

Christophe ANCEY

LABORATOIRE HYDRAULIQUE ENVIRONNEMENTALE (LHE)

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Écublens

CH-1015 Lausanne

Notes de cours

Hydraulique à surface libre

Phénomènes de propagation : ondes et ruptures de barrage

Bases mathématiques, outils de simulations, applications

version 2.4 du 15 mai 2010

Table des matières

1	Équations de conservation	9
1.1	Théorèmes de transport	9
1.1.1	Théorème de Reynolds	9
1.1.2	Conservation de la masse	10
1.1.3	Conservation de la quantité de mouvement	11
1.1.4	Conservation de l'énergie, théorème de Bernoulli	14
1.2	Équations de Navier-Stokes	16
1.2.1	Forme générique des équations de Navier-Stokes	16
1.2.2	Conditions aux limites	16
1.2.3	Régimes d'écoulement	17
1.3	Équations de Saint Venant	18
1.3.1	Dérivation des équations	18
1.3.2	Forme conservative et non conservative	22
1.3.3	Synthèse	22
1.3.4	Limites d'utilisation des équations de Saint-Venant	24
2	Équations de la mécanique	33
2.1	Typologie des équations	33
2.1.1	Équation scalaire	33
2.1.2	Équation différentielle ordinaire	33
2.1.3	Équation aux dérivées partielles	34
2.1.4	Équation variationnelle	38
2.2	Équations de la mécanique	39
2.2.1	Équation de convection	39
2.2.2	Équation de la chaleur (diffusion)	39
2.2.3	Équation de convection-diffusion	42
2.2.4	Équation des ondes	44
2.2.5	Équation de Laplace	46
2.3	Conditions aux limites pour les problèmes hyperboliques	47
3	Méthodes de résolution analytique	53
3.1	Vue générale sur les méthodes de résolution des équations	53

3.1.1	Méthode aux perturbations	54
3.1.2	Méthode asymptotique	55
3.1.3	Solutions auto-similaires	55
3.2	Résolution des équations hyperboliques du premier ordre	61
3.2.1	Courbes caractéristiques et variables de Riemann	62
3.2.2	Formation d'un choc	72
3.2.3	Problème de Riemann pour des problèmes scalaires ($n = 1$)	74
3.2.4	Systèmes de dimension $n = 2$	77
3.2.5	Généralisation à des systèmes à n dimensions	89
3.2.6	Quelques solutions analytiques au problème Riemann	99
3.2.7	Solution des équations avec un terme source	99
3.2.8	Méthode de l'hodographe	102
4	Méthodes numériques	117
4.1	Méthodes numériques	119
4.1.1	Méthode aux différences finies	119
4.1.2	Méthode aux volumes finis	123
4.2	Méthode de résolution numérique des équations hyperboliques	126
4.2.1	Équation d'advection : schéma amont	126
4.2.2	Schéma de Godunov pour les systèmes linéaires	128
4.2.3	Schéma de Godunov pour les équations scalaires non linéaires	131
4.2.4	Schéma de Godunov pour les systèmes d'équations non linéaires	133
4.2.5	Schéma de Godunov approché	134
4.2.6	Traitement des termes sources	140
4.2.7	Schémas d'ordre 2	141
5	Rupture de barrage	143
5.1	Rupture de barrage en ingénierie	143
5.1.1	Rupture de grand barrage	145
5.1.2	Rupture de petit barrage d'accumulation	152
5.1.3	Rupture de lac morainique et glaciaire	154
5.1.4	Rupture de digue	156
5.2	Rupture de barrage en régime laminaire	159
5.2.1	Notation et équations du mouvement	159
5.2.2	Régimes purement diffusif et diffusif-convectif	161
5.2.3	Régime gravitaire	166
5.3	Rupture de barrage d'un fluide non visqueux	171
5.3.1	Rupture de barrage d'un volume infini (solution de Ritter)	171
5.3.2	Rupture de barrage de volume fini sur un fond horizontal	175

5.3.3	Rupture de barrage de volume fini sur un plan incliné	182
5.4	Rupture de barrage dans un lit mouillé	188
5.5	Effet du frottement	191
5.5.1	Méthode de Whitham : rupture de barrage sur fond plat	191
5.5.2	Solution de Hogg	194
5.6	Méthodes numériques de résolution	198
5.6.1	Résolution par une méthode lagrangienne	199
5.6.2	Méthode des caractéristiques	204
5.6.3	Méthode des différences finies	207
6	Ondes de crue et vagues	215
6.1	Phénomènes physiques	215
6.1.1	Inondation et crue	215
6.1.2	Crues torrentielles	218
6.1.3	Vagues	221
6.2	Équations de Saint-Venant et ondes	226
6.3	Onde cinématique	227
6.3.1	Définition	227
6.3.2	Équation d'onde cinématique	228
6.4	Onde diffusive	230
6.5	Onde dynamique	232
6.5.1	Calcul approximatif	232
6.5.2	Calcul plus complet	232
6.6	Trains d'onde	238
6.6.1	Problématique	238
6.6.2	Stabilité linéaire des équations de Saint-Venant	239
6.7	Vague	241
6.7.1	Classification	241
6.7.2	Ondes linéaires	243
6.7.3	Ondes de Stokes	244
6.7.4	Ondes cnoïdales	244
6.7.5	Ondes solitaires	245
6.8	Tsunami	248
6.8.1	Introduction	248
6.8.2	Modèle approximatif de tsunami arrivant de haute mer	249
6.9	Vague d'impulsion	252
6.9.1	Similitude du problème	253
6.9.2	Résultat des expériences pour des blocs solides	254

6.9.3	Résultat des expériences pour des écoulements granulaires	254
6.9.4	Remontée	257
6.10	Mascaret	258
6.10.1	Phénomène physique	258
6.10.2	Ressaut mobile	260
Annexe		262
A	Annexe A : rappels de mathématiques	263
A.1	Scalaire, vecteurs, et tenseurs	263
A.1.1	Coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques	263
A.1.2	Produits	265
A.2	Opérations de différentiation	269
A.2.1	Dérivée	269
A.2.2	Différentielle	269
A.3	Quelques opérateurs	273
A.3.1	Opérateur gradient	273
A.3.2	Opérateur divergence	275
A.3.3	Opérateur laplacien	276
A.3.4	Dérivée totale ou dérivée matérielle ou dérivée particulière	277
A.3.5	Quelques relations sur les opérateurs	279
A.4	Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre .	281
A.4.1	Équations hyperboliques	284
A.4.2	Solutions faibles des problèmes hyperboliques	288
B	Annexe B : quelques rappels d'hydraulique	291
B.1	Introduction	291
B.1.1	Généralités	291
B.1.2	Un peu de vocabulaire et des notations	291
B.2	Régime permanent uniforme	293
B.2.1	Relation d'équilibre pour un régime permanent uniforme	293
B.2.2	Loi de frottement	294
B.2.3	Hauteur normale selon la section d'écoulement	297
B.3	Courbes de remous et écoulement critique	299
B.3.1	Hauteur critique et régimes associés	299
B.3.2	Ressaut hydraulique	300
	Bibliographie	302

Avant-propos

CE RECUEIL DE NOTES contient les principales notions du cours d'hydraulique avancé. L'objet est ici de fournir les bases mathématiques et les concepts physiques permettant de faire des calculs d'écoulements fortement instationnaires dans les rivières. Les notions essentielles des méthodes numériques sont également vues.

J'emploie les notations usuelles modernes :

- les exemples sont le plus souvent introduits à l'aide de « ♣ **Exemple.** – » et on indique la fin d'un exemple par le symbole « qed » □ ;
- les problèmes d'interprétation sont indiqués par le symbole $\hat{\otimes}$ dans la marge ;
- les vecteurs, matrices, et tenseurs sont en gras ;
- les variables sont en italique ;
- les fonctions, opérateurs, et nombres sans dimension sont en roman ;
- le symbole O (O majuscule) signifie généralement « est de l'ordre de ». En fait, la définition est plus précise et dans certains cas peut ne signifier pas l'équivalence des ordres de grandeurs. Lorsque par exemple on a $u = O(v)$ avec $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions continues dans le voisinage d'un point M , alors cela veut dire que la limite $\lim_{x \rightarrow M} u/v$ est finie (elle n'est ni nulle ni infinie) ;
- le symbole o (o minuscule) signifie « est négligeable devant » ;
- je n'emploie pas la notation D/Dt pour désigner la dérivée particulaire, mais d/dt (qu'il ne faudra donc pas confondre avec la différentielle ordinaire selon t). Je considère que le contexte est suffisant pour renseigner sur le sens de la différentielle et préfère garder le symbole D/Dt pour d'autres opérations différentielles plus complexes ;
- le symbole $\propto$ veut dire « proportionnel à » ;
- le symbole $\sim$ ou $\approx$ veut dire « à peu près égal à » ;
- les unités employées sont celles du système international : mètre [m] pour les longueurs, seconde [s] pour le temps, et kilogramme [kg] pour la masse. Les unités sont précisées entre crochets ;
- pour la transposée d'une matrice ou d'un vecteur, j'emploie le symbole $\dagger$ en exposant : $\mathbf{A}^\dagger$ veut dire « transposée de $\mathbf{A}$ ».

Remerciements pour le relecteurs suivant : Sébastien Wiederseiner.

Ce travail est soumis aux droits d'auteurs. Tous les droits sont réservés ; toute copie, partielle ou complète, doit faire l'objet d'une autorisation de l'auteur.

La gestion typographique du français a été réalisée avec L^AT_EX à l'aide du package *french.sty* de Bernard Gaulle.

Nomenclature

Symboles romans

Variable	Signification
a	rayon d'une particule
B	largeur au miroir
C	coefficient de Chézy
C_f	coefficient de frottement
c	célérité des ondes
$\mathbf{D}$	tenseur des taux de déformation
f	coefficient de frottement (Darcy-Weisbach)
g	accélération de la gravité
h	hauteur d'écoulement
h_c	hauteur critique
h_n	hauteur normale
$\mathbf{k}$	vecteur normal unitaire
k_s	rugosité
K	coefficient de Manning-Strickler
ℓ	échelle de longueur
ℓ	largeur
L_*	longueur caractéristique
$\mathbf{n}$	vecteur normal unitaire
p	pression
P_*	échelle de pression
Q	débit
q	débit par unité de largeur
R	rayon de courbure
R_H	rayon hydraulique
Re	nombre de Reynolds
S	section d'écoulement
$\mathbf{T}$	tenseur des extra-contraintes (appelé encore partie déviatorique)
t	temps
u	vitesse, composante de la vitesse dans la direction x
u_*	vitesse de glissement, vitesse de cisaillement
$\bar{u}$	vitesse moyennée selon la hauteur d'écoulement
$\langle u \rangle$	vitesse moyennée dans le temps
$\mathbf{u}$	vitesse
$\mathbf{u}'$	fluctuation de vitesse
U_*	échelle de vitesse
v	vitesse, composante de la vitesse dans la direction y
v	vitesse quadratique moyenne
$\mathbf{v}$	vitesse
$\mathcal{V}$	volume de contrôle

Symboles grecs

Variable	Signification
χ	périmètre mouillé
δ	fonction de Dirac
δ	petite variation
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement
ϵ	rapport d'aspect
κ	constante de von Kármán
μ	viscosité dynamique
ϱ	masse volumique
σ	contrainte
σ	contrainte normale
θ	angle de pente
τ	contrainte de cisaillement
τ_p	contrainte de cisaillement à la paroi
ξ	variable de similitude

Équations de conservation

1.1 Théorèmes de transport

LES LOIS DE LA MÉCANIQUE s'écrivent différemment selon le type de description choisie, mais elles expriment les mêmes principes. Ces principes sont au nombre de trois :

- la masse se conserve ;
- la variation de quantité de mouvement (masse $\times$ vitesse) est égale à la somme des forces appliquées ;
- l'énergie totale se conserve : c'est le premier principe de la thermodynamique.

Ici on va chercher à exprimer ces principes de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) pour des systèmes fluides. Il existe une multitude de représentations possibles du même principe :

- formulation sur un volume de contrôle (formulation dite *globale* ou *intégrale*) ou bien pour un volume infinitésimal (équation dite *locale*) ;
- formulation sur des volumes de contrôle ouverts ou fermés.

Cette multitude s'avère fort pratique car cela permet une meilleure compréhension physique et une résolution plus simple des problèmes.

1.1.1 Théorème de Reynolds

La formule de Leibniz permet de différentier par rapport au temps des intégrales, dont les bornes sont fonctions du temps :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t)) \frac{db}{dt} - f(a(t)) \frac{da}{dt}.$$

Cette formule se généralise à des intégrales multiples (c'est-à-dire des intégrales sur des volumes au lieu d'intégrales sur des intervalles). On obtient la relation suivante appelée « théorème de transport » :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,} \quad (1.1)$$

où V est un volume de contrôle contenant une certaine masse de fluide, S est la surface enveloppant ce volume, et $\mathbf{n}$ est la normale à la surface S ; la normale $\mathbf{n}$ est unitaire ($|\mathbf{n}| = 1$) et orientée vers l'extérieur. Cette relation écrite ici pour une fonction scalaire f s'étend sans problème à des vecteurs $\mathbf{f}$ quelconques.

La relation (1.1) est fondamentale car elle permet d'obtenir toutes les équations fondamentales de la mécanique. Elle peut s'interpréter de la façon suivante :

La variation temporelle d'une quantité f définie sur un volume de contrôle V est égale à la somme de :

- la variation de f au cours du temps au sein du volume de contrôle (variation dite locale) ;
- le flux de f à travers la surface S enveloppant le volume de contrôle (flux = ce qui entre – ce qui sort de V).

Le théorème de transport peut également s'écrire sous la forme suivante (en se servant du théorème de Green-Ostrogradski) :

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right) dV$$



Attention à la notion de volume de contrôle « matériel » : c'est un volume fluide, ses frontières sont fluides et se déplacent comme le reste du fluide ; la vitesse $\mathbf{u}$ à la frontière S coïncident avec la vitesse locale du fluide. S'il en est autrement, on parle de volume (de contrôle) *arbitraire* et la vitesse $\mathbf{u}$ à la frontière S ne correspond pas celle du fluide. Par exemple si on prend un volume arbitraire V fixe au cours du temps alors $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ le long de S et

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV.$$

Un corollaire important du théorème de transport est le « théorème de Reynolds »¹ qui s'applique à des fonctions f massiques, c'est-à-dire que l'on peut écrire sous la forme ϱf , avec ϱ la masse volumique du fluide.

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho f dV = \int_V \varrho \frac{d}{dt} f dV. \quad (1.2)$$

✂ **Démonstration.** La démonstration est relativement simple :

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho f dV = \int_V \left(\frac{\partial \varrho f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho f \mathbf{u}) \right) dV = \int_V \left(\varrho \frac{\partial f}{\partial t} + \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \frac{\partial \varrho}{\partial t} + f \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) \right) dV$$

Compte tenu de l'équation de continuité [voir éq. (1.17) ci-dessous] et en identifiant la forme $df/dt = \partial f / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla f$, on tire le théorème de Reynolds. $\square$

1.1.2 Conservation de la masse

On applique le théorème de transport (1.1) à la fonction scalaire $f = \varrho$. On déduit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho dV = \int_V \frac{\partial \varrho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_S \varrho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

1. Osborne Reynolds (1842–1912) était un mécanicien britannique, dont le nom est associé au nombre sans dimension qui sert à distinguer les écoulements laminaires et turbulents. Expérimentateur et théoricien, Reynolds a étudié les équations de Navier-Stokes et a proposé de nombreux développements théoriques (théorie de la lubrification, décomposition des vitesses, et moyenne des équations de Navier-Stokes).

avec V un volume matériel et S la surface enveloppant ce volume. En utilisant le théorème de la divergence (Green-Ostrogradski), on tire :

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho dV = \int_V \left(\frac{\partial \varrho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) \right) dV$$

On a égalé la dérivée de la masse avec 0 car dans la plupart des cas, la masse se conserve au cours du temps s'il n'y a pas de création de masse ou de perte au sein d'un volume matériel. De plus, si ϱ est continue (pas « d'onde de choc » par exemple), alors on peut écrire

$$\boxed{\frac{\partial \varrho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \varrho \mathbf{u} = 0.} \quad (1.3)$$

Cette équation s'appelle l'équation de conservation locale de la masse ou bien encore *équation de continuité*. On peut encore l'écrire :

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Si le fluide est incompressible ou l'écoulement isochore : $\varrho = \text{constante}$, donc l'équation de continuité devient :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.}$$

C'est l'équation dont on se servira le plus dans la suite de ce cours. Écrite sous forme algébrique, cette équation s'écrit en dimension 2 :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,}$$

et en dimension 3

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

avec $\mathbf{u} = (u, v, w)$ le champ de vitesse.

1.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

Formulation macroscopique

On applique le théorème de transport (1.1) à la fonction vectorielle représentant la quantité de mouvement locale $f = \varrho \mathbf{u}$:

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{u} dV = \int_V \frac{\partial \varrho \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_S \varrho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Il existe d'autres variantes permettant d'exprimer la dérivée matérielle de $\varrho \mathbf{u}$. En utilisant le théorème de la divergence, on tire :

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{u} dV = \int_V \left(\frac{\partial \varrho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \varrho \mathbf{u} \mathbf{u} \right) dV,$$

ou bien en servant en plus de l'équation de continuité

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{u} dV = \int_V \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} \right) dV.$$

Attention dans ces deux équations, $\mathbf{u}\mathbf{u}$ représente un tenseur d'ordre 2.



Le principe fondamental de la dynamique veut que toute variation (temporelle) de quantité de mouvement résulte de l'application de forces. Donc, on peut écrire une relation générale de la forme

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{u} dV = \text{forces appliquées au volume } V.$$

Les forces appliquées comprennent les forces de volume (poids) et les forces de surface agissant à la surface du volume. Il s'ensuit que la forme macroscopique complète des équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{u} dV &= \underbrace{m\mathbf{g}}_{\text{poids}} + \underbrace{\int_S \boldsymbol{\sigma} dS}_{\text{force de surface}}, \\ &= \int_V \varrho \mathbf{g} dV + \int_V \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$ désigne la contrainte, $\boldsymbol{\Sigma}$ le tenseur des contraintes. On rappelle que le tenseur des contraintes se décompose en tenseur des pressions $-p\mathbf{1}$ (avec $\mathbf{1}$ le tenseur identité) et un tenseur des extra-contraintes $\mathbf{T}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}.$$

Le tenseur $\mathbf{T}$ dépend de la nature du fluide étudié ou du niveau d'approximation :

- $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ correspond au cas des fluides parfaits (ou non visqueux) et les équations du mouvement qui en résultent sont appelées *équations d'Euler* ;
- $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$ correspond au cas des fluides newtoniens et les équations du mouvement qui en résultent sont appelées *équations de Navier-Stokes*. Elles sont examinées en détail au § 1.2 ;
- $\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{D})$ correspond au cas des fluides non newtoniens « simples », avec $\mathcal{F}$ la *loi de comportement du fluide*. Les équations du mouvement résultantes sont appelées *équations de Cauchy*². Les fluides non simples sont les fluides pour lesquels il n'y a pas de relation univoque entre tenseurs des contraintes et des taux de déformations.

Formulation locale

Une application du théorème de Green-Ostrogradski permet d'aboutir à la *formulation locale* des équations de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\varrho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = \varrho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T},} \quad (1.4)$$

car $\nabla \cdot (p\mathbf{1}) = p\nabla \cdot (\mathbf{1}) + \mathbf{1} \cdot \nabla p = \nabla p$. Comme précédemment on a supposé pour passer de la formulation macroscopique à la forme locale que les différents champs (vitesse et masse volumique) étaient continus. L'équation locale n'est pas valable pour une onde de choc ou bien un ressaut hydraulique ; dans ce cas-là, il faut appliquer

- soit les formulations intégrales de la conservation de quantité de mouvement pour éviter d'avoir à traiter la discontinuité ;

2. Il n'y a pas de consensus sur l'appellation de cette équation dans la littérature technique.

- soit ajouter des conditions supplémentaires qui viennent compléter les équations locales qui restent valables de part et d'autre de la discontinuité. De telles relations sont appelées *relations de Rankine-Hugoniot* ou bien conditions de choc.

Le présent cours va donner lieu à plusieurs applications de ces techniques.

On peut encore écrire l'équation (1.4) sous une forme condensée :

$$\varrho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p_* + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

où l'on associe le terme gravitaire $\varrho \mathbf{g}$ au terme du gradient de pression et, ce faisant, on a introduit la *pression généralisée* $p_* = p + \psi$ et ψ le *potentiel gravitaire* tel que $\varrho \mathbf{g} = -\nabla \psi$. Cette formulation est par exemple utile en hydraulique en charge pour traiter les effets de la gravité en termes de pression généralisée.

Les équations locales peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \varrho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (1.5)$$

ou bien :

$$\boxed{\varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \varrho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}}, \quad (1.6)$$

où l'on prendra bien garde à la position de la masse volumique ϱ dans les termes différentiels. La dernière équation (1.6) est la plus employée. La principale différence est liée à la place de la masse volumique ϱ . Si l'écoulement est isochore ou le matériau incompressible, ces deux équations sont trivialement obtenues puisque ϱ est constante. L'équation (1.6) ou ses variantes s'appelle l'équation de conservation de la quantité de mouvement ou bien l'équation de Newton ou bien encore l'*équation fondamentale de la dynamique*. Le cas particulier où $\mathbf{T} = 0$ correspond aux équations d'Euler, qui comme on l'a précisé plus haut, constituent le jeu d'équations du mouvement le plus simple qu'on puisse imaginer et qui permette de résoudre un grand nombre de problèmes pratiques en ingénierie (dynamique des gaz, écoulements à grande vitesse, etc.) :

$$\boxed{\varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \varrho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \varrho \mathbf{g} - \nabla p}, \quad (1.7)$$

En dimension 2, l'équation de conservation (1.6) peut être projetée de la façon suivante dans un repère cartésien

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \varrho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \\ \varrho \frac{\partial v}{\partial t} + \varrho u \frac{\partial v}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial v}{\partial y} &= \varrho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y}, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{u} = (u, v)$ les composantes du vecteur vitesse et (g_x, g_y) les composantes du vecteur gravité.

Attention à la notation $\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}$. Cela ne signifie pas le produit entre le vecteur $\mathbf{u}$ et le tenseur (matrice) $\nabla \mathbf{u}$. En fait, en toute rigueur, il faudrait écrire : $(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}$, les parenthèses servant à indiquer que l'opérateur différentiel $\mathbf{u} \nabla$ est appliqué au vecteur $\mathbf{u}$.



