on déduit que

$$x - x_0 = a(u_0(x_0))t \quad (2.12)$$

est l'équation de la droite caractéristique émanant du point  $x_0$ . Par ailleurs, on a pour  $t \geq 0$   $u(x, t) = u_0(x_0)$  puisque  $u$  se conserve. Comme d'après l'équation (2.12), on a :  $x_0 = x - a(u_0(x_0))t$ , on déduit finalement :

$$\boxed{u(x, t) = u_0(x - a(u_0(x_0))t)}. \quad (2.13)$$

### Cas $n = 2$

Considérons maintenant le cas  $n = 2$ . Pour progresser, il faut faire quelques rappels d'algèbre. La matrice  $\mathbf{A}$  de l'équation (2.6) admet deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ainsi que deux vecteurs propres à gauche  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  (qui dépendent éventuellement de  $\mathbf{u}$ ) :

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i.$$

Elle admet également deux vecteurs propres à droite  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i.$$

Si on introduit les composantes de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

alors on a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d - a + \sqrt{\Delta}}{2c} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a - d + \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associé à } \lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d - a - \sqrt{\Delta}}{2c} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a - d - \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associé à } \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2},$$



avec  $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$ . Rappelons que tout vecteur colinéaire à un vecteur propre est également un vecteur propre. On peut donc être amené, selon les cas, à écrire un peu différemment les expressions des vecteurs propres. On a ainsi

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2c}{d - a + \sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a - d + \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2c}{d - a - \sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a - d - \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2}. \quad (2.15)$$

Notons aussi que les vecteurs propres droite et gauche sont deux à deux orthogonaux :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0,$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = 0.$$

En effet les deux vecteurs doivent être orthogonaux puisque le vecteur à gauche est aussi le vecteur propre à droite de la transposée de la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{v}_2)^* \text{ et } \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}_1 / \lambda_1) = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 / \lambda_1 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1)(\lambda_2 / \lambda_1),$$

d'où  $\lambda_2 / \lambda_1 = 1$  (ce qui est incompatible avec l'hypothèse de stricte hyperbolicité) ou bien  $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = 0$ . On peut aussi relier les composantes du vecteur à droite et du vecteur à gauche. Ainsi, avec l'écriture adoptée plus haut pour les composantes des vecteurs propres, on a  $w_{11} = -v_{22}$  et  $w_{12} = -v_{21}$ .

On va commencer par le cas linéaire, qui est le plus simple car les courbes caractéristiques sont des droites. Le cas non linéaire présente bien des similarités, mais les courbes caractéristiques ne seront plus nécessairement des droites.

**Système linéaire** Lorsque les vecteurs propres sont des constantes, il est possible de procéder à un changement de variable de la manière suivante : on multiplie l'équation (2.6) par  $\mathbf{v}_i$ . On obtient :

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}_t + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Soit encore :

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}_t + \lambda_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}_x + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

On pose alors  $r_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}$ . Comme  $\mathbf{v}_i$  est constant, on peut :

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}). \quad (2.16)$$

Il s'ensuit que le nouveau jeu de variables  $\mathbf{r} = \{r_1, r_2\}$  vérifie :

$$\mathbf{r}_t + \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_x + \mathbf{S} = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ , et  $\mathbf{S} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B}, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{B})$ . On se ramène alors à un système d'équations différentielles ordinaires indépendantes

$$\frac{dr_1}{dt} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \text{ le long d'une courbe } x = x_{c,1}(t) \text{ telle que } \frac{dx_{c,1}(t)}{dt} = \lambda_1,$$

$$\frac{dr_2}{dt} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \text{ le long d'une courbe } x = x_{c,2}(t) \text{ telle que } \frac{dx_{c,2}(t)}{dt} = \lambda_2,$$

**Système non linéaire** Plus complexe est le cas où les vecteurs propres sont des fonctions de  $\mathbf{U}$  de composantes  $(U_1, U_2)$ . Dans ce cas, en effet, on ne peut pas intervertir l'opération de différentiation et le produit scalaire comme on a pu le faire à l'équation (2.16). Cependant quand on a une expression différentielle de la forme

$$\phi = g \frac{\partial f}{\partial t} dt + g \frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

(avec  $g$  et  $h$  deux fonctions quelconques) il est toujours possible de la transformer en intégrale exacte. En général, il n'est que rarement possible d'écrire directement  $\phi = d\psi$ , mais en multipliant par une fonction  $\mu$  (à déterminer) dite « facteur intégrant », il est possible d'arriver à écrire :  $\mu\phi = d\psi$ . On se reportera au § 1.2.2 pour des rappels mathématiques sur cette notion.

Ici on va donc rechercher un jeu de variables nouvelles  $\mathbf{r} = \{\alpha, \beta\}$  tel que :

$$\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{U} = \mu_1 d\alpha,$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{U} = \mu_2 d\beta,$$

où  $\mu_i$  sont des facteurs intégrants pour que  $dr_i$  puisse être considéré comme une différentielle exacte. En procédant ainsi, on a :

$$\mu_1 d\alpha = \mu_1 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial U_2} dU_2 \right) = v_{11} dU_1 + v_{12} dU_2.$$

Par identification, on trouve :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial U_1} = \frac{v_{11}}{\mu_1},$$

et

$$\frac{\partial \alpha}{\partial U_2} = \frac{v_{12}}{\mu_1}.$$

On en déduit les équations que doivent vérifier  $\alpha$  et  $\mu_1$ . En faisant le rapport des deux équations précédentes on tire :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial U_1} = \frac{v_{11}}{v_{12}} \frac{\partial \alpha}{\partial U_2}, \quad (2.17)$$

tandis que le facteur intégrant est obtenu par l'application du théorème de Schwartz<sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial U_1} \frac{v_{12}}{\mu_1} = \frac{\partial}{\partial U_2} \frac{v_{11}}{\mu_1}.$$

Le facteur intégrant peut également être obtenu par résolution de  $\partial\alpha/\partial U_2 = 1/\mu_1$  lorsque les composantes de  $\mathbf{v}_1$  sont de la forme (2.14) car  $v_{11} = 1$ .

À noter que si on se sert de  $w_i$  avec  $i = 1$  ou  $2$  (le vecteur propre à droite de la matrice  $\mathbf{A}$ ), alors la première équation est équivalente à  $w_{21}\partial\alpha/\partial U_1 + w_{22}\partial\alpha/\partial U_2 = 0$ , soit sous forme vectorielle :

$$\boxed{\mathbf{w}_2 \cdot \nabla \alpha_1 = 0.}$$

C'est cette définition des invariants de Riemann qui est le plus souvent dans la littérature technique. On dit que  $\alpha$  est un 2-invariant (ou 2-variable) de Riemann du système (2.6).

Le système caractéristique associé à la première équation (2.20) donne :

$$\frac{dU_1}{v_{12}} = \frac{dU_2}{v_{11}} = \frac{d\alpha}{0},$$

1. Ce théorème énonce sous réserve de continuité que  $\partial_{xy}f = \partial_{yx}f$  et donc lorsqu'on a une différentielle totale de la forme  $du(x, y) = adx + bdy$ , on a  $\partial_y a = \partial_x b$ .

ce qui permet de trouver une intégrale première. On aboutit alors à l'équation :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} \Big|_{x=X_1(t)} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B} = 0,$$

où la courbe  $x = X_1(t)$  vérifie  $dX_1/dt = \lambda_1$ . On appelle *1-courbe caractéristique* cette courbe. Soit encore :

$$\mu_1 \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{x=X_1(t)} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B} = 0.$$

En faisant de même pour  $\beta$  :

$$\mu_2 \frac{d\beta}{dt} \Big|_{x=X_2(t)} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Soit de manière condensée :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{X}(t)} + \mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{B}) = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$

le long de deux courbes caractéristiques définies par  $\mathbf{r} = \mathbf{X}(t)$  telle que  $d\mathbf{X}(t)/dt = (\lambda_1, \lambda_2)$  ;  $\mathbf{S}$  représente un terme source tel que ses composantes vérifient  $\mu_i S_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}$ . S'agissant d'une équation différentielle, il n'y a pas une seule courbe caractéristique, mais une famille de courbes caractéristiques associées à chaque valeur propre. Les nouvelles variables  $\mathbf{r}$  sont appelées *variables de Riemann*. Dans le cas où le système est homogène ( $\mathbf{B} = 0$ ), ils sont constants le long des courbes caractéristiques et on les appelle alors des *invariants de Riemann*. À noter que dans ce cas, seul  $\mathbf{r}$  importe et il n'est pas utile de calculer les facteurs intégrants  $\mu_i$ .

♣ **Exemple.** – Dans le cas d'un sol horizontal non frottant, les équations de Saint-Venant peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = \mathbf{S}, \quad (2.19)$$

avec :  $\mathbf{U} = \{h, u\}$ ,  $\mathbf{S} = 0$  et :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  introduite dans le système d'équations (2.19) sont :

$$\lambda_i = u \pm c,$$

avec  $c = \sqrt{gh}$ , et les vecteurs propres à gauche<sup>2</sup> sont :

$$\mathbf{v}_i = \left( \pm \frac{c}{h}, 1 \right).$$

Multipliant les équations (2.19) par le vecteur à gauche  $\mathbf{v}_1$ , on tire :

$$\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} - c \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t},$$

que l'on peut arranger de la façon suivante :

$$\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.20)$$

2. Les vecteurs propres à gauche vérifient :  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i$ .

On note la présence du facteur  $c/h$  et une certaine symétrie des membres de droite et de gauche. Le membre de droite peut s'interpréter comme la dérivée de  $u$  par rapport à  $t$  le long de la courbe  $C_-$  d'équation  $dx/dt = \lambda_- = u - c$ . On aimerait bien faire de même avec le membre de gauche, mais le facteur  $c/h$  pose problème. On souhaiterait pouvoir faire entrer le rapport  $c/h$  dans les termes différentiels ; pour cela introduisons une fonction  $\psi(h)$  telle que :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{h} \frac{dh}{dt}.$$

On trouve facilement par intégration (puisque  $c = \sqrt{gh}$ ) :  $\psi(h) = 2\sqrt{gh} = 2c$ . L'équation (2.20) peut donc s'écrire

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{du}{dt} \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh},$$

soit encore

$$\frac{ds}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh},$$

avec  $s = u - \psi = u - 2c$ . On fait ensuite de même avec le second vecteur à gauche  $\mathbf{v}_2$  ; on obtient une équation similaire à (2.20) au signe près et où  $u - c$  est remplacé par  $u + c$ .

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh},$$

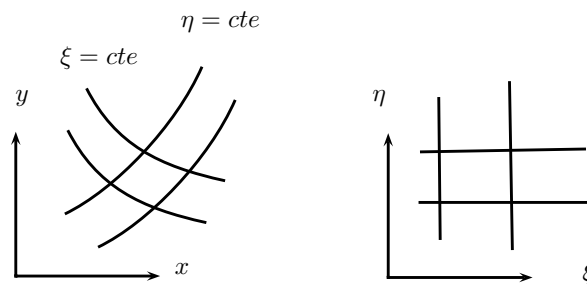
avec  $r = u + \psi = u + 2c$ .  $\square$

### Formulation des équations dans le plan caractéristique

Dans certains problèmes comme :

- des techniques analytiques (telles que la méthode de l'hodographe),
- des méthodes numériques (tels que les différences finies progressives),

il peut être intéressant de faire un changement de variable  $((x, t) \rightarrow (\xi, \eta))$  où  $(\xi, \eta)$  sont les coordonnées curvilignes le long des courbes caractéristiques. Comme le montre la figure 2.2, l'avantage de cette méthode est que les courbes caractéristiques forment un réseau de droites orthogonales et non plus des courbes quelconques et variables.



**Figure 2.2** : caractéristiques dans le plan physique et dans le plan de Riemann.

On peut considérer que les réseaux de courbes caractéristiques forment un système de coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$ . Chaque famille admet une représentation paramétrique de la forme

- pour la 1-caractéristique associée à  $\lambda_1$ ,  $\xi = \phi(x, t) = cste$ ,
- pour la 2-caractéristique associée à  $\lambda_2$ ,  $\eta = \psi(x, t) = cste$ ,

autrement dit,  $\xi$  est une abscisse curviligne le long de la 2-caractéristique et  $\eta$  le long de la 1-caractéristique. Cela permet aussi de passer d'un plan physique  $x-t$  à un plan caractéristique  $\xi-\eta$  où les caractéristiques forment des droites parallèles aux axes. Notons au passage que si un point  $M(x, t)$  décrit la 1-caractéristique, alors  $\xi = \phi_1(x, t) = cste$ , donc par différentiation, on tire

$$d\phi_1(x, t) = \partial_x \phi dx + \partial_t \phi dt = 0,$$

soit encore

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial_t \phi}{\partial_x \phi} = \lambda_1,$$

puisque c'est ainsi que nous avons défini la courbe caractéristique précédemment. D'où l'on tire les équations que doivent vérifier  $\phi$  et  $\psi$

$$\begin{aligned}\phi_t + \lambda_1 \phi_x &= 0, \\ \psi_t + \lambda_2 \psi_x &= 0.\end{aligned}$$

Pour un système homogène, l'invariance des variables de Riemann revient à écrire que le système (2.18) (avec  $\mathbf{S} = 0$ ) peut se mettre sous la forme équivalente

$$\frac{\partial r_1}{\partial \eta} = 0, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \xi} = 0. \tag{2.22}$$

Il est également possible d'écrire l'équation (2.6) sous une forme simplifiée sans passer par les variables de Riemann ([Kevorkian, 2000](#), voir pp. 459–461). Pour cela, au lieu de travailler avec les variables dépendantes  $x$  et  $t$ , on va employer les coordonnées curvilignes  $\xi$  et  $\eta$ . On introduit le changement de variables

$$\begin{aligned}x &= f(\xi, \eta), \\ t &= g(\xi, \eta).\end{aligned}$$

Examinons tout d'abord l'équation de la 1-caractéristique

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta}{\frac{\partial g}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial g}{\partial \eta} d\eta},$$

or comme la 1-caractéristique est une courbe où  $\xi = cste$ , on déduit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta}{\frac{\partial g}{\partial \eta} d\eta} = \lambda_1,$$

soit encore

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \lambda_1 \frac{\partial g}{\partial \eta}, \tag{2.23}$$

et de même pour la 2-caractéristique

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial \xi}. \tag{2.24}$$

Calculons le taux de variation de  $U_1$  le long de la 1-caractéristique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial t} &= \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial t}.\end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial x} &= \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} &= \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} &= \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\left. \frac{dU_1}{dt} \right|_{x=X_1(t)} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = (\lambda_1 - \lambda_2) \psi_x U_{1,\eta},$$

puis que  $\psi_t + \lambda_2 \psi_x = 0$  et  $\phi_t + \lambda_1 \phi_x = 0$ . On a de même

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} &= -(\lambda_1 - \lambda_2) \phi_x U_{1,\xi}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} &= (\lambda_1 - \lambda_2) \psi_x U_{2,\eta}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} &= -(\lambda_1 - \lambda_2) \phi_x U_{2,\xi}.\end{aligned}$$

En multipliant l'équation (2.6) par le vecteur à gauche  $\mathbf{v}_1$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \left. \frac{d\mathbf{U}}{dt} \right|_{x=X_1(t)} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B} = 0,$$

soit encore

$$v_{11} \partial_\eta U_1 + v_{12} \partial_\eta U_2 = -\frac{v_{11} B_1 + v_{12} B_2}{(\lambda_1 - \lambda_2) \psi_x},$$

avec  $(B_1, B_2)$  les composantes de  $\mathbf{B}$ . On a de même avec le second vecteur à gauche  $\mathbf{v}_2$

$$v_{21} \partial_\xi U_1 + v_{22} \partial_\xi U_2 = \frac{v_{21} B_1 + v_{22} B_2}{(\lambda_1 - \lambda_2) \phi_x}.$$

Il reste maintenant à exprimer  $\psi_x$  et  $\phi_x$  en fonction de  $\xi$  et  $\eta$ . Pour cela, on écrit les relations entre anciennes et nouvelles variables sous forme infinitésimale

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_\xi & f_\eta \\ g_\xi & g_\eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_t \\ \psi_x & \psi_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix},\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} \phi_x & \phi_t \\ \psi_x & \psi_t \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} f_\xi & f_\eta \\ g_\xi & g_\eta \end{pmatrix},$$

avec  $J = f_\xi g_\eta - f_\eta g_\xi$ . On déduit après arrangement des termes

$$v_{11}\partial_\eta U_1 + v_{12}\partial_\eta U_2 = -(v_{11}B_1 + v_{12}B_2)g_\eta, \quad (2.25)$$

$$v_{21}\partial_\xi U_1 + v_{22}\partial_\xi U_2 = -(v_{21}B_1 + v_{22}B_2)g_\xi. \quad (2.26)$$

Le système des quatre équations (2.23–2.26) gouverne les variations de  $f$ ,  $g$ ,  $U_1$ , et  $U_2$ . Cette formulation permet d'aboutir à des schémas numériques (différences finies progressives). Pour un système homogène, on peut écrire ces quatre équations sous la forme suivante

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} - \lambda_1(U_1, U_2) \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0 \text{ et } r_1(U_1, U_2) = cste \text{ sur } \xi = cste, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} - \lambda_1(U_1, U_2) \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0 \text{ et } r_1(U_1, U_2) = cste \text{ sur } \eta = cste. \quad (2.28)$$

On peut également utiliser les variables de Riemann comme nouvelles variables indépendantes (au lieu de  $\xi$  et  $\eta$ ) sous réserve que  $r_1$  et  $r_2$  soient indépendantes et non constantes toutes les deux sur un domaine donné. Posons

$$x = f(\xi, \eta) = \bar{X}(r_1, r_2) \text{ et } t = g(\xi, \eta) = \bar{T}(r_1, r_2).$$

On a les relations

$$\partial_\eta f = \partial_{r_1} f \partial_\eta r_1 + \partial_{r_2} f \partial_\eta r_2 = \partial_{r_2} f \partial_\eta r_2 = \partial_{r_2} \bar{X} \partial_\eta r_2,$$

$$\partial_\eta g = \partial_{r_1} g \partial_\eta r_1 + \partial_{r_2} g \partial_\eta r_2 = \partial_{r_2} g \partial_\eta r_2 = \partial_{r_2} \bar{T} \partial_\eta r_2,$$

car  $\partial_\eta r_1 = 0$  [voir équation (2.21)]. De même, on a

$$\partial_\xi f = \partial_{r_2} f \partial_\xi r_1 + \partial_{r_1} f \partial_\xi r_2 = \partial_{r_1} f \partial_\xi r_2 = \partial_{r_1} \bar{X} \partial_\xi r_1,$$

$$\partial_\xi g = \partial_{r_2} g \partial_\xi r_1 + \partial_{r_1} g \partial_\xi r_2 = \partial_{r_1} g \partial_\xi r_2 = \partial_{r_1} \bar{T} \partial_\xi r_1,$$

car  $\partial_\eta r_1 = 0$  et  $\partial_\xi r_2 = 0$  [voir équations (2.23–2.24)]. Comme on a posé  $r_1(U_1, U_2)$  et  $r_2(U_1, U_2)$ , on peut inverser et trouver  $U_1(r_1, r_2)$  et  $U_2(r_1, r_2)$ . On peut donc exprimer les valeurs propres en fonction des invariants de Riemann

$$\bar{\lambda}_1(r_1, r_2) = \lambda_1(U_1, U_2) \text{ et } \bar{\lambda}_2(r_1, r_2) = \lambda_2(U_1, U_2).$$

Avec les nouvelles variables, les équations caractéristiques (2.27–2.28) s'écrivent

$$\partial_{r_2} \bar{X} - \bar{\lambda}_1(r_1, r_2) \partial_{r_2} \bar{T} = 0,$$

$$\partial_{r_1} \bar{X} - \bar{\lambda}_2(r_1, r_2) \partial_{r_1} \bar{T} = 0,$$

que l'on peut combiner en une seule équation du second ordre en  $\bar{T}$  en différentiant la première équation par  $r_1$  et la seconde par  $r_2$ . On obtient alors

$$\boxed{\frac{\partial \bar{T}}{\partial r_1 r_2} + \frac{1}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1} \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial r_2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r_1} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial r_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r_2} \right)} \quad (2.29)$$

### 2.1.2 Formation d'un choc

Une caractéristique des équations hyperboliques est qu'elles peuvent propager une discontinuité initiale ou bien générer une discontinuité au cours du temps. Il est donc nécessaire de passer un peu de temps sur les caractéristiques des discontinuités, que nous appellerons ici *chocs*.

#### Dérivation des équations de choc dans le cas $n = 1$

On étudie la formation d'un choc pour un problème le plus simple possible. On examine l'équation convective non linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f[u(x, t)] = 0, \quad (2.30)$$

avec comme condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  et  $f$  une fonction donnée de  $u$ . Cette équation peut se résoudre simplement par la méthode des caractéristiques. Précédemment on a en effet vu qu'une équation de convection telle que (2.30) peut s'écrire de façon équivalente

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ le long des courbes } \frac{dx}{dt} = \lambda(u),$$

avec  $\lambda(u) = f'(u)$  la *vitesse caractéristique*. Il s'ensuit que  $u$  est constant le long des courbes caractéristiques. Donc  $dx/dt = \lambda(u) = c$ , avec  $c$  une constante qui peut être déterminée à l'aide de la condition initiale : les caractéristiques sont donc des droites dont la pente  $\lambda(u_0(x_0))$  dépend de la condition initialement :

$$x = x_0 + \lambda(u_0(x_0))t.$$

De là, comme  $u$  est constant le long d'une droite caractéristique, on tire qu'on a :

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0(x - \lambda(u_0(x_0))t)$$

Comme le montre la figure 2.3, les droites caractéristiques peuvent se croiser dans certains cas, en particulier lorsque la vitesse caractéristique décroît (comme on est dans un diagramme « inversé »  $x - t$ , ce ralentissement se traduit par un raidissement des courbes caractéristiques) :  $\lambda'(u) < 0$ . Que se passe-t-il alors ? Lorsque deux caractéristiques se croisent, cela veut dire que virtuellement,  $u$  prend deux valeurs différentes, ce qui n'est pas possible pour une solution continue. La solution devient alors discontinue : un choc s'est formé.

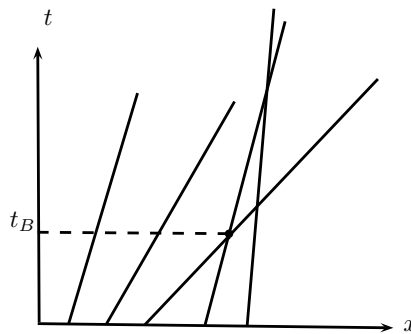


Figure 2.3 : diagramme de caractéristiques et formation d'un choc.



Quand deux caractéristiques se croisent, la dérivée  $u_x$  devient infinie (puisque  $u$  prend deux valeurs en même temps). Or cette dérivée  $u_x$  peut s'écrire

$$u_x = u'_0(x_0) \frac{\partial x_0}{\partial x} = u'_0(x_0) \frac{1}{1 + \lambda'(u_0(x_0))u'(x_0)t} = \frac{u'_0(x_0)}{1 + \partial_x \lambda(x_0)t},$$

où l'on a utilisé l'identité:  $\lambda'(u_0(x_0))u'(x_0) = \partial_u \lambda \partial_x u = \partial_x \lambda$ . La dérivée  $u_x$  devient infinie quand le dénominateur tend vers 0, soit au temps:  $t_b = -1/\lambda'(x_0)$ . Au point d'intersection,  $u$  change très rapidement de valeur: il y a un choc. La ligne  $s = s(t)$  dans le plan  $x - t$  est le lieu du choc. Une condition nécessaire pour qu'il y ait un choc est donc que  $t_b > 0$  soit:

$$\lambda'(x_0) < 0.$$

Il faut donc qu'il y ait un ralentissement de la vitesse caractéristique (voir figure 2.3).

Les caractéristiques qui sont à l'origine du choc forment une courbe enveloppe dont l'équation implicite est donnée:

$$x = x_0 + \lambda(u_0(x_0))t \quad \text{et} \quad \lambda'(u_0(x_0)) + 1 = 0. \tag{2.31}$$

Après le choc, la solution serait à valeur multiple (voir fig. 2.4), ce qui est impossible. On substitue donc une discontinuité placée de telle sorte que les lobes de part et d'autre soient de superficie égale.

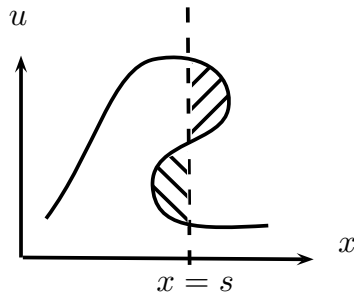


Figure 2.4 : position du choc.

En général, on ne cherche pas à calculer l'enveloppe des courbes caractéristiques, car il existe une méthode beaucoup plus simple pour calculer la trajectoire du choc. L'équation (2.30) peut en effet aussi se mettre sous la forme intégrale:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} u(x, t) dx = f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)),$$

où  $x_L$  et  $x_R$  sont les abscisses de points fixes d'un certain volume de contrôle. Si la solution admet une discontinuité en  $x = s(t)$  sur l'intervalle  $[x_L, x_R]$ , alors:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} u(x, t) dx = \frac{d}{dt} \left( \int_{x_L}^s u(x, t) dx + \int_s^{x_R} u(x, t) dx \right),$$

Soit encore:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} u(x, t) dx = \int_{x_L}^s \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx + \int_s^{x_R} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx + \dot{s}u(x_L, t) - \dot{s}u(x_R, t).$$

En faisant tendre  $x_R \rightarrow s$  et  $x_L \rightarrow s$ , on tire:

$$\dot{s}[[u]] = [[f(u)]], \tag{2.32}$$

où

$$[[u]] = u^+ - u^- = \lim_{x \rightarrow s, x > s} u - \lim_{x \rightarrow s, x < s} u,$$

les signes + et - sont employés pour désigner ce qui se passe à droite et à gauche respectivement de la discontinuité  $x = s(t)$ .

En conclusion, les petits calculs que l'on vient de faire montrent que s'il y a une discontinuité en un point  $x = s(t)$ , alors on doit avoir de part et d'autre de  $x = s(t)$  :

$$\boxed{\dot{s}[[u]] = [[f(u)]]} \quad (2.33)$$

Cette relation s'appelle *Rankine-Hugoniot*. Elle est fondamentale en dynamique des gaz (elle permet de calculer la propagation d'une onde de choc supersonique) et en hydraulique (elle permet de calculer la propagation d'un ressaut hydraulique).

### Équations de choc dans le cas $n > 1$

La relation de Rankine Hugoniot s'étend sans problème au cas d'un système d'équations. Pour un système de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}[\mathbf{u}(x, t)] = \mathbf{S}(\mathbf{u}, x, t), \quad (2.34)$$

où  $\mathbf{S}$  est un terme source, on montre facilement que la relation de choc est

$$\boxed{\dot{s}[[\mathbf{u}]] = [[\mathbf{f}(\mathbf{u})]]} \quad (2.35)$$

#### 2.1.3 Problème de Riemann pour des problèmes scalaires ( $n = 1$ )

On appelle *problème de Riemann* un problème aux valeurs initiales de la forme suivante :

$$\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec  $u_L$  et  $u_R$  deux constantes. Ce problème correspond à l'évolution d'une fonction  $u$  initialement constante par morceaux, avec une discontinuité en  $x = 0$ . Ce problème est fondamentale pour la résolution théorique de problèmes ainsi que la résolution numérique des équations hyperboliques. En hydraulique, il a également son importance car la configuration étudiée correspond à la rupture d'un barrage sur fond sec ou humide. Dans le cas linéaire, une discontinuité initiale se propage ; réciproquement pour qu'une solution soit discontinue, il faut qu'elle le soit initialement. Le cas non linéaire est un peu complexe. On va voir que selon que  $u_R$  est plus grand ou plus petit que  $u_L$ , différentes solutions peuvent être générées. Lorsque  $f'(u)$  est une fonction croissante ( $f''(u) > 0$ ) et que  $u_L < u_R$ , la solution initialement discontinue devient continue car une onde dite de détente permet de relier les deux états initiaux et donc d'atténuer la discontinuité initiale. Inversement lorsque  $u_L > u_R$ , la discontinuité initiale se propage et la solution reste discontinue. Rappelons par ailleurs que même si la solution est initialement continue, une équation non linéaire peut générer des discontinuités au cours du temps (voir § 2.1.2). Lorsque la fonction  $f$  est elle-même complexe, des solutions plus ou moins compliquées au problème de Riemann peuvent en résulter.

### Cas linéaire

Considérons tout d'abord le cas linéaire où  $f(u) = au$ , avec  $a$  une constante. La solution est triviale :

$$u(x, t) = u_0(x - at) = \begin{cases} u_L & \text{si } x - at < 0, \\ u_R & \text{si } x - at > 0. \end{cases}$$

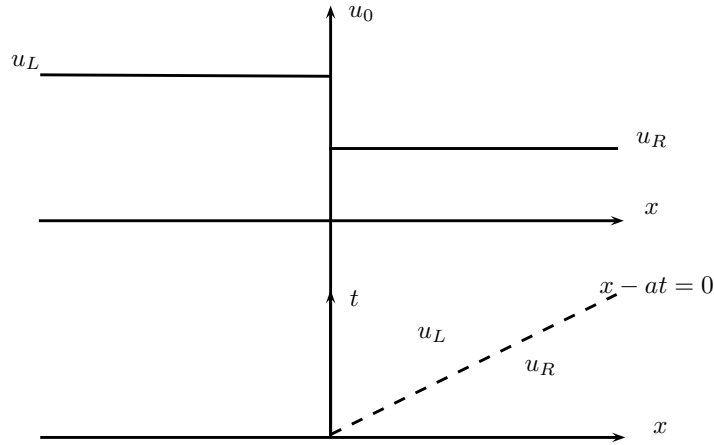


Figure 2.5 : problème de Riemann dans le cas linéaire.

La discontinuité se propage avec une vitesse  $a$ .