1.1.4 Conservation de l'énergie, théorème de Bernoulli

Premier principe de la thermodynamique

Rappelons que le premier principe de la thermodynamique énonce que l'énergie totale E , varie à cause du travail des forces extérieures et du flux de chaleur

$$\delta E = \delta W + \delta Q,$$

avec δE la variation d'énergie totale, c'est-à-dire l'intégrale sur le volume de contrôle de l'énergie cinétique k et l'énergie interne ϱe (e étant l'énergie interne massique), δW le travail des forces extérieures au sein du volume de contrôle, δQ la quantité de chaleur à travers la surface de contrôle S . Au lieu de parler en termes de travail, on peut parler en termes de puissance puisque si l'on divise l'équation précédente par un petit incrément de temps δt

$$\frac{\delta E}{\delta t} = \frac{\delta W}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta t},$$

et en faisant tendre δt vers 0, on obtient

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V (k + \varrho e) dV}_{\text{taux de variation de l'énergie totale } E} = \underbrace{\int_V \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dS}_{\dot{W}} - \underbrace{\int_S \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{n} dS}_{\dot{Q}},$$

avec $\mathbf{j}_Q$ le *flux de chaleur* (voir § A.3.1), $\dot{W}$ le taux de variation du travail (ou puissance) des forces extérieures, $\dot{Q}$ le flux de chaleur qui passe par unité de temps à travers la surface S , et $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte exercée par le milieu extérieur sur le volume de contrôle sur une facette dS orientée par $\mathbf{n}$.

Examinons maintenant de plus près la puissance des forces extérieures. Cette puissance comprend des termes positifs (puissance fournie au volume de contrôle) et négatifs (puissance dissipée au sein du volume ou aux frontières). La puissance fournie au volume comprend généralement la puissance apportée par la force de gravité et les forces de pression (ce n'est pas une règle absolue) tandis que la dissipation d'énergie résulte généralement des extra-contraintes (dissipation visqueuse dans le cas d'un fluide newtonien). Comme précédemment pour les contraintes, il est plus sage de faire une décomposition entre puissances dues à des forces de volumes et puissances dues à des forces de surface sans se soucier du signe de ces contributions :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \text{puissance fournie au volume } V + \text{puissance dissipée aux frontières et dans } V, \\ &= \int_V \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dS, \end{aligned}$$

Par définition de la contrainte via le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$, on a

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{1} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{n},$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_V \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{u} \cdot (-p\mathbf{n} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS, \\ &= \int_V \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS, \end{aligned} \tag{1.8}$$

car $\mathbf{T}$ est symétrique. La formulation macroscopique du premier principe de la thermodynamique est donc le suivant

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V (k + \varrho e) dV = \int_V \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q) \cdot \mathbf{n} dS.} \quad (1.9)$$

On souhaite disposer d'une formulation locale de ce principe. L'étape suivante consiste donc à écrire les intégrale de surface apparaissant dans le membre de droite de l'équation (1.9) sous forme d'intégrales de volumes. l'application du théorème de Green-Ostrogradski fournit immédiatement

$$\int_S (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q) dV.$$

En substituant cette dernière relation dans l'équation (1.9), on arrive finalement à l'équation locale de conservation de l'énergie totale

$$\boxed{\frac{d}{dt} (k + \varrho e) = \varrho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q).} \quad (1.10)$$

Conservation de l'énergie cinétique

Il est possible d'obtenir une relation locale pour le taux de variation de l'énergie cinétique en multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.6) par la vitesse $\mathbf{u}$

$$\varrho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\varrho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) = \varrho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T},$$

et de là, en remplaçant les termes de la forme $\mathbf{u} \partial \mathbf{u}$ par $\partial |\mathbf{u}|^2/2$, on arrive à

$$\frac{1}{2} \varrho \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial t} + \frac{\varrho}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla (|\mathbf{u}|^2) = \varrho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

En se servant de l'équation de continuité (1.3) et de l'identité $2\nabla \cdot (k\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) + \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2$, on peut transformer cette équation et obtenir une dérivée matérielle de l'énergie cinétique locale

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k\mathbf{u}) = \varrho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (1.11)$$

Cette équation est appelée *équation de conservation de l'énergie cinétique*. Dans cette équation, le terme $\varrho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}$ représente la puissance de la force de gravité, $-\mathbf{u} \cdot \nabla p$ la puissance des forces de pression, et $\mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}$ la puissance des extra-contraintes (dissipation d'énergie). Pour un fluide incompressible, une variation de cette expression est la suivante

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u}|^2 + \psi + p \right) = \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (1.12)$$

qui est le *théorème de Bernoulli généralisé* (on a introduit le potentiel gravitaire $\varrho \mathbf{g} = -\nabla \psi$). Pour un régime permanent ($\partial_t k = 0$) et un fluide non visqueux ($\mathbf{T} = 0$), on retombe sur la relation de Bernoulli qui dit que la quantité

$$\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u}|^2 + \psi + p$$

est constante le long d'une ligne de courant.

1.2 Équations de Navier-Stokes

Loi de comportement newtonienne

La plupart des fluides de notre environnement (eau, air, huile, etc.) sont dits *newtoniens* car leur loi de comportement suit la loi de Newton. D'autres fluides ne suivent pas cette loi et on les dit *non newtoniens*. La boue ou la peinture par exemple sont des fluides non newtoniens. La relation la plus simple que l'on puisse imaginer entre Σ et $\mathbf{D}$ est une relation linéaire. La loi expérimentale de Newton invite à écrire :

$$\boxed{\Sigma = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \text{ ou bien } \mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}}, \quad (1.13)$$

où μ est la viscosité dynamique [Pa.s]. On appelle cette relation la *loi de comportement newtonienne*. Lorsqu'on injecte cette forme de loi de comportement dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, on obtient les *équations dites de Navier-Stokes* (voir infra).

1.2.1 Forme générique des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sous forme tensorielle :

$$\varrho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D},$$

avec $\mathbf{D}$ le tenseur des taux de déformation (partie symétrique du gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$). il faut compléter ce système par l'équation de continuité qui, pour un fluide incompressible, prend la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

pour aboutir aux équations complètes du mouvement.

Les équations de Navier-Stokes forment un jeu d'équations dites « fermées » car il y a autant de variables (ou d'inconnues) que d'équations. Pour utiliser ces équations pour résoudre un problème pratique, il faut des équations supplémentaires, qui fournissent les conditions initiales et aux limites.

1.2.2 Conditions aux limites

En général, on considère également deux types de frontières :

- les frontières solides sont des parois, qui ne se déforment pas (ou très peu) ;
- les frontières matérielles sont des interfaces entre deux liquides ou un liquide et un gaz (la surface libre est une frontière matérielle). Dans ce cas, la frontière a une forme qui peut varier au cours du temps et il faut donc une équation qui décrit comment sa forme et sa position varient avec le temps.

Frontière solide

Pour une paroi solide (par exemple, sur une facette orientée par $\mathbf{n}$, on considère que la vitesse vérifie les deux conditions suivantes

- condition de non-pénétration : le fluide ne peut pas entrer dans le solide (qui est imperméable), donc la composante normale de la vitesse est nulle : $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$;

- condition d'adhérence (ou de non-glissement) : le fluide adhère à la paroi solide, donc la composante tangentielle doit également être nulle : $u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$, avec $\mathbf{t}$ un vecteur tangent à la paroi.

Il s'ensuit que la vitesse $\mathbf{u}$ est nulle le long d'une paroi solide. C'est la condition aux limites cinématique.

Pour la condition aux limites dynamiques, on écrit qu'il y a équilibre de l'interface (si celle-ci est fixe), donc d'après le principe d'action et de réaction, on a

$$\Sigma_{fluide} \cdot \mathbf{n} + \Sigma_{solide} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

avec Σ_{fluide} le tenseur des contraintes fluides, Σ_{solide} le tenseur des contraintes du solide, puisque la contrainte au sein du fluide doit coïncider avec celle du solide le long de l'interface.

Frontière matérielle

En général, une frontière matérielle est une interface mouvante entre deux fluides ; dans quelques cas, par exemple pour la surface libre d'un écoulement permanent, cette surface peut occuper un lieu fixe de l'espace.

On écrit $F(\mathbf{x}, t) = 0$ l'équation de la frontière. Par exemple, pour une surface libre d'un écoulement d'eau le long d'une rivière, on écrit $F = y - h(x, t) = 0$, avec h la hauteur d'eau par rapport au fond. La normale en tout point est donnée par $\nabla F / |\nabla F|$. Une surface matérielle vérifie

$$\frac{dF}{dt} = 0,$$

car un point de la surface matérielle à un instant donné reste toujours sur cette surface à n'importe quel autre instant (ses coordonnées peuvent changer au cours du temps si la surface se déforme, mais il appartient toujours à l'interface). Par exemple, dans le cas de la surface libre d'une rivière, on a

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(y - h(x, t)) = 0 \implies v = \frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt}. \quad (1.14)$$

Comme pour la paroi solide, la condition dynamique implique l'égalité des contraintes entre les fluides des deux milieux au niveau de l'interface. S'il y a des effets de tension de surface, il convient de rajouter un terme supplémentaire traduisant cette tension pour la composante normale des efforts. Très souvent, dans le cas d'une surface libre d'un écoulement d'eau, il est possible de négliger l'action du fluide ambiant (l'air) et dans ce cas, on a

$$\Sigma_{fluide} \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{1} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

le long de la surface libre.

1.2.3 Régimes d'écoulement

En substituant les variables dimensionnelles par des variables sans dimension, on tire les équations de Navier-Stokes sous forme adimensionnelle :

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = -\frac{P_*}{\rho U_*^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

On déduit trois comportements possibles selon la valeur du nombre de Reynolds :

- Quand $Re \rightarrow \infty$:

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = -\frac{P_*}{\rho U_*^2} \nabla P$$

Ce sont les *équations d'Euler* sous forme adimensionnelle (pour le fluide dit *parfait* ou fluide non visqueux). Les frottements visqueux peuvent être négligés ; l'écoulement est donc contrôlé par un équilibre entre forces de pression et d'inertie. Les équations d'Euler fournissent alors une bonne approximation du mouvement. Le mouvement d'un avion en vol sub- ou supersonique peut donc être étudié à l'aide de ces équations. Le théorème de Bernoulli fournit des approximations utiles quand la géométrie du problème s'y prête.

- Quand $Re \rightarrow 0$:

$$0 = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Ce sont les *équations de Stokes* sous forme adimensionnelle (pour le fluide sans inertie). L'écoulement est entièrement commandé par l'équilibre entre gradient de pression et force visqueuse. Ce type d'écoulement s'observe très fréquemment dans des écoulements à travers des matériaux poreux, des écoulements près d'obstacles (couches limites laminaires), des problèmes de sédimentation de particules fines, etc.

- Quand $Re = O(1-100)$, inertie, gradient de pression, et viscosité sont trois processus de même importance. Il faut résoudre l'équation de Navier-Stokes complètement. Notons que pour $Re > 2000$, l'écoulement devient turbulent.

1.3 Équations de Saint Venant

Les équations de Saint-Venant³ sont une forme intégrée (intégration selon la hauteur) des équations de Navier-Stokes. Elles permettent de calculer les hauteurs d'eau et vitesses moyennes le long de la direction d'écoulement en fonction du temps. Elles ne sont applicables qu'en régime graduellement varié.

1.3.1 Dérivation des équations

Hypothèses

Nous allons utiliser ici les hypothèses simplificatrices suivantes :

- (A1) On s'intéresse à un écoulement d'eau le long d'un profil bidimensionnel curviligne (voir fig. 1.1), dont les variations sont faibles (rayon de courbure infini), c'est-à-dire la surface d'écoulement est à peu près plane, d'inclinaison θ par rapport à l'horizontale. On rattache un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) à ce repère (x est orienté selon la ligne de plus grande pente, y est normale au plan de glissement, z représente une direction latérale).
- (A2) On considère un mouvement essentiellement bidimensionnel (z n'intervient pas dans les calculs). Les calculs peuvent être généralisés à la dimension 3.

3. Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1886) était un mécanicien français. Polytechnicien de formation, il étudia aussi à l'École Nationale des Ponts et Chaussée, où il fit l'essentiel de sa carrière. Ses travaux de recherche ont couvert un champ considérable de domaines scientifiques et d'application : hydraulique maritime, navigation le long des canaux et sur route, élasticité, théorie des fluides visqueux, turbulence et perte de charge dans les conduites. Avant Reynolds, il avait pressenti l'importance de la turbulence dans le calcul des pertes de charge. En 1871, il proposa un jeu d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement unidimensionnel d'une onde de crue.

- (A3) Il n'y a pas de variation significative de la section d'écoulement sur de courtes distances (les variations sont toujours progressives). Il en est de même pour les hauteurs d'écoulement, qui varient doucement d'un point à l'autre de l'écoulement sur un même bief. On parle de *régime graduellement varié* ou bien d'approximation des grandes longueurs d'onde pour désigner ce régime ou cette approximation. Il s'agit donc d'un régime peu éloigné du régime permanent uniforme. Les lignes de courant sont donc parallèles à la surface libre, elle-même à peu près parallèle à la ligne de fond. Le rapport caractéristique $\epsilon = H_*/L_*$ – appelé rapport d'aspect – est petit devant 1 (avec H_* : échelle de hauteur et L_* échelle de longueur) ; typiquement pour une rivière de 10 km et profonde de 10 m, on a $\epsilon = 10^{-3} \ll 1$.
- (A4) Les lignes de courant au sein de l'écoulement ne subissent pas de bifurcation brutale.
- (A5) La surface d'écoulement exerce une contrainte de frottement τ_p sur l'écoulement.
- (A6) La masse volumique de l'eau ρ est constante (pas d'effet du transport solide en suspension).
- (A7) Il n'y a pas de variation de masse durant l'écoulement (apport ou perte d'eau).
- (A8) Le lit est fixe (pas de transport solide, pas d'érosion, pas de dépôt) et de rugosité uniforme tout le long du bief considéré. On va donc essentiellement ici considérer le cas $b(x,t) = 0$. Le cas d'un lit mobile peut également être traité dans le présent cadre théorique (mais on ne fournira ici aucune démonstration, voir (Gray, 2001)).
- (A9) La pente locale n'est pas trop forte ($\tan \theta$ doit être inférieur à 10–20 %) sinon il y a un risque d'instabilité de la surface libre (« roll waves » ou *train d'onde*, voir § 6.6.2).

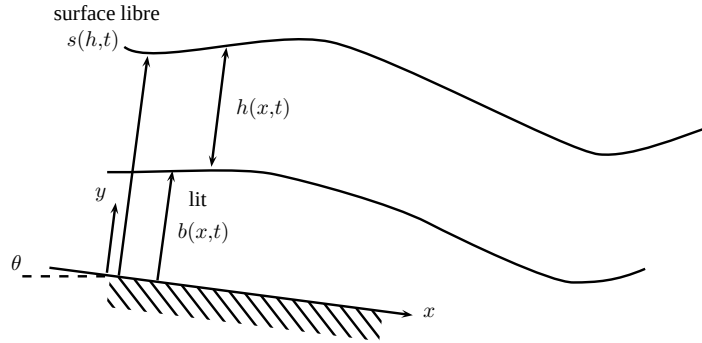


Figure 1.1 : notation employée dans la description des profils en long.

Le principe de base dans les modèles de type Saint-Venant est de partir des équations locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, de les intégrer suivant la verticale pour les moyenner, puis de les simplifier en supprimant les termes de faible influence.

Conservation de la masse

Considérons l'équation de conservation de la masse $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$, où $\mathbf{u}$ désigne la vitesse locale de l'écoulement. L'intégration de cette équation selon la hauteur d'écoulement, c'est-à-dire le long de la direction y , donne :

$$\int_0^{h(x,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(x,y,t) dy - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} - v(x,h,t) + v(x,0,t), \quad (1.15)$$

où u et v sont les composantes de la vitesse selon les directions x et y . À la surface libre et au fond, la composante normale de la vitesse v doit satisfaire respectivement

$$v(x, h, t) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} \text{ et } v(x, 0, t) = 0 \quad (1.16)$$

compte tenu de la condition (1.14) à la surface libre. D'où l'on déduit l'équation moyennée de conservation de la masse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (1.17)$$

où l'on a défini les valeurs moyennes de la façon suivante :

$$\bar{f}(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} f(x, y, t) dy.$$

Conservation de la quantité de mouvement

La même procédure peut être appliquée à l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement : $\rho d\mathbf{u}/dt = \rho \mathbf{g} - p\mathbf{1} + \nabla \cdot \mathbf{T}$, où $\mathbf{T}$ représente le tenseur des extra-contraintes et p la pression. Toutefois, comme il y a plus de termes que dans l'équation de conservation de la masse et comme certains ont un effet mineur sur la dynamique de l'écoulement, on va se servir de l'analyse dimensionnelle pour simplifier l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Outre les échelles de longueur et de hauteur (L_* et H_*) introduites précédemment, on définit également une échelle de vitesse $U_* = \sqrt{gH_* \cos \theta}$ (de telle sorte que $\text{Fr} = O(1)$) dans la direction de l'écoulement, $V_* = \epsilon U_*$ l'échelle de vitesse dans la direction normale au lit (y), une échelle de temps $T = U_*/L_*$, une échelle de pression $P_* = \rho g H_* \cos \theta$ (écoulement à surface libre, donc l'ordre de grandeur de la pression est la pression hydrostatique), et les nombres sans dimension de Reynolds et de Froude

$$\text{Re} = \frac{\rho U_* H_*}{\mu} \text{ et } \text{Fr} = \frac{U_*}{\sqrt{g H_* \cos \theta}}.$$

On suppose qu'on est en régime turbulent : $\text{Re} \gg 1$. On suppose que le nombre de Froude n'est ni très grand, ni très petit : $\text{Fr} = O(1)$ (il peut être plus petit ou plus grand que 1). On peut alors adimensionnaliser toutes les variables

$$\hat{u} = \frac{u}{U_*}, \hat{v} = \frac{v}{V_*}, \hat{x} = \frac{x}{L_*}, \hat{y} = \frac{y}{H_*}, \text{ et } \hat{t} = \frac{t}{T},$$

tandis que les contraintes sont transformées de la façon suivante

$$\hat{T}_{xx} = \frac{\mu U_*}{L_*} T_{xx}, \hat{T}_{xy} = \frac{\mu U_*}{H_*} T_{xy}, \hat{T}_{yy} = \frac{\mu U_*}{L_*} T_{yy}, \text{ et } \hat{p} = \frac{p}{P_*}.$$

L'équation locale de quantité de mouvement s'écrit donc

$$\epsilon \text{Re} \frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = \frac{\epsilon \text{Re}}{\text{Fr}^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \tan \theta - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{xx}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{y}}, \quad (1.18)$$

$$\epsilon^3 \text{Re} \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = \frac{\epsilon \text{Re}}{\text{Fr}^2} \left(-1 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{x}} + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{yy}}{\partial \hat{y}}. \quad (1.19)$$

On va maintenant utiliser le fait que $\epsilon \ll 1$ et que le nombre de Reynolds $Re \gg 1$ (écoulement turbulent). On note que dans les équations apparaît parfois le produit ϵRe , dont la valeur est indéfinie ; on va ici supposer que $\epsilon Re = O(1)$ (ce qui implique donc $\epsilon^2 Re \ll 1$). L'équation (1.19) se simplifie considérablement puisque la plupart des termes sont négligeables sauf la pression et le terme de gravité

$$-1 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = 0,$$

qui une fois remise sous forme dimensionnelle et après intégration, nous montre que la distribution de pression est hydrostatique

$$p = \varrho g(h - y) \cos \theta.$$

Dans l'équation (1.18) seule la composante avec T_{xx} disparaît ; les autres termes sont *a priori* du même ordre de grandeur

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = \tan \theta - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{y}},$$

qui remise sous forme dimensionnelle donne

$$\varrho \frac{du}{dt} = \varrho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}.$$

Sans difficulté nous obtenons l'équation moyennée de conservation de la quantité de mouvement après avoir intégré l'équation précédente selon y entre 0 et h :

$$\varrho \left(\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} \right) = \varrho gh \sin \theta - \frac{\partial h\bar{p}}{\partial x} - \tau_p, \quad (1.20)$$

où la contrainte de frottement (appelée aussi contrainte pariétale) est $\tau_p = T_{xy}(x, 0, t)$, la pression moyenne est $\bar{p}$.

Le système d'équations (1.17–1.20) n'est pas fermé car le nombre d'inconnues dépasse le nombre d'équations. Une approximation courante est d'introduire un paramètre, appelé parfois le paramètre de quantité de mouvement de Boussinesq, qui relie le carré de la vitesse moyenne à la moyenne du carré de la vitesse

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{h} \int_0^h u^2(y) dy = \alpha \bar{u}^2.$$

Généralement on a $1 \leq \alpha \leq 5/4$. Une approximation courante est d'écrire $\alpha = 1$. On peut ainsi transformer le terme $\partial h\bar{u}^2 / \partial x$ dans l'équation (1.20)

$$\frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} = \frac{\partial \alpha h\bar{u}^2}{\partial x} \approx \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x}.$$

Une autre approximation, que nous avons implicitement utilisée ci-dessus, est relative au calcul des contraintes. Puisque nous avons supposé que les variations de hauteur le long de l'axe x sont faibles (approximation d'onde longue), cela implique que, pour toute quantité m relative au mouvement de l'écoulement, nous avons : $\partial m / \partial y \gg \partial m / \partial x$. Cela implique que toute tranche d'écoulement peut être traitée comme localement uniforme. Avec une telle hypothèse, il est possible de calculer la contrainte à la paroi en considérant que son expression en fonction de u et h est identique à celle du régime permanent ; on utilise alors les formules classiques telles que celles de Manning-Strickler ou Chézy pour calculer τ_p .

1.3.2 Forme conservative et non conservative

Le jeu d'équations du mouvement moyen composé de la conservation de la masse (1.17) et de la quantité de mouvement (1.20) est appelé la forme conservative des équations de Saint-Venant car leur obtention et leur forme finale reflètent directement le principe général de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle ; elles peuvent d'ailleurs être obtenues de cette façon sans passer par une intégration de la forme locale des équations du mouvement.

On utilise souvent en pratique une *forme dite non conservative* de l'équation de la quantité de mouvement, qui consiste à se servir de l'équation (1.17) pour transformer les termes $\partial h \bar{u}$ en $\partial \bar{u}$. On obtient facilement en faisant ainsi

$$\rho h \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = \rho g h \sin \theta - \rho g h \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_p.$$

Formes conservative et non conservative sont strictement équivalentes sur le plan mathématique tant que les solutions $\bar{u}$ et h sont continues. En revanche, dans le cas de solutions discontinues (formation d'un ressaut hydraulique par exemple), la forme non conservative fournit une solution fautive au niveau de la discontinuité. Pour la résolution numérique des équations, il est préférable d'employer la forme conservative lorsque des solutions discontinues sont possibles.



1.3.3 Synthèse

Écoulement unidirectionnel

Dans le cas d'un écoulement unidirectionnel sur fond fixe et sans transport solide, les équations de Saint-Venant sont composées :

- d'une équation de conservation de la masse

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0,} \quad (1.21)$$

- d'une équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.} \quad (1.22)$$

Pour boucler ces équations, il faut connaître la loi de frottement $\tau_p(\bar{u}, h)$. Il faut aussi préciser des conditions aux limites, qui dépendent principalement du type de régime (super- ou sub-critique) :



- pour un régime supercritique, l'information se propage uniquement de l'amont vers l'aval (il n'y a pas de remontée d'informations). La condition à la limite doit être posée à l'amont. Dans un problème d'évolution, il est nécessaire de spécifier à la fois les conditions initiales et les conditions aux limites ;
- pour un régime subcritique, l'information se propage non seulement de l'amont vers l'aval, mais également de l'aval vers l'amont (il y a une remontée d'informations). La condition à la limite doit être posée à l'aval pour un simple problème de type cours de remous. Dans un problème d'évolution, il faut préciser principalement les conditions initiales. Selon le problème, les conditions aux limites peuvent être superflues ou bien non compatibles avec les conditions initiales.

Les équations de Saint-Venant permettent de résoudre un grand nombre de problèmes hydrauliques dès lors que la courbure de la surface libre n'est pas trop forte, en particulier lorsqu'il n'y a pas de ressaut hydraulique séparant un régime supercritique d'un régime subcritique ou bien lorsqu'il y a une chute d'eau au niveau d'un seuil. En pratique, les types de problème que l'on peut résoudre sont très divers, par exemple :

- propagation d'une crue dans une rivière ;
- rupture de barrage dans une rivière ;
- évolution d'une ligne d'eau en fonction du débit fourni.

C'est ce que l'on va voir dans le reste de ce cours.

Écoulement sur lit mobile

En présence de transport solide, il faut compléter ces équations par l'équation d'Exner qui décrit l'érosion ou l'engrèvement du lit :

$$\frac{\partial b}{\partial t} = D - E = -\frac{\partial q_s}{\partial x}, \quad (1.23)$$

avec $b(x,t)$ la cote du lit (par rapport à un niveau de référence), E le taux d'érosion du lit (nombre de particules par unité de surface et par unité de temps qui sont entraînées par l'écoulement), D le taux de dépôt, et q_s le débit solide (résultat net entre érosion et sédimentation du lit). La pente locale peut varier doucement autour de θ selon qu'il y a *aggradation* (érosion du lit, $\partial_t b < 0$) ou *déposition* (engrèvement du lit, $\partial_t b > 0$). L'équation de conservation de la quantité de mouvement doit être modifiée en conséquence

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.$$

avec $s = b + h$ la cote de la surface libre (Gray, 2001).

Écoulement à travers des sections quelconques

Les équations (1.21)–(1.22) ont été écrites pour un canal infiniment large et $h\bar{u}$ représente le débit par unité de largeur. On pourrait les écrire de façon plus générale pour une section $S(x, t)$ par laquelle transite un débit $Q(x, t)$. On a alors :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2 S^{-1}}{\partial x} = gS \sin \theta - gS \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \chi \frac{\tau_p}{\rho}. \quad (1.25)$$

Rappelons que $h = S/B$ et $\bar{u} = Q/S$. Dans cette forme générale, la loi de frottement s'exprime comme une fonction $\tau_p(\bar{u}, R_H)$. Pour un écoulement à travers une section quelconque, la célérité des ondes est

$$c = \sqrt{\frac{gS}{B}},$$

avec B la largeur au miroir. De là, on déduit que le nombre de Froude est défini comme

$$\text{Fr} = \frac{\bar{u}}{c} = \frac{Q\sqrt{B}}{\sqrt{gS^{3/2}}}.$$

1.3.4 Limites d'utilisation des équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant (1.21)–(1.22) sont particulièrement adaptées aux canaux à faible pente et aux rivières avec un lit bien défini. La figure 1.2 montre un exemple de rivière aménagée en Suisse centrale. En général, le lit d'un cours d'eau ne reste que rarement plan (lisse), mais au contraire développe des structures morphologiques de taille très variable allant de petits monticules de quelques grains jusqu'à des dunes. Ces structures se forment spontanément dès lors qu'un transport solide même faible et intermittent se produit. Une conséquence sur le plan hydraulique est en général un accroissement de la dissipation turbulente. Cela peut se traiter dans le cadre des équations de Saint-Venant :

- soit en tenant compte de l'équation d'Exner (1.23) et en la couplant avec les équations de Saint-Venant (1.21)–(1.22)
- soit en considérant lisse, mais en majorant la perte de charge hydraulique (c'est-à-dire en augmentant τ_p pour tenir compte de la dissipation d'énergie supplémentaire).

La figure 1.3(a) montre le lit d'un canal en sable lors d'expériences en laboratoire. La figure 1.3(b) montre la bathymétrie du Rhin près de son débouché dans la Mer du Nord.



Figure 1.2 : la rivière Thur (Suisse) rectifiée [Martin Jaeggi].

D'autres formes de structures morphologiques peuvent apparaître, en particulier pour les lits à gravier : ce sont les bancs alternés, c'est-à-dire des dépôts assez régulièrement disposés le long du cours d'eau, à travers lesquels sinue le cours d'eau lorsque le niveau de l'eau est bas. En cas de crue, les bancs sont généralement recouverts d'eau. Ces bancs jouent un grand rôle sur le plan hydraulique à la fois comme dissipateurs d'énergie et comme zones tampon pour le bilan sédimentaire ; sur le plan écologique, ils peuvent également revêtir un rôle important. De telles structures existent dans les cours d'eau aménagés et les rivières naturelles. Un cas apparenté est la formation de lits en tresse, où il n'y a pas un seul chenal d'écoulement, mais une multitude de bras. La figure 1.5 montre des séries de bancs alternés sur un canal en Suisse et au Japon tandis que la figure 1.6 offre un exemple spectaculaire de lits en tresse dans une rivière à gravier de Nouvelle-Zélande.

Les équations de Saint-Venant ne sont pas adaptées lorsqu'il existe des singularités, c'est-à-dire des sections où le comportement de l'écoulement change fortement. Ces singularités peuvent être naturelles (comme une cascade ou bien un élargissement brutal du lit) ou artificielles. Parmi ces dernières, il faut mentionner les ouvrages hydrauliques (tels que les seuils, les prises d'eau, les dérivations), les ponts et passages busés. Les ponts et buses peuvent

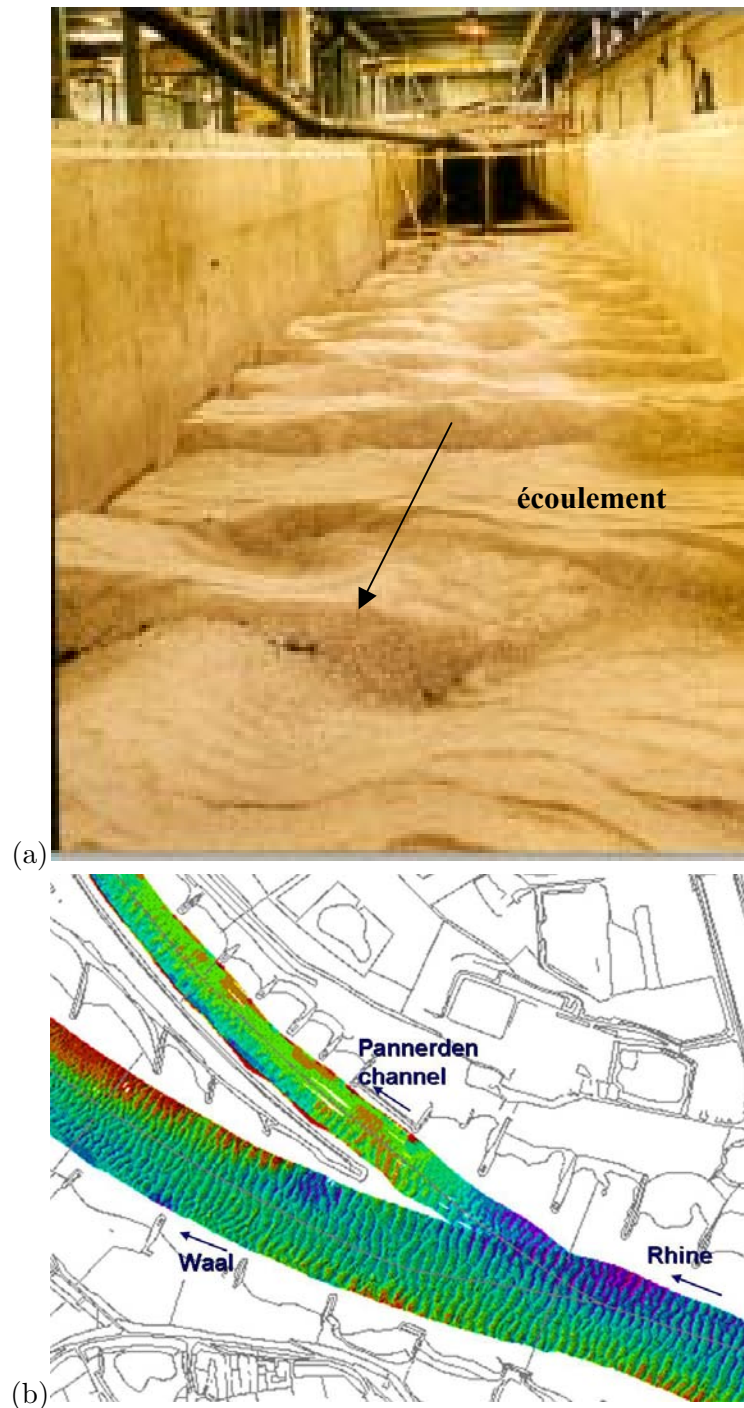


Figure 1.3 : expériences de laboratoire avec développement de dunes [Gary Parker]. (b) bathymétrie du Rhin aux Pays-Bas : développement de dunes [Wibers & Blom]

obstruer l'écoulement (dépôt de flottants ou de sédiment), se mettre en charge, ou bien encore être d'un gabarit insuffisant pour la section mouillée de l'écoulement, tous ces phénomènes pouvant généralement causer le débordement de la rivière, voire forcer la rivière à changer de lit.

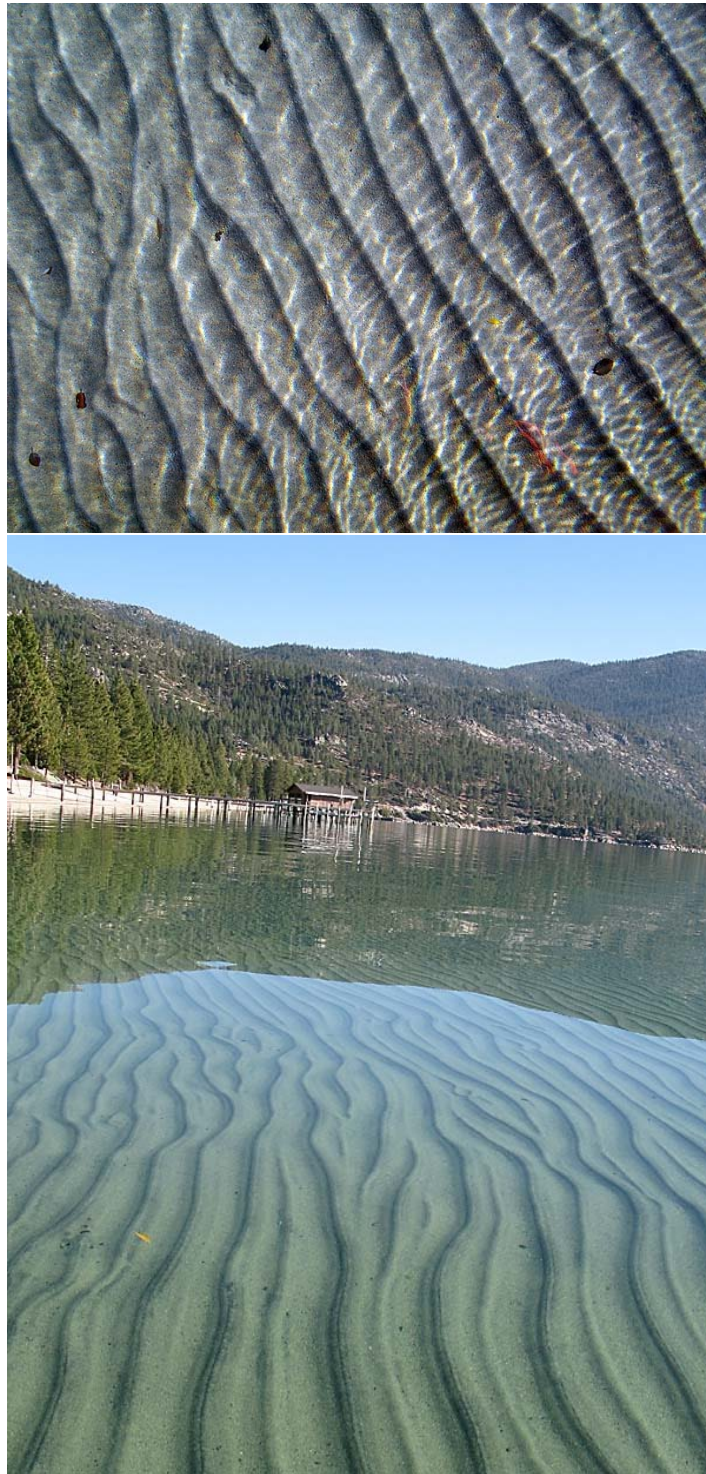


Figure 1.4 : ondulation (« ripple » en anglais) du lit (lac Tahoe, Nevada, États-Unis) [C. Ancey].

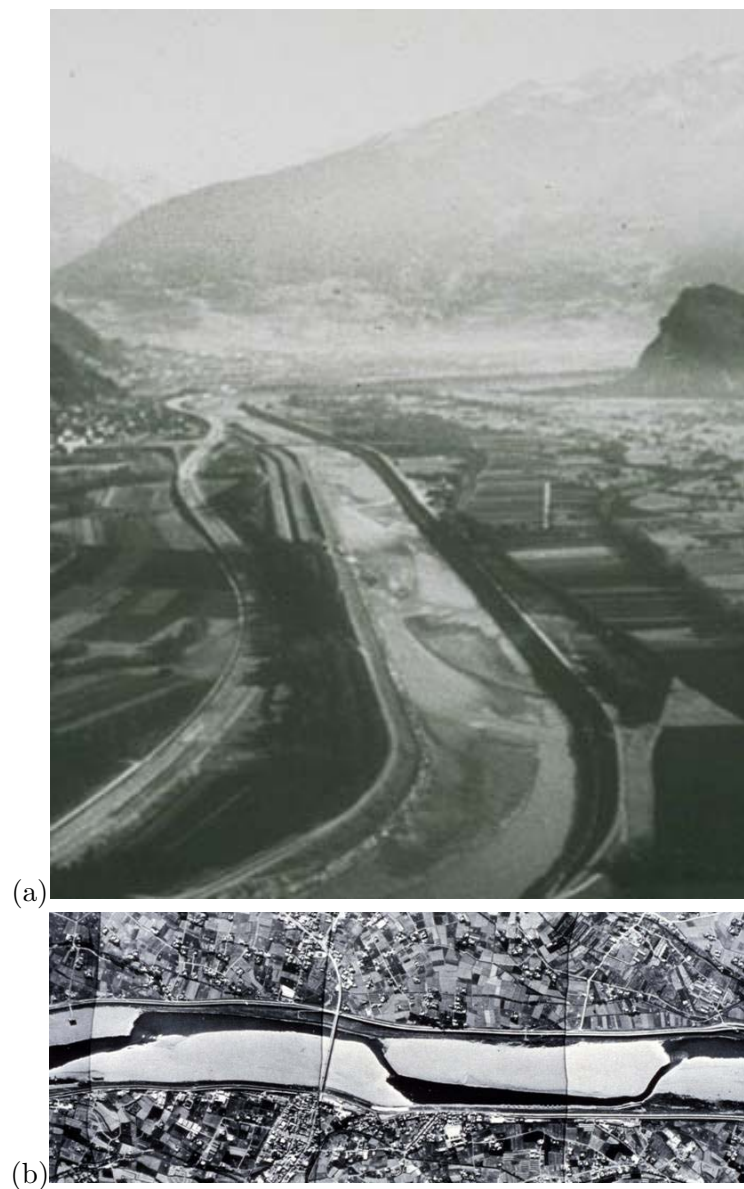


Figure 1.5 : (a) formation de bancs alternés dans le Rhin en Suisse [Martin Jaeggi]. (b) formation de bancs alternés sur la rivière Naka (rectifiée) [S. Ikeda].



Figure 1.6 : lit à tresses (rivière torrentielle Rakaia, Nouvelle Zélande) [DR].



Figure 1.7 : (a) seuil avec prise d'eau pour la production électrique. (b) Passage busé sous une chaussée [C. Ancey]. (c) Crue du Doménon (Isère, France) en août 2005.

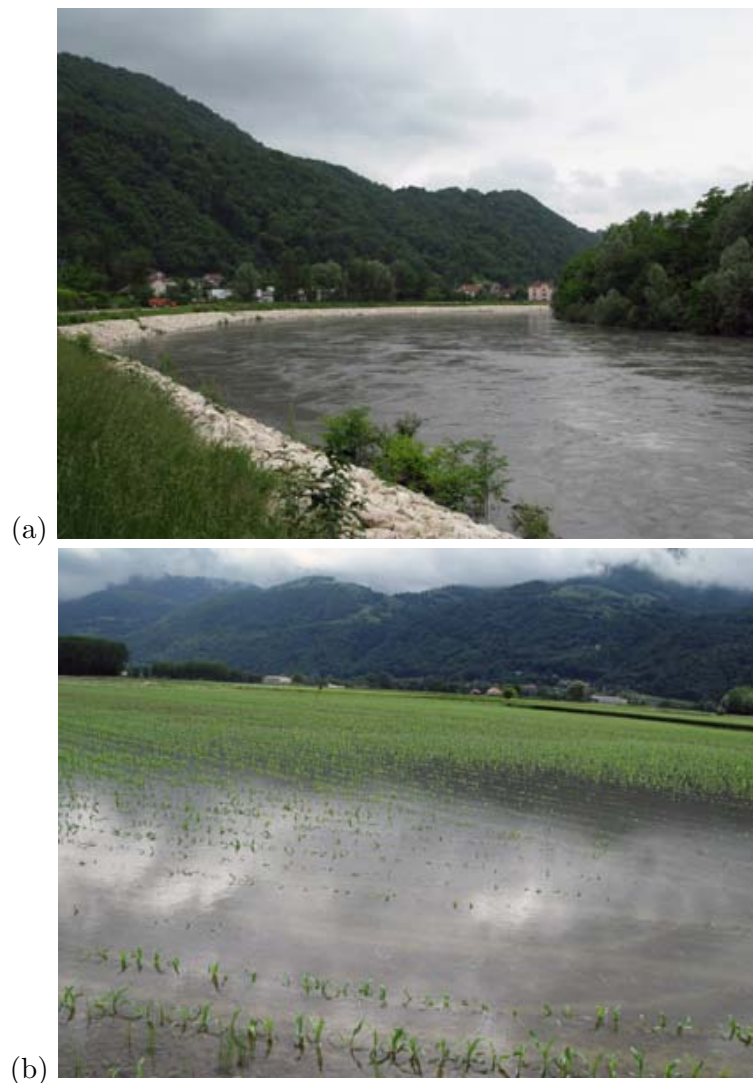


Figure 1.8 : (a) l'Isère en crue à l'amont de Grenoble en juin 2008. (b) plaine agricole inondée par l'Isère en crue [C. Ancey].

Exercices

Exercice 1.1 Montrer que pour un fluide incompressible, les équations de conservation de la quantité de mouvement de Navier-Stokes peuvent s'écrire également :



$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

On pourra partir de l'équation sous forme générique et se servir de l'équation de continuité pour montrer le résultat :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u},$$

avec

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

l'opérateur laplacien.

Exercice 1.2 Un ingénieur d'un bureau d'ingénieurs cherche à calculer la hauteur de la vague générée par l'entrée d'une avalanche dans un lac de retenue. Il a pu établir l'ordre de grandeur de la vitesse de l'avalanche. Pour calculer la hauteur η de cette vague, il considère que l'onde se déplace à la même vitesse que l'avalanche, or la vitesse d'une onde en eau peu profonde est donnée par $c = \sqrt{gh}$. Donc si l'on connaît la vitesse, on peut en déduire la hauteur totale. D'après vous ce raisonnement est-il juste ou faux?

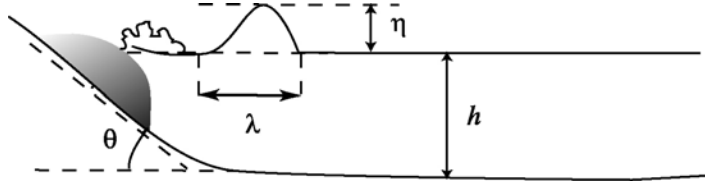


Figure 1.9 : vague générée par une avalanche dans une retenue d'eau.

Équations de la mécanique

DANS CE CHAPITRE, nous allons nous intéresser aux différentes familles d'équations différentielles que l'on peut être amené à rencontrer dans l'étude des phénomènes hydrauliques. Bien avoir en tête les différents types d'équation et les phénomènes physiques associés sera essentiel par la suite pour comprendre les stratégies de résolution mises en œuvre lorsqu'on étudie des problèmes pratiques.

2.1 Typologie des équations

2.1.1 Équation scalaire

Une équation est dite *scalaire* si elle ne fait intervenir que des grandeurs scalaires, sans terme différentiel. Il est assez rare en mécanique d'avoir à résoudre directement des équations scalaires, la plupart des problèmes étant différentiels. Une exception notable est l'équation de Bernoulli qui énonce que la quantité

$$\psi = \varrho \frac{u^2}{2} + \varrho g z + p$$

est constante sous certaines conditions d'écoulement, avec u la vitesse du fluide, ϱ est la masse volumique, p sa pression, g la gravité, et z une altitude par rapport à un plan de référence.

2.1.2 Équation différentielle ordinaire

Une *équation différentielle ordinaire* est une équation différentielle où la fonction n'est différentiée que par rapport à une seule variable (dite indépendante). Les équations différentielles ordinaires sont assez courantes :

- soit parce que le problème est à la base un problème de dimension 1 ;
- soit parce qu'à l'aide de transformations, on peut se ramener d'un problème aux dérivées partielles à un problème différentiel ordinaire, qui est beaucoup plus simple à résoudre analytiquement ou numériquement.

♣ **Exemple.** – L'équation de Pascal en statique des fluides est une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dp}{dz} + \varrho g = 0,$$

où ϱ est la masse volumique, p sa pression, g la gravité, et z une altitude par rapport à un plan de référence. En hydraulique à surface libre, l'équation de la courbe de remous

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3},$$

fournit la variation de la hauteur d'eau $h(x)$ dans un canal large de pente i lorsqu'une loi de Chézy est employée pour le frottement ; on a introduit la hauteur $h_n = (q^2/(C^2i))^{1/3}$ et la hauteur critique $h_c = (q^2/g)^{1/3}$, avec q le débit par unité de largeur et C le coefficient de Chézy. $\square$

L'ordre d'une équation différentielle ordinaire est défini comme celui de la dérivée la plus élevée. L'ordre détermine le nombre de conditions initiales nécessaires pour résoudre l'équation différentielle.