### Cas non linéaire

**Cas général du flux convexe ( $f'' > 0$ )** Dans le cas général (où  $f'' \neq 0$ ), le problème de Riemann est un problème aux valeurs initiales de la forme suivante :

$$\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

avec  $u_L$  et  $u_R$  deux constantes. On suppose que  $f'' > 0$  en tout premier lieu ; le cas d'un flux non convexe sera traité après. On va montrer qu'il existe deux types possibles de solution :

- soit une solution appelée *onde de détente* (ou bien onde simple) qui est continue,
- soit une solution discontinue qui représente la propagation de la discontinuité initiale (*onde de choc*).

Physiquement, une seule de ces solutions est possible et le choix sera dicté par une condition (dite d'entropie) selon la valeur respective de  $u_L$  et  $u_R$ .

**Onde de détente.** Notons tout d'abord que cette équation est invariante par la transformation  $x \rightarrow \lambda x$  et  $t \rightarrow \lambda t$ . Une solution générale peut donc être recherchée sous la forme  $U(\xi)$  avec  $\xi = x/t$ . En reportant cette forme générale dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$(f'(U(\xi)) - \xi) U' = 0.$$

Il y a deux types de solution à cette équation :

- *onde de détente*:  $(f'(U(\xi)) - \xi) = 0$ . Si  $f'' > 0$ , alors  $f'(u_R) > f'(u_L)$ ; l'équation  $f'(U) = \xi$  admet une seule solution lorsque  $f'(u_R) > \xi > f'(u_L)$ . On dit que  $u_L$  est relié à  $u_R$  par une *onde de détente*:  $\xi = f'(U(\xi))$ . En inversant  $f'$ , on trouve la solution recherchée

$$u(x, t) = f'^{-1}(\xi) ;$$

- *état constant*:  $U'(\xi) = 0$ . C'est la solution triviale  $u(x, t) = \text{cte}$ . Cette solution ne vérifie pas le problème initial.

La solution s'écrit donc

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq f'(u_L), \\ f'^{-1}(\xi) & \text{si } f'(u_L) \leq \frac{x}{t} \leq f'(u_R) \\ u_R & \text{si } \frac{x}{t} \geq f'(u_R). \end{cases}$$

**Onde de choc.** On a précédemment vu que l'existence de solutions faibles (discontinues) à l'équation différentielle hyperbolique (2.30). En admettant une discontinuité le long d'une droite  $x = s(t) = \dot{s}t$ , on tire:  $[[f(u)]] = \dot{s}[[u]]$ . La solution est alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \dot{s}t, \\ u_R & \text{si } x > \dot{s}t. \end{cases}$$

Il y a alors formation d'une onde de choc de vitesse  $\dot{s}$  donnée par :

$$\dot{s} = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}.$$

**Sélection de la solution physique.** Deux cas de figures peuvent se présenter (rappelons que  $f'' > 0$ ). On appelle  $\lambda(u) = f'(u)$  la vitesse caractéristique (voir section ci-dessous); c'est la pente de la caractéristique (droite) du problème.

- 1<sup>er</sup> cas:  $u_R > u_L$ . Puisque  $f'' > 0$ , alors  $\lambda(u_R) > \lambda(u_L)$ . À l'instant initial  $t = 0$ , les deux caractéristiques définissent un cône. L'équation  $\xi = f'(U(\xi))$  a une solution sur l'intervalle  $\lambda(u_R) > \xi > \lambda(u_L)$ . Voir Fig. 2.6;
- 2<sup>ème</sup> cas:  $u_R < u_L$ . Les caractéristiques se croisent dès le temps initial  $t = 0$ . Le choc se propage à une vitesse  $\lambda(u_R) < \dot{s} < \lambda(u_L)$ . Cette dernière condition s'appelle *condition de Lax*; elle définit si la vitesse d'un choc est physiquement admissible.

**Cas du flux non convexe** Pour certaines applications, le flux n'est pas convexe. Un exemple est donné par l'équation de Buckley-Leverett, traduisant l'évolution de la concentration d'eau  $\phi$  dans un écoulement de pétrole sous pression dans un milieu poreux :

$$\phi_t + f(\phi)_x = 0,$$

avec  $f(\phi) = \phi^2(\phi^2 + a(1 - \phi)^2)^{-1}$  et  $a$  un paramètre ( $0 < a < 1$ ). Cette fonction possède un point d'inflexion. Contrairement au cas convexe, pour lequel la solution se compose de chocs et d'ondes de détente, la solution ici est composée d'onde mixte (*compound wave*) résultant de la superposition d'une onde de détente et d'un choc (LeVeque, 2002, voir pp. 350–356).

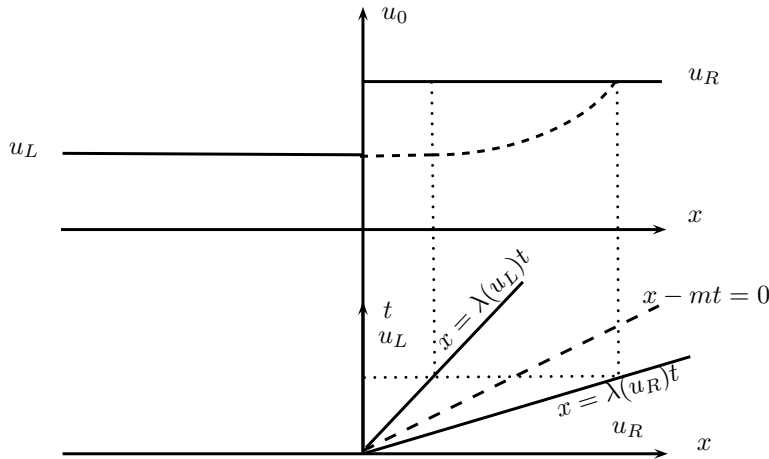


Figure 2.6 : problème de Riemann dans le cas  $u_R > u_L$ .

### 2.1.4 Systèmes de dimension $n = 2$

#### Systèmes linéaires

**Structure de la solution** On considère le système d'équations linéaires à deux équations :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

avec pour conditions initiales :

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^0(x) \text{ pour } -\infty \leq x \leq \infty.$$

$\mathbf{A}$  est une matrice  $2 \times 2$  possédant 2 valeurs propres distinctes et réelles notées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (et ordonnées de telle sorte que  $\lambda_1 < \lambda_2$ ). On peut donc écrire  $\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{R}^{-1}$ , avec  $\mathbf{R}$  la matrice de passage et  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ).

En faisant le changement de variable  $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U}$ , le système d'équations prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0.$$

Il s'agit donc d'une série d'équations d'advection, linéaires et indépendantes, de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} w_1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} w_1 = 0 \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_2 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} w_2 = 0 \tag{2.37}$$

donc la solution est de la forme  $w_i = \omega_i(x - \lambda_i t)$ , avec  $\omega_i$  une fonction qui dépend des conditions initiales. Les conditions initiales s'écrivent compte tenu du changement de variable :

$$\mathbf{W}(x, 0) = \mathbf{W}^0(x) \text{ pour } -\infty \leq x \leq \infty.$$

La solution à ce problème initial est donc :

$$w_i(x, t) = w_i^0(x - \lambda_i t) \text{ pour } i = 1 \text{ ou } 2.$$

Par un changement de variable inverse, on trouve  $\mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}$ . Comme on l'a vu au § 2.1.1, les colonnes de la matrice de passage  $\mathbf{R}$  sont les vecteurs propres à droites  $\mathbf{r}_i$  de  $\mathbf{A}$  (associés à la valeur propre  $\lambda_i$ ). Le changement de variable  $\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}$  peut donc également s'écrire

$$\mathbf{U} = w_1(x, t)\mathbf{r}_1 + w_2(x, t)\mathbf{r}_2 = w_1^0(x - \lambda_1 t)\mathbf{r}_1 + w_2^0(x - \lambda_2 t)\mathbf{r}_2, \quad (2.38)$$

La solution est donc la superposition de deux ondes se déplaçant à la vitesse  $\lambda_i$  dans la direction  $\mathbf{r}_i$ ; ces ondes sont indépendantes, ne changent pas de forme, et leur forme est donnée par  $w_i^0(x)$ . On les appelle, respectivement, la 1-onde et la 2-onde. Un cas particulier est rencontré lorsque l'une des deux conditions initiales est une fonction constante en  $x$  tandis que la seconde est une fonction non constante de  $x$ . La solution à ce problème particulier de Cauchy est appelée une onde simple car il s'agit de la propagation d'une seule onde le long d'une seule caractéristique.

Ces formes se propagent à la vitesse  $\lambda_i$  le long de courbes caractéristiques  $x = x_0 + \lambda_i t$ , qui sont des droites car  $\lambda_i$  est constant et qui sont appelées les  $i$ -caractéristiques. La seule possibilité d'observer des solutions discontinues est qu'originellement la condition initiale est elle-même porteuse d'une discontinuité.

**Problème de Riemann** Le problème de Riemann est un problème aux conditions initiales de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

avec des conditions initiales qui sont constantes par morceau

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_\ell & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_r & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ce système linéaire peut se résoudre simplement. Le mode de résolution est instructif car il permet d'éclairer les méthodes mises en œuvre pour le cas non linéaire.

La solution du problème de Riemann est un cas particulier de la solution générale donnée par l'équation (2.38), avec les conditions initiales qui sont ici des fonctions discontinues « en escalier ». On peut progresser un peu dans l'analyse de cette solution en jouant avec les notations. Les deux vecteurs propres  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  ne sont pas colinéaires; ils peuvent donc former une nouvelle base dans l'espace des fonctions.

On peut donc décomposer  $\mathbf{U}_\ell$  et  $\mathbf{U}_r$  dans la base des vecteurs propres  $\mathbf{r}_i$  :

$$\mathbf{U}_\ell = \alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 \text{ et } \mathbf{U}_r = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \beta_2 \mathbf{r}_2,$$

avec  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  des constantes. En comparant avec la forme générale (2.38) pris à  $t = 0$ , on en déduit que

$$w_i^0(x, 0) = \begin{cases} \alpha_i & \text{pour } x < 0, \\ \beta_i & \text{pour } x > 0, \end{cases}$$

Chaque discontinuité se propage à la vitesse  $\lambda_i$  de sorte que l'on ait au temps  $t$

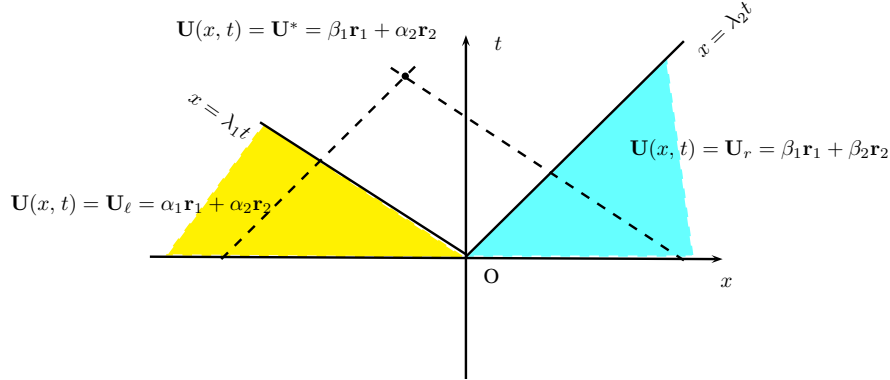
$$w_i^0(x, t) = \begin{cases} \alpha_i & \text{pour } x < \lambda_i t, \\ \beta_i & \text{pour } x > \lambda_i t, \end{cases}$$

On peut partitionner le diagramme  $x - t$  en trois coins où  $\mathbf{U}$  est constant et qui sont séparés par les courbes caractéristiques  $x = \lambda_i t$ . En tout point M on peut déterminer la valeur de  $\mathbf{U}$

en tirant les courbes caractéristiques passant par ce point M jusqu'à l'axe des abscisses  $t = 0$ . Par exemple, la solution dans le cas particulier de la figure 2.7 est

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}^* = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2.$$

Dans toute la région délimitée par les caractéristiques  $x = \lambda_1 t$  et  $x = \lambda_2 t$ , la solution est constante et prend la même valeur  $\mathbf{U}^*$ .



**Figure 2.7 :** construction de la solution pour un problème de Riemann linéaire dans un diagramme  $x - t$ .

Il en est de même pour la région sous les courbes caractéristiques  $x = \lambda_2 t$  et  $x = \lambda_1 t$ , la solution est constante et prend la même valeur  $\mathbf{U}_r$  et  $\mathbf{U}_l$ , avec

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_r = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \beta_2 \mathbf{r}_2 \text{ si } x - \lambda_1 < 0, \quad (2.39)$$

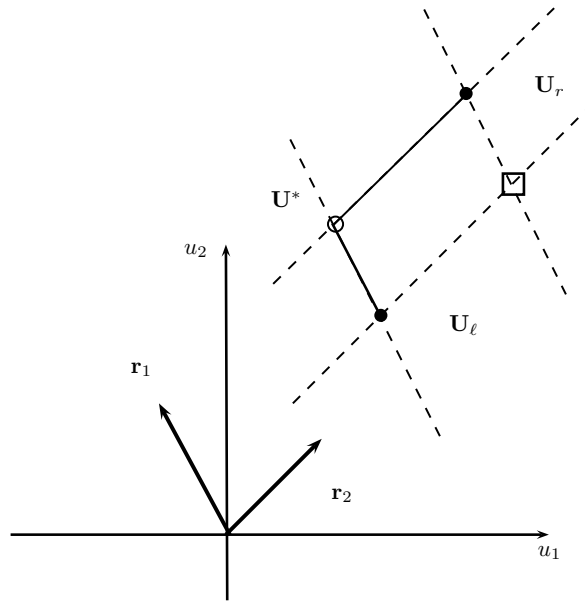
$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_l = \alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 \text{ si } x - \lambda_2 > 0. \quad (2.40)$$

D'une région à l'autre, la solution subit une discontinuité. Par exemple, en passant de la région  $\mathbf{U}^*$  à  $\mathbf{U}_r$ , la solution subit une discontinuité égale à

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_r - \mathbf{U}^* = (\beta_2 - \alpha_2) \mathbf{r}_2.$$

À travers la 2-caractéristique séparant les deux domaines, la solution subit donc un saut  $(\beta_2 - \alpha_2) \mathbf{r}_2$ , qui est un multiple de  $\mathbf{r}_2$ ; cela montre donc que le vecteur saut est un vecteur propre de  $\mathbf{A}$ . Cette propriété se vérifie également pour un système non linéaire, ce qui la rend particulièrement utile.

Une autre façon de représenter la solution est de la tracer dans un diagramme  $(u_1, u_2)$  (où les  $u_i$  sont les composantes de  $\mathbf{u}$ ). Dans un tel diagramme, toute fonction  $\mathbf{u}(x, t) = (u_1, u_2)$  est représentée par un point, éventuellement mobile. Ainsi, comme le montre la figure 2.8, les deux fonctions servant aux conditions initiales  $\mathbf{U}_l$  et  $\mathbf{U}_r$  sont deux points. Les deux vecteurs propres  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  représentent les directions le long desquelles se propagent les chocs. Si le vecteur des conditions initiales  $\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_l$  est parallèle à l'un de ces deux vecteurs, cela veut dire que la discontinuité initiale entre les deux états se propage selon une des deux directions (celle à laquelle  $\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_l$  est parallèle). Cela veut aussi dire que si l'on se place en un point M de l'espace donné, on peut tracer deux droites de direction  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . Si M représente l'état à gauche  $\mathbf{U}_l$ , alors tout point situé sur l'une des deux droites représente un état initial à droite  $\mathbf{U}_r$  pour lequel une seule discontinuité va résulter. Ce réseau de droites qui représentent tous les états à droite qui peuvent être reliés à  $\mathbf{U}_l$  par un 1-choc ou un 2-choc est appelé les *courbes de Hugoniot*.



**Figure 2.8 :** construction de la solution pour un problème de Riemann linéaire dans le plan  $(u_1, u_2)$ . Les deux disques noirs représentent l'état initial à gauche  $\mathbf{U}_\ell$  et l'état à droite  $\mathbf{U}_r$ . Pour passer de  $\mathbf{U}_\ell$  à  $\mathbf{U}_r$ , on suit tout d'abord la direction  $\mathbf{r}_1$  jusqu'à un état intermédiaire  $\mathbf{U}^*$  (cercle), puis de là on rejoint  $\mathbf{U}_r$  en suivant la direction  $\mathbf{r}_1$ . Le chemin alternatif qui passe par le point marqué d'un carré n'est physiquement pas possible.

En général, les conditions initiales sont quelconques et donc  $\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_\ell$  n'est pas parallèle à l'un de ces deux vecteurs  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . Dans ce cas, la solution est la somme de deux discontinuités se propageant aux vitesses  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Un nouvel état constant  $\mathbf{U}^*$  émerge entre les deux états initiaux ; cet état permet de relier l'état à droite en suivant une 2-onde et l'état à gauche en suivant une 1-onde. Cela permet donc une seule construction possible ; on note sur la figure 2.8 que le sommet du parallélogramme marqué par un carré est bien relié à l'état à gauche par une droite de Hugoniot, mais il s'agit d'un 2-choc alors que seul un 1-choc peut relier l'état à gauche  $\mathbf{U}_\ell$  et l'état intermédiaire  $\mathbf{U}^*$ . Puisque  $\lambda_1 < \lambda_2$ , on se déplace toujours le long de  $\mathbf{r}_1$  quand on part d'un état à gauche  $\mathbf{U}_\ell$ , puis on suit la direction  $\mathbf{r}_2$  pour atteindre l'état à droite  $\mathbf{U}_r$ . On va servir de cette construction pour mieux comprendre le cas non linéaire dans ce qui suit.

### Systèmes non linéaires

On considère le système d'équations non linéaires à deux équations :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.41)$$

ou bien sous la forme conservative

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0,$$

où l'on a la relation :  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}(\mathbf{u})$ .  $\mathbf{A}$  est une matrice  $2 \times 2$  possédant 2 valeurs propres distinctes et réelles notées  $\lambda_1(\mathbf{u})$  et  $\lambda_2(\mathbf{u})$ . Les vecteurs à gauche associés sont respectivement  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . Les conditions initiales :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \text{ pour } -\infty \leq x \leq \infty.$$



Au § 2.1.1 on a vu qu'il était possible de passer d'un système d'équations couplées à un système de deux équations non couplées à l'aide des variables de Riemann. Cela revient à chercher deux fonctions  $r_1$  et  $r_2$  dites *invariants de Riemann* et deux fonctions dites *facteurs intégrants*  $\mu_1$  et  $\mu_2$  telles que

$$\mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mu_1 \frac{dr_1}{dt}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mu_2 \frac{dr_2}{dt}. \quad (2.43)$$

En multipliant l'équation (2.41) par  $\mathbf{v}_i$ , on arrive à

$$\frac{dr_1}{dt} = 0 \text{ le long d'une courbe caractéristique } \mathcal{C}_1 \text{ telle que } \frac{dx(t)}{dt} = \lambda_1(r_1, r_2), \quad (2.44)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = 0 \text{ le long d'une courbe caractéristique } \mathcal{C}_2 \text{ telle que } \frac{dx(t)}{dt} = \lambda_2(r_1, r_2). \quad (2.45)$$

Par rapport au cas linéaire vu plus haut, la principale difficulté que nous rencontrons ici est que les courbes caractéristiques sont des courbes quelconques et non plus des droites de pente connue et fixée. Il n'existe donc pas de solution générale au système non linéaire (2.41). On peut retenir qu'il existe deux ondes, dont la forme et la trajectoire varient au cours du temps et qui peuvent interagir entre elles. Il existe deux types de solutions pour lesquelles on peut déterminer plus précisément la forme de la solution : ce sont les ondes simples et les chocs.

**Onde simple** Un cas particulier important d'onde est l'*onde simple*. Comme on l'a indiqué précédemment, il s'agit d'une onde qui ne se déplace que le long d'une seule caractéristique (ou famille de caractéristiques) :

- pour la 1-onde simple, on n'observe une propagation que le long de la 1-caractéristique tandis qu'aucune information ne se propage pas le long des 2-caractéristiques ; il existe donc un domaine du plan  $x - t$  où  $r_2 = cste$ . L'équation (2.45) est donc trivialement satisfaite. L'équation (2.44) nous dit donc que  $\lambda_1(r_1, r_2) = \lambda_1(r_1, cste)$  est une constante car  $dr_1/dt = 0$  le long de chaque courbe caractéristique ; chaque courbe caractéristique prend une valeur constante différente en fonction des conditions initiales imposées. La 1-courbe caractéristique est donc une droite et la famille des 1-ondes simples forment un jeu de droites non parallèles ;
- pour la 2-onde simple, on n'observe une propagation que le long de la 2-caractéristique tandis qu'aucune information ne se propage pas le long des 1-caractéristiques. Il existe un domaine du plan  $x - t$  où  $r_1 = cste$ . Les 2-caractéristiques sont des droites dans ce domaine.

À noter que si  $u_1$  et  $u_2$  sont les composantes de  $\mathbf{u}$ , alors on peut tracer dans un plan  $u_1 - u_2$  deux familles d'ondes simples paramétrées par un seul paramètre  $\rho$ . En effet, pour une 1-onde simple, on doit  $r_1 = \rho$  pour chacune des courbes avec  $\rho$  une constante (deux courbes différentes ne peuvent pas être associées à la même valeur de  $\rho$ ). Il en est de même pour la 2-onde simple. Pour qu'une onde simple puisse être la solution d'un problème, encore faut-il que les conditions initiales soient compatibles avec la constance d'un des deux invariants de Riemann ; une telle condition est par exemple rencontrée lorsque les conditions initiales sont constantes en  $x$  ou bien constantes par morceau (problème de Riemann).

**Onde de choc** Au § 2.1.2 on a vu que des ondes pouvaient se former spontanément pour des systèmes non linéaires ou bien se propager si initialement le vecteur  $\mathbf{u}$  ou l'une de ses

composantes était discontinu. Le choc situé en  $x = s(t)$  se propage à la vitesse  $\dot{s}$  donnée par la condition de Rankine-Hugoniot (2.35)

$$\dot{s}[[\mathbf{u}]] = [[\mathbf{F}(\mathbf{u})]].$$

Si  $u_1$  et  $u_2$  sont les composante de  $\mathbf{u}$ ,  $F_1$  et  $F_2$  sont les composante de  $\mathbf{F}$ , alors cette condition peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{s}[[u_1]] = [[F_1(u_1, u_2)]], \quad (2.46)$$

$$\dot{s}[[u_2]] = [[F_2(u_1, u_2)]]. \quad (2.47)$$

Il s'agit d'un système de deux équations avec trois inconnues :  $\dot{s}$ ,  $u_1^+$ , et  $u_2^+$  (les composantes  $u_1^-$  et  $u_2^-$  avec le choc sont supposées connues). En éliminant  $\dot{s}$ , on obtient une famille de courbes solutions de la forme  $u_2 = G(u_1)$  ; on trouve en fait qu'il n'existe pas une, mais deux familles de courbes vérifiant la condition de Rankine-Hugoniot (2.35).

**Problème de Riemann** On cherche à résoudre le problème de Riemann :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.48)$$

avec des conditions initiales qui sont constantes par morceau

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_\ell & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{u}_r & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Dans le cas unidimensionnel on avait trouvé qu'il y avait deux types de solutions : des ondes de détente et de choc. On va voir que c'est encore le cas ici, avec également la possibilité de combiner les deux types.

Une onde de détente est une onde qui vérifie l'équation  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{W}(\xi)$  avec  $\xi = x/t$ . Quand on substitue cette forme dans l'équation (2.48), on obtient :

$$-\frac{\xi}{t} \mathbf{W}'(\xi) + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \cdot \frac{1}{t} \mathbf{W}' = \mathbf{0},$$

ce qui donne

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{W}'(\xi) = \xi \mathbf{W}'(\xi),$$

avec  $\mathbf{W}' = d\mathbf{W}/d\xi$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{W}'(\xi)$  est un vecteur propre (à droite) de  $\mathbf{F}$  associé à la valeur propre  $\xi$ . On déduit donc que  $\mathbf{W}'(\xi)$  est nécessairement colinéaire à un des deux vecteurs à droite  $\mathbf{w}_i$ . Il existe donc un coefficient de proportionnalité  $\alpha_i(\xi)$  tel que

$$\mathbf{W}'(\xi) = \alpha_i(\xi) \mathbf{w}_i. \quad (2.49)$$

Ce coefficient peut être déterminé en se servant de la seconde condition, à savoir que la valeur propre associée est  $\xi$

$$\lambda_i(\mathbf{W}) = \xi.$$

En différentiant cette équation par rapport à  $\xi$ , on obtient

$$\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_i(\mathbf{W}) \cdot \frac{d\mathbf{W}}{d\xi} = 1.$$

Comme  $\mathbf{W}'(\xi) = \alpha_i(\xi) \mathbf{w}_i$ , on déduit donc :

$$\alpha_i(\xi) = \frac{1}{\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_i(\xi)}$$

sous réserve que  $\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_i \neq 0$  (condition de dégénérescence). L'onde de détente est donc la solution de

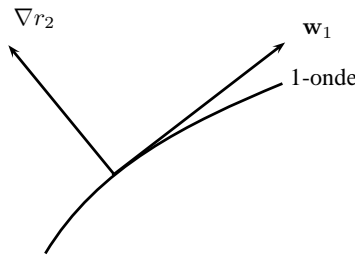
$$\frac{d\mathbf{W}}{d\xi} = \frac{\mathbf{w}_i}{\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_i(\xi)}$$

En dimension 2, il y a deux familles d'ondes de détente: les 1-détentes et 2-détentes. Au § 2.1.1, on a vu que les vecteurs à droite étaient orthogonaux aux gradients des variables de Riemann :

$$\mathbf{w}_1 \cdot \nabla r_2 = 0 \text{ et } \mathbf{w}_2 \cdot \nabla r_1 = 0.$$

Rappelons (voir § 1.3.1) que le vecteur  $\nabla r_1$  est normal à la courbe d'équation  $r_1 = cste$  (voir figure 2.9). On en déduit que :

- l'invariant de Riemann  $r_1$  est constant le long d'une 2-détente ;
- l'invariant de Riemann  $r_2$  est constant le long d'une 1-détente.



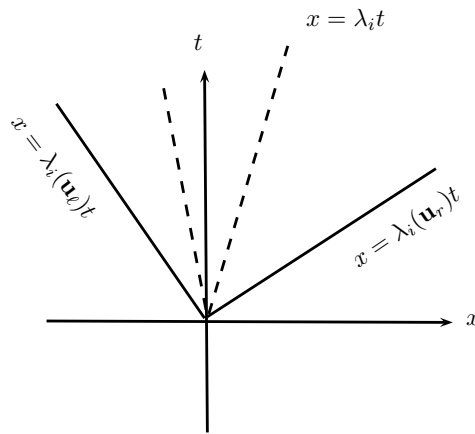
**Figure 2.9 :** dans le plan  $u_1 - u_2$  une 1-détente est tangente au vecteur à droite  $\mathbf{w}_1$ , qui est orthogonal à  $\nabla r_2$ , donc il s'ensuit que  $r_2$  est constant le long d'une 1-détente.

Cela fournit une manière de calculer les équations des courbes de détente de façon plus aisée que la résolution de l'équation différentielle (2.49). Cela montre aussi que les ondes de détente sont des ondes simples ; comme elles émanent toutes du point  $O$ , on les appelle *ondes simples centrées*. En effet, lorsque la solution suit une courbe de détente, cela veut dire que pour toute une partie du domaine  $x - t$  l'un des deux invariants de Riemann est constant, ce qui est la définition donnée aux ondes simples. Une conséquence est qu'une onde de détente  $R_i$  se présente sous la forme d'un éventail de droites émanant du point  $O$

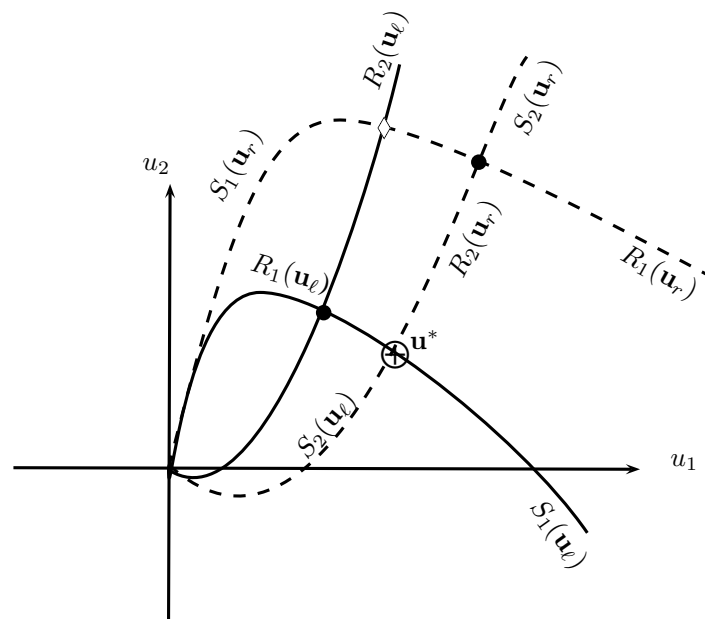
$$\frac{x}{t} = \lambda_i$$

dans le plan  $x - t$ . Le côté gauche de cet éventail est la droite  $x = \lambda_i(\mathbf{u}_\ell)t$  tandis que le côté droit est la droite  $x = \lambda_i(\mathbf{u}_r)t$ .

Comme on l'a fait précédemment pour le cas linéaire, on peut construire une solution en se plaçant dans le plan  $u_1 - u_2$ . La figure 2.11 montre un exemple de construction pour un jeu particulier d'états initiaux  $\mathbf{u}_\ell$  et  $\mathbf{u}_r$ . Il s'agit du même type de construction géométrique que celle présentée dans la figure 2.8 dans le cas linéaire. De chaque point  $\mathbf{u}_\ell$  et  $\mathbf{u}_r$  émanent deux familles de courbes: les 1- et 2-détentes notées ici  $R_1$  et  $R_2$  ( $R$  car en anglais, on emploie « rarefaction » pour détente) et les 1- et 2-chocs ( $S$  car en anglais, on emploie « shock » pour choc). On remarque tout de suite que les courbes de détente et de choc se raccordent au point initial à la même tangente, ce qui est normale puisque les tangentes à ces courbes sont les mêmes (ce sont les vecteurs à droite  $\mathbf{w}_i$ ). Ce réseau de courbes constituent un maillage de l'espace  $u_1 - u_2$ . Pour passer d'un état initial à gauche  $\mathbf{u}_\ell$  à un état  $\mathbf{u}_r$ , il faut généralement suivre des courbes de détente et de choc. À chaque reprise, il y a deux chemins possibles, mais un seul est physiquement possible (du point de vue de la dissipation d'énergie).



**Figure 2.10** : dans le plan  $x - t$  une  $i$ -détente se présente sous la forme d'un éventail de droites émanant du point origine:  $x = \lambda_i t$  avec  $\lambda_i(\mathbf{u}_\ell) \leq \lambda_i \leq \lambda_i(\mathbf{u}_r)$ .



**Figure 2.11** : construction de la solution pour un problème de Riemann non linéaire dans le plan  $(u_1, u_2)$ . Les deux disques noirs représentent l'état initial à gauche  $\mathbf{u}_\ell$  et l'état à droite  $\mathbf{u}_r$ . Pour passer de  $\mathbf{u}_\ell$  à  $\mathbf{u}_r$ , on suit tout d'abord la courbe  $S_1$  (choc) jusqu'à un état intermédiaire  $\mathbf{u}^*$  (cercle avec une croix), puis de là on rejoint  $\mathbf{u}_r$  en suivant la direction  $R_2$  (détente). Le chemin alternatif qui passe par le point marqué d'un losange n'est physiquement pas possible.

### Exemple : équations de Saint-Venant

**Mise sous forme conservative** Nous considérons le jeu d'équations de Saint-Venant sur fond plat et lisse (pas de dissipation) :

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x (uh) &= 0, \\ \partial_t hu + \partial_x hu^2 + gh\partial_x h &= 0.\end{aligned}$$

On introduit le vecteur  $\mathbf{U} = (h, hu)$ ,  $\mathbf{F} = (hu, hu^2 + gh^2/2)$  et la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}.$$

Le système se met sous la forme conservative<sup>3</sup> et homogène :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0.$$

---

**Tableau 2.1** : récapitulatif des valeurs propres et des vecteurs propres pour des variables conservatives ; on a introduit la notation classique  $c = \sqrt{gh}$ . Les champs  $\lambda_i$  sont vraiment non linéaires.

|                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
|                                       | $i = 1$                               | $i = 2$                               |
| $\lambda_i$                           | $u - c$                               | $u + c$                               |
| $\mathbf{w}_i$                        | $\left\{ \frac{1}{u - c}, 1 \right\}$ | $\left\{ \frac{1}{u + c}, 1 \right\}$ |
| $\mathbf{w}_i \cdot \nabla \lambda_i$ | $\frac{1}{2(c - u)}$                  | $\frac{1}{2(c + u)}$                  |

---

**Autre forme non conservative** On peut prendre comme variable  $(h, u)$ , ce qui a l'inconvénient de ne plus travailler avec les vraies variables conservatives mais a l'avantage d'amener à des solutions analytiques plus simples. On a alors avec  $\mathbf{U} = (h, u)$ ,  $\mathbf{F} = (hu, hu^2 + gh^2/2)$  et la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0.$$

**Conditions de saut** Les conditions de saut s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{s}[[h]] &= [[hu]], \\ \dot{s}[[hu]] &= [[hu^2 + gh^2/2]], \end{aligned}$$

avec  $\dot{s}$  la vitesse de propagation du choc. Si l'on écrit ces relations dans un repère lié à l'onde de choc, alors on a  $v = u - \dot{s}$  :

$$\begin{aligned} h_1 v_1 &= h_2 v_2, \\ h_1 v_1^2 + gh_1^2/2 &= h_2 v_2^2 + gh_2^2/2. \end{aligned}$$

où les indices 1 et 2 renvoient à l'état de part et d'autre du choc. Il y a deux types de choc :

- Le 1-choc pour lequel on a les inégalités :  $\dot{s} < u_L - c_L$  et  $u_R - c_R < \dot{s} < u_R + c_R$ . Soit encore  $v_L > v_R$  : le flux de matière se fait de la gauche vers la droite si  $v_L > 0$  (*stricto sensu*, si l'on se déplace à la même vitesse que le front, les perturbations animées d'une vitesse  $v_L$  quand elles sont à gauche du front se déplacent plus rapidement que celles à droite ; elles peuvent venir rattraper le front) ;

---

3. Il s'agit d'une vraie formulation conservative.

**Tableau 2.2** : récapitulatif des valeurs propres et des vecteurs propres pour des variables non conservatives.

|                             |                                       | $i = 1$                          | $i = 2$                         |
|-----------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| valeur propre               | $\lambda_i$                           | $u - c$                          | $u + c$                         |
| vecteur propre à droite     | $\mathbf{w}_i$                        | $\left\{-\frac{c}{g}, 1\right\}$ | $\left\{\frac{c}{g}, 1\right\}$ |
| vecteur propre à gauche     | $\mathbf{v}_i$                        | $\left\{-\frac{c}{h}, 1\right\}$ | $\left\{\frac{c}{h}, 1\right\}$ |
| condition de dégénérescence | $\mathbf{w}_i \cdot \nabla \lambda_i$ | $\frac{1}{2}$                    | $\frac{1}{2}$                   |
| invariants de Riemann       | $r_i$                                 | $u + 2c$                         | $u - 2c$                        |

- Le 2-choc pour lequel on a les inégalités :  $\dot{s} > u_R + c_R$  et  $u_L - c_L < \dot{s} < u_L + c_L$ . Soit encore  $v_R > v_L$  : le flux de matière se fait de la droite vers la gauche si  $v_L > 0$ .

On peut en déduire les couples de points  $(h_2, v_2)$  qui sont reliés à  $(h_1, v_1)$  par une 1- ou une 2-onde de choc. On a ainsi :

$$\dot{s} = \frac{h_2 v_2 - h_1 v_1}{h_2 - h_1},$$

$$\frac{(h_2 u_2 - h_1 u_1)^2}{h_2 - h_1} = h_2 u_2^2 + \frac{g h_2^2}{2} - h_1 u_1^2 - \frac{g h_1^2}{2},$$

ce qui donne la vitesse de propagation du ressaut et  $u_2(h_2|h_1, v_1)$  :

$$u_2 = u_1 \mp (h_2 - h_1) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}},$$

$$\dot{s} = u_1 \mp \sqrt{\frac{g}{2} (h_1 + h_2) \frac{h_2}{h_1}}.$$

**Conditions de détente** Les ondes de détente se recherchent à partir des invariants de Riemann  $r_k$ . Ceux-ci sont définis comme :  $\nabla_{\mathbf{u}} r_k \cdot \mathbf{w}_k = 0$ . À noter qu'il est ici plus simple de travailler avec la variable  $(h, u)$ . On tire alors pour le premier invariant :

$$-c \frac{\partial r}{\partial h} + \lambda_1 \frac{\partial r}{\partial u} = 0,$$

dont le système caractéristique est :

$$\frac{du}{g} = -\frac{dh}{c}.$$

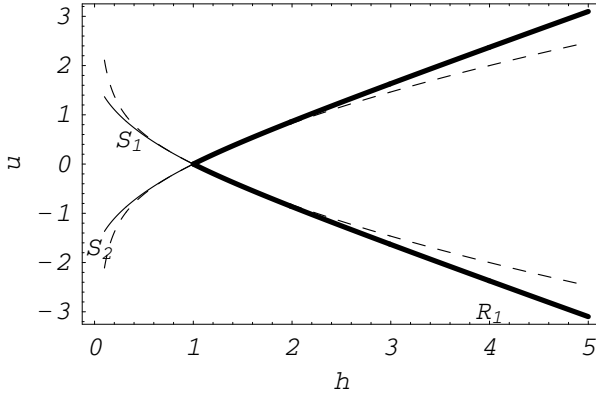
Il s'ensuit immédiatement qu'une intégrale première est  $u + 2c$ . De même pour le second invariant, on aboutit à  $u - 2c$ .

- Le long d'une 1-onde de détente, on a donc :  $u_2 + 2\sqrt{g h_2} = u_1 + 2\sqrt{g h_1}$  et l'invariant  $r_1 = u + 2c$  est constant le long de toutes les caractéristiques associées à la valeur  $\lambda_1 = u - c$  (celles-ci remplissant un cône,  $r_1$  est constant dans un cône) ;

- Le long d'une 2-onde de détente, on a donc :  $u_2 - 2\sqrt{gh_2} = u_1 - 2\sqrt{gh_1}$  et l'invariant  $r_2 = u - 2c$  est constant le long de toutes les caractéristiques associées à la valeur  $\lambda_1 = u + c$ .

Si on se ramène à la variable  $(h, q = hu)$ , on tire :

- Le long d'une 1-onde de détente, on a donc :  $q_2/h_2 + 2\sqrt{gh_2} = q_1/h_1 + 2\sqrt{gh_1}$  ;
- Le long d'une 2-onde de détente, on a donc :  $q_2/h_2 - 2\sqrt{gh_2} = q_1/h_1 - 2\sqrt{gh_1}$ .



**Figure 2.12** : ondes de choc (en gras) et de détente dans un espace  $(h,u)$  (unités arbitraires). Le point origine des courbes est  $(h,u) = (1,0)$ .

**Construction de la solution au problème de Riemann** La méthode de construction consiste à introduire un état intermédiaire  $u_*$ . L'état  $(h_*,u_*)$  peut être relié à un état à gauche  $(h_L,u_L)$  par une 1-onde :

$$u_* = \begin{cases} S_1(h_* | h_L, u_L) = u_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh_*} & \text{si } h_* < h_L \quad \text{1-onde de détente} \\ R_1(h_* | h_L, u_L) = u_L - (h_* - h_L) \sqrt{g \frac{h_* + h_L}{2h_*h_L}} & \text{si } h_* > h_L \quad \text{1-onde de choc} \end{cases} \quad (2.50)$$

Il peut également être relié à l'état à droite  $(h_R,u_R)$  par une 2-onde :

$$u_* = \begin{cases} S_2(h_* | h_R, u_R) = u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\sqrt{gh_*} & \text{si } h_* < h_R \quad \text{2-onde de détente} \\ R_2(h_* | h_R, u_R) = u_R + (h_* - h_R) \sqrt{g \frac{h_* + h_R}{2h_*h_R}} & \text{si } h_* > h_R \quad \text{2-onde de choc} \end{cases} \quad (2.51)$$

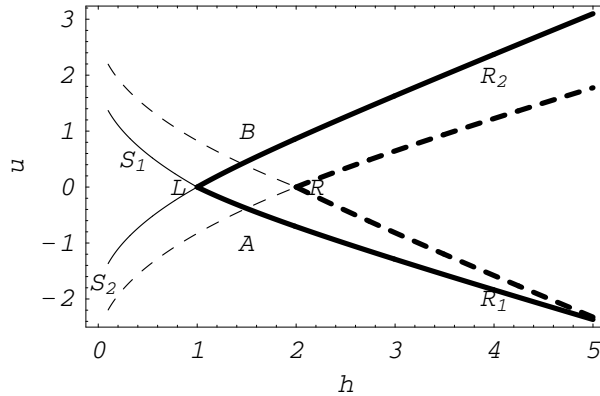
On commence par cet ordre (1-onde puis 2-onde) car l'information à gauche est transmise en tout premier lieu par la plus petite des valeurs propres, puis par les autres. On a reporté sur la figure 2.12 une représentation des courbes de choc et de détente. On notera qu'au point d'intersection, les tangentes des courbes  $R_1$  et  $S_1$  sont identiques. Par ailleurs, un état intermédiaire n'est possible que si :

$$u_R - u_L < 2(\sqrt{gh_R} + \sqrt{gh_L}).$$

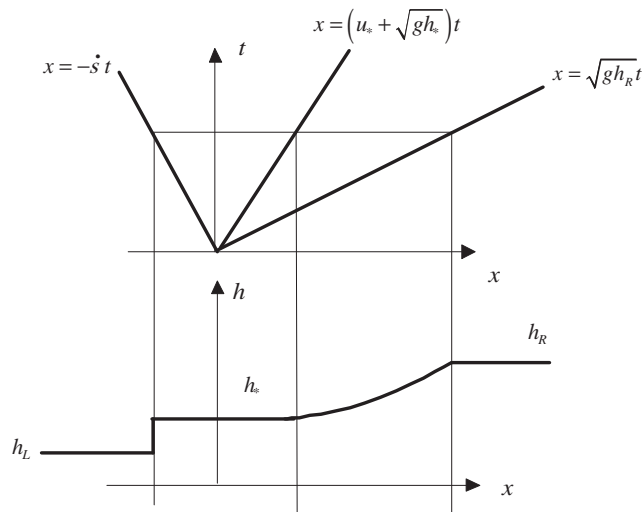
**Attention !** Il faut noter aussi que pour  $h_L = 0$  (resp.  $h_R = 0$ ), la 1-onde (resp. la 2-onde) de choc n'est pas définie. Notamment si on reprend le problème de rupture de barrage vu précédemment, on a :  $(h_L,u_L) = (h_L,0)$  et  $(h_R,u_R) = (0,0)$  ; dans ce cas que la seule solution possible est une onde de détente ; l'onde de choc n'est pas définie.



On a représenté sur la figure 2.13 un problème de Riemann avec les états initiaux suivants :  $(h_L, u_L) = (1, 0)$  et  $(h_R, u_R) = (2, 0)$ . On a indiqué en trait continu le réseau d'ondes émanant du point à gauche ( $L$ ) et en trait discontinu les ondes émanant de l'état à droite ( $R$ ). Deux états intermédiaires sont possibles : le point  $A$  ou  $B$ . On voit que le point  $A$  est sur une 1-onde alors que  $B$  est sur une 2-onde (émanant de  $L$ ). Cela veut donc dire que le chemin  $L \rightarrow A$  est une 1-onde de choc alors que le chemin  $A \rightarrow R$  est une 2-onde de détente.



**Figure 2.13 :** résolution du problème de Riemann pour  $(h_L, u_L) = (1, 0)$  et  $(h_R, u_R) = (2, 0)$ .



**Figure 2.14 :** forme de la solution à un temps  $t$ .



### 2.1.5 Généralisation à des systèmes à $n$ dimensions

Ce que l'on vient de faire pour la dimension  $n = 2$  peut se généraliser au cas multidimensionnel. Comme précédemment le cas linéaire ne pose pas de problème : les caractéristiques étant des droites, on peut facilement calculer la solution en un point  $M$  du plan caractéristique  $x - t$  en examinant le parcours de l'information le long des droites caractéristiques. Le problème non linéaire est plus complexe car il peut donner naissance à des courbes caractéristiques quelconques ; les solutions élémentaires au problème de Riemann sont les chocs, les ondes de détente, et les combinaisons d'onde de détente et de choc.

#### Systèmes linéaires

**Structure de la solution** On considère le système d'équations linéaires :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $n \times n$  possédant  $n$  valeurs propres distinctes et réelles. On peut donc écrire  $\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{R}^{-1}$ , avec  $\mathbf{R}$  la matrice de passage<sup>4</sup> et  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_i$ . On peut aussi introduire les vecteurs propres à gauche  $\mathbf{l}$  :  $\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{l}_i$ . La matrice  $\mathbf{L}$  dont les lignes sont les vecteurs propres à gauche  $\mathbf{l}_i$  vérifie :  $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}$ . Vecteurs propres à gauche et à droite sont orthogonaux ; en effet, on a

$$\begin{aligned} \lambda_i \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_j &= (\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_j, \\ &= \mathbf{l}_i \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_j), \\ &= \mathbf{l}_i \cdot (\lambda_j \mathbf{r}_j), \\ &= \lambda_j \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_j, \end{aligned}$$

ce qui dans le cadre d'une stricte hyperbolicité (où toutes les valeurs propres sont distinctes) que  $\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0$  pour  $i \neq j$ . Notons que l'on peut toujours choisir les vecteurs propres de telle sorte que  $\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_{ij}$ , ce qui veut dire que  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1}$  ou encore que  $\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1}$ .

En faisant le changement de variable  $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U}$ , le système d'équations prend une forme plus simple :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0.$$

Il s'agit donc d'une série d'équations d'advection, linéaires et indépendantes, de la forme :  $\partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i = 0$ , donc la solution est de la forme  $w_i = \omega_i(x - \lambda_i t)$ , avec  $\omega_i$  une fonction qui dépend des conditions initiales. Admettons par exemple que l'on cherche à résoudre un problème de Cauchy de la forme :

$$\mathbf{W}(x, 0) = \mathbf{W}^0(x) \text{ pour } -\infty \leq x \leq \infty.$$

La solution à ce problème initial est

$$w_i(x, t) = \omega_i(x - \lambda_i t) \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Par un changement de variable inverse, on trouve  $\mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}$  ou bien encore en appliquant les règles du calcul matriciel

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n w_i(x, t) \mathbf{r}_i,$$

---

4. Les colonnes de cette matrice sont les vecteurs propres à droite  $\mathbf{r}_i$  de  $\mathbf{A}$ .

où  $\mathbf{r}_i$  désigne le vecteur propre à droite de  $\mathbf{A}$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$  et  $w_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  composant de  $\mathbf{W}$ . La solution est donc la superposition de  $n$  ondes se déplaçant à la vitesse  $\lambda_i$ ; ces ondes sont indépendantes, ne changent pas de forme, et leur forme est donnée par  $w_i^0(x)$ .

Ces formes se propagent à la vitesse  $\lambda_i$  le long de courbes caractéristiques  $x = x_0 + \lambda_i t$ , qui sont des droites si  $\lambda_i$  est constant. Comme précédemment, pour un système d'équations linéaires, la seule possibilité d'observer des solutions discontinues est qu'originellement la condition initiale est elle-même porteuse d'une discontinuité.

**Problème de Riemann** Le problème de Riemann est un problème aux conditions initiales de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

avec

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_\ell & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_r & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ce système peut se résoudre ici simplement. Il est important de bien comprendre la structure de la solution car celle-ci possède les mêmes caractéristiques dans le cas non linéaire. En outre, plusieurs méthodes numériques, comme celles employées dans Clawpack ([LeVeque, 2002](#)), sont fondées sur les propriétés de ces solutions.

On décompose  $\mathbf{U}_\ell$  et  $\mathbf{U}_r$  dans la base des vecteurs propres  $\mathbf{r}_i$  :

$$\mathbf{U}_\ell = \sum_{i=1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i \text{ et } \mathbf{U}_r = \sum_{i=1}^n w_i^{(r)} \mathbf{r}_i, \quad (2.52)$$

avec  $\mathbf{w}_\ell = w_i^{(\ell)}$  et  $\mathbf{w}_r = w_i^{(r)}$  des vecteurs dont les composantes sont constantes. Le problème de Riemann est en fait composé de  $n$  problèmes scalaires :

$$w_i(x, 0) = \begin{cases} w_i^{(\ell)} & \text{si } x < 0, \\ w_i^{(r)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La solution des équations d'advection est donc :

$$w_i(x, t) = \begin{cases} w_i^{(\ell)} & \text{si } x - \lambda_i t < 0, \\ w_i^{(r)} & \text{si } x - \lambda_i t > 0. \end{cases}$$

Soit  $I(x, t)$  le plus grand des indices  $i$  tels que  $x - \lambda_i t > 0$ . On a alors :

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{i=1}^I w_i^{(r)} \mathbf{r}_i + \sum_{i=I+1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i. \quad (2.53)$$

Considérons le cas  $n = 3$ . La solution se décompose dans le diagramme  $x - t$  en des coins où  $\mathbf{U}$  est constant et qui sont séparés par les courbes caractéristiques  $x = \lambda_i t$ . En tout point  $M$  on peut déterminer la valeur de  $\mathbf{U}$  en tirant les courbes caractéristiques passant par ce point  $M$  jusqu'à l'axe des abscisses  $t = 0$ . Par exemple, la solution dans le cas particulier de la figure 2.15 est

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_\ell^* = w_1^{(r)} \mathbf{r}_1 + w_2^{(\ell)} \mathbf{r}_2 + w_3^{(\ell)} \mathbf{r}_3.$$

Dans toute la région délimitée par les caractéristiques  $x = \lambda_1 t$  et  $x = \lambda_2 t$ , la solution est constante et prend la même valeur  $\mathbf{U}_\ell^*$ .

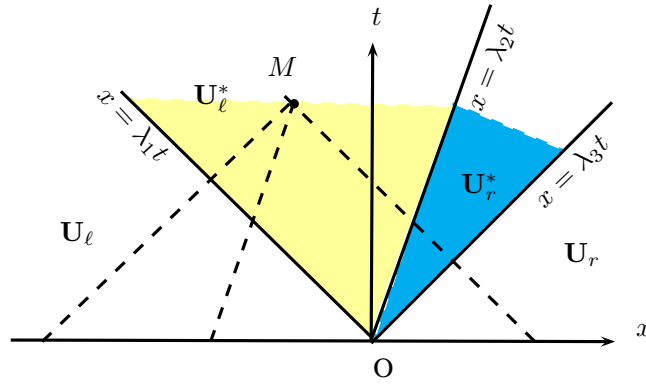


Figure 2.15 : construction de la solution pour un problème de Riemann linéaire.

Il en est de même pour la région  $x = \lambda_2 t$  et  $x = \lambda_3 t$ , la solution est constante et prend la même valeur  $\mathbf{U}_r^*$ , avec

$$\mathbf{U}_r^* = w_1^{(r)} \mathbf{r}_1 + w_2^r \mathbf{r}_2 + w_3^{(\ell)} \mathbf{r}_3.$$

D'une région à l'autre, la solution subit une discontinuité. Par exemple, en passant de la région  $\mathbf{U}_\ell^*$  à  $\mathbf{U}_r^*$ , la solution subit une discontinuité égale à

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_r^* - \mathbf{U}_\ell^* = (w_2^{(r)} - w_2^{(\ell)}) \mathbf{r}_2.$$

À travers la caractéristique 2 séparant les deux domaines, la solution subit donc un saut  $(w_2^{(r)} - w_2^{(\ell)}) \mathbf{r}_2$ , qui est un multiple de  $\mathbf{r}_2$ ; cela montre donc que le vecteur saut est un vecteur propre de  $\mathbf{A}$ . Cette propriété se vérifie également pour un système non linéaire, ce qui la rend particulièrement utile.

Notons que l'on peut transformer l'équation (2.53)

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{i=1}^I w_i^{(r)} \mathbf{r}_i + \sum_{i=I+1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i$$

en se servant de l'équation (2.52). On a par exemple

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, t) &= \mathbf{U}_\ell + \sum_{i=1}^I w_i^{(r)} \mathbf{r}_i + \sum_{i=I+1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i, \\ &= \mathbf{U}_\ell + \sum_{i=1}^I (w_i^{(r)} - w_i^{(\ell)}) \mathbf{r}_i, \end{aligned}$$

ce qui donne en introduisant l'onde de discontinuité  $\mathbf{W}_i = (w_i^{(r)} - w_i^{(\ell)}) \mathbf{r}_i$

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_\ell + \sum_{i=1}^I \mathbf{W}_i, \quad (2.54)$$

ou bien encore si l'on utilise  $\mathbf{U}_r$  au lieu de  $\mathbf{U}_\ell$

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_r - \sum_{i=I+1}^n \mathbf{W}_i. \quad (2.55)$$

Cette décomposition sert notamment dans la méthode des volumes finis à construire des solutions numériques.

### Généralités sur les systèmes non linéaires

**Remarque préliminaire** Nous allons généraliser la solution classique du problème de Riemann, où l'on montre que cette solution peut se décomposer en onde de choc, onde de détente, et onde de contact. Pour qu'une telle situation se rencontre, il faut que certaines conditions soient vérifiées. La première de ces conditions est que le système doit être strictement hyperbolique<sup>5</sup>, c'est-à-dire les valeurs propres sont toujours distinctes. Nous allons voir qu'elles doivent également être *authentiquement non linéaires*; cette notion de champ authentiquement linéaire peut être vue comme une généralisation de la notion de convexité dans le cas scalaire. En effet, dans le cas scalaire, il est souhaitable que la vitesse caractéristique soit monotone, c'est-à-dire  $\lambda(u) = f'(u)$  varie de manière monotone avec  $u$  et donc que  $f''(u) > 0$  ou  $< 0$  ( $f$  doit être convexe ou concave) sinon le problème de Riemann est plus complexe, avec des ondes mixtes (*compound waves*) ou de choc sur-compressif ou sous-compressif.

**Mise sous forme caractéristique** L'idée de base est de passer d'un système d'équations fortement couplées

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (2.56)$$

en un système de  $n$  équations où le couplage n'apparaît pas directement et qui expriment la conservation de certaines quantités

$$\frac{dr_i}{dt} = \mathbf{0} \text{ le long d'une courbe caractéristique } \frac{dx}{dt} = \lambda_i(\mathbf{u}),$$

où  $r_i(\mathbf{u})$  est une fonction qu'on appelle  $i$ -invariant de Riemann et où  $1 \leq i \leq n$ . Comme on le voit le couplage apparaît essentiellement dans la valeur propre  $\lambda_i$  qui dépend de la valeur prise par les composantes  $\mathbf{u}$

Pour faire cette transformation on utilise la méthode du facteur intégration. Quand on multiplie (2.56) par un vecteur à gauche  $\mathbf{v}_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \\ &= \mathbf{v}_i \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right), \\ &= \mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mu_i \frac{dr_i}{dt}. \end{aligned}$$

On souhaite pouvoir écrire le terme différentielle sous la forme d'une différentielle exacte

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mu_i \frac{dr_i}{dt},$$

où  $r_i(\mathbf{u})$  est le  $i$ -invariant de Riemann et  $\mu_i$  un facteur intégrant. Développons les termes différentiels et le produit scalaire :

$$v_{i,1} \frac{du_1}{dt} + v_{i,2} \frac{du_2}{dt} + \dots + v_{i,n} \frac{du_n}{dt} = \mu_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial r_i}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt} \right),$$

---

5. Le cas non strictement hyperbolique correspond à la situation où des valeurs propres sont égales. Il s'agit d'un sujet de recherche encore très actif et assez complexe. On va en effet voir que, pour un problème strictement hyperbolique, il y a  $n$  valeurs propres associées à  $n$  vecteurs propres différents, qui génèrent un espace de dimension  $n$ . Les courbes intégrales que l'on déduit (ondes de choc et de détente) constituent localement une base de cet espace et si les états initiaux  $u_R$  et  $u_L$  sont assez proches, alors on peut résoudre le problème de Riemann. Dans le cas contraire, plusieurs problèmes peuvent se poser : quelle est la dimension du sous-espace généré par les vecteurs associés à une valeur propre multiple (LeVeque, 2002, voir pp. 358–362) ? Un autre problème est lié à la perte locale d'hyperbolicité, par exemple avec des valeurs propres qui deviennent complexes dans un certain domaine (le problème devenant localement elliptique).

En identifiant les termes membre à membre nous trouvons que  $r_i$  vérifie une série d'équations :

$$\begin{aligned} v_{i,1} &= \mu_1 \frac{\partial r_i}{\partial u_1}, \\ v_{i,1} &= \mu_1 \frac{\partial r_i}{\partial u_1}, \\ &\vdots \\ v_{i,n} &= \mu_1 \frac{\partial r_i}{\partial u_n}. \end{aligned}$$

En éliminant le facteur intégrant  $\mu_i$  on obtient l'équation

$$\frac{1}{v_{i,1}} \frac{\partial r_i}{\partial u_1} = \frac{1}{v_{i,2}} \frac{\partial r_i}{\partial u_2} = \dots = \frac{1}{v_{i,n}} \frac{\partial r_i}{\partial u_n}.$$

Ces équations peuvent également être interprétées comme le fait que le vecteur

$$\nabla_{\mathbf{u}} r_i = (\partial_{u_1} r_i, \partial_{u_2} r_i, \dots, \partial_{u_n} r_i)$$

est proportionnel au vecteur propre à gauche  $\mathbf{v}_i$  (le facteur de proportionnalité étant le facteur intégrant  $\mu_i$ ). Le problème est qu'il faudrait calculer le facteur intégrant. On peut contourner cette difficulté en rappelant que le vecteur propre à gauche  $\mathbf{v}_i$  est perpendiculaire à tous les vecteurs à droite propre à gauche  $\mathbf{w}_k$  avec  $k \neq i$ . En effet écrivant le produit scalaire  $\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{v}_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{v}_i &= \mathbf{w}_k \cdot \left( \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i \right), \\ &= \frac{1}{\lambda_i} (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}_i, \\ &= \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'un  $i$ -invariant de Riemann vérifie la condition d'orthogonalité :

$$\boxed{\mathbf{w}_k \cdot \nabla_{\mathbf{u}} r_i = 0 \text{ pour tout } k \neq i.} \quad (2.57)$$

Les  $n - 1$   $i$ -invariants de Riemann (autre que  $k$ ) vérifient cette relation.

**Solution auto-similaire** Précédemment, on avait fait remarquer l'invariance de l'équation aux dérivées partielles par une transformation  $(x, t) \rightarrow \xi(x, t)$ , qui permet de passer d'une équation aux dérivées partielles en  $x$  et  $t$  en une équation différentielle ordinaire en  $\xi$ . Cela nous amène à penser que dans certains cas la solution se présente sous la forme auto-similaire :  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{W}(\xi, u_L, u_R)$ , avec :  $\xi = x/t$ . Dans ce cas, on doit avoir :

$$-\xi \frac{d\mathbf{W}}{d\xi} + \nabla \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{W}}{d\xi} = 0, \quad (2.58)$$

c'est-à-dire :

- soit  $\mathbf{W}'(\xi) = 0$ , c'est l'état constant ;
- soit la solution  $\mathbf{W}'(\xi)$  est un vecteur propre à droite de  $\nabla \mathbf{F}$  associé à la valeur propre  $\xi$  pour toute valeur du paramètre  $\xi$ . Cela veut dire aussi que la courbe  $\mathbf{W}(\xi)$  paramétrée par  $\xi$  est tangente à un vecteur propre à droite  $\mathbf{w}$ . Il y a donc  $n$  fonctions possibles pour  $\mathbf{W}$ . On va les indiquer par  $i$  : on parle de  $i$ -onde de détente.