♣ **Exemple.** – Une équation différentielle d'ordre 2 telle que $y'' + ay' + by = c$ nécessite de spécifier deux conditions à la limite. Celles-ci peuvent être données en un point (par exemple, on peut poser $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$) ou bien en des points différents (par exemple, on peut poser $y(0) = 0$ et $y'(1) = 1$). Dans le premier cas, on parle de problème aux valeurs initiales (*initial value problem*) alors que dans le dernier cas, on parle de problème aux frontières (*boundary value problem*)¹. $\square$

Une équation différentielle ordinaire est dite *linéaire* si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées de la fonction et de la fonction elle-même. Par exemple, $x^3y'' + y' = 0$ est linéaire (en y), mais $y'y'' + x^3 = 0$ est non linéaire. Une équation est dite *quasi-linéaire* si elle est constituée d'une combinaison linéaire des dérivées, mais pas nécessairement de la fonction. Par exemple, $yy' + x^2y = 1$ n'est pas linéaire, mais quasi-linéaire.

Une équation différentielle ordinaire quasi-linéaire du premier ordre peut se mettre sous la forme

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u, x)}{g(u, x)},$$

avec f et g deux fonctions de u et x . Cette équation peut se mettre sous une forme dite différentielle

$$g(u, x)du - f(u, x)dx = 0.$$

2.1.3 Équation aux dérivées partielles

La plupart des équations fondamentales de la mécanique telles les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire qu'elles décrivent comment varie un processus – en fonction du temps et selon l'endroit dans l'espace – en reliant des dérivées spatiales et temporelles. Il existe une très grande variété de problèmes aux dérivées partielles que nous allons dévoiler dans ce qui suit.

Il existe plusieurs façons d'écrire une équation aux dérivées partielles. Par exemple, l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

peut s'écrire sous forme condensée : $u_t = u_{xx}$ ou bien $\partial_t u = \partial_{xx} u$.

1. On est amené à distinguer les deux types de conditions car numériquement les techniques de résolution sont très différentes. Lorsque les conditions sont données en des points différents, il faut par exemple employer des « méthodes de tir » pour résoudre les équations numériquement.

Un peu de vocabulaire

L'*ordre* d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre du terme différentiel le plus élevé. Par exemple, l'équation $u_t = u_{xx}$ est d'ordre 2. La *variable dépendante* est la fonction que l'on différencie par rapport aux *variables indépendantes*; dans l'exemple précédent, u est la variable dépendante alors que x et t sont les variables indépendantes. Le nombre de variables indépendantes constituent la *dimension* de l'équation aux dérivées partielles. Comme pour une équation différentielle ordinaire, une équation aux dérivées partielles est linéaire si elle est linéaire par rapport à la variable dépendante; l'équation $u_t = u_{xx}$ est une équation linéaire car elle dépend linéairement de u ou de ses dérivées.

Classification des équations linéaires du second ordre

La seule classification générale d'équations aux dérivées partielles concerne les équations linéaires du second ordre (voir § A.4). Ces équations sont de la forme suivante

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (2.1)$$

avec a, b, c, d, e, f , et g des fonctions réelles de x et y . Lorsque $g = 0$, l'équation est dite *homogène*. On classe les équations linéaires selon le signe de $\Delta = b^2 - ac > 0$:

- si $\Delta = b^2 - ac > 0$, on dit que l'équation (2.1) est *hyperbolique*. L'équation des ondes (2.22) en est un exemple. En mécanique des fluides, les équations de transport sont souvent hyperboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0 \text{ ou bien } u_{xy} + \dots = 0,$$

où les points de suspension représentent ici des termes liés à u ou des dérivées d'ordre 1;

- si $\Delta = b^2 - ac < 0$, on dit que l'équation (2.1) est *elliptique*. L'équation de Laplace (2.24) en donne un exemple. Les équations traduisant un équilibre sont le plus souvent de nature elliptique. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0$$

- si $\Delta = b^2 - ac = 0$, on dit que l'équation (2.1) est *parabolique*. L'équation de la chaleur (2.7) en offre un exemple. Les équations de diffusion sont souvent paraboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{yy} + \dots = 0.$$

Il y a un lien fort entre le nom donné aux équations différentielles et le nom des coniques. En effet, si l'on suppose ici que les coefficients de l'équation (2.1) sont constants et l'on substitue dans l'équation (2.1) u_{xx} par x^2 , u_x par x , u_{yy} par y^2 , u_y par y , et u_{xy} par xy , on obtient l'équation générale d'une conique qui selon le signe de $\Delta = b^2 - ac > 0$ donne une parabole ($\Delta = 0$), une ellipse ($\Delta < 0$), ou bien une hyperbole ($\Delta > 0$) comme le montre la figure 2.1. Cette figure montre que les termes différentiels sont liés et varient selon des contraintes imposées par chaque type de courbe. On note par exemple que pour les équations hyperboliques, il existe deux branches et que toute une partie de l'espace n'est pas traversée par la courbe, ce qui va autoriser des sauts discontinus d'une branche à l'autre; de tels sauts existent dans les équations différentielles et sont appelés *chocs*: une équation hyperbolique est capable de générer des solutions qui deviennent discontinues, c'est-à-dire subissent un choc même si initialement elles sont continues.

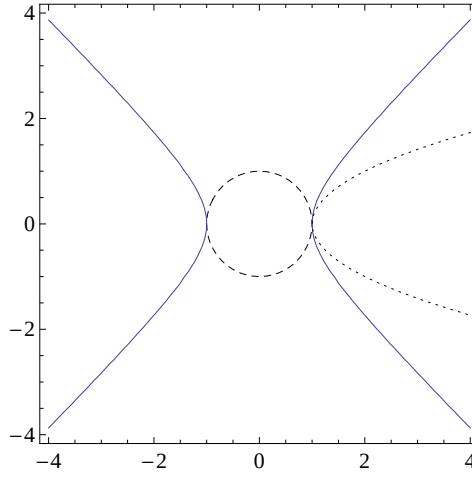


Figure 2.1 : coniques d'équation $ax^2 + cy^2 + dx = 1$. La courbe à trait continu est une hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ ($a = 1$, $c = -1$, et $d = 0$); la courbe en tireté est une ellipse (cercle ici) d'équation $x^2 + y^2 = 1$ ($a = 1$, $c = 1$, et $d = 0$); la courbe en pointillé est une parabole d'équation $x - y^2 = 1$ ($a = 0$, $c = -1$, et $d = 1$).

Forme caractéristique des équations du premier ordre

Les équations aux dérivées partielles du premier ordre, quasi-linéaires sont des équations linéaires par rapport aux termes différentiels; elles peuvent se mettre sous la forme :

$$P(x, y, u)\partial_x u + Q(x, y, u)\partial_y u = R(x, y, u). \quad (2.2)$$

La solution implicite d'une telle équation peut s'écrire $\psi(x, y, u(x, y)) = c$ (avec c une constante). On dit que ψ est une intégrale première du champ vectoriel (P, Q, R) . On a donc :

$$\begin{aligned} \partial_x \psi(x, y, u(x, y)) &= 0 = \psi_x + \psi_u u_x, \\ \partial_y \psi(x, y, u(x, y)) &= 0 = \psi_y + \psi_u u_y. \end{aligned}$$

Soit encore : $u_x = -\psi_x/\psi_u$ et $u_y = -\psi_y/\psi_u$. On obtient donc une expression plus symétrique :

$$P\psi_x + Q\psi_y + R\psi_u = 0,$$

qui peut encore se mettre sous une forme vectorielle plus facile à interpréter :

$$(P, Q, R) \cdot \nabla \psi = 0. \quad (2.3)$$

Cela veut dire qu'au point M considéré la normale de la courbe solution doit être normale au champ vectoriel (P, Q, R) . Si le point $O : (x, y, u)$ et le point voisin $O' : (x + dx, y + dy, u + du)$ appartiennent à la surface solution, alors le vecteur $\mathbf{OO}' : (dx, dy, du)$ doit être normal à $(P, Q, R) : \psi_x dx + \psi_y dy + \psi_u du = 0$. Comme cela doit être vrai pour tout incrément dx, dy , et du , on en tire les *équations caractéristiques* :

$$\boxed{\frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} = \frac{du}{R(x, y, u)}} \quad (2.4)$$

Chaque paire d'équations définit une courbe dans l'espace (x, y, u) . Ces courbes définissent une famille à deux paramètres (il y a 3 équations, donc 3 invariants mais seuls 2 sont indépendants) : par exemple, si p est une *intégrale première* de la première paire d'équations,

une courbe solution de la première paire est donnée par une équation de la forme : $p(x, y, u) = a$, avec a une constante. De même pour la deuxième paire : $q(x, y, u) = b$. La relation fonctionnelle $F(a, b) = 0$ définit la surface solution.

À noter que toutes les solutions ne se mettent pas nécessairement sous la forme $F(a, b) = 0$. C'est le cas, notamment, des *solutions singulières* des équations différentielles.

La mise sous forme d'équation caractéristique permet souvent de résoudre simplement les équations quasi-linéaires du premier ordre.

♣ **Exemple.** – On veut trouver une solution générale à l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u^2.$$

En identifiant les fonctions P , Q , et R , on trouve : $P = x$, $Q = -y$, et $R = u^2$. L'équation caractéristique est donc

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{du}{u^2}.$$

Un intégrale première de la première égalité est

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = -\ln y + \ln a,$$

avec a une constante d'intégration. On a donc $a = xy$. Une intégrale première de

$$-\frac{dy}{y} = \frac{du}{u^2} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{u} + b,$$

avec b une constante d'intégration. On a donc $b = \ln y - 1/u$. Les solutions générales sont de la forme

$$F(a, b) = 0 \Rightarrow F\left(xy, \ln y - \frac{1}{u}\right) = 0.$$

C'est la forme implicite de la solution (la plus générale). Une forme explicite est de supposer qu'il existe une fonction G telle que $\ln y - 1/u = G(xy)$, soit encore

$$u = \frac{1}{\ln y - G(xy)}.$$

La fonction G reste à déterminer en fonction des conditions aux limites. □

Conditions aux limites

En mécanique, on doit résoudre des équations comprenant des variables d'espace et le temps. En général, il faut donc pour déterminer une solution particulière u à une équation aux dérivées partielles :

- les conditions aux limites qui précisent comment varie u à la frontière du domaine (sur tout ou partie de ce domaine) à tout temps ;
- les conditions initiales qui précisent comment varie u à l'instant initial pour tout point du domaine.

On doit résoudre alors ce qu'on appelle un problème aux limites avec des conditions initiales (*boundary initial value problem*). Dans certains cas, on n'a pas besoin d'autant d'information. Par exemple, pour certaines équations hyperboliques, on a besoin uniquement des conditions

initiales tandis que les problèmes elliptiques ne nécessitent que des conditions aux limites (elles reflètent en général des processus stationnaires).

On distingue également :

- les conditions aux limites de type *Dirichlet* : la condition aux limites spécifie la valeur u_0 que doit prendre la fonction en un point ou une série de points

$$u(\mathbf{x} ; t) = u_0(t)$$

le long d'une courbe Γ ;

- les conditions aux limites de type *Neuman* : la condition aux limites spécifie la dérivée que doit prendre la fonction en un point ou une série de points. Physiquement, cela traduit souvent une condition de flux aux frontières du domaine.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{n} ; t) = \phi(t)$$

le long d'une courbe Γ , avec $\mathbf{n}$ la normale de Γ et $\phi(t)$ une fonction de flux connue.

On se reportera au § 2.3 pour les conditions aux limites dans les problèmes hyperboliques.

2.1.4 Équation variationnelle

Il existe en mécanique un principe dit *variationnel* selon lequel si un processus $J[u]$ (avec J une fonctionnelle et u une fonction) est stationnaire et stable, alors il doit rester insensible aux petites variations de u . Cela s'écrit $\delta J = 0$. Une fonctionnelle est une fonction généralisée qui fait intervenir à la fois u , ses dérivées, et ses intégrales. Pour des problèmes de dimension 1, une forme générique de J est par exemple de la forme

$$J[u] = \int L(t, u, \dot{u}, \dots) dt, \quad (2.5)$$

avec L une fonction de $u(t)$, t , et ses dérivées.

Par exemple, le principe de Hamilton affirme qu'une particule bouge de telle sorte que l'action intégrale qui représente la différence entre énergies cinétique et potentielle soit minimisée

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (\text{énergie cinétique} - \text{énergie potentielle}) dt.$$

Un problème variationnel de la forme $\delta J = 0$ avec J donné par l'équation (2.5) peut se ramener à un problème purement différentiel. On peut en effet montrer que $u(t)$ est également solution de l'équation différentielle dite d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{u}} \right) + \dots = 0.$$

♣ **Exemple.** – Par exemple si y désigne la position d'une masse ponctuelle m attachée à un ressort de raideur k , alors le mouvement $y(t)$ est la solution de $\delta J = 0$, avec

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (m\dot{y}^2 - ky^2) dt.$$

Par identification on a $L(y, \dot{y}) = (m\dot{y}^2 - ky^2)/2$. On a alors $L_y = -ky$ et $L_{\dot{y}} = m\dot{y}$. L'équation d'Euler-Lagrange correspondante est donc

$$-ky - \frac{d}{dt} m\dot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{m}y,$$

qui est l'équation de Newton pour une masse oscillante. $\square$

2.2 Équations de la mécanique

Nous allons maintenant voir les principaux types d'équations aux dérivées partielles rencontrées en hydraulique.

2.2.1 Équation de convection

La convection est un mode de transfert d'un élément ou d'une quantité où celle-ci est advectée par le fluide. Par exemple, si on libère un polluant dans un cours d'eau, celui-ci sera généralement transporté à la même vitesse que l'eau. On parle de convection ou d'*advection* (la convection est plus souvent employée en thermique pour décrire le transfert de chaleur).

L'équation la plus simple qui soit représentative de la convection est la suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (2.6)$$

où $f(x, t)$ est une quantité advectée par un courant d'eau à la vitesse constante u . C'est une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. l'équation caractéristique associée à l'équation aux dérivées partielles (2.6) est

$$\frac{dx}{dt} = u \text{ ou bien encore } \frac{dx}{u} = \frac{dt}{1} = \frac{df}{0}.$$

Comme u est supposée constante, cela veut dire que la solution de l'équation caractéristique est $x - ut = cste$; toute fonction $F(x - ut)$ dont l'argument est $x - ut$ est solution de l'équation (2.6). L'une des caractéristiques de cette solution est que la forme initiale $F(x)$ (à $t = 0$) est conservée tout le long du mouvement : elle est simplement translatée de ut comme le montre la figure 2.2.

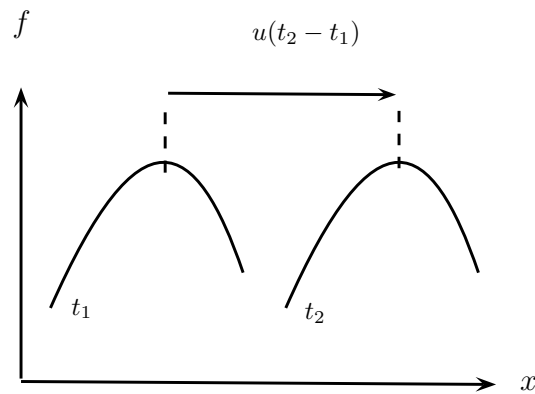


Figure 2.2 : advection d'une quantité f .

2.2.2 Équation de la chaleur (diffusion)

La *diffusion* est un mode de transfert d'un élément sous l'effet de l'agitation thermique (mouvement brownien) ou bien de la turbulence. Dans un cours d'eau, outre le mouvement moyen, il existe des fluctuations de vitesse qui dispersent rapidement un élément ou un fluide dans le volume.

Un des exemples classiques de diffusion est l'équation de diffusion de la chaleur. La température $T(x, y ; t)$ varie au cours du temps dans un matériau (en dimension 2) selon l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2.7)$$

avec $\alpha = k/(\rho C)$ la diffusivité thermique, ρ la masse volumique, k la conductivité thermique, C la chaleur massique.

La matière diffuse également. L'équation de diffusion est la suivante en dimension 1

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (2.8)$$

avec D le coefficient de diffusion et $f(x, t)$ est ici une quantité telle que la concentration d'un polluant dans une rivière. C'est une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre.

Il s'agit ici d'équations linéaires. Il est fréquent que le coefficient de diffusion ne soit pas constant, mais dépende de la fonction f . On parle alors d'équation de diffusion non linéaire. Par exemple, lorsqu'on a $D(f) = \kappa f^k$, l'équation de diffusion est

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(f^k \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (2.9)$$

Pour de la diffusion d'un gaz dans un milieu poreux on a $k = 1$ (f représente la concentration) ; pour la diffusion d'un fluide newtonien sur un substrat horizontal, on a $k = 3$ (f représente la hauteur de fluide) ; pour la diffusion de chaleur lors des premiers instants d'une explosion nucléaire, on a $k = 5$.

Solution auto-similaire au problème de Green

Selon les conditions initiales imposées, il existe parfois des solutions analytiques à l'équation (2.8) sous la forme de solution auto-similaire $t^m F(\xi)$ avec $\xi = x/t^n$. Quand on substitue f par cette forme dans l'équation (2.8), on trouve que $n = \frac{1}{2}$. On note que m n'est pas déterminé par l'équation différentielle, mais il l'est par les conditions aux limites. En général, dans les problèmes physiques, on impose que la quantité de matière diffusée soit constante

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = V,$$

où V est le volume total (supposé constant) de matière qui diffuse. Un changement de variable donne $\int f(x) dx = \int t^{m+1/2} F(\xi) d\xi = V$. Il est donc nécessaire que $m = -\frac{1}{2}$ car V ne dépend pas de t .

L'avantage de ce changement de variable est qu'on transforme l'équation aux dérivées partielles en équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2, bien plus simple à résoudre. Voyons cela en pratique dans un cas particulier où l'on suppose que dans une retenue d'eau au repos (lac), on lâche un volume V de polluant initialement contenu en un point $x = 0$; la condition initiale est donc $f(x, 0) = \delta(x)$ où δ est la fonction Dirac ($\delta(x) = 1$ si $x = 0$ et $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$). Ce problème où la condition initiale est une « impulsion », c'est-à-dire une quantité localisée en un point, s'appelle *problème de Green*. En substituant la forme $f = t^{-1/2} F(\xi)$ dans l'équation (2.8), on obtient une équation différentielle ordinaire pour F et ce faisant, on a transformé un problème aux dérivées partielles en problème différentiel ordinaire :

$$F + \xi F'(\xi) + 2DF''(\xi) = 0,$$

qui donne en intégrant une première fois

$$\xi F + 2DF' = a,$$

avec a une constante d'intégration. Comme la solution est attendue être symétrique en $x = 0$ (donc en $\xi = 0$), on a $F' = 0$ en $x = 0$ (F doit admettre une tangente horizontale en ce point), donc $a = 0$. Une nouvelle intégration donne

$$F(\xi) = be^{-\frac{\xi^2}{4D}} \Rightarrow f(x, t) = \frac{b}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

avec b une constante d'intégration. Comme $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4D}} dx = 2\sqrt{D\pi}$, on déduit que $b = V/2\sqrt{D\pi}$, d'où la solution

$$f(x, t) = \frac{V}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (2.10)$$

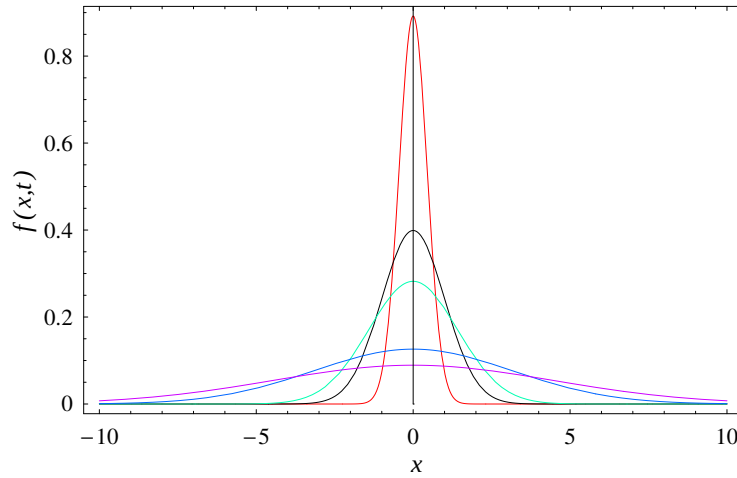


Figure 2.3 : diffusion d'une quantité f . Calcul avec $D = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ et au temps $t = 0,1$, $t = 0,5$, $t = 1$, $t = 5$, et $t = 10 \text{ s}$.

Comme le montre la figure 2.3, la forme du front de diffusion reste identique au cours du temps (elle est en forme de cloche), quoique le front s'étale de plus en plus. Notons que la solution obtenue a un intérêt général car elle est la solution particulière du problème dit de Green. Par exemple, admettons que la condition initiale soit plus complexe: $f(x, 0) = g(x)$. Puisque l'équation différentielle est linéaire, la somme de deux solutions est également solution. La solution générale s'écrit alors

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4Dt}} d\zeta.$$

Cette intégrale signifie que la concentration f à tout temps t et pour tout x est la somme des contributions élémentaires induites par la distribution de source d'intensité $g(\zeta)$ par unité de longueur.

Transformée de Laplace

Supposons que l'on veuille résoudre l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (2.11)$$

avec D le coefficient de diffusion (constant), à laquelle on adjoint les conditions initiales et aux limites suivantes

$$f(x, 0) = 0, \quad (2.12)$$

$$f(0, t) = a \text{ pour } t > 0, \quad (2.13)$$

$$f(x, t) = 0 \text{ pour } x \rightarrow \infty \text{ et } t > 0, \quad (2.14)$$

avec a une constante. On transforme la fonction à l'aide de la transformée de Laplace en t

$$\hat{f}(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt.$$

Pour transformer l'équation (2.8), il suffit de multiplier les termes par e^{-st} , puis d'intégrer de 0 à ∞ par rapport à t . On a ainsi

$$\int_0^\infty D e^{-st} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-st} f dt, \quad (2.15)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial f}{\partial t} dt = [f e^{-st}]_0^\infty + \int_0^\infty s e^{-st} f dt, \quad (2.16)$$

où le terme entre crochets disparaît compte tenu de la condition initiale. La transformée de Laplace de l'équation de diffusion linéaire (2.8) est donc

$$s \hat{f} = D \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2}, \quad (2.17)$$

qui malgré les termes de dérivée partielle se comporte comme une équation différentielle ordinaire en x . La transformée de Laplace des conditions aux limites (2.13) et (2.14) fournit

$$\hat{f}(0, s) = \int_0^\infty a e^{-st} dt = \frac{a}{s}, \quad (2.18)$$

$$\hat{f}(x, s) = 0 \text{ quand } x \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

La solution de l'équation (2.17) est donc

$$\hat{f}(x, s) = \frac{a}{s} \exp\left(-x \sqrt{\frac{s}{D}}\right),$$

dont la transformée de Laplace inverse est

$$f(x, t) = a \left(1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right),$$

avec Erf la fonction erreur. La figure 2.4 montre des profils de f à des temps différents. Aux temps infinis, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) = a,$$

donc le profil de f tend vers un profil uniforme $f = a$.