Pour déterminer  $\mathbf{W}$ , il faut résoudre

$$\begin{aligned}\xi &= \lambda_k(\mathbf{W}), \\ \mathbf{W}'(\xi) &= \alpha \mathbf{w}_k,\end{aligned}$$

où  $\alpha$  est un coefficient de proportionnalité. En dérivant la première équation par rapport à  $\xi$ , on tire :

$$\begin{aligned}1 &= \nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{W}'(\xi), \\ &= \alpha \nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_k,\end{aligned}$$

donc le coefficient de proportionnalité vaut :

$$\alpha = \frac{1}{\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_k}.$$

La fonction  $\mathbf{W}$  est donc aussi solution de l'équation différentielle

$$\boxed{\mathbf{W}'(\xi) = \frac{\mathbf{w}_k}{\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_k}}.$$

Notons que cette équation n'a de sens que si le dénominateur est différent de 0. Pour des systèmes non linéaires à  $n$  dimensions, les valeurs propres sont des fonctions non linéaires de  $\mathbf{U}$  ; elles définissent donc des champs vectoriels dits *caractéristiques*. Lorsque le gradient d'un champ est normal à son vecteur propre à droite, on parle de *champ linéairement dégénéré*<sup>6</sup> :

$$\nabla \lambda_i \cdot \mathbf{w}_i = 0.$$

Dans le cas contraire on parle de *champ authentiquement non linéaire*. En effet, si l'on veut qu'une valeur propre  $\lambda_k$  ne s'annule pas le long d'une courbe caractéristique  $\mathcal{C}_k$  (rappelons-le, une courbe intégrale du vecteur à droite), alors on doit avoir

$$\frac{d\lambda_k}{d\xi} = \nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\xi} > 0 \text{ ou } < 0,$$

avec  $\tilde{\mathbf{u}}$  décrivant  $\mathcal{C}_k$  ; cela veut dire que  $\tilde{\mathbf{u}} \propto \mathbf{w}_k$ . La *condition de non-dégénérescence* s'écrit donc  $\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k \cdot \mathbf{w}_k \neq 0$ . Si la variation  $d\lambda_k/d\xi$  est strictement positive (resp. négative), la vitesse caractéristique est toujours croissante (resp. négative) et l'onde est en expansion (resp. en contraction)<sup>7</sup>. Si elle s'annule en un point donné, alors la caractéristique est localement une droite comme dans le cas linéaire.

**Onde simple** Lorsqu'une solution  $\mathbf{u}$  est continûment dérivable sur un domaine  $\mathcal{D}$  et que tous ses  $(n-1)$   $i$ -invariants de Riemann parmi les  $n$  invariants (notés ici  $r_j$  avec  $j \neq i$ ) sont constants en tout point de ce domaine, alors la solution est appelée une  *$i$ -onde simple*. Sur ce domaine, les  $i$ -caractéristiques sont des droites et le long de ces droites,  $\mathbf{u}$  est constant.

☞ **Démonstration.** Rappelons que l'équation (2.56) est équivalente au système d'équations :

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ le long de } \mathcal{C}_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

où  $d/dt = \partial_t + \lambda_i \partial_x$ . Par définition une  $i$ -onde simple solution de (2.56) est telle que

- il y a  $(n-1)$   $i$ -invariants  $r_j$  ( $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ ), qui sont constants, donc  $dr_j/dt = 0$  le long de  $\mathcal{C}_i$  pour  $j = 1 \cdots n$  excepté  $j = i$ . Autrement dit, on a :

$$\frac{dr_j}{dt} = \nabla_{\mathbf{u}} r_j \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ le long de } \mathcal{C}_i ;$$

6. Rappelons que, dans le cas linéaire, les champs sont dégénérés et les ondes sont des chocs de vitesse  $\lambda_i$ .

7. *expanding* ou *compressing wave* (LeVeque, 2002, voir pp. 274–275).

– on a par ailleurs :

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ le long de } \mathcal{C}_i.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \nabla_{\mathbf{u}} r_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{u}} r_{n-1} \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ le long de } \mathcal{C}_i$$

Les gradients étant indépendants, la matrice est non singulière (c'est-à-dire son déterminant n'est pas nul) ; la solution de cette équation est donc  $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$  le long de  $\mathcal{C}_i$ , ce qui veut dire que  $\mathbf{u}$  est constant le long de la courbe caractéristique et donc  $\lambda_k(\mathbf{u})$  est également constant. Pour une  $i$ -onde simple, les caractéristiques sont des droites.  $\square$

Dans un diagramme  $x - t$ , on représente une onde de détente centrée en O par un éventail de droites, limitées à gauche par la droite de pente  $\lambda(\mathbf{U}_\ell)$  et à droite par la droite de pente  $\lambda(\mathbf{U}_r)$ .

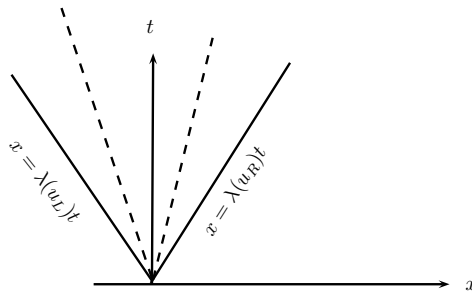


Figure 2.16 : cône des caractéristiques d'une onde de détente.

**Onde de détente** Une onde de détente centrée<sup>8</sup> est une onde simple pour un champ authentiquement non linéaire, pour lequel  $\xi = x/t$ . La solution a alors la forme suivante :

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si } x/t \leq \xi_1, \\ \mathbf{W}(\xi, u_L, u_R) & \text{si } \xi_1 \leq x/t \leq \xi_2, \\ \mathbf{u}_R & \text{si } x/t \geq \xi_2. \end{cases}$$

où  $\mathbf{u}_R$  et  $\mathbf{u}_L$  doivent être deux points sur la caractéristique tels que  $\lambda_k(\mathbf{u}_L) < \lambda_k(\mathbf{u}_R)$  ; cette condition est indispensable pour que les caractéristiques se répandent dans un cône quand  $t$  croît et que l'onde ait un sens physique (voir figure 2.17). Pour une onde de détente, la vitesse caractéristique coïncide avec  $\xi$  comme le montre l'équation (2.58). Cela entraîne que la limite à gauche de l'éventail couvert par une onde de détente est  $\xi_1 = \lambda_k(\mathbf{u}_L)$  et la limite à droite est  $\xi_2 = \lambda_k(\mathbf{u}_R)$ . L'onde de détente est solution de l'équation (2.1.5) ; elle est pour un intervalle de  $\xi$  de la forme  $[\xi_1, \xi_2]$ . On retrouve la condition sur le caractère monotone de la variation de  $\lambda_k$  pour que le dénominateur ne s'annule pas.

**Onde de choc** On appelle  $k$ -choc une discontinuité matérialisée par une courbe  $x = s(t)$  telle que la condition de Rankine-Hugoniot soit satisfaite :

$$\dot{s}(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) = f(\mathbf{u}_L) - f(\mathbf{u}_R),$$

8. Centered rarefaction wave en anglais.

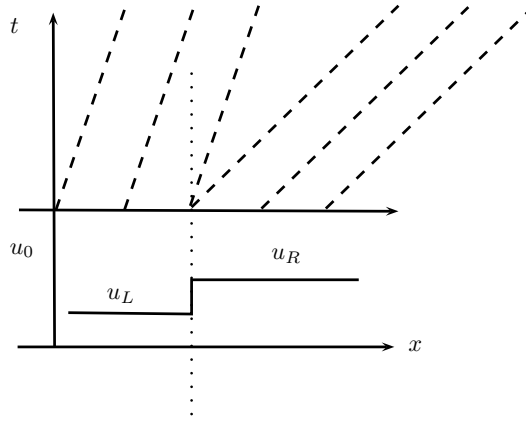


Figure 2.17 : onde de détente.

et telle que la *condition d'entropie* de Lax soit également vérifiée :

$$\lambda_k(\mathbf{u}_L) > \dot{s} > \lambda_k(\mathbf{u}_R),$$

impliquant que les caractéristiques se croisent au niveau de la discontinuité (voir figure 2.18), tandis que les autres caractéristiques doivent traverser la discontinuité sans s'y croiser, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} \lambda_j(\mathbf{u}_L) < \dot{s} \text{ et } \lambda_j(\mathbf{u}_R) < \dot{s} \text{ pour } j < k, \\ \lambda_j(\mathbf{u}_L) > \dot{s} \text{ et } \lambda_j(\mathbf{u}_R) > \dot{s} \text{ pour } j > k. \end{aligned}$$

Cette condition est correcte pour des problèmes strictement hyperboliques et des champs authentiquement non linéaires. Pareillement au cas de  $k$ -ondes, on peut montrer qu'il existe  $n$  familles de courbes dont n'importe quel point peut être relié à un point origine  $\mathbf{u}_L$  par un choc (Smoller, 1982, voir pp. 328–329).

**Onde de contact** Si un  $k$ -champ caractéristique est linéairement dégénéré ( $\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k \cdot \mathbf{w}_k = 0$ ) alors, par définition,  $\lambda_k$  est alors un  $k$ -invariant de Riemann :  $\lambda_k$  est constant le long de la caractéristique  $C_k$ . Le problème non linéaire se comporte comme un problème linéaire, c'est-à-dire une onde se propage sans déformation ni atténuation à une vitesse constante. Si l'état initial comporte une discontinuité, avec  $\mathbf{u}_L$  et  $\mathbf{u}_R$  sur la même courbe caractéristique, alors la solution n'est rien d'autre que la translation de cette discontinuité à la vitesse  $\lambda_k$  ; la courbe de choc (de Rankine-Hugoniot) coïncide alors avec la caractéristique. Il ne s'agit pas d'un vrai choc puisque la vitesse caractéristique est la même de part et d'autre de la discontinuité :  $s = \lambda_k(\mathbf{u}_L) = \lambda_k(\mathbf{u}_R)$ , ce qui implique qu'au niveau de la discontinuité, les courbes caractéristiques sont parallèles à l'onde dans le plan  $x - t$ .

♣ **Exemple.** – Un exemple de discontinuité de contact est donné par la diffusion d'un traceur dans un courant d'eau. Ce problème peut se modéliser en ajoutant une troisième équation aux équations de Saint-Venant. Soit par exemple  $\phi$  la concentration d'un traceur, qui vérifie l'équation d'advection :

$$\phi_t + u\phi_x = 0.$$

Les équations forment alors le système suivant :  $\mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}_x + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , avec :

$$\mathbf{U} = \{h, hu, h\phi\}, \mathbf{A} = \nabla \mathbf{f}, \mathbf{f} = \{hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh^2, uh\phi\}.$$



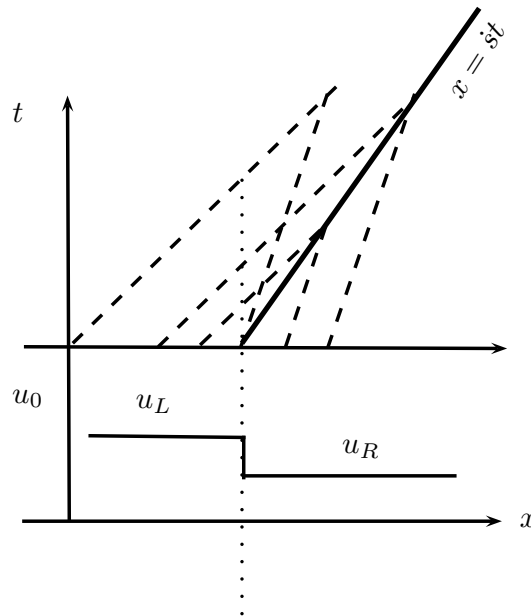


Figure 2.18 : onde de choc.

Il y a trois valeurs propres  $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$ ,  $\lambda_2 = u$ , et  $\lambda_3 = u + \sqrt{gh}$ . Le champ 2 associé à la valeur propre  $u$  est linéairement dégénéré (il s'agit d'un problème d'advection puisqu'il s'agit de la valeur propre associée à la troisième équation, donc le résultat est sans surprise<sup>9</sup>).

**Conditions aux limites.** – De même, si au lieu d'une frontière, on considère une discontinuité, les remarques précédentes peuvent être généralisées. On appelle  $\dot{s}$  la vitesse de la discontinuité et on admet qu'il existe un indice  $k$  pour lequel on a  $\lambda_k(u_R) < \dot{s} < \lambda_{k+1}(u_R)$ . Alors il faut  $n - k$  conditions aux limites sur le bord droit de la discontinuité. De même si on trouve un indice  $j$  tel que  $\lambda_j(u_L) < \dot{s} < \lambda_{j+1}(u_L)$ , alors il faut donner  $j$  conditions aux limites sur le bord gauche de la discontinuité. On doit avoir  $j = k - 1$ . En résumé, la solution admet une discontinuité  $(u_L, u_R, \dot{s})$  si on trouve un indice  $k$  tel que :

$$\lambda_k(u_R) < \dot{s} < \lambda_{k+1}(u_R) \text{ et } \lambda_{k-1}(u_L) < \dot{s} < \lambda_k(u_L), \quad (2.59)$$

ou bien encore sous une forme différente :

$$\boxed{\lambda_k(u_R) < \dot{s} < \lambda_k(u_L) \text{ et } \lambda_{k-1}(u_L) < \dot{s} < \lambda_{k+1}(u_R)}. \quad (2.60)$$

On appelle une telle discontinuité un *k-choc*.

À noter que si  $n = 1$ , on retombe sur le cas vu précédemment puisque  $\lambda = f'(u)$ . La condition de choc est alors  $f'(u_L) > \dot{s} > f'(u_R)$ .

**Solution générale du problème de Riemann** Le problème de Riemann est un problème aux conditions initiales de la forme :

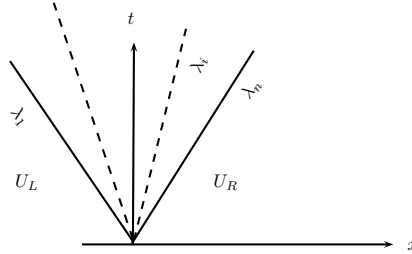
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0,$$

9. En général le scalaire  $\phi(x, t)$  est déformé lors du transport par advection car la vitesse de transport est  $u(x, t)$ , qui varie selon  $x$  et  $t$ . Ici on considère une *onde simple*, c'est-à-dire les variations de  $\mathbf{u}$  ne sont pas quelconques car  $\mathbf{u}$  doit suivre la courbe caractéristique associée à la valeur propre  $\lambda_2$

avec :

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On rappelle que le vecteur  $\mathbf{U}$  est de dimension  $n$ . On peut montrer que la solution consiste en  $n + 1$  états séparés par les  $n$  ondes associées à chaque valeur propre.



**Figure 2.19** : structure de la solution pour un problème de Riemann.

Pour les systèmes linéaires, les valeurs propres définissent des familles d'ondes de choc. Pour les systèmes non linéaires, différents types de solution sont possibles :

- ondes de choc : dans ce cas, on a différentes conditions qui s'appliquent : Rankine-Hugoniot  $\dot{s} [\mathbf{U}]_{x=s(t)} = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R))$  et condition d'entropie  $\lambda_i(\mathbf{U}_L) > \dot{s}_i > \lambda_i(\mathbf{U}_R)$  ;
- ondes de contact : condition de Rankine-Hugoniot, invariants de Riemann, condition  $\lambda_i(\mathbf{U}_L) = \lambda_i(\mathbf{U}_R)$  ;
- ondes de détente : invariants de Riemann, divergence des caractéristiques  $\lambda_i(\mathbf{U}_L) < \lambda_i(\mathbf{U}_R)$ .

En pratique, on se donne un état à gauche  $\mathbf{u}_L$  et on se demande quels sont les états à droite  $\mathbf{u}_R$  qui peut être relié par un  $k$ -choc. On réitère la question pour  $k$  compris entre 1 et  $n$ . On fait de même pour les  $k$ -ondes simples et, si nécessaire, pour les discontinuités de contact si des champs sont dégénérés. La réponse est contenue dans les théorèmes énoncés dans les paragraphes précédents : on peut trouver le lieu des points qui sont reliés à  $\mathbf{u}_L$  par des  $k$ -ondes simples et  $k$ -chocs, ce sont des courbes qu'on notera ici  $S_k$  et  $R_k$ . Quand on les trace dans un espace  $\mathbb{R}^n$ , on obtient un réseau de courbes d'état tels que, par exemple  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_L = R_1(\mathbf{v}_L, \mathbf{u}_L)$ .

On se fixe  $\mathbf{u}_L$  et on admet que  $\mathbf{u}_R$  varie. Si  $\mathbf{u}_R$  est sur une des courbes précédemment, le problème de Riemann est résolu immédiatement. Si  $\mathbf{u}_R$  est dans l'un des secteurs découpés par le réseau de courbes, alors on procède de la manière suivante. Les courbes précédents peuvent servir à définir un maillage curviligne de l'espace.

### Stratégie de résolution du problème de Riemann

Pour aboutir à une solution analytique exacte d'un problème de Riemann pour des conditions initiales quelconques, on doit suivre le raisonnement suivant :

1. Déterminer si chacune des deux vagues est une onde de choc ou de détente, éventuellement en utilisant la condition d'entropie.
2. Déterminer l'état intermédiaire  $q_*$  entre les deux ondes.
3. Déterminer la structure de la solution pour toute onde de détente.

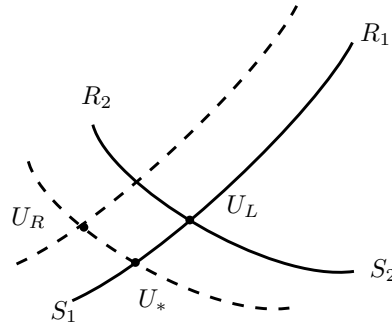


Figure 2.20 : courbes d'état.

### 2.1.6 Quelques solutions analytiques au problème Riemann

Cette détermination de la solution analytique par résolution du problème de Riemann avec recherche des ondes de choc et de détente peut être étendue à d'autres problèmes, notamment des problèmes avec des termes sources [comme un fond plat en marche d'escalier (Alcrudo & Benkhaldoun, 2001; Ostapenko, 2003a,b)]. Il faut noter que la résolution est rendue possible car les problèmes sont auto-similaires (ils dépendent en fait du rapport  $x/t$ ) ; on peut montrer que pour des fonds de pente non uniforme, il n'y a pas d'ondes simples qui soient solutions des équations de Saint Venant (Karelsky *et al.*, 2000b). On peut citer :

- Stoker (1957) a étudié l'onde de rupture d'un barrage sur fond sec ou mouillé. Dans le cas d'un fond mouillé la solution est obtenue graphiquement ;
- Dressler (1958) a proposé une méthode de calcul analytique pour une rupture de barrage sur un fond incliné et de volume fini. Le même problème a été étudié de nouveau par Mangeney *et al.* (2000) et (Karelsky *et al.*, 2000a) ;
- Wu *et al.* (1999) a complété la solution obtenue par Stoker (1957) pour l'onde de rupture sur fond mouillée ;
- Ancy *et al.* (2008) ont obtenu une solution pour la rupture de barrage d'un volume fini sur une pente tandis que Hogg (2006) a étudié le lâcher d'un volume fini de fluide sur un fond horizontal ;
- Alcrudo & Benkhaldoun (2001); Ostapenko (2003a,b) ont étudié le problème de Riemann dans le cas d'un fond avec un décrochement (en marche d'escalier).

### 2.1.7 Solution des équations avec un terme source

Considérons les équations de Saint-Venant avec un terme source  $F(x, t)$  :

$$\partial_t h + \partial_x(uh) = 0, \quad (2.61)$$

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_x h = F. \quad (2.62)$$

L'existence d'un terme source ne modifie pas l'hyperbolicité du problème. On peut donc transformer ce système d'équations comme précédemment en faisant un changement de variables  $(u, h) \rightarrow (r, s)$ , où  $r = u + 2c$  et  $s = u - 2c$  sont les deux invariants de Riemann, avec ici  $c = \sqrt{gh}$  comme précédemment. Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\partial_t r + (u + c)\partial_x r = F,$$

$$\partial_t s + (u - c)\partial_x s = F.$$

Soit encore après exprimé  $u \pm c$  en fonction des variables  $r$  et  $s$

$$\partial_t r + \frac{1}{4}(3r + s)\partial_x r = F,$$

$$\partial_t s + \frac{1}{4}(3s + r)\partial_x s = F.$$

Examinons s'il est possible d'avoir des ondes simples, c'est-à-dire des ondes pour lesquelles une des deux équations est identiquement satisfaite (i.e., si on considère l'équation de  $r$ , elle doit être valable quelle que soit la valeur de  $s$ ). Karelsky *et al.* (2000b) montrent que la condition d'existence de telles ondes est que  $\partial_x F = 0$ . Si la première équation est satisfaite quelle que soit  $s$ , cela oblige à ce que le terme  $\partial_x r = 0$ ; en revanche, si  $F \neq 0$ , on ne peut pas avoir  $\partial_t r = 0$ , d'où  $r = r(t)$ . En différentiant l'équation par rapport à  $x$ , on trouve que la condition nécessaire est bien  $\partial_x F = 0$  puisque  $\partial_x \partial_t r = 0$ .

Considérons le cas  $F(t) = m$  (par exemple  $m = g \sin \theta$ ). On appelle *onde de Riemann progressive*<sup>10</sup> une onde pour laquelle l'équation  $\partial_t r + \frac{1}{4}(3r + s)\partial_x r = F$  est vérifiée quelle que soit la valeur de  $s$ . De même, on appelle *onde de Riemann régressive*<sup>11</sup> une onde pour laquelle l'équation  $\partial_t s + \frac{1}{4}(3s + r)\partial_x s = F$  est vérifiée quelle que soit la valeur de  $r$ .

Considérons tout d'abord le cas de l'onde progressive. Pour que  $\partial_t r + \frac{1}{4}(3r + s)\partial_x r = F$  soit satisfaite quelle que soit la valeur de  $s$ , cela veut impliquer que  $r - mt$  doit être constant. Posons alors  $r - mt = r_0$ . En reportant la valeur de  $r$  dans la seconde équation on tire que

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{4}(3s + r_0 + mt)\frac{\partial s}{\partial x} = F.$$

Sur la seconde caractéristique  $C_s$  définie par  $dx_s/dt = \frac{1}{4}(3s + r_0 + mt)$ , on a  $ds/dt = m$ . Par intégration, on tire donc  $s(x_s(t), t) = mt + s(x_s(0), 0)$ . Retournant à la seconde courbe caractéristique  $C_s$ , on reporte la valeur de  $s$  ainsi déterminée :

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{1}{4}(3s + r) = mt + \frac{1}{4}(r_0 + 3s(x_s(0), 0)),$$

dont l'intégration donne :

$$x_s(t) = m\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}(r_0 + 3s(x_s(0), 0))t + x_s(0).$$

Les courbes  $C_s$  sont des droites si  $m = 0$  et des paraboles si  $m \neq 0$  dans le plan  $x - t$ . On fait de même pour les équations donnant la courbe caractéristique  $C_r$  le long de laquelle  $s - mt$  est constant. On trouve :

$$x_r(t) = m\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}(s_0 + 3r(x_r(0), 0))t + x_r(0).$$

On peut caractériser une  $s$ -onde ( $s - mt = s_0$  constant le long de la caractéristique  $C_r$ ) selon la variation de la variable  $s$  :

- si  $\partial_x s > 0$ , alors on  $\partial_x u = \frac{1}{2}\partial_s > 0$ , donc  $\partial_x h < 0$  ( $h$  décroît) et on parle donc d'onde de détente/raréfaction. Dans le plan  $x - t$ , les caractéristiques  $C_r$  sont divergentes puisque  $\partial_x x_r = \frac{1}{4}\partial_x s > 0$ ;
- si  $\partial_x s < 0$ ,  $h$  croît et on parle d'onde de compression et les caractéristiques  $C_r$  sont convergentes. Ces caractéristiques aboutissent à la formation d'un choc ;

---

10. *forward Riemann wave*

11. *backward Riemann wave*

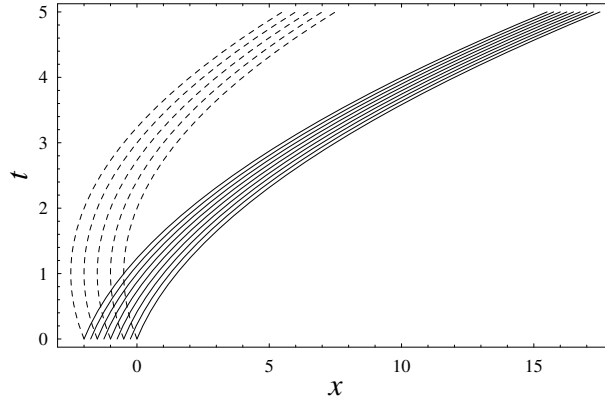
– si  $\partial_x s = 0$ , les caractéristiques  $C_r$  sont parallèles.

On peut faire de même avec  $C_r$  et on obtient, au signe près, le même tableau.

La figure 2.21 reporte les  $r$  et  $s$ -caractéristiques dans le cas où les conditions initiales sont :

- pour  $x \leq 0$ ,  $u = 0$  et  $h = h_0$  ;
- pour  $x > 0$ ,  $u = 0$  et  $h = 0$ .

On note que les  $s$ -ondes sont des ondes de détente alors que les  $r$ -ondes aboutissent à la formation d'un choc.



**Figure 2.21 :** Courbes caractéristiques  $s$ -caractéristiques (trait discontinu) et  $r$ -caractéristiques (ligne continue).

Contrairement aux ondes de détente, les conditions de choc sont identiques<sup>12</sup> aux équations de Saint-Venant sans choc (Karelsky *et al.*, 2000b). On peut alors écrire les conditions de saut :

$$\begin{aligned}\dot{s}[[h]] &= [[hu]], \\ \dot{s}[[hu]] &= [[hu^2 + gh^2/2]],\end{aligned}$$

avec  $\dot{s}$  la vitesse de propagation du choc. Si l'on écrit ces relations dans un repère lié à l'onde de choc, alors on a  $v = u - \dot{s}$  :

$$\begin{aligned}h_1 v_1 &= h_2 v_2, \\ h_1 v_1^2 + gh_1^2/2 &= h_2 v_2^2 + gh_2^2/2,\end{aligned}$$

où les indices 1 et 2 renvoient à l'état de part et d'autre du choc. La vitesse du choc est :  $\dot{s} = [hu]/[h]$ . Il y a deux types de choc :

- Le 1-choc pour lequel on a les inégalités :  $\dot{s} < u_L - c_L$  et  $u_R - c_R < \dot{s} < u_R + c_R$ . Soit encore  $v_L > v_R$  : le flux de matière se fait de la gauche vers la droite si  $v_L > 0$  (*stricto sensu*, si l'on se déplace à la même vitesse que le front, les perturbations animées d'une vitesse  $v_L$  quand elles sont à gauche du front se déplacent plus rapidement que celles à droite ; elles peuvent venir rattraper le front) ;
- Le 2-choc pour lequel on a les inégalités :  $\dot{s} > u_R + c_R$  et  $u_L - c_L < \dot{s} < u_L + c_L$ . Soit encore  $v_R > v_L$  : le flux de matière se fait de la droite vers la gauche si  $v_L > 0$ .

<sup>12</sup>. Les courbes de Hugoniot dans l'espace d'état sont identiques, mais les trajectoires dans un diagramme  $x - t$  sont différentes.

### 2.1.8 Méthode de l'hodographe

#### Principe

L'idée est d'échanger le rôle de la variable dépendante et de la variable indépendante. Par exemple, si on a un système d'équations aux dérivées partielles impliquant les variables dépendantes  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$ , on peut transformer ce système en système d'équations pour  $x(u, v)$  et  $y(u, v)$ . Par exemple, pour ce type de problème à deux variables, on pose (Kevorkian, 2000, voir pp. 462-476)

$$\begin{aligned}x &= x(u, v), \\y &= y(u, v),\end{aligned}$$

ce qui en différentiant par rapport à  $x$ , donc

$$\begin{aligned}1 &= x_u u_x + x_v v_x, \\0 &= y_u u_x + y_v v_x,\end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer  $u_x$  et  $v_x$

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{y_v}{J}, \\v_x &= -\frac{y_u}{J},\end{aligned}$$

avec  $J = x_u y_v - x_v y_u$  le jacobien. En faisant de même avec  $y$ , on obtient

$$\begin{aligned}u_y &= -\frac{x_v}{J}, \\v_y &= \frac{x_u}{J}.\end{aligned}$$

Tant que le jacobien est non nul, on peut faire l'inversion. Notons que le jacobien de la transformation inverse  $\tilde{J} = u_x v_y - u_y v_x$  est non nul si  $J$  est non nul. La condition  $J \neq 0$  exclut donc le cas où soit  $u$ , soit  $v$  est constant ainsi que le cas où  $u$  est une fonction univoque de  $v$ ; le dernier cas correspond au cas de l'onde simple (voir § 2.1.8).

♣ **Exemple.** – Considérons le système d'équations quasi-linéaires

$$h_t + a(h, u)h_x + b(h, u)u_x = 0, \quad (2.63)$$

$$u_t + c(h, u)h_x + d(h, u)u_x = 0. \quad (2.64)$$

Le cas  $a(h, u) = u$ ,  $b(h, u) = h$ ,  $c(h, u) = 1$ , et  $d(h, u) = u$  correspond aux équations de Saint-Venant sous forme sans dimension. Le système non linéaire (2.63–2.64) peut être transformé en un système linéaire en appliquant la méthode de l'hodographe. En notant  $J = x_h t_u - x_u t_h$ , on fait le changement de variable

$$h_x = \frac{t_u}{J}, u_x = -\frac{t_h}{J} h_t = -\frac{x_u}{J}, \text{ et } u_t = \frac{x_h}{J}.$$

On obtient alors un système linéaire

$$\begin{aligned}-x_u + a(h, u)t_u - b(h, u)t_h &= 0, \\x_h + c(h, u)t_u - d(h, u)t_h &= 0.\end{aligned}$$

Cela peut s'écrire sous une forme d'un système d'évolution d'un système physique

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -d \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial h} + \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u} = 0,$$

avec  $\mathbf{V} = (x, t)$ . Après inversion de la première matrice et en supposant  $b \neq 0$ , on déduit

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial h} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u} = 0, \text{ avec } \mathbf{B} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} d & bc - ad \\ 1 & -a \end{bmatrix}.$$

Examinons les courbes caractéristiques dans le plan physique  $x - t$  et dans le plan de l'hodographe. Comme cela est détaillé au § 2.1.1, on cherche à écrire le système couplé (2.63–2.64) sous la forme d'équations différentielles ordinaires. Pour cela, on commence par écrire sous forme matricielle le système

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = 0, \text{ avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

et  $\mathbf{U} = (h, u)$ . Les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont notées  $\lambda_{1,2}$  (avec  $\lambda_1 > \lambda_2$ ) et sont les solutions de  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ . Les valeurs propres à gauche de  $\mathbf{A}$  sont notées  $\mathbf{v}_{1,2}$  et celles à droite  $\mathbf{w}_{1,2}$ . On a [voir équations (2.14–2.15)]

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2c}{d - a + \sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a - d + \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2c}{d - a - \sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a - d - \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2},$$

avec  $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$ . Les courbes caractéristiques dans le plan physique sont les intégrales premières de  $dx/dt = \lambda_i$ , avec  $i = 1, 2$ . Dans le plan de l'hodographe, les deux courbes caractéristiques sont les intégrales premières de  $du/dh = \mu_i$  avec  $\mu_i$  les racines de  $\det(\mathbf{B} - \mu \mathbf{1}) = 0$ ,

$$\mu_1 = \frac{d - a + \sqrt{\Delta}}{2b} \text{ et } \mu_2 = \frac{d - a - \sqrt{\Delta}}{2b}.$$

On note qu'on a les relations suivantes

$$\mu_2 = \frac{d - \lambda_1}{b} \text{ et } \mu_1 = \frac{d - \lambda_2}{b},$$

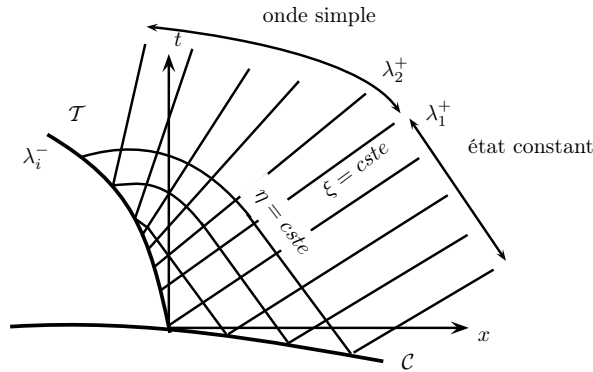
ce qui montre que les caractéristiques sont reliées entre elles : la 1-caractéristique du plan physique est reliée à la 2-caractéristique du plan de l'hodographe (et réciproquement).

### Onde simple

Pour les équations homogènes, un cas important où la méthode de l'hodographe ne s'applique pas (car  $J = 0$ ) est celui de l'*onde simple* (Courant & Friedrich, 1948). Ce cas se rencontre lorsque les fonctions  $u$  et  $v$  sont liées entre elles. Un résultat essentiel est qu'au voisinage de tout état constant (un domaine de l'espace  $x - t$  où à la fois  $u$  et  $v$  sont constantes), alors il existe un domaine où nécessairement on a une onde simple, c'est-à-dire une relation fonctionnelle entre  $u$  et  $v$  (par exemple de la forme  $v = f(u)$ ). Voici les autres caractéristiques des ondes simples

- une des deux familles de caractéristiques est constituée de droites dans le plan  $x - t$  (par exemple, la famille  $C_+$  d'équation  $dx/dt = \lambda_+^i$  sur la figure 2.22, correspondant à  $\xi = cste$ );

- l'autre famille est une courbe quelconque ;
- dans le plan de l'hodographe, une onde simple est une courbe unique puisque  $u$  et  $v$  sont liées entre elles.



**Figure 2.22** : onde simple générée par un état constant le long d'un arc spatial.

En effet, considérons un état constant  $\mathcal{D}$  (par exemple, un fluide en écoulement permanent uniforme ou bien au repos) délimité par un arc (spatial)  $\mathcal{C}$ . Les caractéristiques dans le plan physique  $x - t$  sont des droites<sup>13</sup> car les valeurs propres  $\lambda_+(u, v)$  et  $\lambda_-(u, v)$  sont constantes. Considérons un arc temporel  $\mathcal{T}$  coupant l'arc  $\mathcal{C}$ ; les familles de caractéristiques émanent donc de part et d'autre de  $\mathcal{T}$ . Sur la figure 2.22, on considère que la famille  $C_-$  d'équation  $dx/dt = \lambda_-$  (correspondant à  $\eta = cste$ ) pointent vers la gauche, alors que la famille  $C_+$  d'équation  $dx/dt = \lambda_+$  (correspondant à  $\xi = cste$ ) pointent vers la droite. Il s'ensuit que, puisqu'elle pointent vers la gauche, les courbes  $C_-$  propagent l'information de la zone  $\mathcal{D}$  vers l'arc  $\mathcal{T}$ . Le long de chaque caractéristique de cette famille, le second invariant de Riemann  $r_2(u, v)$  est constant et la constante est fournie par la valeur prise par  $r_2$  dans le domaine  $\mathcal{D}$ ; de la relation  $r_2(u, v) = cste$ , on peut tirer la relation qui lie  $u$  et  $v$ , une relation qui peut s'écrire  $v = f(u)$  (ou bien  $f(u, v) = 0$ ). Par ailleurs, la seconde famille de courbes  $C_+$ , qui pointent vers la droite, est constituée de droites dans le plan  $x - t$ . Le long d'une caractéristique  $C_+$ , on a  $r_1(u, v) = cste$ ; comme la caractéristique émane de  $\mathcal{T}$ , la valeur de la constante est fixée par la condition aux limites imposées sur cet arc. La caractéristique traverse une zone couverte par la famille  $C_-$ , donc en tout point on a une relation de la forme  $v = f(u)$ , donc puisque  $r_1(u, f(u)) = cste$ ,  $u$  doit être constant le long de  $C_-$ , donc  $\lambda(u, f(u))$  l'est également et la caractéristique  $C_+$  est une droite. Il s'ensuit qu'à la fois  $u$  et  $v$  se propagent en gardant une valeur constante le long de  $C_+$  et que la valeur constante est imposée par la condition aux limites sur  $\mathcal{T}$ .

Les conditions d'existence d'un domaine « onde simple » apparaissent assez aisément à la lecture de la figure 2.22 :

- il faut que la famille  $C_-$  pointe vers la gauche, donc  $\mathcal{T}$  doit être un arc temporel ;
- il faut également que les valeurs de  $\lambda^+$  décroissent quand  $\xi$  croît de telle sorte que les caractéristiques soient en « éventail ». Si cela n'est pas le cas, les caractéristiques (qui sont des droites) se recoupent nécessairement, ce qui implique qu'une solution continue n'est pas possible et qu'un choc apparaît.

Ces deux propriétés sont fixées par les conditions imposées sur  $\mathcal{T}$ .

13. l'état est représenté par un point dans le plan de l'hodographe.



Dans le cas particulier où l'on fixe une variable (par exemple  $u$ ) sur les arcs  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} u &= U_0 = \text{cste} \text{ sur l'arc } \mathcal{C}, \\ u &= U_1 = \text{cste} \neq U_0 \text{ sur l'arc } \mathcal{T}, \end{aligned}$$

(outre la condition pour  $v$  :  $v = V_0 = \text{cste}$  sur  $\mathcal{C}$ ) et en admettant que les caractéristiques  $C_+$  sont en éventail (donc elles ne se croisent pas)

$$\lambda_+(U_0, V_0) > \lambda_+(U_1, f(U_1)),$$

alors, on observe un domaine d'écoulement appelé « onde simple centrée » comme l'illustre la figure 2.23.

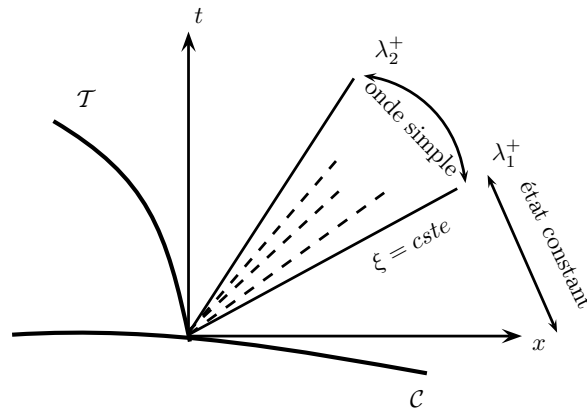


Figure 2.23 : onde simple centrée.

## Exercices

---

 ⚡

**Exercice 2.1** On veut résoudre sur l'intervalle  $[0, 1]$  l'équation :

$$\epsilon y'' + y' + y = 0,$$

avec comme conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y(1) = 1$ . Montrer qu'il n'existe pas de développement asymptotique régulier de la solution à cette équation différentielle. Devinez-vous la raison pour laquelle la méthode aux perturbations ne marche pas ici ?

---

 ⚡

**Exercice 2.2** Considérons le problème aux conditions initiales

$$t \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

avec  $u(x, 0) = f(x)$  pour  $x > 0$ . Quel est le type de cette équation. La résoudre après avoir déterminé l'équation caractéristique associée.

---

 ⚡

**Exercice 2.3** Une fonction  $u(x, t)$  décroît comme

$$\frac{du}{dt} = -k,$$

le long d'une courbe  $x = x_s(t)$  du plan  $x - t$ . Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $u$ . Inversement, montrer que toute équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = b(u, x, t),$$

peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle ordinaire

$$\frac{du}{dt} = g$$

le long d'une courbe dont on précisera l'équation.

---

 ⚡

**Exercice 2.4** L'équation d'Euler-Darboux s'écrit

$$u_{xy} + \frac{au_x - bu_y}{x - y} = 0.$$

Caractériser cette équation.

---

 ⚡

**Exercice 2.5** L'équation de Helmholtz s'écrit

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0.$$

Caractériser cette équation.

---

 ⚡

**Exercice 2.6** L'équation de Klein-Gordon est une variante de l'équation de Schrödinger, qui sert en physique à décrire l'évolution d'une particule. Elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u = 0.$$

Quel est le type de cette équation ? Rechercher des solutions périodiques sous la forme  $u(x, t) = a(k) \exp(ikx + \lambda(k)t)$ , avec  $a$  l'amplitude de l'onde,  $\lambda$  et  $k$  sont les modes. Déterminer le mode  $\lambda$  ? Est-ce que la solution est stable ?

---

**Exercice 2.7** Les équations de Saint-Venant s'écrivent pour un écoulement non frottant le long d'une surface horizontale ⊠

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.66)$$

avec  $\bar{u}(x, t)$  la vitesse moyenne de l'eau,  $h(x, t)$  la profondeur d'eau,  $g$  la gravité. Une onde se propage à la vitesse constante  $c = \sqrt{gh_0}$  avec  $h_0$  une hauteur caractéristique. Comment s'écrivent les équations dans le repère en translation liée à l'onde ? Est-ce que le système d'équations (2.65–2.66) admet des solutions de la forme  $h = H(x - \omega t)$  et  $\bar{u} = U(x - \omega t)$  ? Est-ce qu'il admet des solutions sous la forme  $h = t^\alpha H(x/t)$  et  $\bar{u} = t^\beta U(x/t)$  ?

---

**Exercice 2.8** Considérons l'équation : ⊠

$$\dot{y} = -\frac{y(y^2 - x)}{x^2},$$

avec pour condition initiale  $y(1) = 0$ . On demande :

- quel est le type de cette équation ?
- la résoudre numériquement ;
- mettre l'équation sous la forme  $A dx + B dy = 0$ . Est-ce une différentielle exacte ?
- multipliez l'équation ci-dessus par  $2/(2xy^3 - x^2y)$ . Est-ce une différentielle exacte ?
- intégrez l'équation et la comparer avec la solution numérique.

---

**Exercice 2.9** L'équation de Boussinesq sert à calculer le niveau d'une aquifère dans un sol ; par exemple, comme le montre la figure 2.24, un écoulement d'eau dans un canal, où la hauteur d'eau est variable, provoque un écoulement souterrain. Pour un problème unidimensionnel, l'équation de Boussinesq s'écrit ⊠

$$\theta \frac{\partial h}{\partial t} = K_s \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

avec  $\theta$  la porosité du sol,  $K_s$  la conductivité hydraulique,  $h$  la hauteur de la nappe. Les conditions aux limites sont

$$h(0, t) = h_0(t),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, t) = 0.$$

La condition initiale est  $h(x, 0) = 0$  pour  $x \geq 0$ . On demande le travail suivant :

- mettre l'équation de Boussinesq sous une forme adimensionnelle ;
- rechercher sous quelle forme s'écrivent les solutions auto-similaires lorsque  $h_0(t) = At^n$  (on recherche par exemple les solutions sous la forme  $h = t^\alpha H(\xi)$  avec  $\xi = xt^{-\beta}$ ) ;
- montrer que le problème différentiel initial se transforme en un problème différentiel ordinaire en  $H$  ;
- on considère le cas où le niveau dans le canal est constant  $h_0 = A$  ( $n = 0$ ). Montrer que l'équation différentielle régissant  $H$  peut se ramener à une équation quasi-linéaire du premier ordre en posant le changement de variable  $z = H/\xi^2$  et  $p = H'/\xi$  ;
- écrire cette équation sous la forme  $dp/dz = f(p, z)$  avec  $f$  une fonction à déterminer ;

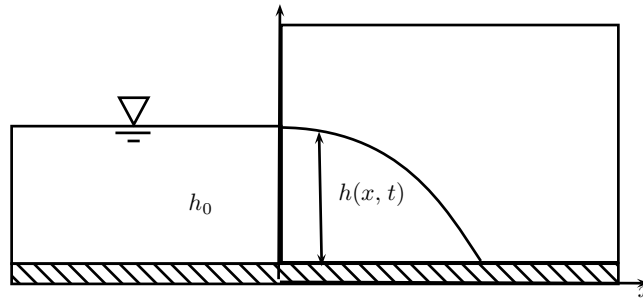


Figure 2.24 : pénétration et propagation d'une nappe aquifère dans un sol.

- montrer qu'il existe un front de propagation, c'est-à-dire un point  $x_f$  où  $h(x_f) = 0$  et  $h = 0$  au-delà.

⬡

**Exercice 2.10** Déterminer la fonction  $y(x)$  qui minimise la fonctionnelle

$$J[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx,$$

sachant que  $y(0) = 0$  et  $y(1) = 1$ .

⬡

**Exercice 2.11** Résoudre le problème aux conditions initiales :

$$u_x + u_t = 0,$$

pour  $x \in \mathbb{R}$  et sachant que  $u(x, 0) = \cos x$ .

✱

**Exercice 2.12** Résoudre analytiquement, puis de façon approchée à l'ordre  $\epsilon$  l'équation

$$\frac{dy(x)}{dx} + \epsilon y(x) = 1,$$

avec pour condition aux limites  $y(0) = 1$  et où  $\epsilon = 0,01$  est un petit paramètre.

↪ Réponse. la solution analytique est

$$y(x) = \frac{e^{-x\epsilon} (\epsilon + e^{x\epsilon} - 1)}{\epsilon}.$$

Si maintenant on fait l'approximation suivante:  $y = y_0 + \epsilon y_1 + \dots$ . À l'ordre  $\epsilon^0$ , on a à résoudre l'équation très simple  $y_0' = 1$  avec  $y_0(0) = 1$ , soit  $y_0(x) = x + 1$ . À l'ordre  $\epsilon^1$ , on doit résoudre  $y_1' + y_0 = 0$  avec  $y_1(0) = 0$ , soit  $y_1(x) = -x - \frac{1}{2}x^2$ .

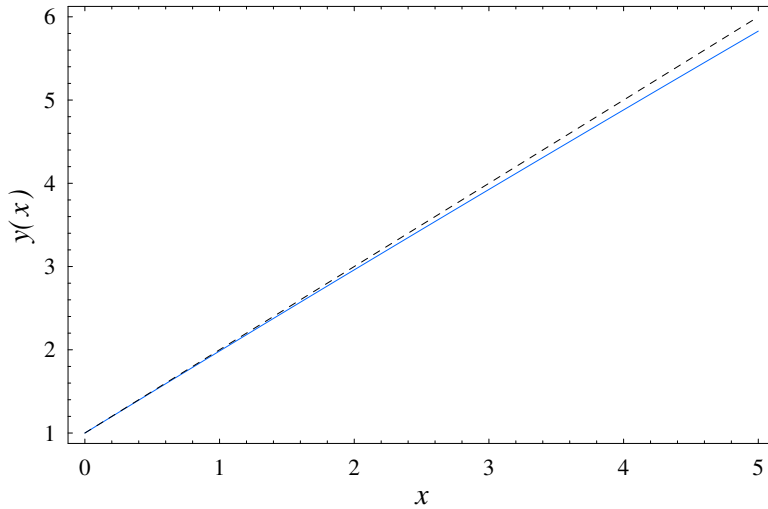
Comme le montre la figure 2.25, l'écart entre la solution théorique et la solution approchée est très faible dès l'ordre  $\epsilon^0$ . □

✱

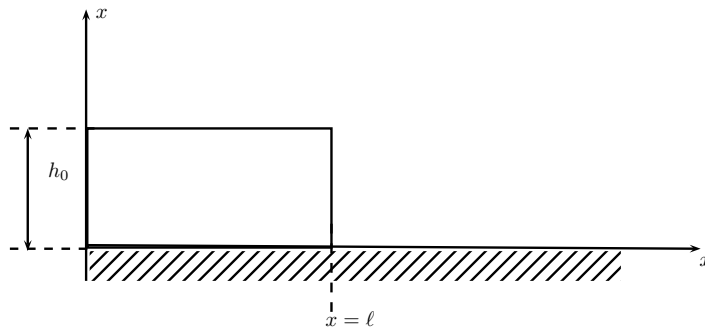
**Exercice 2.13** Résoudre l'équation de Huppert, qui représente le mouvement d'un fluide très visqueux sur un plan incliné :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (2.67)$$

Notons que cette équation est obtenue à partir des équations de Navier-Stokes en supposant que les termes inertiels sont négligeables et en utilisant l'approximation d'onde longue (Huppert, 1982). Les conditions aux limites sont données à la figure 2.26 : il s'agit du lâcher d'un volume fini de fluide.



**Figure 2.25 :** comparaison entre la solution théorique et la solution approchée à l'ordre  $\epsilon^0$   $y = x + 1$  (trait à tiret) sur le domaine  $0 \leq x \leq 5$ .



**Figure 2.26 :** configuration initiale de l'écoulement.

$\rightsquigarrow$  Réponse. Il s'agit d'une équation non linéaire de convection de la forme  $\partial_t h + c(h)\partial_x h = 0$  avec  $c(h) = \rho g h^2 \sin \theta / \mu$  ou bien encore  $\partial_t h + \partial_x f(h) = 0$  avec  $f(h) = \rho g h^3 \sin \theta / (3\mu)$ .

Cette équation se résout assez simplement avec les conditions aux limites. Il s'agit en effet d'un double problème de Riemann, un premier en  $x = 0$  et un autre en  $x = \ell$ . Il faut donc chercher les solutions faibles (choc) et les ondes de détente associées à cette équation. Pour les solutions faibles présentant une discontinuité en  $x = s(t)$ , on a une relation qui donne  $h$  de part et d'autre de  $x = s$

$$\dot{s}[[h]] = [[f(h)]] \quad (2.68)$$

en fonction de  $\dot{s}$  la vitesse de la discontinuité. Les ondes de détente sont des solutions auto-similaires de la forme  $\mathcal{H}(\xi)$  avec  $\xi = x/t$ . Ici, en substituant  $h(x, t)$  par  $\mathcal{H}(\xi)$  dans (2.67), on obtient

$$\mathcal{H}'(-\xi + c(\mathcal{H})) = 0,$$

ce qui veut dire qu'on a soit  $\mathcal{H}' = 0$ , soit

$$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta}} \xi. \quad (2.69)$$

Notons que mise sous forme caractéristique, l'équation (2.67) s'écrit

$$\frac{dh}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = c(h). \quad (2.70)$$

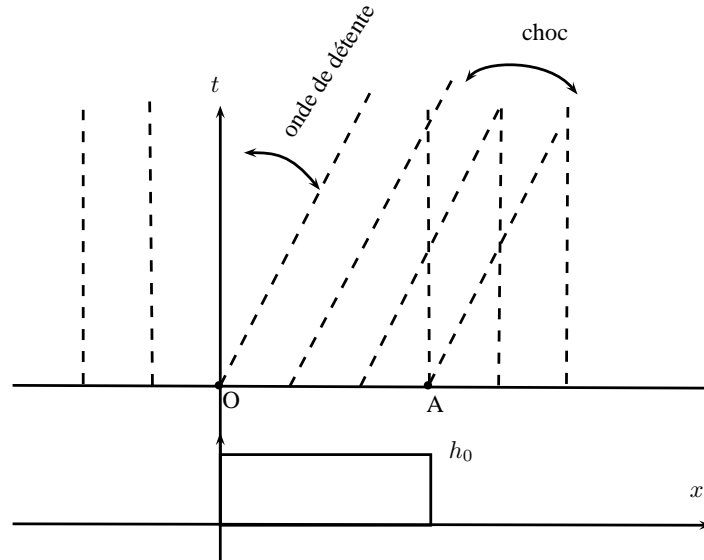


Figure 2.27 : caractéristiques.

Il s'ensuit qu'initialement les caractéristiques sont des droites, dont la pente est donnée par  $c(h_0)$  comme le montre la figure 2.27.

Dans les tout premiers temps, il se développe

- à droite un choc. D'après (2.33), on a

$$\begin{aligned}\dot{s}_0[[h]] &= [[f(h)]], \\ \dot{s}_0(0 - h_0) &= f(0) - f(h_0), \\ \dot{s}_0 &= \frac{f(h_0)}{h_0} = \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{3\mu}\end{aligned}$$

donc la caractéristique émanant de A a pour équation

$$x = \ell + \dot{s}_0 t = \ell + \frac{1}{3} \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{\mu} t.$$

- à gauche une onde de détente. La solution est donnée par (2.58). Du point O, il part un faisceau en éventail de courbes caractéristiques d'équation

$$x = mt,$$

avec  $m$  un réel variant entre 0 et  $m_0 = \rho g h_0^2 \sin \theta / \mu$ .

Les deux caractéristiques  $x = m_0 t$  et  $x = \ell + \dot{s}_0 t$  se rencontrent au point B au temps  $t_B$

$$t_B = \frac{\ell}{m_0 - \dot{s}_0} = \frac{3}{2} \frac{\mu \ell}{\rho g h_0^2 \sin \theta}.$$

L'abscisse de B sera

$$x_B = m_0 t_B = \frac{3}{2} \ell.$$

La solution aux temps courts ( $0 \leq t \leq t_B$ ) est donc

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq m_0 t, \quad (2.71)$$

$$h(x, t) = h_0 \text{ pour } m_0 t \leq x \leq \ell + \dot{s}_0 t \quad (2.72)$$

$$h(x, t) = 0 \text{ pour } x > s(t) = \ell + \dot{s}_0 t \text{ ou } x < 0. \quad (2.73)$$

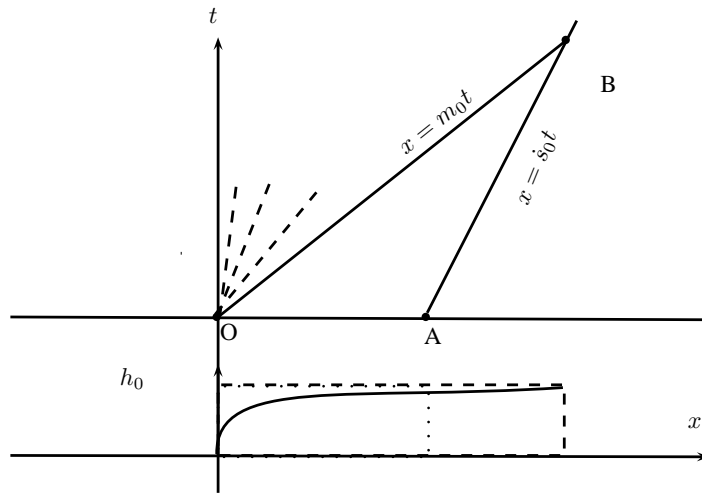


Figure 2.28 : rencontre des deux caractéristiques.

On vérifie par intégration que le volume est bien conservé.

Pour  $t > t_B$ , la hauteur à droite de  $x = s(t)$  est toujours 0, mais à gauche la hauteur a diminué; elle vaut d'après (2.67)

$$h_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{s}{t}}$$

d'où l'on déduit la nouvelle vitesse de choc

$$\begin{aligned} \dot{s}[[h]] &= [[f(h)]], \\ \dot{s}(0 - h_s) &= f(0) - f(h_s), \\ \dot{s} &= \frac{f(h_s)}{h_s} = \frac{\rho g h_s^2 \sin \theta}{3\mu} = \frac{1}{3} \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

En intégrant cette équation on trouve que la caractéristique associée au choc est

$$s(t) = x_B \left( \frac{t}{t_B} \right)^{1/3} = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3} \frac{\rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{\mu} t \right)^{1/3} = At^{1/3},$$

avec  $A = \left( \frac{9}{4} \frac{\rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{\mu} \right)^{1/3}$ . La solution aux temps longs ( $t > t_B$ ) est donc

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq At^{1/3}, \quad (2.74)$$

$$h(x, t) = 0 \text{ pour } x > s(t) = At^{1/3} \text{ ou } x < 0. \quad (2.75)$$

**Exercice 2.14** On cherche à résoudre les équations (2.61) de Saint Venant avec terme source et pour une rupture de barrage, qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(uh) &= 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x h &= F(x, t), \end{aligned}$$

avec ici l'hypothèse  $F = m$ . On considère le problème aux valeurs initiales :

$$\mathbf{U}_L : (h_L, u_L) = (h_0, 0) \text{ et } \mathbf{U}_R : (h_R, u_R) = (0, 0).$$



Il s'agit d'un cas un peu particulier parce que l'état à droite est « vide ». Le vide<sup>14</sup> n'ayant pas d'équation d'état, on peut considérer que la vitesse n'y est pas définie et donc que l'équation  $u_R = 0$  est purement formelle. Montrer que la solution ne se compose que d'une courbe de 1-détente et que les ondes de choc ne sont possibles (en suivant pas à pas la stratégie définie plus haut).

↪ Réponse.

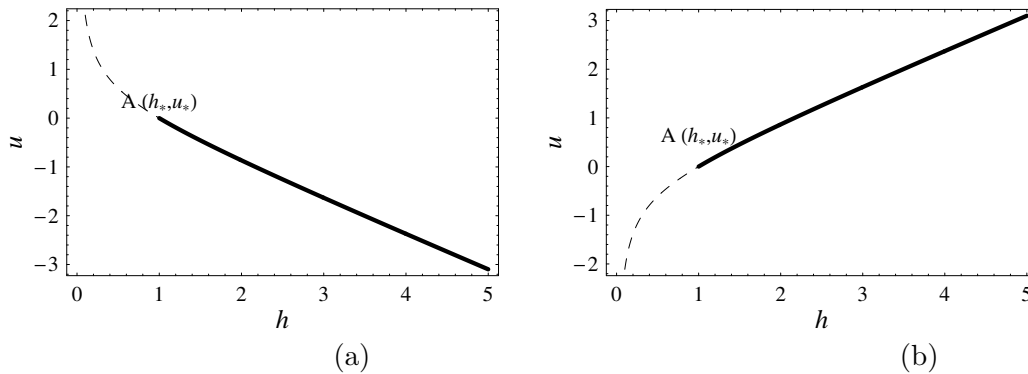
**Étape 1 : détermination des courbes de Hugoniot** Les conditions de saut permettent de déterminer l'état  $(u, h)$  à partir de l'état  $(u_*, h_*)$  :

$$u = u_* \mp (h - h_*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h}{h_* h}},$$

et la vitesse de l'onde de choc est donnée par :

$$\dot{s} = u_* \mp \sqrt{\frac{g}{2} (h_* + h) \frac{h_*}{h}}.$$

Le problème est de savoir quelle est la forme correspondante à la 1-onde de choc (resp. 2-onde de choc). Pour cela il faut rappeler que la courbe de choc doit être tangente au point  $(u_*, h_*)$  au vecteur propre à droite  $\mathbf{w}_i$ . Le tableau 2.2 donne les valeurs de ces vecteurs propres. La figure 2.29 montre les courbes de Hugoniot relatives aux 1- et 2-ondes de choc ainsi déterminées. Attention : la fonction  $u = u_* + (h - h_*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h}{h_* h}}$  correspond à une partie de la 1-onde de choc et à une autre partie de 2-onde de choc ; les deux parties se rejoignent au point A de coordonnées  $(u_*, h_*)$ . La figure 2.30 montre le réseau d'ondes de choc émanant du point A.



**Figure 2.29 :** (a) 1-onde de choc. (b) 2-onde de choc.

Lorsqu'on dispose des conditions initiales « normales », c'est-à-dire de deux points A  $(u_l, h_l)$  et B  $(u_r, h_r)$  avec des hauteurs non nulles, on se trouve dans l'une des trois situations suivantes :

1. B est sur l'une des courbes de choc (portions en gras). Les états intermédiaires entre A et B se calculent immédiatement.
2. B n'est pas sur l'une des courbes de Hugoniot. On introduit un point intermédiaire C  $(u_m, h_m)$  qui se trouve à l'intersection de deux courbes de choc [une 1- et une 2-onde de choc, portions en gras, comme sur la figure 2.31 (a)].
3. B n'est pas sur l'une des courbes de Hugoniot. On introduit un point intermédiaire C  $(u_m, h_m)$ , mais ce point ne se trouve pas sur des portions en gras des courbes de choc [voir exemple de la figure 2.31 (b)]. La solution ne vérifie pas la condition d'entropie et n'est donc pas physique.