2.2.3 Équation de convection-diffusion

La convection-diffusion est la combinaison des deux phénomènes. C'est le phénomène couramment rencontré en hydraulique. Par exemple, le déversement d'un polluant dans une

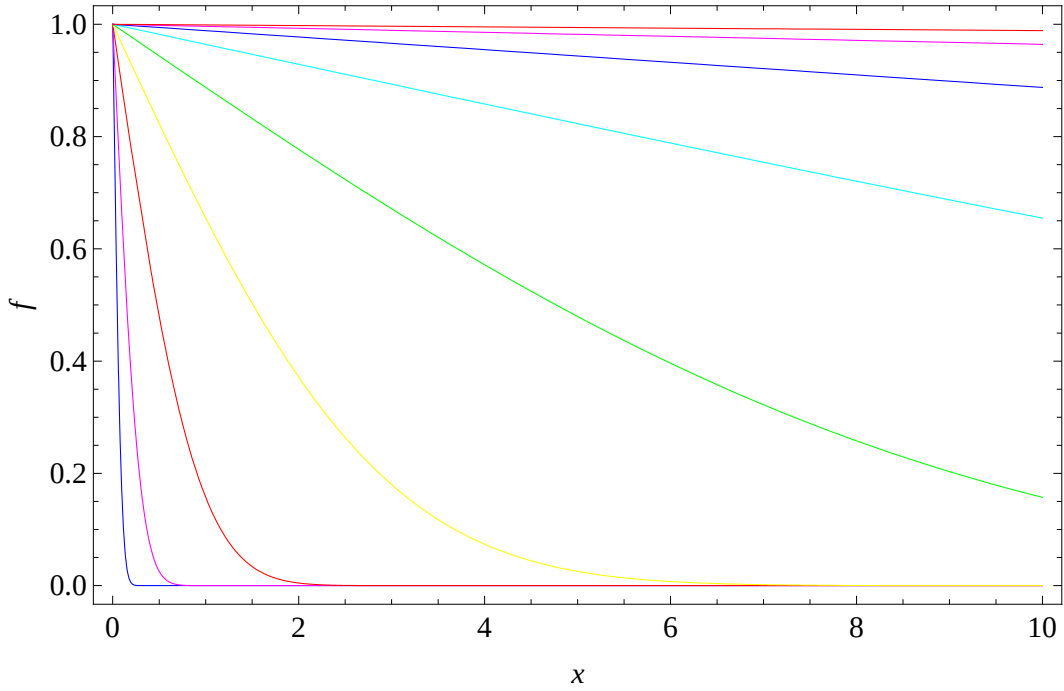


Figure 2.4 : variation de f pour $t = 10^{-2}, 10^{-2}, 1, 10^{+1} \dots, 10^{+6}$. Calcul réalisé avec $a = 1$ et $D = 1 \text{ m}^2/\text{s}$.

rivière conduit à un transport de ce polluant par diffusion (turbulente) et convection (advection à la vitesse de l'eau). L'équation caractéristique est donc

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (2.20)$$

où D et u sont supposées constantes. On peut se ramener à un problème de diffusion linéaire par le changement de variable suivant (qui revient à faire un changement de référentiel et à se placer dans le référentiel du cours d'eau)

$$\begin{aligned} \zeta &= x - ut, \\ \tau &= t. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cdot}{\partial x} &= \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} &= \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \\ &= -u \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} + \frac{\partial \cdot}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

L'équation (2.20) devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2},$$

qui est similaire à l'équation de diffusion (2.8) vue plus haut.

Un cas particulier de convection-diffusion est rencontré avec l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.21)$$

qui peut être transformée également en une équation de diffusion à l'aide de la transformation de Cole-Hopf

$$u = -\frac{2D}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

avec $\phi(x, t)$ une fonction auxiliaire. On a en effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{2D}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2D}{\phi^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{2D}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{2D}{\phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{2D}{\phi} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \frac{4D}{\phi^3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 + \frac{6D}{\phi^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \end{aligned}$$

On obtient alors après simplification

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + 2D \left(\phi \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0,$$

que l'on peut transformer – en divisant par ϕ^2 , puis en intégrant par rapport à x , et enfin en multipliant de nouveau par ϕ – en une équation de diffusion linéaire

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

2.2.4 Équation des ondes

Les ondes dynamiques sont les solutions d'une équation différentielle telle que l'équation aux dérivées partielles (du second ordre) suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (2.22)$$

avec c la vitesse (de phase). Cette forme n'est pas exhaustive ; par exemple, l'équation des ondes de surface s'écrit (voir § 6.5) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

avec ici ϕ le potentiel de vitesse ($\mathbf{u}(x, y, t) = \nabla \phi$) et g l'accélération de la gravité.

On recherche souvent les solutions sous la forme d'harmoniques (onde périodique) :

$$\phi(t) = A \exp[i(kx - \omega t)] = \operatorname{Re}(A) \cos(kx - \omega t) - \operatorname{Im}(A) \sin(kx - \omega t),$$

où A est l'amplitude, k le nombre d'onde ($\lambda = 2\pi/k$ est la longueur d'onde), ω la fréquence angulaire ; on introduit aussi une fréquence f définie comme $f = \omega/(2\pi)$: c'est le nombre d'oscillations complètes durant une seconde à une position donnée. La période est définie comme $T = \lambda/c$.

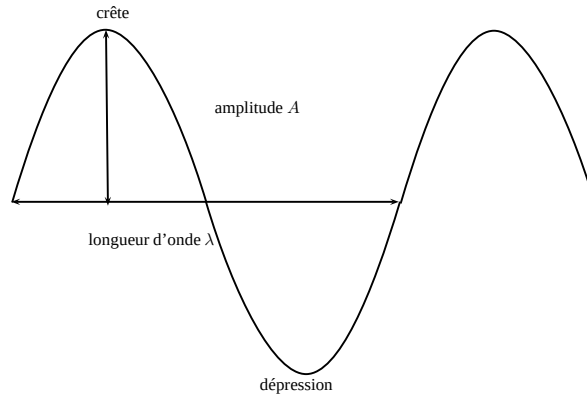


Figure 2.5 : longueur d'onde et amplitude d'une onde harmonique.

La *vitesse de l'onde* est ici $c = \omega/k$. Cela veut dire que pendant un intervalle δt , on a observé que l'onde s'est déplacée d'une distance $c\delta t$. La relation de dispersion $\omega(k)$ est ici linéaire puisqu'on a : $\omega(k) = ck$, c'est-à-dire les crêtes de la vague se déplacent à une vitesse constante qui est indépendante de la longueur d'onde. Dans la plus plupart des systèmes que l'on va étudier dans ce cours, la relation n'est pas linéaire, ce qui en pratique implique que la vitesse des crêtes dépend de la longueur d'onde. On introduit alors la *vitesse de phase* c_p

$$c_p = \frac{\omega(k)}{k}.$$

Dans un processus physique où les ondes résultent de la superposition de plusieurs ondes harmoniques de longueur d'onde différente, chaque composante harmonique se déplace à sa propre vitesse, ce qui aboutit finalement à une séparation ou dispersion de l'onde, d'où le nom de relation de dispersion pour $\omega(k)$. Il existe une troisième vitesse, appelée *vitesse de groupe*, qui représente la vitesse à laquelle l'énergie associée à l'onde se propage :

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2.23)$$

En général, pour la plupart des phénomènes physiques, on a $c_g \leq c_p$.

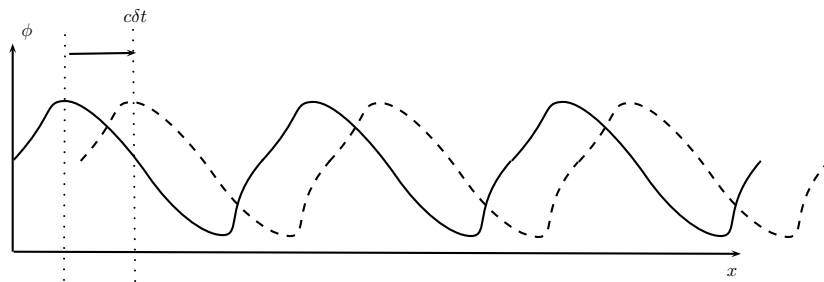


Figure 2.6 : déplacement vers la droite à la vitesse c d'une onde progressive.

L'équation différentielle (2.22) est linéaire, ce qui implique que toute combinaison de solutions est également solution (principe de superposition). Il existe deux sens de propagation :

- onde progressive $f = f(x - ct)$: l'onde va dans le sens $x > 0$;
- onde régressive $f = f(x + ct)$: l'onde va dans le sens $x < 0$.

Notons par ailleurs que l'équation (2.22) peut se factoriser ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0,$$

ce qui permet également de transformer une équation aux dérivées partielles du second ordre en un système d'équations du premier ordre

$$\begin{cases} f_t - cf_x = v, \\ v_t + cv_x = 0. \end{cases}$$

Cela permet notamment de montrer que la solution générale de l'équation des ondes (2.22) s'écrit

$$f = a(x - ct) + b(x + ct),$$

avec a et b deux fonctions quelconques (solution dite d'*Alembert*).

Remarquons que dans bien des cas d'intérêt pratique, les équations sont linéaires ; la linéarité permet d'appliquer le principe de superposition. Une onde *stationnaire* résulte de la superposition d'une onde régressive et d'une onde progressive de même amplitude. Dans ce cas, la dépendance en temps disparaît.

2.2.5 Équation de Laplace

Les équations elliptiques traduisent en général comment un processus à l'équilibre est organisé spatialement. Le prototype de l'équation elliptique est l'*équation de Laplace* :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (2.24)$$

Par exemple, l'équation de la chaleur (2.7) en régime permanent ($\partial_t T = 0$) devient elliptique. L'équation de Laplace sert à décrire un grand nombre d'écoulements stationnaires dans les problèmes environnementaux. Ainsi, l'écoulement lent d'eau dans un milieu poreux est également une équation de Laplace. En effet, si la vitesse $\mathbf{u}$ suit la loi de Darcy, alors elle est reliée au gradient de pression p par : $\mathbf{u} = -k \nabla p / \mu$, avec μ la viscosité et k la perméabilité du milieu. On peut reformuler cette équation de la façon suivante $\mathbf{u} = -\nabla \psi$ avec $\psi = -kp / \mu$; on dit que $\mathbf{u}$ dérive du potentiel ψ . L'équation de continuité (incompressibilité du fluide) impose que $\text{div } \mathbf{u} = 0$, soit encore

$$\nabla \cdot \nabla \psi = 0 \Rightarrow \Delta \psi = 0.$$

2.3 Conditions aux limites pour les problèmes hyperboliques

On a vu que tout problème hyperbolique peut se ramener après changement de variables à une équation canonique de la forme

$$u_{xt} + a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t).$$

On va tout d'abord expliciter le problème des conditions aux limites avec l'exemple de l'équation des ondes.

Équation des ondes

Considérons l'équation des ondes

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

qui peut se transformer en

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

avec $\xi = x + ct$ et $\eta = x - ct$, où c représente la vitesse caractéristique de propagation des ondes. Si on intègre cette équation sur un domaine de calcul prédéfini $\mathcal{D}$, dont le contour $\partial\mathcal{D}$ est orienté (dans le sens positif), on peut mettre en relief le rôle des conditions aux limites dans le calcul de la solution. On fera ici un usage important du théorème de la divergence (ou de façon équivalente de la formule de Green). En tout point du contour, la normale est notée $\mathbf{n}$. Le théorème de la divergence nous permet de passer d'une formulation sur un volume (ce qui représente l'équation à résoudre) à une formulation sur un contour (ce qui fait apparaître les conditions aux limites)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{D}} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx dt, \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(\partial_t u_t + \partial_x (-c^2 u_x) \right) dx dt, \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} (c^2 u_x, -u_t) \cdot \mathbf{n} ds, \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} (u_t dx + c^2 u_x dt), \end{aligned}$$

car $\mathbf{n} ds = (dt, -dx)$. On va voir que selon le type de conditions que l'on impose, il faut imposer des contours différents; les conditions imposées sur ce contour jouent également un rôle différent, ce qui va nous amener à distinguer les frontières temporelles (sur un axe Ot) et les frontières spatiales (sur un arc Ox).

Considérons en premier lieu le problème suivant: on cherche à résoudre l'équation des ondes, avec la condition initiale suivante sur l'axe des x :

$$u(x, 0) = f(x) \text{ et } u_t(x, 0) = g(x).$$

On cherche à calculer la solution en un point M . On peut tracer deux caractéristiques émanant des points A et B situés sur l'axe Ox . On considère alors le domaine triangulaire AMB . Calculons tout d'abord l'intégrand $u_t dx + c^2 u_x dt$ sur la caractéristique BM d'équation $x + ct = cste$

$$\int_{BM} (u_t dx + c^2 u_x dt) = \int_{BM} (-cu_t + c^2 u_x) dt,$$

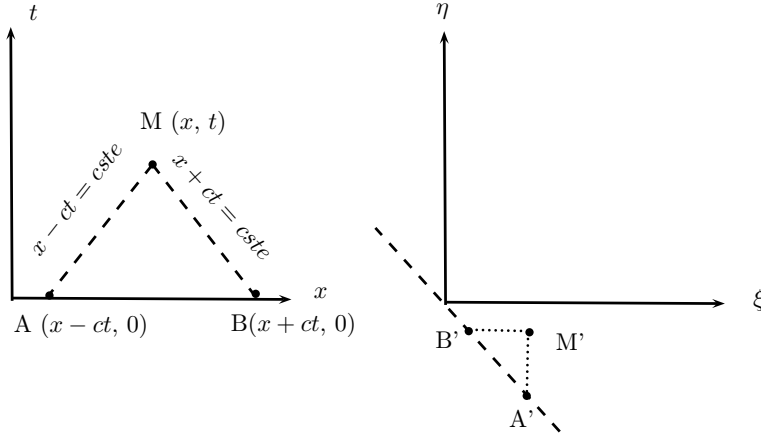


Figure 2.7 : le triangle des caractéristiques dans le plan physique $x - t$ (à gauche) et dans le plan caractéristique $\xi - \eta$ (à droite).

or $u_t - cu_x$ est la dérivée de u selon la caractéristique BM , donc $u_t - cu_x = du/dt$ sur BM . On a donc

$$\int_{BM} (u_t dx + c^2 u_x dt) = \int_{BM} (-c) \frac{du}{dt} dt = - \int_{BM} c du.$$

On aboutit à

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{D}} (u_t dx + c^2 u_x dt) &= - \int_{BM} c du + \int_{MA} c du + \int_{AB} u_t dx, \\ &= -2cu(x, t) + cu(x + ct, 0) + cu(x - ct, 0) + \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(x, 0) dx, \\ &= 0, \end{aligned}$$

Soit finalement

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(x, 0) dx,$$

qui est une forme spéciale de la solution d'Alembert.

Il est manifeste qu'avec ce type de conditions aux limites, où l'on fixe ce qui se passe sur un arc donné (par exemple, un segment de l'axe Ox compris entre $x = a$ et $x = b$), on ne peut renseigner que sur un domaine triangulaire, appelé *domaine d'influence*, qui est rempli par les caractéristiques $x - ct$ et $x + ct$. Un tel problème aux limites est appelé *problème de Cauchy* et la frontière où l'on a imposé les conditions aux limites est dite *frontière spatiale*.

Si on veut remplir tout le premier quadrant, il faut fournir une condition supplémentaire sous la forme d'une condition aux limites le long de l'axe Ot . Pour cette raison, une telle frontière est appelée *temporelle*. On impose une condition aux limites de la forme suivante

$$u(0, t) = h(t);$$

c'est une condition aux limites de type *Dirichlet*. Pour calculer ce qui se passe au point M , il faut calculer ce qui se passe sur trois caractéristiques comme le schématise la figure 2.9. En faisant comme précédemment une décomposition selon les différentes caractéristiques, on

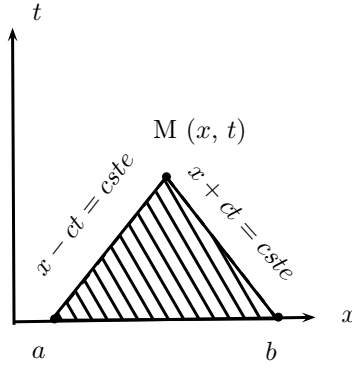


Figure 2.8 : domaine d'influence.

obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}} (u_t dx + c^2 u_x dt) &= - \int_{BM} c du + \int_{MC} c du - \int_{CA} c du + \int_{AB} u_t dx, \\ &= -2cu(x, t) + cu(x + ct, 0) + 2cu\left(0, t - \frac{x}{c}\right) - cu(ct - x, 0) + \int_{ct-x}^{x+ct} u_t(x, 0) dx, \\ &= 0, \end{aligned}$$

soit

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(x, 0) dx + h\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

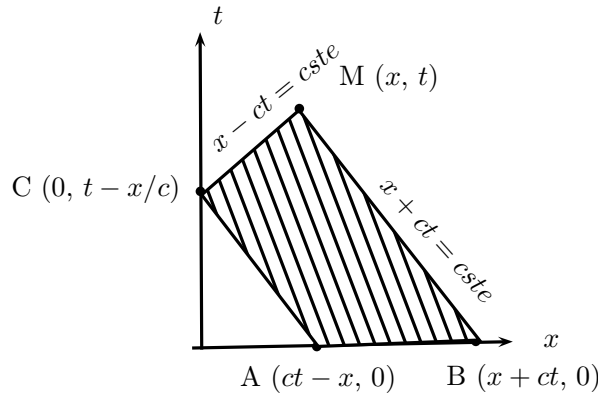


Figure 2.9 : domaine de calcul avec une frontière temporelle.

Notons que si les conditions initiales et aux limites ne se recoupent pas au point origine, c'est-à-dire si $f(0) \neq h(0)$, alors une discontinuité (appelée encore choc) se produit. Si les conditions aux limites sont un peu plus complexes, par exemple sous une forme d'une condition de *Neumann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h(t),$$

ou bien mixte

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \beta u(0, t) = h(t),$$

le problème se résout de la même façon. Si l'on ajoute un terme source dans l'équation des ondes, il n'y a pas de difficulté supplémentaire: le terme source apparaît dans la solution

sous la forme d'une (double) intégrale sur le domaine $\mathcal{D}$ (Zauderer, 1983, voir pp. 298–299). D'une façon générale, ce que l'on voit apparaître, ce sont deux domaines dans le premier quadrant, séparés par la caractéristique $x = ct$ émanant du point origine. Le domaine I est entièrement contrôlé par les conditions initiales, alors que le domaine II nécessite de connaître les conditions aux limites comme le montre la figure 2.10.

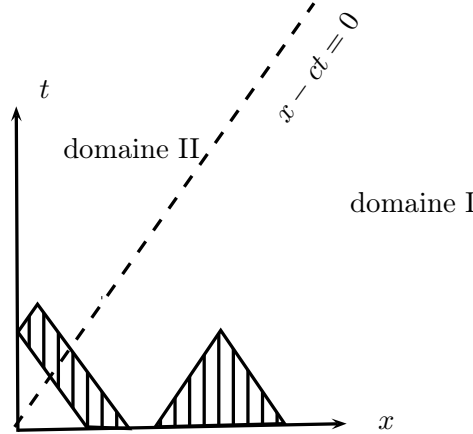


Figure 2.10 : domaine de calcul avec des conditions initiales et aux limites.

Le cas des frontières mobiles est plus intéressant. Imaginons que la frontière bouge. Sa position est donnée par $x = h(t)$ et donc sa vitesse par $u_f = \dot{h}(t)$. On cherche à résoudre l'équation des ondes $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ avec pour conditions aux limites

$$u(x, t)|_{x=h(t)} = \dot{h},$$

et pour conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x) \text{ et } u_t(x, 0) = g(x).$$

Si la vitesse du piston est supérieure à la vitesse caractéristique c , le problème est mal posé. Cela peut se comprendre en examinant la figure 2.11(a). Pour un point M tel que reporté sur cette figure, sa vitesse u équivaut à la vitesse de la frontière mobile et à celle impulsée initialement, ce qui n'est pas possible sauf cas exceptionnel où vitesses initiale et aux frontières seraient tout le temps égales. Une telle condition aux limites implique en fait l'apparition d'un choc. Pour le cas plus sympathique où $\dot{h} < c$, le problème est bien posé puisqu'on peut en tout point M construire une solution comme on l'a fait juste au-dessus avec le problème sur le premier quadrant.

Vocabulaire

Ce qui a été dit à propos de l'équation de la chaleur peut se généraliser à tout problème différentiel hyperbolique du second ordre. Notamment, quand on étudie l'équation des ondes, on parle

- de frontière temporelle (*time-like curve*) lorsque la courbe $x = h(t)$ est au-dessus de la caractéristique $\dot{h} < c$. Toute frontière de ce type peut servir à fournir une condition aux limites ;
- de frontière spatiale (*space-like curve*) lorsque la courbe $x = h(t)$ est au-dessous de la caractéristique $\dot{h} > c$. Ce type de frontière sert à donner une condition initiale.

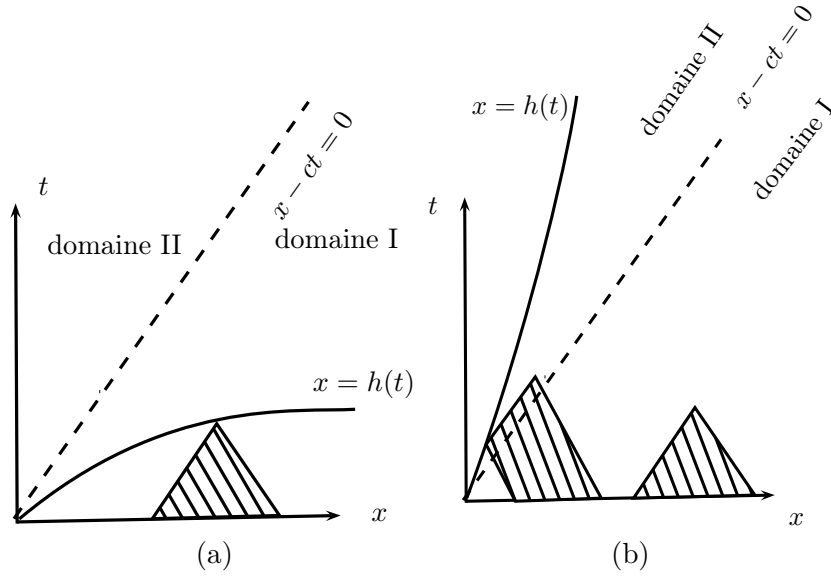


Figure 2.11 : (a) frontière mobile avec $\dot{h} > c$; avec $\dot{h} < c$.

Ces définitions se généralisent en examinant la position de la frontière dans le plan caractéristique $\xi - \eta$: si les droites caractéristiques $\xi = cste$ et $\eta = cste$ émanent de la frontière en restant dans le même domaine, on parle d'*arc spatial*. Inversement, si les droites caractéristiques sont situées de part et d'autre de l'arc, alors on parle d'*arc temporel*.