Dans le cas présent, les courbes de choc ne sont pas définies pour des hauteurs s'annulant. Le point à droite ne peut être relié au point à gauche ou au point intermédiaire par une courbe de choc.

14. *dry area*.



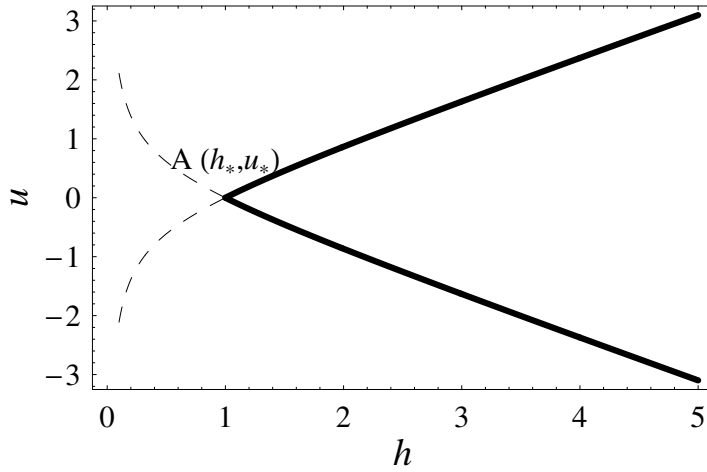
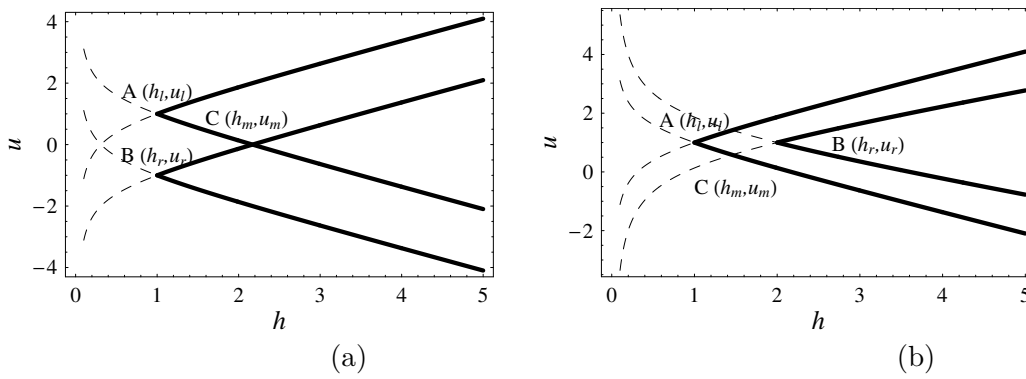

 Figure 2.30 : onde de choc émanant d'un point  $A (u_*, h_*)$ .


Figure 2.31 : (a) solution composée de deux ondes de choc. (b) solution composée d'ondes de choc, non physique.

**Étape 2 : détermination des courbes de détente** Les courbes de détente sont données par le lieu décrit par les points  $(u, h)$  à partir du point A de coordonnées  $(u_*, h_*)$  :

- 1-onde de détente au temps  $t$  :  $u = 2\sqrt{g}(\sqrt{h_*} - \sqrt{h}) + u_* + mt$ , avec  $h < h_*$ ,
- 2-onde de détente au temps  $t$  :  $u = 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_*}) + u_* + mt$ , avec  $h < h_*$ .

Les courbes de détente sont translatées d'une quantité  $mt$  au cours du temps. Comme le montre la figure 2.33, le point A devient au bout d'un temps  $\delta t$  le point A'.

Dans le cas présent, la zone vide (appelée encore zone sèche) est à droite du barrage, l'onde de détente solution du problème est donc la 1-onde (ou  $r$ -onde) simple associée à la valeur propre  $u - c$ . On a donc  $r = u + 2c - mt$  constant dans le cône de détente. La valeur de cette constante est  $r = u_L + 2\sqrt{gh_L} = 2c_0$ . Dans l'espace d'état  $h-u$ , le point  $L$  de coordonnées  $(h_L, u_L)$  est relié à un point intermédiaire M de coordonnées  $(h_*, u_*)$ . Ce point se trouvant au niveau du front, on a nécessairement  $h_* = 0$ ; on peut calculer  $u_*$  en servant de l'invariance de  $r - mt$  :  $u_* + 2\sqrt{gh_*} = u_L + 2\sqrt{gh_L}$  et donc  $u_* = 2c_0$ . Le cône de détente est donc encadré par les courbes caractéristiques  $C_s$  associées aux valeurs propres  $\lambda = u - c$ , avec donc ici  $\lambda$  dans l'intervalle :  $u_L - c_L = -c_0 \leq \lambda \leq u_* - c_* = 2c_0$  à  $t = 0$ . Les courbes  $C_s$  s'écrivent :

$$\frac{dx_s}{dt} = u - c,$$

or  $u + 2c - mt = 2c_0$ , donc  $u = 2(c_0 - c) + mt$ . On sait aussi que  $c = \sqrt{gh}$  est compris le long de la courbe de détente entre  $-c_0$  et  $2c_0$ . Le « cône » de détente est donc balayée par des paraboles

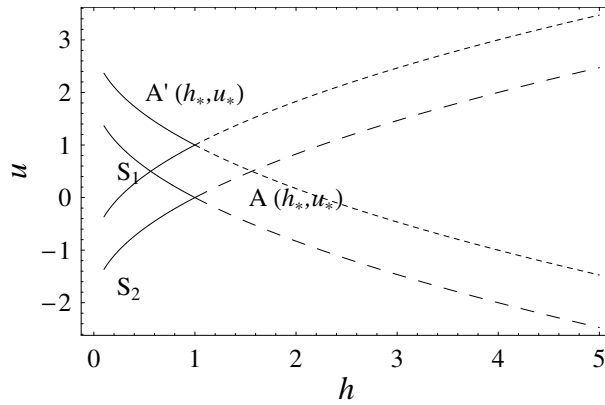


Figure 2.32 : Onde de détente émanant d'un point  $A(u_*, h_*)$ .

d'équation :

$$\frac{dx_s}{dt} = 2 \left( c_0 - \frac{3}{2}c \right) + mt,$$

avec  $-c_0 \leq c \leq 2c_0$ . Il existe donc deux paraboles limitant le cône :

$$P_1 : x_s(t) = -c_0 t + m \frac{t^2}{2} \text{ et } P_2 : x_s(t) = 2c_0 t + m \frac{t^2}{2}.$$

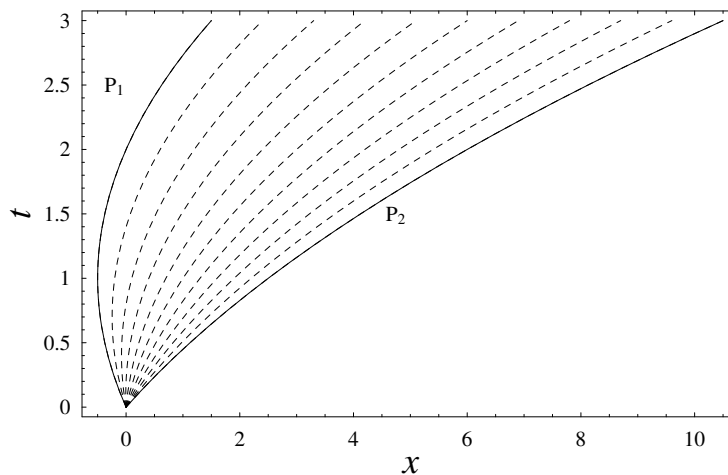


Figure 2.33 : « Cône » de détente encadré par  $P_1$  et  $P_2$ .

On en déduit que le solution de paraboles de la forme :  $x = 2(c_0 + \frac{3}{2}c)t + mt^2/2$ , on a  $u = 2(c_0 - c) + mt$ . La résolution du système donne  $u$  et  $h$  en fonction de  $x$  et  $t$  :

$$h = \frac{1}{9g} \left( 2c_0 - \frac{x}{t} + m \frac{t}{2} \right)^2,$$

$$u = \frac{2}{3} \left( c_0 + \frac{x}{t} + mt \right).$$

Les figures 2.34 et 2.35 donnent l'allure des solutions pour  $m = 0$  et  $m > 0$ .

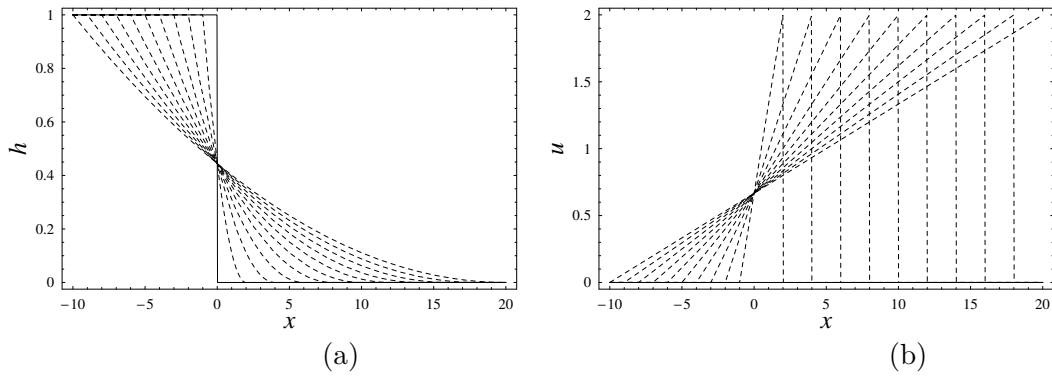


Figure 2.34 : Rupture de barrage sur fond plat ( $m = 0$ ). (a) hauteur (b) vitesse.

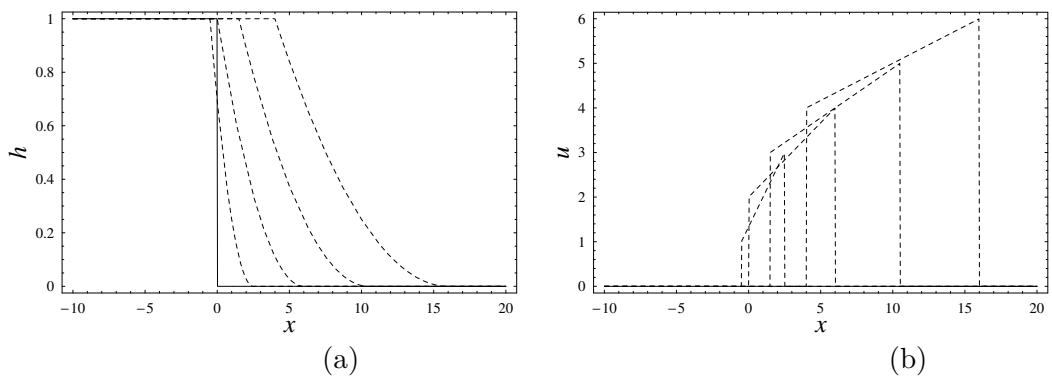


Figure 2.35 : Rupture de barrage sur fond incliné ( $m > 0$ ). (a) hauteur (b) vitesse.



# Méthodes numériques

LA PLUPART DES PROBLÈMES RENCONTRÉS aujourd'hui en hydraulique peuvent se résoudre à l'aide de codes numériques. Les dernières décennies ont vu une explosion de méthodes et d'outils numériques, qui d'un côté ont permis de résoudre efficacement un nombre croissant de problèmes d'ingénierie, mais d'un autre côté plongent l'ingénieur dans un abîme de perplexité quant au choix du bon outil.

L'accent dans ce chapitre va être mis sur des problèmes de propagation d'onde de crue ou bien de vagues. Sur le plan numérique, ce type de problèmes soulève plusieurs difficultés majeures telles que l'apparition de solutions discontinues (mascaret, ressaut hydraulique), l'existence de variations brutales des variables d'écoulement (vague, tsunami), la nécessité de travailler avec des fonds topographiques plus ou moins complexes. La résolution de ces problèmes nécessite donc des outils numériques spécifiques, que l'on va passer en revue ici. Le lecteur pourra aussi consulter des revues plus complètes consacrées à la résolution numériques des équations de Saint-Venant ([Toro, 2001](#); [Toro & Garcia-Navarro, 2007](#)).

Pour l'ingénieur, le choix est grand. C'est avec une vigilance particulière qu'il doit examiner différents points avant de se décider à utiliser un outil numérique

- quelles sont les équations considérées dans le modèle numérique? Sont-elles sous forme conservative ou non conservative? Le choix d'une formulation non conservative peut amener à des modèles plus simples, mais qui conduisent à des résultats incorrects si la solution devient discontinue (apparition d'un ressaut hydraulique par exemple). Dans certains cas (par exemple, équations de Saint-Venant couplées à l'équation d'Exner), il n'existe pas de formulation conservative ;
- faut-il utiliser un modèle unidimensionnel ou multidimensionnel? Un modèle unidimensionnel est plus simple à résoudre, mais il est peu précis (imaginons l'arrivée d'une crue dans le delta d'une rivière). Les modèles multidimensionnels sont en principe plus précis, mais sont plus complexes à résoudre numériquement et nécessitent une grande quantité d'information (topographie, conditions aux limites et initiales) et des temps de calcul parfois prohibitifs. Pour les problèmes multidimensionnels, il faut choisir une technique de maillage adaptée (maillage structuré ou non) ;
- quelle stratégie de calcul est employée pour résoudre ces équations? Pour les équations hyperboliques, on privilégie les méthodes aux volumes finis qui sont plus précises pour calculer des solutions éventuellement discontinues ;
- quel schéma numérique est utilisé pour discrétiser les équations? Les techniques les plus récentes font appel à des schémas de Godunov approché, d'ordre 2 ou supérieur ;
- à quel ordre les équations sont-elles discrétisées? Lorsqu'on utilise des méthodes aux volumes finis, les schémas d'ordre<sup>1</sup> 2 (et supérieur) sont plus précis que les schémas

---

1. Le plus souvent dans la littérature, l'ordre d'un schéma numérique est implicitement l'ordre auquel on

d'ordre 1 (où on approche par une fonction constante par morceaux), mais génèrent des oscillations importantes dans les zones à fort gradient, ce qui nécessite des étapes supplémentaires de correction de la solution (méthodes dites TVD pour *total variation diminishing*);

- comment sont traités les termes sources<sup>2</sup>? Un traitement trop approximatif des termes sources peut conduire à des erreurs importantes lorsqu'on calcule un régime stationnaire (régime pour lequel les variations temporelles disparaissent et où les termes sources contrebalancent les termes de gradient). De nos jours, on privilégie les schémas dits « bien équilibrés » (*well-balanced* en anglais);
- comment sont incorporées les conditions aux limites? En particulier, comment est géré le cas de « front sec », c'est-à-dire le lieu des points où la hauteur d'eau devient nulle lorsqu'il y a un déplacement d'eau (par exemple, rupture de barrage sur un lit sec)? Ce problème est délicat car les points où  $h \rightarrow 0$  conduisent souvent à l'apparition d'instabilités numériques et des problèmes d'extrapolation (localisation précise du point où  $h = 0$ )?

---

discrétise le gradient spatial. Un ordre 1 signifie donc que les termes de gradient de la forme  $\partial u \partial x$  sont calculés par des approximations de la forme  $(u(x + \Delta x) - u(x)) / \Delta x$ , qui correspond à un développement limité à l'ordre 1.

2. Pour les équations de Saint-Venant, les termes sources comprennent les termes de frottement et l'accélération due à la gravité.

### 3.1 Méthodes numériques

Il existe plusieurs stratégies de résolution numérique des équations aux dérivées partielles, dont les trois plus utilisées sont

- la *méthode aux différences finies* : les termes différentiels sont évalués à l'aide de différences finies (développement de Taylor) ;
- la *méthode aux volumes finis* : la plupart des équations de la mécanique traduisant la variation d'une grandeur sous l'effet de flux entrant ou sortant, il peut être plus avantageux d'écrire l'équation aux dérivées partielles sous une forme intégrée (sur un volume de contrôle) et de discrétiser l'équation résultante. Le principal avantage par rapport à la méthode aux différences finies est de pouvoir traiter des solutions qui peuvent devenir discontinues ;
- la *méthode aux éléments finis* : l'équation originale est intégrée sur un volume de contrôle, puis la solution numérique est recherchée sous la forme d'une décomposition dans une base de fonctions choisies pour leurs propriétés.

Outre la stratégie de résolution, il est important de savoir comment on discrétise le domaine de calcul. On peut choisir des maillages réguliers/ irréguliers, structurés/déstructurés, des maillages mobiles ou stationnaires, des maillages adaptatifs (c'est-à-dire des maillages dont la forme et le nombre de mailles peuvent varier dans l'espace et le temps pour gagner en précision et temps de calcul), maillages cartésiens/curvilignes.

Nous allons ici surtout détailler la méthode aux différences finies qui est la plus simple à mettre en œuvre. Nous dirons quelques mots sur les méthodes aux éléments finis et aux volumes finis, qui sont plus puissantes, mais également bien plus complexes.

#### 3.1.1 Méthode aux différences finies

L'idée de base de la méthode aux différences finies est d'utiliser le développement en série de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \dots$$

pour discrétiser les équations différentielles. Par exemple, une dérivée d'ordre 1 peut s'évaluer à partir de la connaissance de  $f$  en  $x$  et  $x+h$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(schéma décentré amont) ou bien encore en  $x-h$  et  $x$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

(schéma décentré aval) ou bien encore en  $x-h$  et  $x+h$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

(schéma centré). On peut faire de même avec les termes différentiels d'ordre supérieur ; par exemple, la dérivée d'ordre 2 est évaluée

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

La façon dont on va écrire le schéma va conditionner la stabilité, la précision, et la vitesse de convergence. Nous allons voir deux schémas classiques qui peuvent être utilisés pour résoudre l'équation de diffusion de la chaleur :

- *schéma explicite* : c'est le schéma le plus simple, où l'on exprime que ce qui se passe au temps  $t + \delta t$  ne dépend que du passé (au temps  $t$ ). L'inconvénient est que le schéma est instable<sup>3</sup> si  $\delta t$  est choisi trop grand ;
- *schéma implicite* : dans ce schéma, ce qui se passe au point  $x$  et au temps  $t + \delta t$  dépend naturellement du passé immédiat dans le voisinage de  $x$ , mais également du voisinage de  $x$  au temps  $t + \delta t$ . Il faut donc résoudre un système d'équations linéaires pour déterminer ce qui se passe en tout  $x$  au temps  $t + \delta t$ . On gagne en stabilité grâce à cela.

♣ **Exemple.** – Considérons maintenant que l'on veuille résoudre l'équation de la chaleur sur le domaine  $0 \leq x \leq 1$  et pour  $t \geq 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

avec pour conditions initiales

$$T(x, 0) = 0,$$

et pour conditions aux limites

$$\begin{aligned} T(0, t) &= 1, \\ \partial_x T(1, t) + T(1, t) &= g(t). \end{aligned}$$

Ce problème représente, par exemple, la diffusion de température au sein d'un mur dont la paroi interne est à température constante, tandis que la paroi extérieure est soumise à une variation de température.

On note  $T_{i,j}$  la valeur de  $T$  au point  $x = j\Delta x$  ( $0 \leq j \leq n$ ) et au temps  $t = i\delta t$ , avec  $\Delta x$  le pas d'espace et  $\delta t$  le pas de temps. Chaque contribution de l'équation de diffusion peut ainsi se discrétiser

$$\begin{aligned} \partial_t T|_{ij} &\approx \frac{T(x, t + \delta t) - T(x, t)}{\delta t} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta t}, \\ \partial_{xx} T|_{ij} &\approx \frac{T(x + \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

La forme discrétisée de l'équation de diffusion linéaire est donc

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + \frac{\delta t}{\Delta x^2} (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}).$$

Un tel schéma, où ce qui se passe au temps  $i + 1$  est entièrement déterminé par ce qui se passe au temps  $i$  est dit *explicite* (voir figure 3.1).

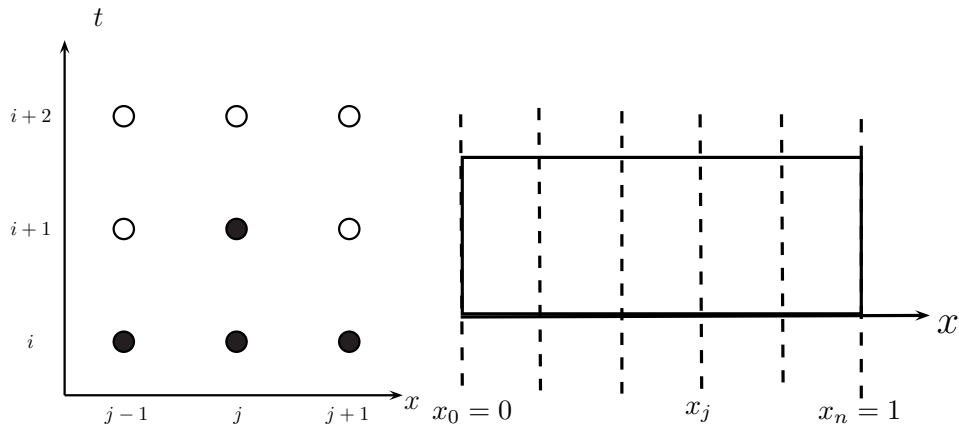
Il reste maintenant à discrétiser les conditions aux limites. La limite à gauche du domaine impose que

$$T_{i,0} = 1,$$

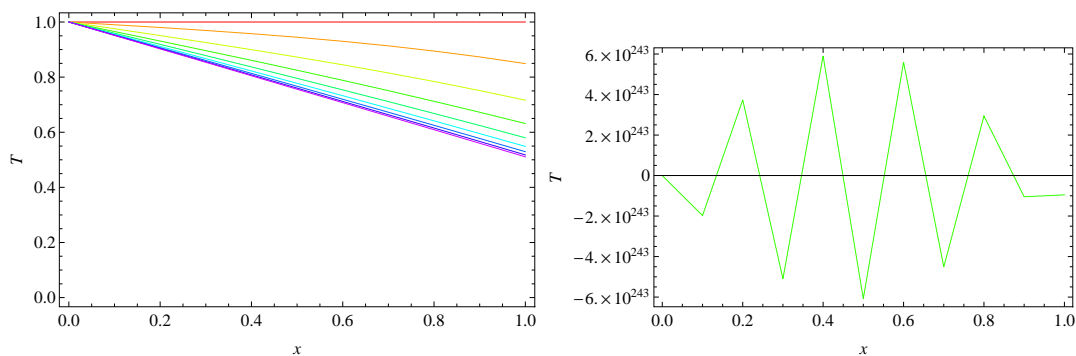
tandis que la limite à la droite du domaine est approchée au premier ordre par

$$\frac{1}{\Delta x} (T_{i,n} - T_{i,n-1}) = g_i - T_{i,n} \Rightarrow T_{i,n} = \frac{T_{i,n-1} + \Delta x g_i}{1 + \Delta x},$$





**Figure 3.1 :** à gauche, grille de calcul dans le plan  $x - t$  pour un schéma implicite; lorsqu'on veut calculer ce qui se passe au temps  $i$ , on se sert des valeurs trouvées au temps  $i - 1$ . À droite: découpage du mur en tronçons élémentaires.



**Figure 3.2 :** variation  $T(x,t)$  pour  $t$  allant de 0 à 10 avec un pas de 0,5;  $g(t) = \exp(-t)$ . À droite, on a pris  $\Delta x = 0,1$  et  $\delta t = 0,005$ . À gauche, on a pris  $\Delta x = 0,1$  et  $\delta t = 0,02$ : le schéma est instable.

où  $g_i = g(i\delta t)$ .

La figure 3.2 montre un exemple de résultat numérique lorsque  $g(t) = \exp(-t)$ ; lorsque  $t \rightarrow \infty$ , la température extérieure tend vers 0 tandis que la température intérieure reste égale à 1; le profil de température devient alors stationnaire et tend vers une ligne droite (solution de  $\partial_{xx}T = 0$ ):  $T = -x$ .

Un handicap certain de la méthode explicite est que le pas de temps  $\delta t$  doit rester petit sinon le schéma devient instable. On peut montrer que l'on doit choisir

$$\delta t \leq \frac{1}{2}\Delta x^2$$

(la taille limite des incréments  $\delta t$  et  $\Delta x$  dépend de l'équation à résoudre et de ses conditions aux limites). Le graphique de droite de la figure 3.2 montre l'instabilité qui apparaît lorsque le pas de temps est choisi trop grand. Un autre problème peut survenir: si l'on choisit des incréments  $\delta t$  et  $\Delta x$  trop petits, on va être confronté à des problèmes d'erreur d'arrondi dans les calculs numériques. Ce problème dépend de la précision (8 bits, 16 bits, etc.) avec laquelle l'ordinateur travaille. Il faut donc choisir la taille de  $\delta t$  et  $\Delta x$  en favorisant un compromis entre stabilité et précision.  $\square$

3. Un schéma est dit instable si la solution n'est pas bornée dans le temps. Une solution instable se met à osciller avec des valeurs de plus en plus fortes et/ou bien diverge de la solution physique.

♣ **Exemple.** – Une façon de contourner les problèmes surgissant avec les schémas explicites est d'employer un schéma de discrétisation différent ; c'est ce qui est fait dans un schéma *implicite* où la dérivée spatiale – discrétisée par un schéma centré au temps  $t$  – est discrétisée à l'aide d'une moyenne pondérée de l'approximation du comportement aux temps  $t$  et  $t + \delta t$ , toujours à l'aide d'un schéma centré. En d'autres termes, cela consiste à écrire

$$T|_{i+1,j} \approx \lambda \left( \frac{T_{i+1,j+1} - 2T_{i+1,j} + T_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \lambda) \left( \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta x^2} \right), \quad (3.1)$$

pour  $1 \leq j \leq n - 1$  et  $i \geq 1$ . Les conditions aux limites imposent

$$T_{i,0} = 1 \text{ et } T_{i,n} = \frac{T_{i,n-1} + \Delta x g_i}{1 + \Delta x}.$$

En dehors des frontières du domaine, il faut donc 6 points pour discrétiser l'équation de diffusion au lieu de 4 pour un schéma explicite. Matriciellement on a :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{i+1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^i + \mathbf{C}^i \Rightarrow \mathbf{T}^{i+1} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^i + \mathbf{C}^i)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a' & b' & c' & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

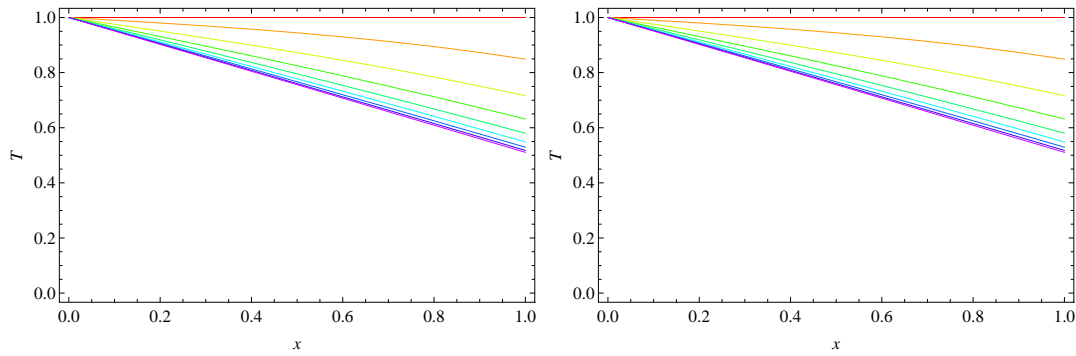
$$\mathbf{C}^i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g_i \Delta x \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} T_{i,0} \\ T_{i,1} \\ T_{i,2} \\ T_{i,3} \\ \vdots \\ T_{i,n-2} \\ T_{i,n-1} \\ T_{i,n} \end{bmatrix},$$

$$a = -\lambda \frac{\delta t}{\Delta x^2}, \quad b = 1 + 2\lambda \frac{\delta t}{\Delta x^2}, \quad \text{et } c = -\lambda \frac{\delta t}{\Delta x^2},$$

$$a' = (1 - \lambda) \frac{\delta t}{\Delta x^2}, \quad b' = 1 - 2(1 - \lambda) \frac{\delta t}{\Delta x^2}, \quad \text{et } c' = (1 - \lambda) \frac{\delta t}{\Delta x^2}$$

La matrice  $\mathbf{A}$  est une matrice tridiagonale (creuse) simple à inverser même lorsque sa dimension est grande. Lorsque  $\lambda = \frac{1}{2}$ , on dit que le schéma est de *Crank-Nicolson*. Lorsque  $\lambda = 0$ , on retombe sur le schéma explicite vu précédemment. Lorsque  $\lambda = 1$ , on a un schéma qui est dit *totalelement implicite*. Une matrice peut s'inverser facilement, notamment à l'aide de l'*algorithme de Thomas*<sup>4</sup>.

4. Voir par exemple A. Quarteroni et al., Méthodes numériques pour le calcul scientifique, Springer, Paris 2006, pp. 92-93.

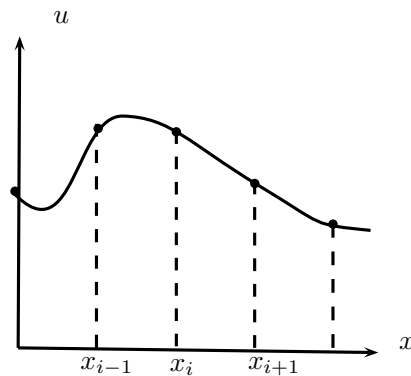


**Figure 3.3 :** variation  $T(x,t)$  pour  $t$  allant de 0 à 10 avec un pas 0,5;  $g(t) = \exp(-t)$ . À gauche, on a pris  $\Delta x = 0,1$  et  $\delta t = 0,005$ . À droite, on a pris  $\Delta x = 0,1$  et  $\delta t = 0,02$ .

Le principal avantage du schéma implicite est que le schéma est stable. La figure 3.3 montre par exemple le résultat d'une simulation numérique obtenue soit avec  $\delta t = \frac{1}{2}\Delta x^2$ , soit  $\delta t = 2\Delta x^2$ . Si l'on compare avec la méthode explicite, on note que quel que soit le schéma utilisé pour résoudre le problème, les résultats sont assez proches (écart inférieur à 0,2 %), mais les schémas implicites sont plus stables et nécessitent moins de pas de temps, donc sont finalement plus rapides (malgré le coût lié à l'inversion des matrices).  $\square$

### 3.1.2 Méthode aux volumes finis

Le problème de la méthode aux différences finies est que l'information qu'elle prend en compte n'est constituée que par les valeurs prises par la fonction  $u$  en différents points de l'espace, ce qui veut dire que l'information qui est située entre ces points de discrétisation est perdue (voir figure 3.4). La méthode aux volumes finis remédie à cela en considérant toute l'information, mais sous une forme moyennée, contenue entre deux nœuds.



**Figure 3.4 :** discrétisation d'une fonction.

Pour cela, la méthode aux volumes finis se ramène à la formulation conservative de l'équation à résoudre, puis discrétise les flux pour déterminer l'évolution du système. Considérons par exemple une équation d'advection de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad (3.2)$$

soumise à des conditions initiales et/ou aux frontières. Intégrons cette équation (pour retrouver sa « forme conservative ») sur un volume de contrôle, qui en dimension 1 n'est qu'un

segment centré autour de  $x_i = i\Delta x$ , où  $\Delta x$  est la taille des cellules du maillage. Les bornes de ce segment sont  $x_{i-1/2}$  et  $x_{i+1/2}$ ; ici l'indice 1/2 nous dit que ces deux points sont à l'interface avec les cellules voisines centrées en  $x_{i-1}$  et  $x_{i+1}$ . Plutôt que de considérer comme auparavant la valeur prise par  $u$  en  $x = x_i$ , on introduit la valeur moyenne de  $u$  sur le segment  $\mathcal{C}_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ :

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_i} u(x, t_n) dx.$$

L'avantage de cette discrétisation par rapport aux techniques de différence finie est que la méthode est conservative, c'est-à-dire les flux (exprimant des bilans de masse, de quantité de mouvement, etc.) sont correctement décrits.

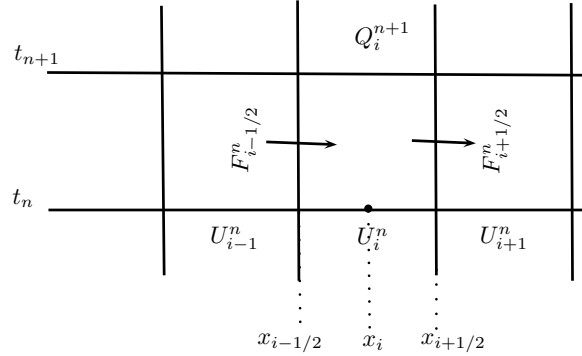


Figure 3.5 : plan  $x - t$  et flux entre cellules.

Intégrons (3.2) sur le volume de contrôle  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ . Commençons par intégrer par rapport à la variable d'espace  $x$ . Comme la grille est fixe on peut intervertir les opérations de différentiation :

$$\int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}_i} u dx.$$

On a également :

$$\int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial u}{\partial x} f(u) dx + [f(u)]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = 0.$$

L'intégration de (3.2) sur  $\mathcal{C}_i$  est donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_i} u(x, t) dx = f(u(x_{i-1/2}, t)) - f(u(x_{i+1/2}, t)).$$

Une intégration par rapport au temps entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  fournit l'équation

$$\int_{\mathcal{C}_i} u(x, t_{n+1}) dx - \int_{\mathcal{C}_i} u(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(u(x_{i-1/2}, t)) - f(u(x_{i+1/2}, t))) dt,$$

qui peut également s'écrire sous la forme

$$\boxed{U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)}, \quad (3.3)$$

où on a introduit le flux moyen (au cours du temps) :

$$F_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt,$$

avec  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Tout le jeu des méthodes aux volumes finis va être de trouver une approximation du flux moyen  $F_{i+1/2}^n$  à l'interface entre deux cellules (voir fig. 3.5). Une des méthodes aux volumes finis est le schéma de Lax-Friedrichs, qui consiste à définir une fonction numérique de flux de la façon suivante :

$$F_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) = \frac{1}{2} (f(U_{i+1}^n) - f(U_i^n)) - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} (U_{i+1}^n - U_i^n).$$

Ce schéma s'apparente à une discrétisation numérique de l'équation d'advection non linéaire avec un terme diffusif

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

avec  $\beta = \frac{1}{2} \Delta x^2 / \Delta t$ . Le terme diffusif supplémentaire par rapport à l'équation originale (3.2) sert à stabiliser la solution numérique, la diffusion servant ici à atténuer toute instabilité qui apparaîtrait.

Nous verrons par la suite des schémas bien plus performants que le schéma de Lax-Friedrichs, qui introduit trop de diffusion numérique. Ces schémas exploitent les caractéristiques spécifiques des équations hyperboliques, en particulier la propagation de choc et de l'information.

## 3.2 Méthode de résolution numérique des équations hyperboliques

On s'intéresse à la résolution de problèmes hyperboliques sous la forme (3.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{B}. \quad (3.4)$$

### 3.2.1 Équation d'advection : schéma amont

L'équation hyperbolique la simple est le problème d'advection linéaire scalaire

$$\frac{\partial}{\partial x} u + a \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3.5)$$

où la quantité  $u(x, t)$  est advectée à la vitesse constante  $a$ . On va ici considérer le cas  $a > 0$ . Les caractéristiques sont donc des droites  $x = at + b$  dans le plan  $x - t$ , ce qui veut dire que le long de ces droites, la quantité  $u$  reste constante. Examinons une cellule centrée autour de  $x_i$  au temps  $t_n$ . Au temps ultérieur, l'information s'est propagée à la vitesse. Une partie de la cellule a donc reçu de l'information de la cellule amont centrée en  $x_{i-1}$  (flèches rouges continues sur la figure 3.6) tandis que l'autre partie n'a pas reçu d'information et garde donc la même valeur que précédemment au temps  $t_n$  (flèches rouges pointillées).

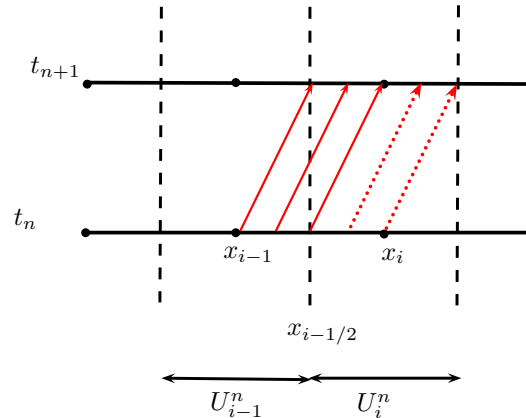


Figure 3.6 : problème d'advection linéaire.

Le flux qui passe à travers l'interface  $x_{i-1/2}$  est donc

$$F_{i-1/2}^n = aU_{i-1}^n,$$

comme le montre la figure 3.6. Par définition,  $U_i^{n+1}$  est la moyenne de  $u$  le long de la cellule  $x_i$  au temps  $t_{n+1}$ . Le long de cette cellule, une partie  $a\Delta t$  prend maintenant la valeur  $U_{i-1}^n$  tandis que l'autre partie de longueur  $\Delta x - a\Delta t$  garde la valeur qu'elle avait auparavant  $U_i^n$ . La moyenne est donc :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} (U_{i-1}^n a\Delta t + (\Delta x - a\Delta t)U_i^n), \quad (3.6)$$

soit encore

$$U_i^{n+1} = U_{i-1}^n a \frac{\Delta t}{\Delta x} + \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) U_i^n,$$

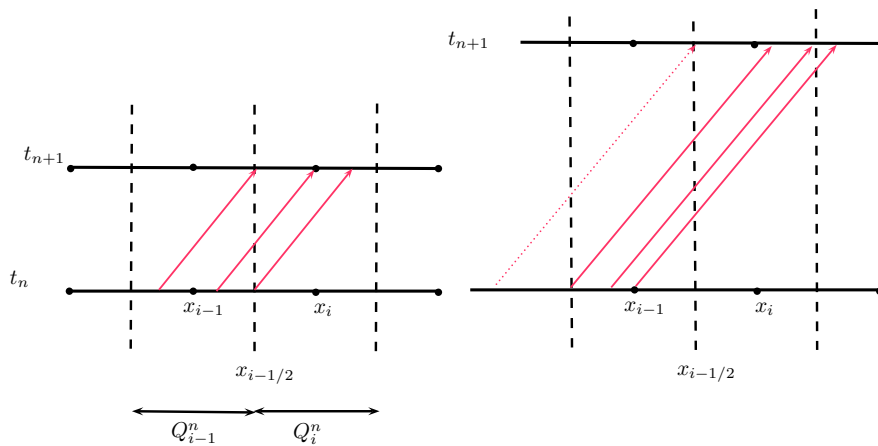
ce qui peut également se mettre sous la forme

$$U_i^{n+1} = U_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} + (U_{i-1}^n - U_i^n).$$

C'est le *schéma amont au premier ordre*. Notons que la construction géométrique n'est possible que si l'on choisit un petit pas de temps tel que

$$\boxed{0 \leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.} \quad (3.7)$$

En effet, si cela n'est pas le cas, alors l'information qui arrive à la cellule centrée en  $x_i$  au temps  $t_{n+1}$  provient non seulement de la cellule  $x_{i-1}$  au temps  $t_n$ , mais également de cellules encore plus en amont comme le montre la figure 3.7. La condition exprimée dans les inégalités (3.7) s'appelle la condition de Courant-Friedrichs-Lewy du nom des mathématiciens qui l'ont énoncée pour la première fois. Elle est souvent abrégée sous le nom de **condition CFL**. Il s'agit d'une condition nécessaire de convergence de la solution numérique vers la bonne solution.



**Figure 3.7 :** si on prend un pas de temps qui satisfait la condition CFL, alors toute l'information reçue au temps  $t_{n+1}$  dans la cellule  $x_i$  provient de la cellule juste à l'amont. Si le pas de temps ne satisfait pas la condition CFL, alors une partie de l'information provient de cellules encore plus en amont (flèche en pointillé) et dans ce cas, le calcul de la valeur moyenne dans l'équation (3.6) n'est plus correct.

Une autre façon d'aborder le problème est de considérer qu'à chaque pas de temps, on doit résoudre un problème de Riemann, puisque la fonction  $u_i^n$  est constante par morceaux ; à chaque interface  $x_{i-1/2}$ , elle est susceptible de subir une discontinuité, qui se propage à la vitesse  $a$  et avec une amplitude  $\mathcal{W}_{i-1/2} = U_i^n - U_{i-1}^n$ . Sur un pas de temps  $\Delta t$ , la vague  $\mathcal{W}$  s'est donc propagée sur une distance  $a\Delta t$  et la partie de la cellule affectée par cette vague a subi une variation  $-\mathcal{W}_{i-1/2}$ . En recalculant la moyenne  $U_i^{n+1}$ , on a abouti à une expression similaire à (3.6) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (-\mathcal{W}_{i-1/2}).$$

Notons que si on a  $a < 0$ , la propagation se fait d'aval vers l'amont. Le flux se fait de la droite vers la gauche et on a :

$$F_{i-1/2}^n = aU_i^n.$$

Le schéma est alors aval

$$U_i^{n+1} = U_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1}^n - U_i^n) \quad \text{ou bien encore} \quad U_i^{n+1} = U_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{W}_{i+1/2}.$$

Sur le plan numérique, les deux possibilités peuvent être synthétisées en introduisant un flux de la forme

$$F_{i-1/2}^n = a^- U_i^n + a^+ U_i^n,$$

avec

$$a^- = \min(a, 0) \quad \text{et} \quad a^+ = \max(a, 0).$$

Cela permet d'écrire que la valeur de  $U_i^{n+1}$  varie en fonction des flux qui arrivent soit de la droite (vague à la vitesse  $a^-$ ), soit de la gauche (vague à la vitesse  $a^+$ ).

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (a^- \mathcal{W}_{i+1/2} + a^+ \mathcal{W}_{i-1/2}). \quad (3.8)$$

La force de cette formulation est qu'elle n'est pas propre à l'équation d'advection linéaire que l'on vient d'étudier et qu'elle peut se généraliser à un grand nombre de problèmes non linéaires. C'est le principe même de la méthode de Godunov.

### 3.2.2 Schéma de Godunov pour les systèmes linéaires

#### Schéma originel

Godunov<sup>5</sup> a proposé à la fin des années 1950 un algorithme pour résoudre des systèmes d'équations hyperboliques linéaires. L'idée de base exploitée par Godunov est de (1) reconstruire une fonction constante par morceaux, (2) propager les discontinuités aux interfaces  $x_{i-1/2}$ , (3) moyenner les fonctions altérées par le passage des discontinuités ; c'est typiquement ce que nous avons fait au § 3.2.1. On répète la séquence d'opérations suivantes :

1. Reconstruction d'une fonction  $\tilde{u}^n(x, t^n)$  en tout  $x$  du domaine de calcul et au temps  $t_n$ , à partir des valeurs moyennes sur les cellules (obtenues à l'étape 3 de moyenne au  $t_n$ ). Le plus simple est de considérer des fonctions constantes par morceaux (schéma de Godunov du premier ordre) :

$$\tilde{U}(x, t_n) = U_i^n,$$

pour  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ . Cela permet de considérer qu'à chaque pas de temps et à chaque interface entre deux cellules, on résout un problème de Riemann. Il est naturellement possible d'envisager des formes plus complexes de reconstruction, par exemple en considérant des fonctions linéaires par morceaux. C'est ce qui est fait avec les méthodes dites à grande résolution (high-resolution methods).

2. Propagation en prenant comme condition initiale les valeurs  $\tilde{U}^n(x, t^n)$ . On peut par exemple employer la méthode décrite à l'équation (3.3). On déduit  $U(x, t_{n+1})$  :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n),$$

---

5. Sergei Konstantinovich Godunov (né en 1929) est un mathématicien russe. Membre de l'Académie des Sciences, il est également professeur à l'Institut de mathématiques Sobolev à Novosibirsk. Il a été l'un des grands pionniers qui ont révolutionné les méthodes de calcul numériques en proposant une méthode de calcul, qui porte aujourd'hui son nom, adaptée aux problèmes hyperboliques. À cette époque, la conquête spatiale et l'industrie aéronautique avaient donné naissance à des développements numériques intenses pour résoudre les équations d'Euler pour l'air considéré comme un fluide compressible ; le traitement des ondes de choc posait problème à toutes les méthodes classiques. L'avancée majeure permise par Godunov a été de proposer une méthode compatible avec la propagation de discontinuités.



avec le flux moyenné :

$$F_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i\pm 1/2}, t)) dt. \quad (3.9)$$

Ce flux peut se calculer facilement dans un problème de Riemann linéaire. Prenons l'exemple de la figure 3.10. À l'interface  $x_{i-1/2}$ , deux discontinuités se propagent aux vitesses  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Sur chacun des domaines (triangulaires) départagés par les caractéristiques  $x = x_{i-1/2} + \lambda_i t$ , la fonction  $u$  est constante<sup>6</sup> et change de valeur au passage de l'une des deux caractéristiques. Donc, hormis dans le cas où  $\lambda_i = 0$ , l'interface  $x_{i-1/2}$  garde une valeur constante entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  et cette valeur est soit la valeur initiale à gauche  $U_{i-1}^n$  soit la valeur à droite  $U_i^n$  (respectivement  $U_i^n$  et  $U_{i+1}^n$  pour l'interface  $x_{i+1/2}$ ). Il s'ensuit que

$$F_{i\pm 1/2}^n = f(u(x_{i\pm 1/2}, t)).$$

3. Moyenner les valeurs obtenues sur chacune des cellules du domaine de calcul :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \tilde{U}^n(x, t_{n+1}) dx.$$

On obtient alors le schéma de discrétisation déjà vu à l'équation (3.3) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \quad (3.10)$$

où on a introduit le flux moyen (au cours du temps) est :

$$F_{i\pm 1/2}^n = f(u(x_{i\pm 1/2}, t)).$$

Notons que dans l'équation (3.10), la valeur  $U_i^n$  est incrémentée d'une quantité qui est proportionnelle à la différence de flux de part et d'autre de la cellule, d'où le nom de «schéma à différence de flux » (*flux difference splitting* en anglais).

### Variante : formulation en termes d'onde de discontinuité

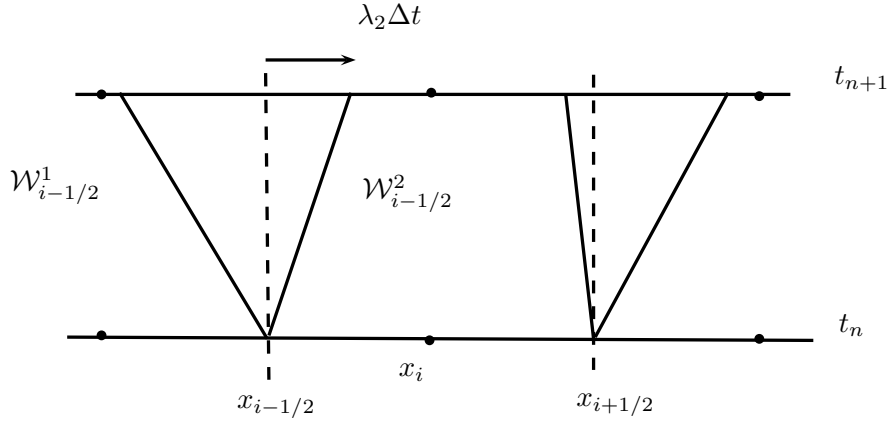
LeVeque a proposé une formulation différente du schéma de Godunov, qui présente de nombreux avantages à la fois sur le plan de l'interprétation physique et du point de vue algorithmique (LeVeque, 2002). À l'étape n° 2, on a employé la méthode originale de Godunov, mais on peut également une formule de propagation comme la méthode utilisée pour l'équation d'advection linéaire (3.8). L'avantage est alors de fournir une méthode un peu plus générale (LeVeque, 2002, voir pp. 79–82). Si on examine l'exemple de la figure 3.10, on observe que l'onde  $\mathcal{W}_{i-1/2}^2 = U_i^n - U_{i-1}^n$  va vers la droite (ici la cellule  $\mathcal{W}_i$ ) et modifie donc la valeur de  $U_i$ . Au temps  $t_n + 1$ , sur une distance  $\lambda_2 \Delta t$ , la valeur de  $u$  est modifiée d'une quantité  $\mathcal{W}_{i-1/2}^2$ .

La valeur moyenne de  $u$  est donc à son tour changée d'une quantité

$$-\lambda_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{W}_{i-1/2}^2,$$

---

6. On se reportera utilement au § 2.1.4 pour des rappels sur la construction des solutions au problème de Riemann linéaire.



**Figure 3.8 :** pour un problème linéaire, la discontinuité initiale au temps  $t_n$  se propage selon deux caractéristiques (on prend ici arbitrairement  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$ ).

on prendra garde au signe négatif (compte tenu de la définition de  $\mathcal{W}_{i-1/2}$ ). L'effet de chaque onde est additif (le système étant linéaire) de telle sorte que la valeur réactualisée  $U_i^{n+1}$  est pour l'exemple de la figure 3.10 avec  $n = 2$  ondes :

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &= U_i^n - \lambda_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{W}_{i-1/2}^2 - \lambda_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{W}_{i+1/2}^1, \\ &= U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \lambda_2 \mathcal{W}_{i-1/2}^2 + \lambda_1 \mathcal{W}_{i+1/2}^1 \right), \\ &= U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \mathcal{W}_{i-1/2}^j + \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \mathcal{W}_{i+1/2}^j \right), \end{aligned}$$

où l'on a employé la notation

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda) \text{ et } \lambda^- = \min(0, \lambda).$$

La valeur  $U_i^{n+1}$  est donc actualisée en prenant en compte les ondes (allant de gauche à droite) issues de  $x_{i-1/2}$  et celles (allant de droite à gauche) issues de  $x_{i+1/2}$ .

La formulation en termes d'ondes peut être synthétisée de la façon suivante quand on s'intéresse à des systèmes linéaires de  $n$  équations de la forme

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_x = 0.$$

Comme on l'a vu au § 2.1.4, les ondes de discontinuités sont définies par

$$\mathcal{W}^i = \alpha^i \mathbf{r}^i,$$

avec  $\mathbf{r}^i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre à droite de  $\mathbf{A}$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,  $\alpha^i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_\ell) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_\ell)$  où  $\mathbf{U}_r$  et  $\mathbf{U}_\ell$  sont les conditions initiales à droite et à gauche d'une interface  $x_{i-1/2}$ ,  $\mathbf{R}$  est la matrice dont les colonnes sont composées des vecteurs propres ( $\mathbf{L}$  la matrice dont les lignes sont les vecteurs propres à gauche). On introduit les matrices

$$\mathbf{\Lambda}^+ = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^+ \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{\Lambda}^- = \begin{bmatrix} \lambda_1^- & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^- & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^- \end{bmatrix}$$

Cela revient à scinder la matrice diagonale des valeurs propres en une matrice dont les composantes ne comportent que les valeurs propres positives (les valeurs propres négatives sont remplacées par 0) et une matrice dont les composantes sont les valeurs propres négatives. On peut écrire

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^+ \cdot \mathbf{R}^{-1} \text{ et } \mathbf{A}^- = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^- \cdot \mathbf{R}^{-1}. \quad (3.11)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \mathcal{W}_{i-1/2}^j + \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \mathcal{W}_{i+1/2}^j \right), \\ &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \alpha_{i-1/2}^j \mathbf{r}^j + \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \alpha_{i+1/2}^j \mathbf{r}^j \right), \\ &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i-1/2} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i+1/2} \right), \\ &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^+ \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n) + \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^- \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n) \right), \\ &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n + \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n \right), \end{aligned}$$

ce qui permet d'aboutir à un schéma numérique relativement simple pour calculer  $\mathbf{U}_i^{n+1}$  :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n + \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n \right), \quad (3.12)$$

avec  $\mathbf{A}^+$  et  $\mathbf{A}^-$  définis par (3.11) ou bien encore par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \alpha_{i-1/2}^j \mathbf{r}^j, \\ \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \alpha_{i+1/2}^j \mathbf{r}^j. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Schéma de Godunov pour les équations scalaires non linéaires

Ce que nous avons dit précédemment pour les équations linéaires se généralise sans problème aux équations non linéaires. Le schéma de discrétisation d'une équation de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,$$

par la méthode des volumes finis est toujours

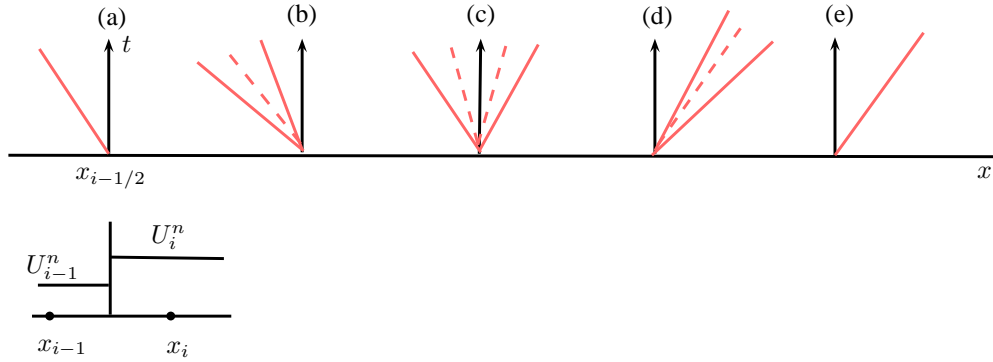
$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right)$$

(voir équation (3.10)). On a vu avec l'équation (3.9) que  $F_{i\pm 1/2}^n$  est le flux moyen

$$F_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i\pm 1/2}, t)) dt.$$

et qu'il prenait la valeur

$$F_{i\pm 1/2}^n = f(u(x_{i\pm 1/2}, t))$$



**Figure 3.9 :** solutions possibles au problème de Riemann pour une équation hyperbolique scalaire non linéaire. (a) choc à gauche avec  $u(x_{i-1/2}, t) = U_i^n$ , (b) onde de détente à gauche avec  $u(x_{i-1/2}, t) = U_i^n$ , (c) onde de détente transsonique avec  $u(x_{i-1/2}, t) = u_s$ , (d) onde de détente à droite avec  $u(x_{i-1/2}, t) = U_{i-1}^n$ , (e) onde de choc à droite avec  $u(x_{i-1/2}, t) = U_{i-1}^n$ .

où  $u(x_{i\pm 1/2}, t)$  est la valeur de  $u$  à l'interface  $x_{i\pm 1/2}$  car  $u$  était constant le long de la caractéristique  $x = x_{i\pm 1/2}$ .

Comme le résume la figure 3.9, dans un problème de Riemann,  $u$  reste constant dans des secteurs délimités par des ondes de détente ou des ondes de choc. Dans tous les cas sauf le cas (c), la valeur  $u(x_{i\pm 1/2}, t)$  est soit  $U_{i-1}^n$ , soit  $U_i^n$  selon que l'onde se déplace vers la droite ou vers la gauche. Pour le cas (c), l'interface  $x_{i\pm 1/2}$  se trouve dans l'éventail des caractéristiques  $x = x_{i\pm 1/2} + \lambda t$  de l'onde de détente, donc  $u(x_{i\pm 1/2}, t)$  prend une valeur comprise entre  $U_{i-1}^n$  et  $U_i^n$ . Comme cette interface correspond à une caractéristique verticale (vitesse de propagation nulle, soit encore  $\lambda = 0$ ), la valeur  $u_s$  prise par  $u$  est celle qui correspond à une vitesse caractéristique nulle

$$f'(u_s) = 0.$$

Un tel point s'appelle *point de stagnation* ou point sonique. L'onde de détente correspondante [cas (c) sur la figure 3.9] est appelée *onde transsonique* car dans le cas d'un gaz, cette onde correspond au passage d'une vitesse subsonique à une vitesse supersonique. Dans le cas d'un flux convexe ( $f'' > 0$ ), on peut synthétiser les valeurs prises par le flux moyen de la façon suivante

$$F_{i-1/2}^n = \begin{cases} f(U_{i-1}^n) & \text{si } U_{i-1}^n > u_s \text{ et } \dot{s} > 0, \\ f(U_i^n) & \text{si } U_{i-1}^n < u_s \text{ et } \dot{s} < 0, \\ f(u_s) & \text{si } U_{i-1}^n < u_s < U_i^n, \end{cases} \quad (3.13)$$

avec

$$\dot{s} = \frac{[[f(u)]]}{[[u]]} = \frac{f(U_i^n) - f(U_{i-1}^n)}{U_i^n - U_{i-1}^n},$$

la vitesse de choc.

Il s'ensuit que l'on peut construire un schéma de résolution exact du problème de Riemann pour le schéma de Godunov. On discrétise l'équation selon l'équation (3.10), avec la fonction de flux définie par l'équation (3.9). Ce flux prend l'une des valeurs données par l'équation (3.13). Par itérations successives, on peut donc construire la solution à tout temps. Le problème avec cette façon de faire est que si le schéma est précis, il est également coûteux en temps de calcul ; en pratique, il est souvent plus intéressant d'utiliser un schéma approché (voir § 3.2.5).

### 3.2.4 Schéma de Godunov pour les systèmes d'équations non linéaires

Tout ce qui a été décrit au § 3.1.2 pour les équations scalaires peut être reproduit pour les systèmes d'équations. Notamment le schéma de volumes finis donné par l'équation (3.3) se généralise aux systèmes d'équations sans difficulté particulière. Quand on résout un système d'équation hyperboliques homogènes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad (3.14)$$

on obtient un schéma conservatif en intégrant sur une maille  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ . On aboutit à

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n), \quad (3.15)$$

avec

$$\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t) dx \text{ et } \mathbf{F}_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i\pm 1/2}, t)) dt.$$

À chaque pas de temps et pour chaque nœud de la grille (voir figure 3.10), on est amené à résoudre problème de Riemann. L'incrément de temps  $\Delta t$  est choisi de telle sorte que les ondes solutions de chaque problème de Riemann ne se croisent pas. Donc si  $s_{max}$  désigne la vitesse caractéristique maximale pour tous les nœuds ( $s_{max} = \max_i \max_k |\lambda_{i-1/2}^k|$ ), alors la condition de non-croisement des ondes (appelée « condition de Courant ») est

$$\frac{s_{max} \Delta t}{\Delta x} < 1. \quad (3.16)$$

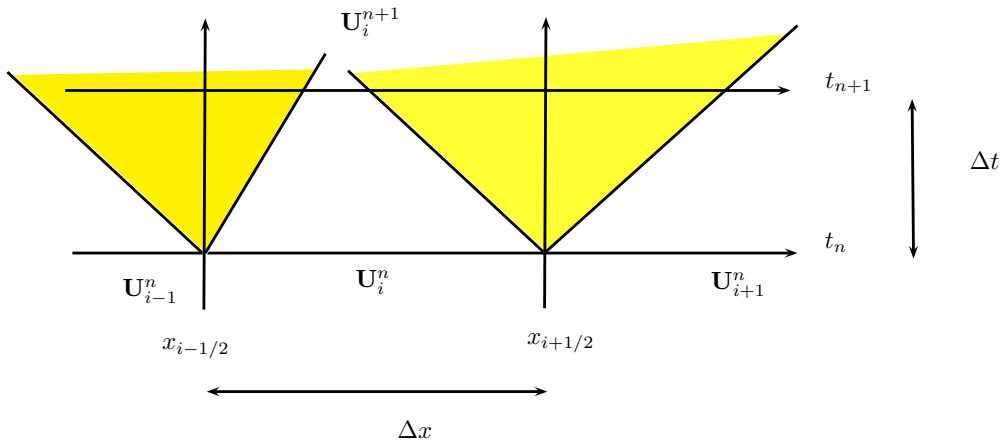


Figure 3.10 : grille de calcul servant dans la discrétisation de l'équation (3.14).