Les théorèmes d'existence ont été prouvés lorsqu'on a un problème avec une frontière spatiale, mais l'unicité de la solution est un problème beaucoup plus ardu lorsque la frontière est temporelle.

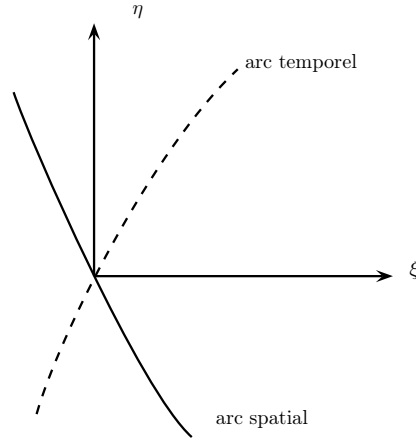


Figure 2.12 : définition d'un arc spatial/temporel selon la position des caractéristiques.

Exercices



Exercice 2.1 Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'équation suivante :

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0.$$

↪ *Réponse* : On recherche des solutions harmoniques de la forme :

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}.$$

La relation de dispersion est :

$$\omega = k - k^3.$$

On déduit que la vitesse de phase est

$$c = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2,$$

c'est-à-dire une fonction de k . Il s'agit donc d'une onde dispersive. La vitesse de groupe est

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2,$$

qui est bien inférieure à la vitesse de phase. $\square$

Méthodes de résolution analytique

3.1 Vue générale sur les méthodes de résolution des équations

L'INGÉNIEUR a à sa disposition une grande variété de méthodes de résolution des équations différentielles. S'il n'existe pas d'outils universels, de solveur qui permette de résoudre tout type d'équation, il existe un certain nombre de techniques qui marchent dans la plupart des cas d'intérêt pratique. Parmi les méthodes exactes, on peut citer :

- *séparation des variables* : cette technique permet de transformer une équation aux dérivées partielles en une série d'équations différentielles ;
- *transformation intégrale* : la transformée de Fourier ou de Laplace permet de transformer une équation aux dérivées partielles linéaire en une équation différentielle ordinaire lorsque le domaine de résolution est infini (ou semi-infini). Un exemple est donné avec l'équation de diffusion au § 2.2.2 ;
- *méthode de Green* : pour les équations linéaires avec des conditions aux limites également linéaires, il est possible d'exploiter la linéarité en cherchant d'abord à résoudre un problème de Green, c'est-à-dire la même équation différentielle mais avec des conditions aux limites faisant appel à des « impulsions » (Dirac). La solution finale est obtenue en additionnant la réponse à chaque impulsion élémentaire. Un exemple est donné avec l'équation de diffusion au § 2.2.2 ;
- *groupes d'invariance* : il s'agit d'exploiter des transformations géométriques (formant ce qu'en mathématiques, on appelle un groupe) qui laissent invariante une équation. Parmi les plus fréquentes, les invariances par translation et étirement permettent de trouver des solutions auto-similaires. Ces méthodes permettent de simplifier le problème en transformant l'équation aux dérivées partielles en équation différentielle ordinaire ;
- *méthode de l'hodographe* : certaines équations sont plus simples à résoudre quand on intervertit le rôle des variables dépendantes et indépendantes ;
- *développement en fonctions propres* : la solution d'une équation différentielle linéaire (avec des conditions aux limites également linéaires) est recherchée sous la forme d'une série infinie de fonctions propres.

Pour certaines équations, il existe des méthodes spécifiques que nous ne détaillons pas.

Par exemple, les transformations conformes offrent une application de la théorie des fonctions à variable complexe pour résoudre l'équation de Laplace.

Parmi les méthodes approchées, on peut citer :

- les *méthodes aux perturbations* : on transforme un problème non linéaire en une série d'équations linéaires qui permettent d'approcher l'équation non linéaire ;
- les *méthodes asymptotiques* : on cherche à simplifier les équations en supprimant les termes dont l'ordre de magnitude est petit devant les autres termes ;

- les *méthodes numériques* : on discrétise les équations et résout les équations ainsi trouvées par des méthodes itératives à l'aide d'un ordinateur. D'autres méthodes numériques : les méthodes de type Galerkin cherchent numériquement les solutions en les décomposant sous la forme de fonctions connues (spline, polynôme, ondelette, etc.).

3.1.1 Méthode aux perturbations

Il est assez fréquent en mécanique d'aboutir à des équations différentielles assez complexes, mais dont certains termes sont pondérés par des coefficients qui prennent des valeurs relativement faibles par rapport aux autres contributions. L'idée est alors

- d'approcher la solution par une série de fonctions, dont l'ordre de grandeur décroît ;
- de substituer cette expression dans l'équation originale ;
- de regrouper les termes de même ordre pour former une hiérarchie d'équations ;
- de résoudre itérativement des équations.

♣ **Exemple.** – Prenons un exemple avec une équation simple du second ordre

$$y'' + \epsilon y' + y = 0, \quad (3.1)$$

avec comme conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$; on suppose que ϵ est petit devant 1 (par exemple $\epsilon = 0,1$). On forme le développement suivant

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2 + \dots \epsilon^n y_n + \dots,$$

avec y_k une fonction de x telle que $O(y_k) = 1$ sur l'intervalle considéré. On substitue cette expression dans l'équation (3.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} & (y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2 + \dots \epsilon^n y_n + \dots)'' + \\ & \epsilon (y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2 + \dots \epsilon^n y_n + \dots)' + \\ & (y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2 + \dots \epsilon^n y_n + \dots) = 0 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites fournissent

$$\begin{aligned} y_0(0) + \epsilon y_1(0) + \epsilon^2 y_2(0) + \dots \epsilon^n y_n(0) + \dots &= 1, \\ y'_0(0) + \epsilon y'_1(0) + \epsilon^2 y'_2(0) + \dots \epsilon^n y'_n(0) + \dots &= 0. \end{aligned}$$

À l'ordre ϵ^0 , on collecte les termes et on tire

$$y''_0 + y_0 = 0,$$

avec pour conditions aux limites $y_0(0) = 1$ et $y'_0(0) = 0$. L'intégration donne : $y_0(x) = \cos x$.

À l'ordre ϵ^1 , on collecte les termes et on tire

$$y''_1 + y_1 = -y'_0,$$

avec pour conditions aux limites $y_1(0) = 0$ et $y'_1(0) = 0$. L'intégration donne : $y_1(x) = \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x)$. Le calcul peut se poursuivre ainsi indéfiniment. Au final, la solution approchée à l'ordre $O(\epsilon^2)$ de l'équation est

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\epsilon(\sin x - x \cos x) + O(\epsilon^2).$$

La figure 3.1 montre le bon accord entre solutions exacte et approchée. $\square$

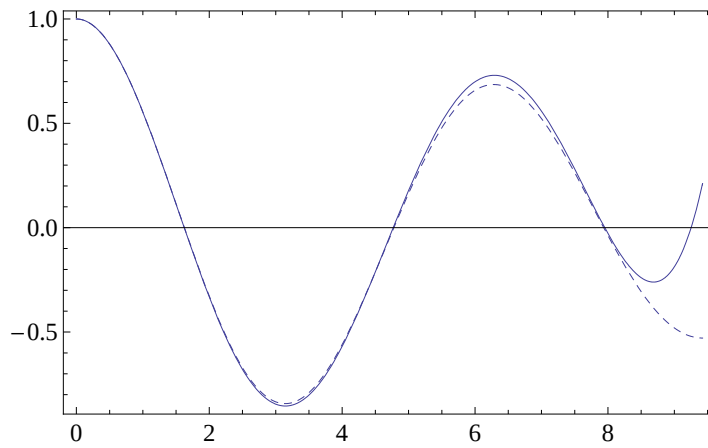


Figure 3.1 : comparaison entre la solution exacte (trait solide) et approchée à l'ordre 2 (trait discontinu) de l'équation (3.1) avec $\epsilon = 0,1$.

3.1.2 Méthode asymptotique

Dans les équations où plusieurs termes apparaissent, il est rare que tous les termes aient localement le même poids. En recherchant quels sont les termes dominants, on peut arriver à avoir une solution asymptotique vers laquelle la vraie solution tend localement. En général, on cherche à traduire un équilibre entre deux, exceptionnellement trois, termes.

♣ **Exemple.** – Considérons l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0, \quad (3.2)$$

avec pour conditions initiales: $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Notons que la solution est $y = \exp(-x^2/2)$. On cherche à approcher la solution pour $x \rightarrow 0$ sans utiliser notre connaissance de la vraie solution. Pour cela on va examiner deux à deux les contributions de l'équation :

- supposons que $y'' \ll y$. On doit donc résoudre $x\tilde{y}' + \tilde{y} = 0$, dont une intégrale première est $x\tilde{y} = a$, avec a une constante. Il n'est pas possible de satisfaire les conditions aux limites. Un tel équilibre n'est donc pas possible ;
- supposons que $y \ll y''$. L'équilibre dominant est donc $\tilde{y}'' + x\tilde{y}' = 0$, dont la seule solution est $\tilde{y} = 1$. L'hypothèse $y \ll y''$ n'est pas vérifiée, donc l'équilibre n'est pas le bon ;
- la seule possibilité est donc $xy' \ll y$, ce qui amène à l'équilibre dominant $\tilde{y}'' + \tilde{y} = 0$, dont la solution est $\tilde{y} = \cos x$. On vérifie bien que $x\tilde{y}' = -x \sin x$ est bien plus petit que $\tilde{y}$ quand $x \rightarrow 0$.

L'approximation de l'équation (3.2) est donc $\tilde{y} = \cos x$, ce qui fournit une représentation assez correcte de la solution quand $x \rightarrow 0$ comme le montre la figure 3.2. $\square$

3.1.3 Solutions auto-similaires

Nous allons ici voir deux techniques pour déterminer des solutions auto-similaires à une équation aux dérivées partielles (si de telles solutions existent) à deux variables :

- dans la première méthode, nous allons voir que lorsque l'analyse dimensionnelle de l'équation aux dérivées partielles et de ses conditions initiales et aux limites montre qu'il n'y a que deux nombres sans dimensions qui définissent le problème, c'est-à-dire

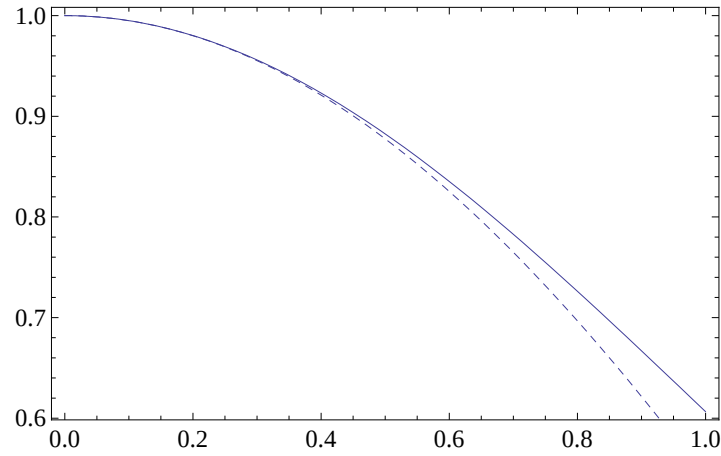


Figure 3.2 : comparaison entre la solution exacte $y = \exp(-x^2/2)$ (trait solide) et approchée $\tilde{y} = \cos x$ (trait discontinu) de l'équation (3.2).

si la solution peut se mettre sous la forme $\Pi_1 = \phi(\Pi_2)$, alors on peut construire une solution auto-similaire ;

- dans la seconde méthode, on rend les équations à résoudre adimensionnelles, puis on cherche à savoir si elles sont invariantes par une transformation de type « étirement ». Dans un tel cas, on peut réduire l'ordre de l'équation aux dérivées partielles et la transformer en équation différentielle ordinaire, plus simple à résoudre.

Ces deux méthodes sont étudiées à travers l'exemple de l'équation de la chaleur (voir aussi § 2.2.2).

Apport de l'analyse dimensionnelle

Reconsidérons l'équation de la chaleur (2.7) en dimension 1 dans un barreau de section S

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3.3)$$

avec α la diffusion thermique, $T(x, t)$ la température, x une abscisse dans la direction du barreau. L'énergie thermique E se conserve

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx = V = \frac{E}{cS}, \quad (3.4)$$

avec c la capacité calorimétrique. Il existe donc $n = 5$ variables : T , x , t , α , et V ; les autres variables (E , c , et S sont introduites uniquement *via* V).

La matrice dimensionnelle est la suivante

	T	x	t	α	V
homogène à	K	m	s	m ² /s	m · K
Décomposition en monômes :					
puissance de m	0	1	0	2	1
puissance de s	0	0	1	-1	0
puissance de K	1	0	0	0	1

C'est une matrice 3×5 de rang 3 (la quatrième colonne s'obtient par combinaison linéaire des colonnes 2 et 3 ; la colonne 5 est la somme des colonnes 1 et 2). On peut donc former

$k = n - r = 2$ nombres sans dimension. Posons

$$\Pi_1 = x\alpha^a t^b V^c \text{ et } \Pi_2 = T\alpha^{a'} t^{b'} V^{c'}.$$

Pour que $[\Pi_1] = 0$, il faut que

$$[m (m^2/s)^a s^b (mK)^c] = 0,$$

soit le système à résoudre

$$\begin{aligned} \text{pour } m &: 0 = 2a + c + 1, \\ \text{pour } s &: 0 = -a + b, \\ \text{pour } K &: 0 = c, \end{aligned}$$

dont la solution est $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, et $c = 0$. On forme donc le premier nombre sans dimension

$$\Pi_1 = \frac{x}{\sqrt{\alpha t}}.$$

Pour que $[\Pi_2] = 0$, il faut que

$$[K (m^2/s)^{a'} s^{b'} (mK)^{c'}] = 0,$$

soit le système à résoudre

$$\begin{aligned} \text{pour } m &: 0 = 2a' + c', \\ \text{pour } s &: 0 = -a' + b', \\ \text{pour } K &: 0 = c' + 1, \end{aligned}$$

dont la solution est $a' = \frac{1}{2}$, $b' = \frac{1}{2}$, et $c' = -1$. On forme le second nombre sans dimension

$$\Pi_2 = \frac{T\sqrt{\alpha t}}{V}.$$

L'analyse dimensionnelle nous amène à poser la solution sous la forme $\Pi_2 = F(\Pi_1)$. On va donc substituer T par l'expression

$$T = \frac{V}{\sqrt{\alpha t}} F(\xi),$$

avec $\xi = x/\sqrt{\alpha t}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{V}{t^{3/2} \sqrt{\alpha}} F(\xi) - \frac{1}{2} \xi \frac{V}{t^{3/2} \sqrt{\alpha}} F'(\xi) \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{V}{t\alpha} F'(\xi), \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{V}{(t\alpha)^{3/2}} F''(\xi), \end{aligned}$$

ce qui amène à écrire l'équation de la chaleur sous la forme d'une équation différentielle ordinaire du second ordre

$$-\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}\xi F' = F'',$$

qui peut s'intégrer facilement

$$\frac{1}{2}\xi F + F' = a_0,$$

avec a_0 une constante d'intégration. Si la propagation se fait dans les deux sens $x \rightarrow \infty$ et $x \rightarrow -\infty$, la solution est paire et donc en $\xi = 0$, $F' = 0$ (tangente horizontale), soit finalement $a_0 = 0$. Une nouvelle intégration donne

$$\frac{F'}{F} = -\frac{1}{2}\xi \Rightarrow F = a_1 \exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right)$$

avec a_1 une constante d'intégration. En se servant de l'équation (3.4) et puisque $\int_{\mathbb{R}} F d\xi = 1$, on tire $a_1 = 1/(2\sqrt{\pi})$.

La solution finale s'écrit donc

$$T = \frac{V}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\alpha t}\right).$$

Recherche directe des formes auto-similaires

On commence par rendre l'équation (3.3) sans dimension en introduisant des variables adimensionnelles

$$\begin{aligned} T &= T_* \hat{T}, \\ t &= \tau_* \hat{t}, \\ x &= L_* \hat{x}, \end{aligned}$$

avec T_* , τ_* , et L_* des échelles de température, de temps, et de distance; $\hat{T}$, $\hat{t}$, et $\hat{x}$ sont des températures, temps, distances adimensionnels. Si on substitue ce changement de variable dans l'équation (3.3), on trouve que $L_*^2 = \alpha \tau_*$ tandis que la condition aux limites (3.4) impose $L_* T_* = V$. Il manque une troisième condition pour déterminer toutes les échelles; on considère donc ici que l'on connaît τ_* et qu'on déduit les deux autres échelles à l'aide des relations ci-dessus.

La forme sans dimensions des équations (3.3) et (3.4) est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{3.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx = 1, \tag{3.6}$$

où l'on a enlevé les chapeaux sur les variables pour simplifier les notations.

On parle de *solution auto-similaire* d'une équation aux dérivées partielles de la forme $G(x, t, T) = 0$ si on peut trouver un jeu de coefficients a et b tels que, pour tout scalaire λ , on ait $G(\lambda x, \lambda^a t, \lambda^b T) = 0$. Cela veut dire que la fonction solution $T(x, t)$ de l'équation $G = 0$ est invariante quand on « étire » les variables en les multipliant par un certain facteur de proportionnalité. Recherchons ces coefficients en considérant l'étirement suivant, dont l'intensité est fonction du paramètre λ :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \lambda x', \\ t &\rightarrow \lambda^a t', \\ T &\rightarrow \lambda^b T', \end{aligned}$$

avec a et b deux constantes à déterminer. On substitue ces expressions dans l'équation de la chaleur (3.5), ce qui donne

$$\frac{\lambda^b}{\lambda^a} \frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\lambda^b}{\lambda^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2}. \tag{3.7}$$

Cette équation est identique à l'équation (3.5) si on prend $a = 2$. La condition aux limites (3.6) nous fournit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^b \lambda T(x, t) dx = 1, \quad (3.8)$$

ce qui impose de prendre $b = -1$.

On montre que les solutions invariantes par cette transformation « étirement » sont alors données par l'équation caractéristique associée

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{at} = \frac{dT}{bT}. \quad (3.9)$$

✎ **Démonstration.** Si une solution est auto-similaire, alors on a $G(\lambda x, \lambda^a t, \lambda^b T) = 0$. Différentions cette équation par rapport à λ et posons ensuite $\lambda = 1$; on tire la relation :

$$x' \frac{\partial G}{\partial x'} + at' \frac{\partial G}{\partial t'} + bT' \frac{\partial G}{\partial T'} = 0.$$

L'interprétation géométrique en est simple : le vecteur ∇G est perpendiculaire au vecteur (x', at', bT') . Si un point M de coordonnées (x', t', T') est sur la surface solution, alors un point voisin M' $(x' + dx', t' + dt', T' + dT')$ doit l'être aussi et le vecteur incrément entre M et M' (dx', dt', dT') doit également être normal à la surface solution, puisqu'au premier ordre on a

$$G(x' + dx', t' + dt', T' + dT') = 0,$$

soit encore en faisant un développement limité au premier ordre :

$$dx' \frac{\partial G}{\partial x'} + dt' \frac{\partial G}{\partial t'} + dT' \frac{\partial G}{\partial T'} = 0.$$

En comparant les deux équations, cela veut dire que (dx', dt', dT') et (x', at', bT') sont parallèles. L'équation (3.9) ne fait qu'exprimer cette condition de parallélisme entre les deux vecteurs. Cela peut sembler plus complexe que l'équation originale puisqu'on a remplacé un système de deux équations par un système de 3 égalités. En fait on a gagné en simplicité puisqu'on sait résoudre simplement les équations précédentes deux à deux. $\square$

L'équation caractéristique associée à l'équation (3.5) est

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = -\frac{dT}{T},$$

dont il existe deux intégrales premières : $\xi = x/t^{1/2}$ (obtenue avec les deux membres de gauche) et $\tau = Tt^{1/2}$. Les solutions auto-similaires sont donc à rechercher sous la forme $\tau(\xi)$, soit encore :

$$T = \frac{1}{\sqrt{t}} H(\xi).$$

Substituant cette expression dans l'équation (3.5), on trouve

$$-\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}\xi H' = H'',$$

dont la solution est $a_2 \exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right)$, avec a_2 une constante d'intégration, dont la condition aux limites (3.6 nous fournit la valeur : $a_2 = 1/(2\sqrt{\pi})$. La solution sous forme adimensionnelle est donc

$$\hat{T} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\hat{t}}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\hat{x}^2}{\hat{t}}\right),$$

soit sous forme dimensionnelle

$$T = \frac{V}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\alpha t}\right).$$

Synthèse

La première méthode permet de construire pas à pas la solution auto-similaire (quand elle existe) et a l'avantage d'être une approche physique, mais nécessite pas mal de travail. La seconde méthode, un peu plus mathématique, permet de savoir rapidement si des solutions auto-similaires existent et, le cas échéant, de les déterminer.

En pratique, si on considère une équation aux dérivées partielles de la forme $F(u, x, t)$ avec u la variable dépendante, x et t les variables indépendantes, on fait une transformation de type « extension » à un paramètre λ :

$$u \rightarrow u' = \lambda^\alpha u, \quad (3.10)$$

$$t \rightarrow t' = \lambda^\beta t, \quad (3.11)$$

$$x \rightarrow x' = \lambda x. \quad (3.12)$$

où α et β sont deux constantes à déterminer ; elles sont déterminées en substituant ces expressions dans l'équation $F(u, x, t)$ et dans les conditions initiales/aux limites et en cherchant ensuite pour quelles valeurs de α et β , ces équations transformées sont indépendantes de λ . Une fois que ces constantes sont trouvées, on forme l'équation caractéristique :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\beta t} = \frac{du}{\alpha u}.$$

Cette équation montre que la solution auto-similaire que l'on recherche pour $F(u, x, t)$ s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = t^{\alpha/\beta} f(x/t^{1/\beta}). \quad (3.13)$$

3.2 Résolution des équations hyperboliques du premier ordre

En hydraulique, nous sommes amenés à étudier des équations hyperboliques ou des systèmes de n équations hyperboliques :

- dimension 1 : équation de convection non linéaire, par exemple l'équation d'onde cinématique (voir § 6.3) qui sert à décrire l'évolution d'une crue lente :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + K\sqrt{i}\frac{\partial h^{5/3}}{\partial x} = 0,$$

avec h la profondeur d'eau, K le coefficient de Manning-Strickler, et i la pente moyenne ;

- dimension 2 : équations de Saint-Venant (voir § 1.3) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}, \quad (3.15)$$

avec $\bar{u}$ la vitesse moyenne, h la hauteur d'eau, θ la pente locale, τ_p la contrainte au fond ;

- dimension 3 : équations de Saint-Venant avec advection d'un polluant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (3.18)$$

avec φ la concentration en polluant.

Toutes ces équations différentielles sont du premier ordre et sont des équations d'évolution. On ne va s'intéresser ici qu'à des problèmes avec une variable d'espace x , mais ce que l'on va en dire se généralise à deux (ou plus) variables d'espace.