Comme la solution au problème de Riemann est composée d'ondes de choc ou de détente, dont les caractéristiques sont des droites émanant/rayonnant depuis l'interface  $x_{i\pm 1/2}$ , on déduit que

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i\pm 1/2}, t)) dt = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i\pm 1/2}^n),$$

avec  $\mathbf{U}_{i\pm 1/2}^n$  la valeur par  $\mathbf{u}$  le long de l'interface  $x_{i\pm 1/2}$ .

À la place de la formulation en termes de différence de flux de l'équation (3.15), on peut préférer la formulation en termes de propagation, qui n'est que la généralisation de l'équation (3.12)

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n + \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n), \quad (3.17)$$

avec  $\mathbf{A}^+$  et  $\mathbf{A}^-$  définis par (3.11) ou bien encore par :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n &= \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1/2}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \alpha_{i-1/2}^j \mathbf{r}^j, \\ \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n &= \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1/2}^n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \alpha_{i+1/2}^j \mathbf{r}^j.\end{aligned}$$

### 3.2.5 Schéma de Godunov approché

Quoiqu'en théorie, la méthode de Godunov s'applique à toute équation hyperbolique, elle est en pratique très coûteuse en temps de calcul puisqu'à chaque itération et à chaque pas d'espace il faut résoudre un problème de Riemann. De plus, seule une partie de la solution au problème de Riemann est exploitée et l'information doit également être moyennée à chaque pas de temps. Il est donc plus astucieux d'utiliser des solveurs de Riemann approchés, qui ne calculent que l'information dont on a réellement besoin. L'un des solveurs approchés les plus connus est le solveur de Roe. Ce solveur pose toutefois des problèmes en hydraulique car il peut générer des hauteurs d'eau négatives et on lui préfère souvent des solveurs non linéaires comme le solveur HLL ([Toro & Garcia-Navarro, 2007](#)).

#### Solveur de Roe

L'idée de [Roe \(1981\)](#) est de remplacer un problème non linéaire de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad (3.18)$$

en un problème linéarisé simplifié

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (3.19)$$

lorsqu'on résout un problème de Riemann, c'est-à-dire un problème aux valeurs initiales

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_\ell \text{ pour } -\infty < x < 0 \text{ et } \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_r \text{ pour } 0 < x < \infty.$$

La fonction  $\mathbf{f}$  est telle que la matrice jacobienne associée  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u})$  possède  $n$  valeurs propres distinctes et réelles notées  $\lambda_1(\mathbf{u})$  (problème strictement hyperbolique). La question est de savoir comme passer de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  à la matrice constante  $\tilde{\mathbf{A}}$  (les composantes de cette matrice ne dépendent que des valeurs initiales  $\mathbf{u}_\ell$  et  $\mathbf{u}_r$ ).

La matrice approchée doit vérifier un certain nombre de propriétés pour qu'une telle substitution soit possible :

1. la matrice doit être diagonalisable et posséder  $n$  valeurs propres réelles distinctes (pour que le problème soit toujours strictement hyperboliques) ;
2. une condition de consistance avec l'équation originale impose que pour tout vecteur  $\bar{\mathbf{u}}$

$$\lim_{\mathbf{u}_\ell, \mathbf{u}_r \rightarrow \bar{\mathbf{u}}} \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}}) ;$$

3. pour tout couple  $(\mathbf{u}_\ell, \mathbf{u}_r)$ , on a

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r), \quad (3.20)$$

ce qui veut dire que si la condition de choc est bien respectée. En effet, si  $(\mathbf{u}_\ell, \mathbf{u}_r)$  satisfont une condition de Rankine-Hugoniot (ils sont tous deux situés sur une courbe de choc, voir § 2.1.5), alors on a d'après la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) = \dot{s}(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r),$$

avec  $\dot{s}$  la vitesse de l'onde de choc, donc on a :  $\tilde{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r) = \dot{s}(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r)$ , ce qui montre que la relation de choc est également vérifiée dans le cas linéarisé. Notons au passage que s'il existe plusieurs façons de linéariser le problème initial, le respect de la condition de choc conduit à écarter beaucoup de prétendants.

La principale difficulté dans la détermination des matrices  $\tilde{\mathbf{A}}$  réside donc dans la propriété (3). En théorie, on peut construire de telles matrices en considérant une droite reliant  $\mathbf{u}_\ell$  à  $\mathbf{u}_r$  et en intégrant  $d\mathbf{F}$  le long de ce chemin ; la figure montre un tel chemin (ligne droite) en dimension  $n = 2$ . La position de tout point sur cette droite peut être décrite à l'aide de l'équation paramétrique

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_\ell + \xi(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell), \quad (3.21)$$

avec  $0 \leq \xi \leq 1$  ; cela implique  $d\mathbf{u} = d\xi(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell)$ . Si on intègre  $\mathbf{F}$  le long de chemin on a

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) &= \int_0^1 \frac{d\mathbf{f}}{d\xi} d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell) d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{A} d\xi \cdot (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell), \end{aligned}$$

ce qui implique, après comparaison avec la propriété (3) ci-dessus, qu'il nous faut définir la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  comme

$$\tilde{\mathbf{A}} = \int_0^1 \mathbf{A} d\xi,$$

c'est-à-dire la valeur moyenne de  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  sur un chemin reliant  $\mathbf{u}_\ell$  à  $\mathbf{u}_r$ . Le problème est d'arriver à obtenir un résultat analytique pour cette intégrale. Un autre problème est que rien ne garantit que la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  ainsi définie respecte la condition (1) ci-dessus. Une solution astucieuse pour contourner cette difficulté est due à [Roe \(1981\)](#).

Plutôt que d'intégrer  $d\mathbf{F}$  le long de la droite (3.21) dans le plan  $\mathbf{u}$ , on fait un changement de variable  $\mathbf{z} = g(\mathbf{u})$ , ce qui revient à intégrer le long d'une droite dans le plan  $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z}(\xi) = \mathbf{z}_\ell + \xi(\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_\ell), \quad (3.22)$$

avec  $\mathbf{z}_\ell = g(\mathbf{u}_\ell)$  et  $\mathbf{z}_r = g(\mathbf{u}_r)$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) &= \int_0^1 \frac{d\mathbf{f}}{d\xi}(\mathbf{z}(\xi)) d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{z}}{d\xi} d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{C} d\xi \cdot (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_\ell), \end{aligned}$$

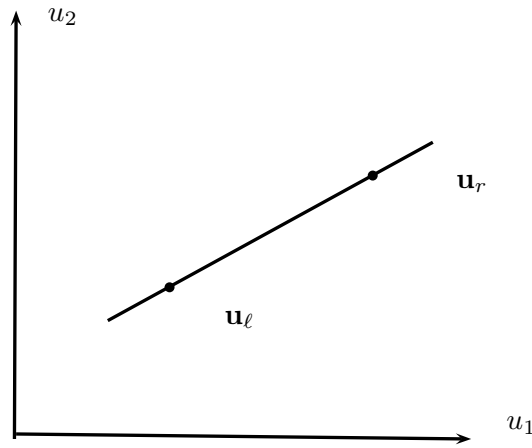


Figure 3.11 : chemin entre  $\mathbf{u}_\ell$  à  $\mathbf{u}_r$  dans le plan  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ .

avec  $\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{f}$ . Sur le même chemin (3.22), on intègre du

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell &= \int_0^1 \frac{d\mathbf{u}}{d\xi}(\mathbf{z}(\xi))d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{z}}{d\xi}d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{B}d\xi \cdot (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_\ell), \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{u}$ . L'équation implique qu'on a la relation

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{-1}, \quad (3.23)$$

avec  $\bar{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{B}}$  les intégrales de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B}$  sur le chemin (3.22). Roe (1981) a montré que pour plusieurs systèmes hyperboliques, dont les équations d'Euler et les équations de Saint-Venant, il est possible de contourner cette dernière difficulté en effectuant un changement de variable de la forme

$$\mathbf{z} = g(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{h}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{h\bar{u}} \end{bmatrix}.$$

L'exemple suivant permet d'illustrer l'application de la méthode de Roe dans le cas des équations de Saint-Venant. Dans la plupart des cas, la méthode de Roe donne de bons résultats. Toutefois, dans certains cas, la méthode peut fournir des résultats incorrects car elle peut générer des hauteurs d'eau négatives ou bien fournir des valeurs erronées (notamment parce que toutes les solutions au problème de Riemann, y compris les ondes de détente, sont discrétisées sous forme d'onde de choc). Il faut alors ajouter des correctifs appelés « correction d'entropie » (*entropy fix*) (voir LeVeque, 2002, pp. 323–327).

♣ **Exemple.** – Prenons l'exemple des équations de Saint-Venant, on a :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ \bar{u}h \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gu_1 - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & 2\frac{u_2}{u_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - \bar{u}^2 & 2\bar{u} \end{pmatrix}$$

À titre d'exercice, on peut vérifier que si l'on calcule  $\tilde{\mathbf{A}} = \int_0^1 \mathbf{A}d\xi$  le long du chemin (3.21), on aboutit à une matrice dont les composantes sont des fonctions rationnelles de  $h$  et  $\bar{u}$ . Avec



le changement de variables de Roe, on aboutit à des matrices dont les composantes sont des formes polynômiales simples. Après un peu de calcul, on trouve

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2\bar{z}_1 & 0 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & z_1 \\ 2gz_1\bar{h} & 2\bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

avec  $\bar{z}_i = (z_{\ell, i} + z_{r, i})/2$  et  $\bar{h} = (h_{\ell} + h_r)/2$ . On a donc finalement d'après l'équation (3.23)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\bar{h} - \hat{u}^2 & 2\hat{u} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

avec

$$\hat{u} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\sqrt{h_{\ell}}u_{\ell} + \sqrt{h_r}u_r}{\sqrt{h_{\ell}} + \sqrt{h_r}}.$$

On note tout de suite que l'on a

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_{\ell}, \mathbf{u}_r) = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}}) \text{ avec } \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{h} \\ \hat{u}\bar{h} \end{pmatrix},$$

ce qui permet de montrer que la matrice de Roe (3.24) vérifie bien les propriétés (1) à (3).

Il est à partir de là possible de construire un schéma numérique approché en se servant de la méthode de Godunov (3.12). Pour cela, il faut calculer les valeurs propres, les vecteurs propres à droite, et les coefficients  $\alpha^i$ . On a :

$$\lambda_1 = \hat{u} - \hat{c} \text{ et } \lambda_2 = \hat{u} + \hat{c},$$

avec  $\hat{c} = \sqrt{g\bar{h}}$ . On a

$$\mathbf{r}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{r}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} + \hat{c} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients  $\alpha^i$  sont donnés par

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n) \text{ avec } \mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{2\hat{c}} \begin{pmatrix} \hat{u} + \hat{c} & -1 \\ -\hat{u} + \hat{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

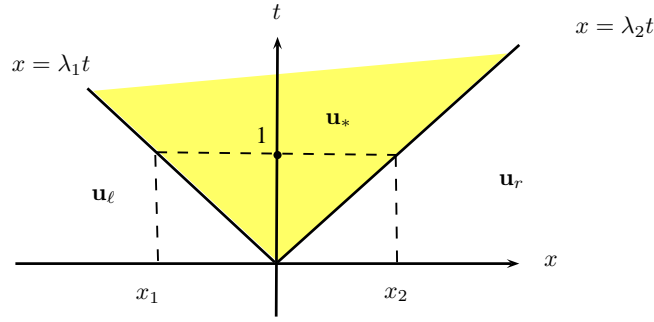
Le schéma de Godunov (3.12) est donc

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \sum_{j=1}^2 \lambda_j^+ \alpha_{i-1/2}^j \mathbf{r}^j + \sum_{j=1}^2 \lambda_j^- \alpha_{i+1/2}^j \mathbf{r}^j \right)$$

avec toujours  $\lambda^+ = \max(0, \lambda)$  et  $\lambda^- = \min(0, \lambda)$ .  $\square$

### Solveur de Harten, Lax, et van Leer

Le solveur HLL a été proposé par [Harten \*et al.\* \(1983\)](#). Il permet de contourner certaines lacunes du solveur de Roe (telles que la violation d'entropie et l'apparition de hauteur négative). L'idée fondamentale est de simplifier le problème de Riemann (3.18) en ne sélectionnant que les ondes qui ont la plus grande et la plus petite vitesse. Pour un système de  $n = 2$  équations hyperboliques, il n'y a pas de perte d'information, mais pour  $n > 2$  équations, on perd



**Figure 3.12 :** pour le schéma HLL, toute l'information comprise entre les deux caractéristiques  $x = \lambda_1 t$  et  $x = \lambda_2 t$  est remplacée par un état constant  $\mathbf{u}_*$  (fonction de  $\mathbf{u}_\ell$  et  $\mathbf{u}_r$ ).

totalemment l'information véhiculée par les  $n - 2$  ondes dont la vitesse est intermédiaire. La solution est composée de trois états constants (voir figure 3.12) :

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_\ell & \text{si } x/t < \lambda_1, \\ \mathbf{u}_* & \text{si } \lambda_1 \leq x/t \leq \lambda_2, \\ \mathbf{u}_r & \text{si } \lambda_2 < x/t, \end{cases} \quad (3.25)$$

Pour trouver  $\mathbf{u}_*$ , on va intégrer l'équation (3.18) sur le volume  $[x_1, x_2] \times [0, 1]$ , avec ici  $x_1 = \lambda_1$  et  $x_2 = \lambda_2$  puisque  $t = 1$  (voir fig. 3.12). On a

$$\int_0^1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt dx + \int_0^1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) dt dx = 0,$$

soit encore

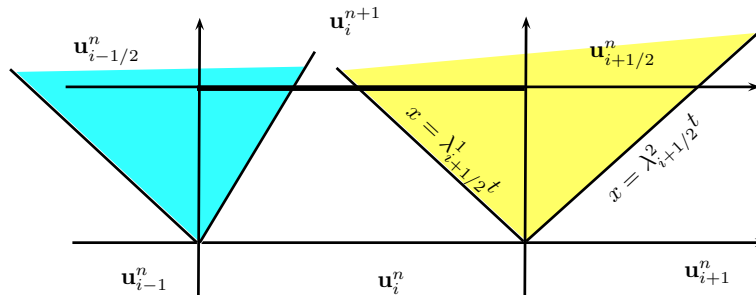
$$\int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{u}(x, 1) - \mathbf{u}(x, 0)) dx = - \int_0^1 (\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell)) dt,$$

ce qui permet d'aboutir à la relation suivante en tenant compte de la solution *ad hoc* (3.25):

$$\mathbf{u}_*(\lambda_2 - \lambda_1) - (\lambda_2 \mathbf{u}_r - \lambda_1 \mathbf{u}_\ell) = -\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell).$$

On en déduit

$$\mathbf{u}_* = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \lambda_2 \mathbf{u}_r + \lambda_1 \mathbf{u}_\ell}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (3.26)$$



**Figure 3.13 :** principe de résolution du schéma HLL.

Le schéma numérique est donné par l'équation (3.15) :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n),$$

On prendra garde que  $\mathbf{F}_{i-1/2}^n \neq \mathbf{f}(\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n)$  car  $\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n$  donnée par (3.26) est une valeur moyennant l'information sur tout un domaine autour de l'interface  $x_{i-1/2}$  et non la valeur particulière prise par  $\mathbf{u}$  le long de l'interface  $x_{i-1/2}$ . Pour déterminer  $\mathbf{F}_{i-1/2}^n$  dans le cas où  $\lambda_{i-1/2}^1 \leq 0 \leq \lambda_{i-1/2}^2$  (cela correspond au cas reporté sur la figure 3.13 où l'interface  $x_{i-1/2}$  est comprise entre deux des caractéristiques extrêmes), on peut soit intégrer sur un volume de contrôle s'appuyant sur l'interface (par exemple  $[x_{i-1/2}, x_{i-1/2} + \lambda_{i-1/2}^2 \Delta t] \times [t_n, t_{n+1}]$ ), soit se servir de la relation de Rankine-Hugoniot pour obtenir

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \lambda_{i-1/2}^2 (\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n - \mathbf{U}_i^n) \quad (3.27)$$

avec  $\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n$  donnée par (3.26) en posant  $\mathbf{u}_r = \mathbf{U}_i^n$  et  $\mathbf{u}_\ell = \mathbf{U}_{i-1}^n$ . Ce flux est également égal à

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n) + \lambda_{i-1/2}^1 (\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n - \mathbf{U}_{i-1}^n). \quad (3.28)$$

Dans le cas où  $\lambda_{i-1/2}^1 \geq 0$ , les ondes extrêmes se propagent toutes deux vers la droite et donc  $\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n)$ . Dans le cas où  $\lambda_{i-1/2}^2 \leq 0$ , les ondes extrêmes se propagent toutes deux vers la gauche et donc  $\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^n)$ . On peut donc synthétiser tout cela à travers l'équation

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n) & \text{si } \lambda_{i-1/2}^1 \geq 0, \\ \frac{\lambda_{i-1/2}^2 \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n) - \lambda_{i-1/2}^1 \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^n) + \lambda_{i-1/2}^2 \lambda_{i-1/2}^1 (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n)}{\lambda_{i-1/2}^2 - \lambda_{i-1/2}^1} & \text{si } \lambda_{i-1/2}^1 \leq 0 \leq \lambda_{i-1/2}^2, \\ \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^n) & \text{si } \lambda_{i-1/2}^2 \leq 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

Le schéma HLL est plus performant que le schéma de Roe dans bien des cas, mais pour les systèmes d'ordre supérieur à 2, ignorer une partie de l'information peut conduire à des erreurs significatives. Plusieurs approches ont été développées pour limiter le développement de ces erreurs (voir [Toro, 1997](#), chap. 10).

### 3.2.6 Traitement des termes sources

On s'intéresse au problème hyperbolique avec un terme source

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad (3.30)$$

où  $\mathbf{S}(\mathbf{u})$  est appelé « terme source » ; on suppose qu'il n'est fonction que de  $\mathbf{u}$ , mais non de ses dérivées. Une stratégie de résolution classique est appelée « étape fractionnaire » (*fractional step* en anglais) ou « séparation des opérateurs » (*operator splitting*). La méthode consiste tout d'abord à résoudre l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0,$$

par une méthode aux volumes finis, puis de résoudre une équation ordinaire

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{S}(\mathbf{u})$$

### 3.2.7 Schémas d'ordre 2

Si en principe le passage d'un schéma de Godunov d'ordre 1 à un schéma d'ordre 2 est possible, sa mise en pratique est délicate car la solution numérique développe des oscillations importantes dans les zones à fort gradient spatial (un phénomène appelé parfois phénomène de Gibbs). Il faut donc développer des méthodes spécifiques qui limitent l'amplitude de ces oscillations.

#### Méthode de Lax-Wendroff

Considérons l'équation d'advection suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

avec  $a$  une constante. Effectuons un développement limité à l'ordre 2

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + o((\Delta t)^2),$$

or comme on a par différenciation de l'équation d'advection

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Après substitution, on déduit

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - a \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

En discrétisant les gradients spatiaux par des différences finies centrées (voir § 3.1.1), on obtient le schéma suivant, appelé « schéma de Lax-Wendroff » :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} a (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 a^2 (Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n).$$

On peut reformuler ce schéma pour le mettre sous la forme d'une différence de flux comme pour la méthode des volumes finis (3.3) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n),$$

avec le flux moyen défini par

$$F_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} a (Q_i^n + Q_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2 (Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

On obtient donc un schéma précis à l'ordre 2. Tel quel, ce schéma est naturellement plus précis qu'un schéma à l'ordre 1. Toutefois, il est moins performant lorsque la solution présente des discontinuités ; dans ce cas-là, la solution numérique se met à osciller. L'idée des méthodes à grande résolution est de combiner des schémas d'ordre 2 et 1 : on emploie un schéma d'ordre 2 lorsque la solution est continue alors qu'un schéma d'ordre 1 est employé dès qu'une discontinuité est détectée. L'idée que l'on va développer dans ce qui suit est d'utiliser des « limiteurs » qui, comme leur nom l'indique, servent à limiter les effets de correction d'ordre 2 quand on estime que ceux-ci introduisent des fluctuations trop importantes.

### Fonction linéaire par morceau

Une façon d'obtenir des schémas d'ordre supérieur à 1 est d'utiliser des fonctions continues par morceaux, par exemple des fonctions linéaires par morceaux (voir figure 3.14) :

$$\tilde{u}(x, t_n) = U_i^n + \sigma_i^n(x - x_i) \text{ pour } x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad (3.31)$$

avec  $x_i$  le centre de chaque maille et  $\sigma_i^n$  la pente au sein de la maille  $i$ . Notons que quelle que soit  $\sigma_i^n$ , la moyenne de  $\tilde{u}(x, t_n)$  sur la cellule est  $U_i^n$ .

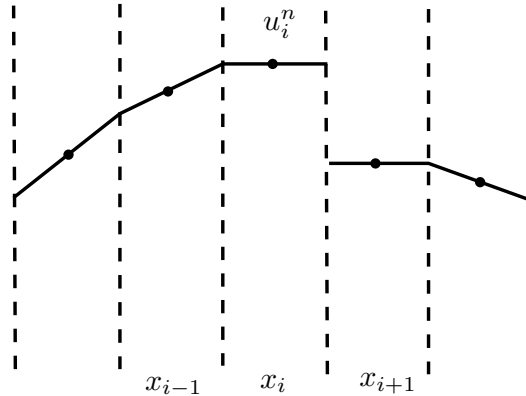


Figure 3.14 : fonction linéaire par morceaux.

On peut choisir entre plusieurs possibilités pour calculer la pente  $\sigma_i^n$ . Ainsi, le  $\sigma_i^n = 0$  redonne la méthode de Godunov. Le choix

$$\sigma_i^n = \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x},$$

(schéma de Fromm) est un choix naturel. Un choix, qui permettrait de limiter l'apparition d'oscillations, est le suivant

$$\sigma = \text{minmod} \left( \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x}, \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} \right),$$

où

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} |a| & \text{si } |a| < |b| \text{ and } ab > 0, \\ |b| & \text{si } |b| < |a| \text{ and } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab < 0, \end{cases}$$

# Bibliographie

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. 1964 *Handbook of Mathematical Functions*. Washington: National Bureau of Standards.
- ALCRUDO, F. & BENKHALDOUN, F. 2001 Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step. *Computers & Fluids* **30**, 643–671.
- ANCEY, C., IVERSON, R., RENTSCHLER, M. & DENLINGER, R. P. 2008 An exact solution for ideal dam-break floods on steep slopes. *Water Resour. Res.* **44**, W01430.
- COURANT, R. & FRIEDRICH, K. 1948 *Supersonic Flow and Shock Waves*. New York: Intersciences Publishers.
- DRESSLER, R. 1958 Unsteady non-linear waves in sloping channels. *Proc. R. Soc. London ser. A* **247**, 186–198.
- GARABEDIAN, P. 1964 *Partial Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.
- HARTEN, A., LAX, P. & VAN LEER, B. 1983 On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.* **25**.
- HOGG, A. 2006 Lock-release gravity currents and dam-break flows. *J. Fluid Mech.* **569**, 61–87.
- HUPPERT, H. 1982 Flow and instability of a viscous current down a slope. *Nature* **300**, 427–429.
- KARELSKY, K., PAPKOV, V., PETROSYAN, A. & TSYGANKOV, D. 2000a The initial discontinuity decay problem for shallow water equations on slopes. *Phys. Lett. A* **271**, 349–357.
- KARELSKY, K., PAPKOV, V., PETROSYAN, A. & TSYGANKOV, D. 2000b Particular solutions of shallow-water equations over a non-flat surface. *Phys. Lett. A* **271**, 341–348.
- KEVORKIAN, J. 2000 *Partial Differential Equations, Analytical Solution Techniques*. New York: Springer.
- LEVEQUE, R. 2002 *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MANGENEY, A., HEINRICH, P. & ROCHE, R. 2000 Analytical solution for testing debris avalanche numerical models. *Pure Appl. Geophys.* **157**, 1081–1096.
- OSTAPENKO, V. 2003a Dam-break flows over a bottom drop. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **44**, 839–851.
- OSTAPENKO, V. 2003b Dam-break problem over a bottom step. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **44**, 495–505.
- ROE, P. 1981 Approximate Riemann solvers, parameters vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.* **44**, 357–372.
- SMOLLER, J. 1982 *Shock waves and reaction-diffusion equations*. New York: Springer.
- STOKER, J. 1957 *Water Waves*. New York: Interscience Publishers.
- TORO, E. 1997 *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Berlin: Springer.
- TORO, E. 2001 *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Chichester: Wiley.
- TORO, E. & GARCIA-NAVARRO, P. 2007 Godunov-type methods for free-surface shallow flows: A review. *J. Hydraul. Res.* **45**, 736–751.
- WU, C., HUANG, G. & ZHENG, Y. 1999 Theoretical solution of dam-break shock wave. *J. Hydraul. Eng.* **125**, 1210–1220.

ZAUDERER, E. 1983 *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.



# Index

- adjoint, 30
- algorithme
  - de Thomas, 112
- arc
  - spatial, 93
  - temporel, 93
- auto-similarité, 43
  
- caractéristique, 28, 88
- champ, 3
- champ caractéristique, 82
- changement de variable, 55
- choc, 21, 35, 36, 62, 94
- condition
  - aux limites, 23, 33, 87
  - aux limites de Dirichlet, 23, 35
  - aux limites de Neuman, 23, 36
  - aux limites mixte, 36
  - CFL, 117
  - choc, 87, 91
  - Courant-Friedrichs-Lewy, 117
  - d'entropie, 85
  - de Courant, 123
  - de dégénérescence, 72, 82
  - de détente, 76
  - de Lax, 66
  - de Rankine-Hugoniot, 62, 71, 85
  - initiales, 19, 23
  - saut, 75
- conservation
  - système conservatif, 52
- coordonnées
  - caractéristiques, 28
  - cartésiennes, 3
  - cylindriques, 3
  - sphériques, 3
- courbe
  - caractéristique, 28, 39, 56, 62
  - de Hugoniot, 69
  
- dérivée
  - matérielle, 16
  - particulaire, 16
  - partielle, 8
- déterminant, 7
  
- développement
  - de Taylor, 109
- différentielle
  - exacte, 10
  - totale, 9
- domaine d'influence, 35
  
- équation
  - caractéristique, 22, 47
  - d'Euler-Darboux, 96
  - d'Euler-Lagrange, 24
  - de Bernoulli, 19
  - de Boussinesq, 97
  - de Buckley-Leverett, 66
  - de diffusion, 110
  - de Helmholtz, 96
  - de Huppert, 98
  - de Klein-Gordon, 96
  - de la chaleur, 25, 110
  - de la courbe de remous, 19
  - de Laplace, 25
  - de Pascal, 19
  - de Saint-Venant, 74, 97, 101, 126
  - des ondes, 25
  - elliptique, 21, 26
  - homogène, 21
  - hyperbolique, 21, 26
  - linéaire, 19
  - parabolique, 21, 26
  - quasi-linéaire, 19
  - variationnelle, 24
  
- facteur intégrant, 56
- fonction
  - de Riemann, 31
- fonctionnelle, 24
- forme
  - canonique, 21, 26
  - caractéristique, 21
- front, 107
- frontière
  - spatiale, 35, 37
  - temporelle, 35, 37
  
- hodographe, 39
- hyperbolique

- équation hyperbolique, 51
- intégrale
  - première, 22
- invariance, 39, 43
- invariant
  - de Riemann, 56, 83, 93
  - invariant de Riemann, 76, 82, 88
- loi
  - de conservation, 52
- méthode
  - étape fractionnaire, 130
  - asymptotique, 42
  - aux éléments finis, 109
  - aux différences finies, 109
  - aux perturbations, 41
  - aux volumes finis, 109, 113
  - de Fromm, 132
  - de Green, 39
  - de l'hodographe, 39, 92
  - des caractéristiques, 39
  - hodographe, 58
  - Lax-Wendroff, 131
  - TVD, 107
- maillage, 107
- mascaret, 64
- matrice, 3
- minmod, 132
- nabla, 12
- onde
  - compression, 90
  - contact, 86, 88
  - détente, 88, 90
  - de choc, 65, 67, 71, 85, 88
  - de détente, 65, 85
  - mixte, 66, 82
  - progressive, 90
  - régressive, 90
  - simple, 65, 67, 71, 84, 90, 92, 93
  - simple centrée, 72
  - transsonique, 121
- opérateur
  - adjoint, 30
  - déterminant, 7
  - divergence, 14
  - gradient, 12
  - laplacien, 15
  - trace, 7
- ordre, 19, 20, 107
- principe
  - Hamilton, 24
  - variationnel, 24
- problème
  - de Cauchy, 28, 35
  - de Riemann, 64, 68, 72
- produit
  - dyadique, 6
  - mixte, 7
  - scalaire, 5
  - simplement contracté, 5
  - tensoriel, 6
  - tensoriel doublement contracté, 7
  - vectorel, 5
- Rankine-Hugoniot, 88
- ressaut, 75
- rupture de barrage, 101
- séparation des variables, 39
- scalaire, 3
- schéma
  - amont, 117
  - bien équilibré, 107
  - de Crank-Nicolson, 112
  - de Godunov, 118
  - explicite, 110
  - Godunov, 123
  - implicite, 112
  - Lax-Friedrichs, 115
  - Lax-Wendroff, 131
  - stable, 109
- similitude, 47
- solution
  - auto-similaire, 43, 47
  - d'Alembert, 35
  - faible, 32, 52
  - régulière, 32
  - similaire, 47
  - singulière, 22
- solveur
  - HLL, 127
  - Roe, 124
- source, 51, 89, 101, 130
- stabilité, 109
- système
  - caractéristique, 56
  - conservatif, 52

- hyperbolique, 51
- linéaire, 55
- non linéaire, 56
  
- tenseur, 3
- terme source, 130
- théorème
  - de Schwarz, 10
- trace, 7
  
- variable
  - dépendante, 20
  - de Riemann, 52, 54, 56
  - indépendante, 20
- vecteur, 3
  - propre, 67
- vitesse caractéristique, 62
  
- zone vide, 101