On va donc étudier ici des systèmes différentiels de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + \mathbf{A}(\mathbf{U})\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{U} + \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

avec $\mathbf{A}$ une matrice de dimension n . $\mathbf{B}$ est un vecteur de dimension n appelé « terme source » ou « source ». Le système est dit *homogène* ou sans (terme) source si $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. On parle de *lois de conservation* quand on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Notons qu'un système homogène peut se mettre sous cette forme si $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U}$. Si cette transformation est toujours possible en dimension 1, elle ne l'est pas toujours en dimension $n > 1$; dans un tel cas, si on ne peut transformer les termes $\mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x$ en $\partial_x\mathbf{F}(\mathbf{U})$, on parle de terme non conservatif. Ces termes posent problèmes dans le traitement numérique par la méthode aux volumes finis.

On va voir que les valeurs propres λ_i de $\mathbf{A}$ représentent les vitesses de propagation de l'information. Ce sont les zéros du polynôme $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) = 0$. Un système est dit *hyperbolique*

si $\mathbf{A}$ admet n valeurs propres réelles. Dans le cas linéaire (c'est-à-dire lorsque $\mathbf{A}$ ne dépend ni de x ni de t), la solution sera hyperbolique dans tout l'espace $x-t$ alors que pour un problème non linéaire, la solution peut n'être hyperbolique que localement selon la nature des valeurs propres (réelle ou complexe).

On parle de *système conservatif* ou de *loi de conservation* pour désigner des systèmes d'équation qui se mettent sous la forme donnée par l'équation (3.20). Si cela a du sens d'un point de vue mathématique, cela n'en a pas nécessairement du point de vue physique. En effet, si une grandeur – appelons-la $u(x, t)$ – vérifie une équation de conservation de la forme :

$$u_t + [f(u)]_x = 0,$$

alors on peut créer une infinité d'équations de conservation de la forme : $[g(u)]_t + [h(u)]_x = 0$ – sous la condition que g et h vérifient $h' = g'f'$ – qui soient équivalentes à l'équation originelle. Tant que la fonction $u(x, t)$ est continûment différentiable, cela n'amène guère de problèmes. En revanche, si l'on s'intéresse aux solutions dites *faibles* (c'est-à-dire présentant une discontinuité), alors les solutions ne sont pas équivalentes. Il faut donc bien utiliser l'équation de conservation qui a un sens physique. La question est naturellement : comment savoir si une équation de conservation a une origine physique ou non. En général, les équations utilisées en physique sont tirées de bilans macroscopiques. Par exemple, l'équation de conservation de la masse m implique que sur un volume de contrôle $\mathcal{V}$

$$\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = 0 ;$$

de là on tire que : $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$. Or comme les solutions faibles sont toujours obtenues en réintégrant les équations locales (voir *infra*), il convient donc de se ramener au problème de formulation physique d'origine. À noter que du point de vue mathématique, le passage d'une équation de bilan macroscopique à une équation locale se fait sans problème ; en revanche, le processus inverse induit la perte d'unicité de la solution.

3.2.1 Courbes caractéristiques et variables de Riemann

L'élément-clé dans la résolution des équations différentielles hyperboliques tourne autour de la notion de l'information. On a vu précédemment à travers l'exemple de l'équation des ondes et celui de l'équation de convection qu'une équation aux dérivées partielles traduit un processus physique où de l'information se propage. Les questions qui se posent sont donc : dans quelle direction se propage cette information ? Est-ce que l'information se conserve ou bien s'atténue-t-elle ? La réponse à ces questions passe par les notions de *courbe caractéristique* (propagation de l'information) et *variables de Riemann* (quantité d'information transportée).

Dans un premier temps, on va donner une interprétation géométrique aux termes différentiels qui apparaissent dans l'équation (3.19). Par exemple, dans le cas $n = 1$, on introduit la *courbe caractéristique* comme étant le lieu géométrique le long duquel on va pouvoir interpréter le terme $\partial_t u(x, t) + a \partial_x u(x, t)$ – avec a une constante ou une fonction de u , x , et t – comme une dérivée matérielle $du(x, t)/dt$.

Ensuite, dans le cas $n = 2$, il y a deux variables indépendantes (x et t) et deux courbes caractéristiques, ce qui permet de faire un changement de variables (introduction des variables de Riemann), qui est souvent profitable, surtout dans le cas non linéaire.

Pour le cas $n > 2$, ce changement de variables ne sera plus possible puisqu'on aura n caractéristiques pour seulement deux variables de Riemann indépendantes.

Cas trivial : dimension du problème $n = 1$

Considérons le cas $n = 1$ ($\mathbf{A}$ se réduit alors à un scalaire a) et une équation (3.19) homogène :

$$\partial_t u(x, t) + a(u) \partial_x u(x, t) = 0, \quad (3.21)$$

sujette à une condition initiale de la forme :

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ à } t = 0, \quad (3.22)$$

Une courbe caractéristique est une courbe $x = x_c(t)$ le long de laquelle l'équation aux dérivées partielles $\partial_f U + a \partial_x U = 0$ est équivalente à une équation différentielle ordinaire. Considérons une solution $u(x, t)$ du système différentiel. Le long de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x = x_c(t)$, on a : $u(x, t) = u(x_c(t), t)$ et le taux de variation est :

$$\frac{du(x_c(t), t)}{dt} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{dx_c}{dt} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Admettons maintenant que la courbe $\mathcal{C}$ vérifie l'équation $dx_c/dt = a(u)$. Alors on a immédiatement :

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (3.23)$$

Puisque $du(x, t)/dt = 0$ le long de $x_c(t)$ cela veut dire que $u(x, t)$ se conserve sur cette courbe. Puisque u est constant, $a(u)$ est également constant, donc les courbes $\mathcal{C}$ sont des droites. Sur la figure 3.3, on a tracé trois caractéristiques ; la pente de ces droites est donnée par la condition initiale $u_0(x)$.

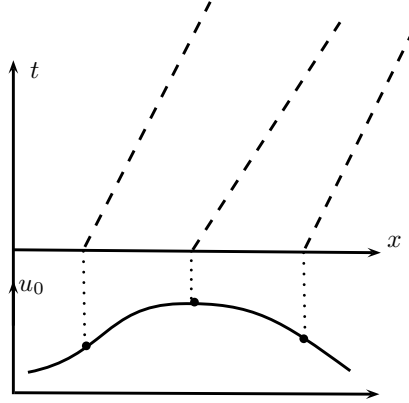


Figure 3.3 : caractéristiques (droites tiretées) pour le problème en dimension 1.

De ces quelques manipulations mathématiques, on doit retenir que les équations (3.21) et (3.23). Toute équation de convection peut donc se mettre sous une forme caractéristique :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + a(u) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{du(x, t)}{dt} = 0 \text{ le long de droites } \mathcal{C} \text{ d'équation } \frac{dx}{dt} = a(u).} \quad (3.24)$$

Lorsque cette équation est sujette à une condition initiale de la forme (3.22), l'équation caractéristique (3.23) se résout simplement. Cherchons tout d'abord l'équation des droites caractéristiques. Intégrons l'équation différentielle caractéristique en se rappelant que u est constant le long de la droite caractéristique :

$$\frac{dx}{dt} = a(u) \Rightarrow x - x_0 = a(u)(t - t_0),$$

or à $t_0 = 0$, on a $u(x, t) = u_0(x)$, donc on déduit que

$$x - x_0 = a(u_0(x_0))t \quad (3.25)$$

est l'équation de la droite caractéristique émanant du point x_0 . Par ailleurs, on a pour $t \geq 0$ $u(x, t) = u_0(x_0)$ puisque u se conserve. Comme d'après l'équation (3.25), on a : $x_0 = x - a(u_0(x_0))t$, on déduit finalement :

$$\boxed{u(x, t) = u_0(x - a(u_0(x_0))t)}. \quad (3.26)$$

Cas $n = 2$

Considérons maintenant le cas $n = 2$. Pour progresser, il faut faire quelques rappels d'algèbre. La matrice $\mathbf{A}$ de l'équation (3.19) admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 ainsi que deux vecteurs propres à gauche $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ (qui dépendent éventuellement de $\mathbf{u}$) :

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i.$$

Elle admet également deux vecteurs propres à droite $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i.$$

Si on introduit les composantes de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

alors on a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d - a + \sqrt{\Delta}}{2c} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a - d + \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associé à } \lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2}, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d - a - \sqrt{\Delta}}{2c} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a - d - \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associé à } \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2}, \end{aligned}$$

avec $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$. Rappelons que tout vecteur colinéaire à un vecteur propre est également un vecteur propre. On peut donc être amené, selon les cas, à écrire un peu différemment les expressions des vecteurs propres. On a ainsi

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2c \\ d - a + \sqrt{\Delta} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a - d + \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2c \\ d - a - \sqrt{\Delta} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a - d - \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2}. \quad (3.28)$$

Notons aussi que les vecteurs propres droite et gauche sont deux à deux orthogonaux :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0,$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = 0.$$

En effet les deux vecteurs doivent être orthogonaux puisque le vecteur à gauche est aussi le vecteur propre à droite de la transposée de la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{v}_2)^* \text{ et } \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}_1 / \lambda_1) = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 / \lambda_1 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1)(\lambda_2 / \lambda_1),$$

d'où $\lambda_2 / \lambda_1 = 1$ (ce qui est incompatible avec l'hypothèse de stricte hyperbolicité) ou bien $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = 0$. On peut aussi relier les composantes du vecteur à droite et du vecteur à gauche. Ainsi, avec l'écriture adoptée plus haut pour les composantes des vecteurs propres, on a $w_{11} = -v_{22}$ et $w_{12} = -v_{21}$.

On va commencer par le cas linéaire, qui est le plus simple car les courbes caractéristiques sont des droites. Le cas non linéaire présente bien des similarités, mais les courbes caractéristiques ne seront plus nécessairement des droites.

Système linéaire Lorsque les vecteurs propres sont des constantes, il est possible de procéder à un changement de variable de la manière suivante : on multiplie l'équation (3.19) par $\mathbf{v}_i$. On obtient :

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}_t + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Soit encore :

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}_t + \lambda_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}_x + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B} = 0.$$

On pose alors $r_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}$. Comme $\mathbf{v}_i$ est constant, on peut :

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{U}). \quad (3.29)$$

Il s'ensuit que le nouveau jeu de variables $\mathbf{r} = \{r_1, r_2\}$ vérifie :

$$\mathbf{r}_t + \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_x + \mathbf{S} = 0$$

où $\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, et $\mathbf{S} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B}, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{B})$. On se ramène alors à un système d'équations différentielles ordinaires indépendantes

$$\frac{dr_1}{dt} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ le long d'une courbe } x = x_{c,1}(t) \text{ telle que } \frac{dx_{c,1}(t)}{dt} = \lambda_1,$$

$$\frac{dr_2}{dt} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ le long d'une courbe } x = x_{c,2}(t) \text{ telle que } \frac{dx_{c,2}(t)}{dt} = \lambda_2,$$

Système non linéaire Plus complexe est le cas où les vecteurs propres sont des fonctions de $\mathbf{U}$ de composantes (U_1, U_2) . Dans ce cas, en effet, on ne peut pas intervertir l'opération de différentiation et le produit scalaire comme on a pu le faire à l'équation (3.29). Cependant quand on a une expression différentielle de la forme

$$\phi = g \frac{\partial f}{\partial t} dt + h \frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

(avec g et h deux fonctions quelconques) il est toujours possible de la transformer en intégrale exacte. En général, il n'est que rarement possible d'écrire directement $\phi = d\psi$, mais en multipliant par une fonction μ (à déterminer) dite « facteur intégrant », il est possible d'arriver à écrire : $\mu\phi = d\psi$. On se reportera au § A.2.2 pour des rappels mathématiques sur cette notion.

Ici on va donc rechercher un jeu de variables nouvelles $\mathbf{r} = \{\alpha, \beta\}$ tel que :

$$\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{U} = \mu_1 d\alpha,$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{U} = \mu_2 d\beta,$$

où μ_i sont des facteurs intégrants pour que dr_i puisse être considéré comme une différentielle exacte. En procédant ainsi, on a :

$$\mu_1 d\alpha = \mu_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial U_2} dU_2 \right) = v_{11} dU_1 + v_{12} dU_2.$$

Par identification, on trouve :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial U_1} = \frac{v_{11}}{\mu_1},$$

et

$$\frac{\partial \alpha}{\partial U_2} = \frac{v_{12}}{\mu_1}.$$

On en déduit les équations que doivent vérifier α et μ_1 . En faisant le rapport des deux équations précédentes on tire :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial U_1} = \frac{v_{11}}{v_{12}} \frac{\partial \alpha}{\partial U_2}, \quad (3.30)$$

tandis que le facteur intégrant est obtenu par l'application du théorème de Schwartz¹

$$\frac{\partial}{\partial U_1} \frac{v_{12}}{\mu_1} = \frac{\partial}{\partial U_2} \frac{v_{11}}{\mu_1}.$$

Le facteur intégrant peut également être obtenu par résolution de $\partial \alpha / \partial U_2 = 1 / \mu_1$ lorsque les composantes de $\mathbf{v}_1$ sont de la forme (3.27) car $v_{11} = 1$.

À noter que si on se sert de w_i avec $i = 1$ ou 2 (le vecteur propre à droite de la matrice $\mathbf{A}$), alors la première équation est équivalente à $w_{21} \partial \alpha / \partial U_1 + w_{22} \partial \alpha / \partial U_2 = 0$, soit sous forme vectorielle :

$$\boxed{\mathbf{w}_2 \cdot \nabla \alpha = 0.}$$

C'est cette définition des invariants de Riemann qui est le plus souvent dans la littérature technique. On dit que α est un 2-invariant (ou 2-variable) de Riemann du système (3.19).

Le système caractéristique associé à la première équation (3.30) donne :

$$\frac{dU_1}{v_{12}} = \frac{dU_2}{v_{11}} = \frac{d\alpha}{0},$$

ce qui permet de trouver une intégrale première. On aboutit alors à l'équation :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} \Big|_{x=X_1(t)} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B} = 0,$$

où la courbe $x = X_1(t)$ vérifie $dX_1/dt = \lambda_1$. On appelle *1-courbe caractéristique* cette courbe. Soit encore :

$$\mu_1 \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{x=X_1(t)} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B} = 0.$$

1. Ce théorème énonce sous réserve de continuité que $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$ et donc lorsqu'on a une différentielle totale de la forme $du(x, y) = a dx + b dy$, on a $\partial_y a = \partial_x b$.

En faisant de même pour β :

$$\mu_2 \frac{d\beta}{dt} \Big|_{x=X_2(t)} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Soit de manière condensée :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{X}(t)} + \mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{B}) = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

le long de deux courbes caractéristiques définies par $\mathbf{r} = \mathbf{X}(t)$ telle que $d\mathbf{X}(t)/dt = (\lambda_1, \lambda_2)$; $\mathbf{S}$ représente un terme source tel que ses composantes vérifient $\mu_i S_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}$. S'agissant d'une équation différentielle, il n'y a pas une seule courbe caractéristique, mais une famille de courbes caractéristiques associées à chaque valeur propre. Les nouvelles variables $\mathbf{r}$ sont appelées *variables de Riemann*. Dans le cas où le système est homogène ($\mathbf{B} = 0$), ils sont constants le long des courbes caractéristiques et on les appelle alors des *invariants de Riemann*. À noter que dans ce cas, seul $\mathbf{r}$ importe et il n'est pas utile de calculer les facteurs intégrants μ_i .

♣ **Exemple.** – Dans le cas d'un sol horizontal non frottant, les équations de Saint-Venant (1.21–1.22) peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = \mathbf{S}, \quad (3.32)$$

avec : $\mathbf{U} = \{h, u\}$, $\mathbf{S} = 0$ et :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ introduite dans le système d'équations (3.32) sont :

$$\lambda_i = u \pm c,$$

avec $c = \sqrt{gh}$, et les vecteurs propres à gauche² sont :

$$\mathbf{v}_i = \left(\pm \frac{c}{h}, 1 \right).$$

Multipliant les équations (3.32) par le vecteur à gauche $\mathbf{v}_1$, on tire :

$$\frac{c}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} - c \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t},$$

que l'on peut arranger de la façon suivante :

$$\frac{c}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.33)$$

On note la présence du facteur c/h et une certaine symétrie des membres de droite et de gauche. Le membre de droite peut s'interpréter comme la dérivée de u par rapport à t le long de la courbe C_- d'équation $dx/dt = \lambda_- = u - c$. On aimerait bien faire de même avec le membre de gauche, mais le facteur c/h pose problème. On souhaiterait pouvoir faire entrer le rapport c/h dans les termes différentiels ; pour cela introduisons une fonction $\psi(h)$ telle que :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{h} \frac{dh}{dt}.$$

2. Les vecteurs propres à gauche vérifient : $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i$.

On trouve facilement par intégration (puisque $c = \sqrt{gh}$) : $\psi(h) = 2\sqrt{gh} = 2c$. L'équation (3.33) peut donc s'écrire

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{du}{dt} \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh},$$

soit encore

$$\frac{ds}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh},$$

avec $s = u - \psi = u - 2c$. On fait ensuite de même avec le second vecteur à gauche $\mathbf{v}_2$; on obtient une équation similaire à (3.33) au signe près et où $u - c$ est remplacé par $u + c$.

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh},$$

avec $r = u + \psi = u + 2c$. $\square$

Formulation des équations dans le plan caractéristique

Dans certains problèmes comme :

- des techniques analytiques (telles que la méthode de l'hodographe),
- des méthodes numériques (tels que les différences finies progressives),

il peut être intéressant de faire un changement de variable $((x, t) \rightarrow (\xi, \eta))$ où (ξ, η) sont les coordonnées curvilignes le long des courbes caractéristiques. Comme le montre la figure 3.4, l'avantage de cette méthode est que les courbes caractéristiques forment un réseau de droites orthogonales et non plus des courbes quelconques et variables.

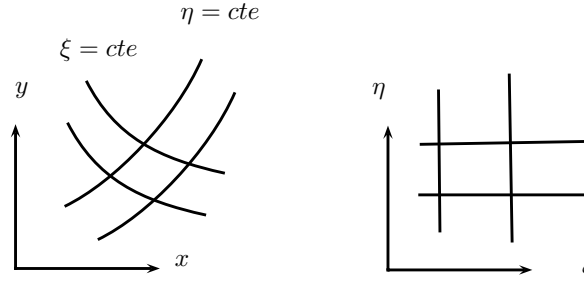


Figure 3.4 : caractéristiques dans le plan physique et dans le plan de Riemann.

On peut considérer que les réseaux de courbes caractéristiques forment un système de coordonnées curvilignes (ξ, η) . Chaque famille admet une représentation paramétrique de la forme

$$\begin{aligned} &\text{pour la 1-caractéristique associée à } \lambda_1, \xi = \phi(x, t) = cste, \\ &\text{pour la 2-caractéristique associée à } \lambda_2, \eta = \psi(x, t) = cste, \end{aligned}$$

autrement dit, ξ est une abscisse curviligne le long de la 2-caractéristique et η le long de la 1-caractéristique. Cela permet aussi de passer d'un plan physique $x-t$ à un plan caractéristique $\xi-\eta$ où les caractéristiques forment des droites parallèles aux axes. Notons au passage que si un point $M(x, t)$ décrit la 1-caractéristique, alors $\xi = \phi_1(x, t) = cste$, donc par différentiation, on tire

$$d\phi_1(x, t) = \partial_x \phi dx + \partial_t \phi dt = 0,$$

soit encore

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial_t \phi}{\partial_x \phi} = \lambda_1,$$

puisque c'est ainsi que nous avons défini la courbe caractéristique précédemment. D'où l'on tire les équations que doivent vérifier ϕ et ψ

$$\phi_t + \lambda_1 \phi_x = 0,$$

$$\psi_t + \lambda_2 \psi_x = 0.$$

Pour un système homogène, l'invariance des variables de Riemann revient à écrire que le système (3.31) (avec $\mathbf{S} = 0$) peut se mettre sous la forme équivalente

$$\frac{\partial r_1}{\partial \eta} = 0, \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \xi} = 0. \tag{3.35}$$

Il est également possible d'écrire l'équation (3.19) sous une forme simplifiée sans passer par les variables de Riemann ([Kevorkian, 2000](#), voir pp. 459–461). Pour cela, au lieu de travailler avec les variables dépendantes x et t , on va employer les coordonnées curvilignes ξ et η . On introduit le changement de variables

$$x = f(\xi, \eta),$$

$$t = g(\xi, \eta).$$

Examinons tout d'abord l'équation de la 1-caractéristique

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta}{\frac{\partial g}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial g}{\partial \eta} d\eta},$$

or comme la 1-caractéristique est une courbe où $\xi = cste$, on déduit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta}{\frac{\partial g}{\partial \eta} d\eta} = \lambda_1,$$

soit encore

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \lambda_1 \frac{\partial g}{\partial \eta}, \tag{3.36}$$

et de même pour la 2-caractéristique

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial \xi}. \tag{3.37}$$

Calculons le taux de variation de U_1 le long de la 1-caractéristique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} &= \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial x} &= \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} &= \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} &= \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\left. \frac{dU_1}{dt} \right|_{x=X_1(t)} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = (\lambda_1 - \lambda_2) \psi_x U_{1,\eta},$$

puisque $\psi_t + \lambda_2 \psi_x = 0$ et $\phi_t + \lambda_1 \phi_x = 0$. On a de même

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} &= -(\lambda_1 - \lambda_2) \phi_x U_{1,\xi}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} &= (\lambda_1 - \lambda_2) \psi_x U_{2,\eta}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} &= -(\lambda_1 - \lambda_2) \phi_x U_{2,\xi}.\end{aligned}$$

En multipliant l'équation (3.19) par le vecteur à gauche $\mathbf{v}_1$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \left. \frac{d\mathbf{U}}{dt} \right|_{x=X_1(t)} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B} = 0,$$

soit encore

$$v_{11} \partial_\eta U_1 + v_{12} \partial_\eta U_2 = -\frac{v_{11} B_1 + v_{12} B_2}{(\lambda_1 - \lambda_2) \psi_x},$$

avec (B_1, B_2) les composantes de $\mathbf{B}$. On a de même avec le second vecteur à gauche $\mathbf{v}_2$

$$v_{21} \partial_\xi U_1 + v_{22} \partial_\xi U_2 = \frac{v_{21} B_1 + v_{22} B_2}{(\lambda_1 - \lambda_2) \phi_x}.$$

Il reste maintenant à exprimer ψ_x et ϕ_x en fonction de ξ et η . Pour cela, on écrit les relations entre anciennes et nouvelles variables sous forme infinitésimale

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_\xi & f_\eta \\ g_\xi & g_\eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_t \\ \psi_x & \psi_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix},\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} \phi_x & \phi_t \\ \psi_x & \psi_t \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} f_\xi & f_\eta \\ g_\xi & g_\eta \end{pmatrix},$$

avec $J = f_\xi g_\eta - f_\eta g_\xi$. On déduit après arrangement des termes

$$v_{11} \partial_\eta U_1 + v_{12} \partial_\eta U_2 = -(v_{11} B_1 + v_{12} B_2) g_\eta, \quad (3.38)$$

$$v_{21} \partial_\xi U_1 + v_{22} \partial_\xi U_2 = -(v_{21} B_1 + v_{22} B_2) g_\xi. \quad (3.39)$$

Le système des quatre équations (3.36–3.39) gouverne les variations de f , g , U_1 , et U_2 . Cette formulation permet d'aboutir à des schémas numériques (différences finies progressives). Pour un système homogène, on peut écrire ces quatre équations sous la forme suivante

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} - \lambda_1(U_1, U_2) \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0 \text{ et } r_1(U_1, U_2) = cste \text{ sur } \xi = cste, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} - \lambda_1(U_1, U_2) \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0 \text{ et } r_1(U_1, U_2) = cste \text{ sur } \eta = cste. \quad (3.41)$$

On peut également utiliser les variables de Riemann comme nouvelles variables indépendantes (au lieu de ξ et η) sous réserve que r_1 et r_2 soient indépendantes et non constantes toutes les deux sur un domaine donné. Posons

$$x = f(\xi, \eta) = \bar{X}(r_1, r_2) \text{ et } t = g(\xi, \eta) = \bar{T}(r_1, r_2).$$

On a les relations

$$\begin{aligned} \partial_\eta f &= \partial_{r_1} f \partial_\eta r_1 + \partial_{r_2} f \partial_\eta r_2 = \partial_{r_2} f \partial_\eta r_2 = \partial_{r_2} \bar{X} \partial_\eta r_2, \\ \partial_\eta g &= \partial_{r_1} g \partial_\eta r_1 + \partial_{r_2} g \partial_\eta r_2 = \partial_{r_2} g \partial_\eta r_2 = \partial_{r_2} \bar{T} \partial_\eta r_2, \end{aligned}$$

car $\partial_\eta r_1 = 0$ [voir équation (3.34)]. De même, on a

$$\begin{aligned} \partial_\xi f &= \partial_{r_2} f \partial_\xi r_1 + \partial_{r_1} f \partial_\xi r_2 = \partial_{r_1} f \partial_\xi r_2 = \partial_{r_1} \bar{X} \partial_\xi r_1, \\ \partial_\xi g &= \partial_{r_2} g \partial_\xi r_1 + \partial_{r_1} g \partial_\xi r_2 = \partial_{r_1} g \partial_\xi r_2 = \partial_{r_1} \bar{T} \partial_\xi r_1, \end{aligned}$$

car $\partial_\eta r_1 = 0$ et $\partial_\xi r_2 = 0$ [voir équations (3.36–3.37)]. Comme on a posé $r_1(U_1, U_2)$ et $r_2(U_1, U_2)$, on peut inverser et trouver $U_1(r_1, r_2)$ et $U_2(r_1, r_2)$. On peut donc exprimer les valeurs propres en fonction des invariants de Riemann

$$\bar{\lambda}_1(r_1, r_2) = \lambda_1(U_1, U_2) \text{ et } \bar{\lambda}_2(r_1, r_2) = \lambda_2(U_1, U_2).$$

Avec les nouvelles variables, les équations caractéristiques (3.40–3.41) s'écrivent

$$\begin{aligned} \partial_{r_2} \bar{X} - \bar{\lambda}_1(r_1, r_2) \partial_{r_2} \bar{T} &= 0, \\ \partial_{r_1} \bar{X} - \bar{\lambda}_2(r_1, r_2) \partial_{r_1} \bar{T} &= 0, \end{aligned}$$

que l'on peut combiner en une seule équation du second ordre en $\bar{T}$ en différentiant la première équation par r_1 et la seconde par r_2 . On obtient alors

$$\boxed{\frac{\partial \bar{T}}{\partial r_1 r_2} + \frac{1}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1} \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial r_2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r_1} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial r_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r_2} \right)} \quad (3.42)$$

3.2.2 Formation d'un choc

Une caractéristique des équations hyperboliques est qu'elles peuvent propager une discontinuité initiale ou bien générer une discontinuité au cours du temps. Il est donc nécessaire de passer un peu de temps sur les caractéristiques des discontinuités, que nous appellerons ici *chocs*.

Dérivation des équations de choc dans le cas $n = 1$

On étudie la formation d'un choc pour un problème le plus simple possible. On examine l'équation convective non linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f[u(x, t)] = 0, \quad (3.43)$$

avec comme condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$ et f une fonction donnée de u . Cette équation peut se résoudre simplement par la méthode des caractéristiques. Précédemment on a en effet vu qu'une équation de convection telle que (3.43) peut s'écrire de façon équivalente

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ le long des courbes } \frac{dx}{dt} = \lambda(u),$$

avec $\lambda(u) = f'(u)$ la *vitesse caractéristique*. Il s'ensuit que u est constant le long des courbes caractéristiques. Donc $dx/dt = \lambda(u) = c$, avec c une constante qui peut être déterminée à l'aide de la condition initiale : les caractéristiques sont donc des droites dont la pente $\lambda(u_0(x_0))$ dépend de la condition initialement :

$$x = x_0 + \lambda(u_0(x_0))t.$$

De là, comme u est constant le long d'une droite caractéristique, on tire qu'on a :

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0(x - \lambda(u_0(x_0))t)$$

Comme le montre la figure 3.5, les droites caractéristiques peuvent se croiser dans certains cas, en particulièrement lorsque la vitesse caractéristique décroît (comme on est dans un diagramme « inversé » $x - t$, ce ralentissement se traduit par un raidissement des courbes caractéristiques) : $\lambda'(u) < 0$. Que se passe-t-il alors ? Lorsque deux caractéristiques se croisent, cela veut dire que virtuellement, u prend deux valeurs différentes, ce qui n'est pas possible pour une solution continue. La solution devient alors discontinue : un choc s'est formé.

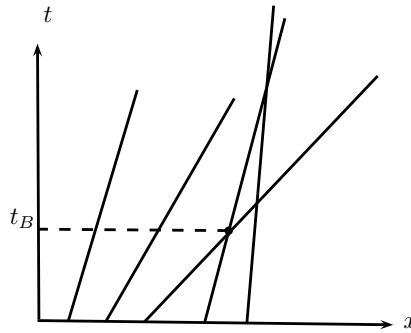


Figure 3.5 : diagramme de caractéristiques et formation d'un choc.

Quand deux caractéristiques se croisent, la dérivée u_x devient infinie (puisque u prend deux valeurs en même temps). Or cette dérivée u_x peut s'écrire

$$u_x = u'_0(x_0) \frac{\partial x_0}{\partial x} = u'_0(x_0) \frac{1}{1 + \lambda'(u_0(x_0))u'(x_0)t} = \frac{u'_0(x_0)}{1 + \partial_x \lambda(x_0)t},$$

où l'on a utilisé l'identité : $\lambda'(u_0(x_0))u'(x_0) = \partial_u \lambda \partial_x u = \partial_x \lambda$. La dérivée u_x devient infinie quand le dénominateur tend vers 0, soit au temps : $t_b = -1/\lambda'(x_0)$. Au point d'intersection, u change très rapidement de valeur : il y a un choc. La ligne $s = s(t)$ dans le plan $x - t$ est le lieu du choc. Une condition nécessaire pour qu'il y ait un choc est donc que $t_b > 0$ soit :

$$\boxed{\lambda'(x_0) < 0.}$$

Il faut donc qu'il y ait un ralentissement de la vitesse caractéristique (voir figure 3.5).

Les caractéristiques qui sont à l'origine du choc forment une courbe enveloppe dont l'équation implicite est donnée :

$$x = x_0 + \lambda(u_0(x_0))t \quad \text{et} \quad \lambda'(u_0(x_0)) + 1 = 0. \quad (3.44)$$

Après le choc, la solution serait à valeur multiple (voir fig. 3.6), ce qui est impossible. On substitue donc une discontinuité placée de telle sorte que les lobes de part et d'autre soient de superficie égale.

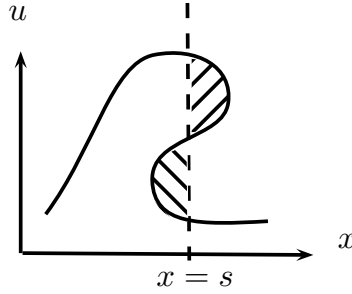


Figure 3.6 : position du choc.

En général, on ne cherche pas à calculer l'enveloppe des courbes caractéristiques, car il existe une méthode beaucoup plus simple pour calculer la trajectoire du choc. L'équation (3.43) peut en effet aussi se mettre sous la forme intégrale :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} u(x, t) dx = f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)),$$

où x_L et x_R sont les abscisses de points fixes d'un certain volume de contrôle. Si la solution admet une discontinuité en $x = s(t)$ sur l'intervalle $[x_L, x_R]$, alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} u(x, t) dx = \frac{d}{dt} \left(\int_{x_L}^s u(x, t) dx + \int_s^{x_R} u(x, t) dx \right),$$

Soit encore :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} u(x, t) dx = \int_{x_L}^s \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx + \int_s^{x_R} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx + \dot{s}u(x_L, t) - \dot{s}u(x_R, t).$$

En faisant tendre $x_R \rightarrow s$ et $x_L \rightarrow s$, on tire :

$$\dot{s}[[u]] = [[f(u)]], \quad (3.45)$$

où

$$[[u]] = u^+ - u^- = \lim_{x \rightarrow s, x > s} u - \lim_{x \rightarrow s, x < s} u,$$

les signes $+$ et $-$ sont employés pour désigner ce qui se passe à droite et à gauche respectivement de la discontinuité $x = s(t)$.

En conclusion, les petits calculs que l'on vient de faire montrent que s'il y a une discontinuité en un point $x = s(t)$, alors on doit avoir de part et d'autre de $x = s(t)$:

$$\boxed{\dot{s} \llbracket u \rrbracket = \llbracket f(u) \rrbracket} \quad (3.46)$$

Cette relation s'appelle *Rankine-Hugoniot*. Elle est fondamentale en dynamique des gaz (elle permet de calculer la propagation d'une onde de choc supersonique) et en hydraulique (elle permet de calculer la propagation d'un ressaut hydraulique).

Équations de choc dans le cas $n > 1$

La relation de Rankine Hugoniot s'étend sans problème au cas d'un système d'équations. Pour un système de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}[\mathbf{u}(x, t)] = \mathbf{S}(\mathbf{u}, x, t), \quad (3.47)$$

où $\mathbf{S}$ est un terme source, on montre facilement que la relation de choc est

$$\boxed{\dot{s} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \llbracket \mathbf{f}(\mathbf{u}) \rrbracket} \quad (3.48)$$

♣ **Exemple.** – On se reportera au § 6.10.2 pour un exemple d'application aux équations de Saint-Venant (équation du mascaret).

3.2.3 Problème de Riemann pour des problèmes scalaires ($n = 1$)

On appelle *problème de Riemann* un problème aux valeurs initiales de la forme suivante :

$$\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec u_L et u_R deux constantes. Ce problème correspond à l'évolution d'une fonction u initialement constante par morceaux, avec une discontinuité en $x = 0$. Ce problème est fondamentale pour la résolution théorique de problèmes ainsi que la résolution numérique des équations hyperboliques. En hydraulique, il a également son importance car la configuration étudiée correspond à la rupture d'un barrage sur fond sec ou humide. Dans le cas linéaire, une discontinuité initiale se propage ; réciproquement pour qu'une solution soit discontinue, il faut qu'elle le soit initialement. Le cas non linéaire est un peu complexe. On va voir que selon que u_R est plus grand ou plus petit que u_L , différentes solutions peuvent être générées. Lorsque $f'(u)$ est une fonction croissante ($f''(u) > 0$) et que $u_L < u_R$, la solution initialement discontinue devient continue car une onde dite de détente permet de relier les deux états initiaux et donc d'atténuer la discontinuité initiale. Inversement lorsque $u_L > u_R$, la discontinuité initiale se propage et la solution reste discontinue. Rappelons par ailleurs que même si la solution est initialement continue, une équation non linéaire peut générer des discontinuités au cours du temps (voir § 3.2.2). Lorsque la fonction f est elle-même complexe, des solutions plus ou moins compliquées au problème de Riemann peuvent en résulter.

Cas linéaire

Considérons tout d'abord le cas linéaire où $f(u) = au$, avec a une constante. La solution est triviale :

$$u(x, t) = u_0(x - at) = \begin{cases} u_L & \text{si } x - at < 0, \\ u_R & \text{si } x - at > 0. \end{cases}$$

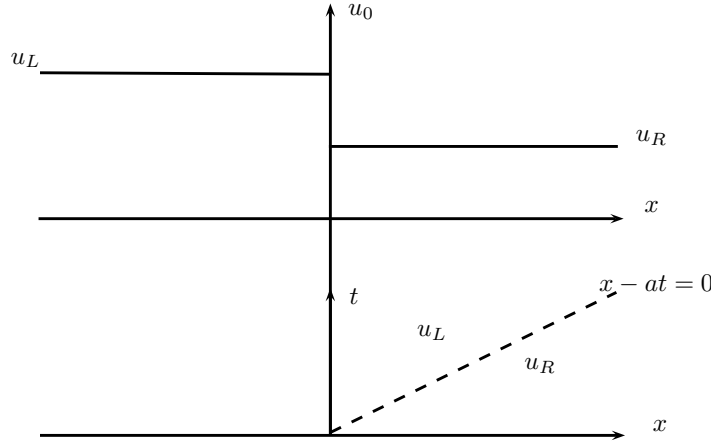


Figure 3.7 : problème de Riemann dans le cas linéaire.

La discontinuité se propage avec une vitesse a .

Cas non linéaire

Cas général du flux convexe ($f'' > 0$) Dans le cas général (où $f'' \neq 0$), le problème de Riemann est un problème aux valeurs initiales de la forme suivante :

$$\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

avec u_L et u_R deux constantes. On suppose que $f'' > 0$ en tout premier lieu ; le cas d'un flux non convexe sera traité après. On va montrer qu'il existe deux types possibles de solution :

- soit une solution appelée *onde de détente* (ou bien onde simple) qui est continue,
- soit une solution discontinue qui représente la propagation de la discontinuité initiale (*onde de choc*).

Physiquement, une seule de ces solutions est possible et le choix sera dicté par une condition (dite d'entropie) selon la valeur respective de u_L et u_R .

Onde de détente. Notons tout d'abord que cette équation est invariante par la transformation $x \rightarrow \lambda x$ et $t \rightarrow \lambda t$. Une solution générale peut donc être recherchée sous la forme $U(\xi)$ avec $\xi = x/t$. En reportant cette forme générale dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$(f'(U(\xi)) - \xi) U' = 0.$$

Il y a deux types de solution à cette équation :

- *onde de détente*: $(f'(U(\xi)) - \xi) = 0$. Si $f'' > 0$, alors $f'(u_R) > f'(u_L)$; l'équation $f'(U) = \xi$ admet une seule solution lorsque $f'(u_R) > \xi > f'(u_L)$. On dit que u_L est relié à u_R par une *onde de détente*: $\xi = f'(U(\xi))$. En inversant f' , on trouve la solution recherchée

$$u(x, t) = f'^{(-1)}(\xi) ;$$

- *état constant*: $U'(\xi) = 0$. C'est la solution triviale $u(x, t) = \text{cte}$. Cette solution ne vérifie pas le problème initial.

La solution s'écrit donc

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq f'(u_L), \\ f'^{(-1)}(\xi) & \text{si } f'(u_L) \leq \frac{x}{t} \leq f'(u_R) \\ u_R & \text{si } \frac{x}{t} \geq f'(u_R). \end{cases}$$

Onde de choc. On a précédemment vu que l'existence de solutions faibles (discontinues) à l'équation différentielle hyperbolique (3.43). En admettant une discontinuité le long d'une droite $x = s(t) = \dot{s}t$, on tire: $\llbracket f(u) \rrbracket = \dot{s} \llbracket u \rrbracket$. La solution est alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \dot{s}t, \\ u_R & \text{si } x > \dot{s}t. \end{cases}$$

Il y a alors formation d'une onde de choc de vitesse $\dot{s}$ donnée par :

$$\dot{s} = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}.$$

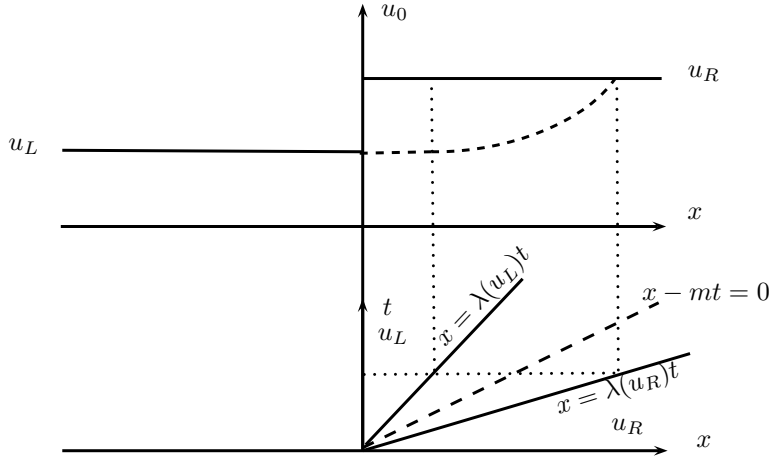
Sélection de la solution physique. Deux cas de figures peuvent se présenter (rappelons que $f'' > 0$). On appelle $\lambda(u) = f'(u)$ la vitesse caractéristique (voir section ci-dessous); c'est la pente de la caractéristique (droite) du problème.

- 1^{er} cas: $u_R > u_L$. Puisque $f'' > 0$, alors $\lambda(u_R) > \lambda(u_L)$. À l'instant initial $t = 0$, les deux caractéristiques définissent un cône. L'équation $\xi = f'(U(\xi))$ a une solution sur l'intervalle $\lambda(u_R) > \xi > \lambda(u_L)$. Voir Fig. 3.8;
- 2^{ème} cas: $u_R < u_L$. Les caractéristiques se croisent dès le temps initial $t = 0$. Le choc se propage à une vitesse $\lambda(u_R) < \dot{s} < \lambda(u_L)$. Cette dernière condition s'appelle *condition de Lax*; elle définit si la vitesse d'un choc est physiquement admissible.

Cas du flux non convexe Pour certaines applications, le flux n'est pas convexe. Un exemple est donné par l'équation de Buckley-Leverett, traduisant l'évolution de la concentration d'eau ϕ dans un écoulement de pétrole sous pression dans un milieu poreux :

$$\phi_t + f(\phi)_x = 0,$$

avec $f(\phi) = \phi^2(\phi^2 + a(1 - \phi)^2)^{-1}$ et a un paramètre ($0 < a < 1$). Cette fonction possède un point d'inflexion. Contrairement au cas convexe, pour lequel la solution se compose de chocs et d'ondes de détente, la solution ici est composée d'onde mixte (*compound wave*) résultant de la superposition d'une onde de détente et d'un choc (LeVeque, 2002, voir pp. 350–356).

Figure 3.8 : problème de Riemann dans le cas $u_R > u_L$.

3.2.4 Systèmes de dimension $n = 2$

Systèmes linéaires

Structure de la solution On considère le système d'équations linéaires à deux équations :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

avec pour conditions initiales :

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^0(x) \text{ pour } -\infty \leq x \leq \infty.$$

$\mathbf{A}$ est une matrice 2×2 possédant 2 valeurs propres distinctes et réelles notées λ_1 et λ_2 (et ordonnées de telle sorte que $\lambda_1 < \lambda_2$). On peut donc écrire $\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{R}^{-1}$, avec $\mathbf{R}$ la matrice de passage et $\mathbf{\Lambda}$ la matrice diagonale des valeurs propres λ_i ($i = 1$ ou 2).

En faisant le changement de variable $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U}$, le système d'équations prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0.$$

Il s'agit donc d'une série d'équations d'advection, linéaires et indépendantes, de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} w_1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} w_1 = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_2 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} w_2 = 0 \quad (3.50)$$

donc la solution est de la forme $w_i = \omega_i(x - \lambda_i t)$, avec ω_i une fonction qui dépend des conditions initiales. Les conditions initiales s'écrivent compte tenu du changement de variable :

$$\mathbf{W}(x, 0) = \mathbf{W}^0(x) \text{ pour } -\infty \leq x \leq \infty.$$

La solution à ce problème initial est donc :

$$w_i(x, t) = w_i^0(x - \lambda_i t) \text{ pour } i = 1 \text{ ou } 2.$$

Par un changement de variable inverse, on trouve $\mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}$. Comme on l'a vu au § 3.2.1, les colonnes de la matrice de passage $\mathbf{R}$ sont les vecteurs propres à droites $\mathbf{r}_i$ de $\mathbf{A}$ (associés à la valeur propre λ_i). Le changement de variable $\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}$ peut donc également s'écrire

$$\mathbf{U} = w_1(x, t)\mathbf{r}_1 + w_2(x, t)\mathbf{r}_2 = w_1^0(x - \lambda_1 t)\mathbf{r}_1 + w_2^0(x - \lambda_2 t)\mathbf{r}_2, \quad (3.51)$$

La solution est donc la superposition de deux ondes se déplaçant à la vitesse λ_i dans la direction $\mathbf{r}_i$; ces ondes sont indépendantes, ne changent pas de forme, et leur forme est donnée par $w_i^0(x)$. On les appelle, respectivement, la 1-onde et la 2-onde. Un cas particulier est rencontré lorsque l'une des deux conditions initiales est une fonction constante en x tandis que la seconde est une fonction non constante de x . La solution à ce problème particulier de Cauchy est appelée une onde simple car il s'agit de la propagation d'une seule onde le long d'une seule caractéristique.

Ces formes se propagent à la vitesse λ_i le long de courbes caractéristiques $x = x_0 + \lambda_i t$, qui sont des droites car λ_i est constant et qui sont appelées les i -caractéristiques. La seule possibilité d'observer des solutions discontinues est qu'originellement la condition initiale est elle-même porteuse d'une discontinuité.

Problème de Riemann Le problème de Riemann est un problème aux conditions initiales de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

avec des conditions initiales qui sont constantes par morceau

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_\ell & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_r & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ce système linéaire peut se résoudre simplement. Le mode de résolution est instructif car il permet d'éclairer les méthodes mises en œuvre pour le cas non linéaire.

La solution du problème de Riemann est un cas particulier de la solution générale donnée par l'équation (3.51), avec les conditions initiales qui sont ici des fonctions discontinues « en escalier ». On peut progresser un peu dans l'analyse de cette solution en jouant avec les notations. Les deux vecteurs propres $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ ne sont pas colinéaires; ils peuvent donc former une nouvelle base dans l'espace des fonctions.

On peut donc décomposer $\mathbf{U}_\ell$ et $\mathbf{U}_r$ dans la base des vecteurs propres $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{U}_\ell = \alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 \text{ et } \mathbf{U}_r = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \beta_2 \mathbf{r}_2,$$

avec α_i et β_i des constantes. En comparant avec la forme générale (3.51) pris à $t = 0$, on en déduit que

$$w_i^0(x, 0) = \begin{cases} \alpha_i & \text{pour } x < 0, \\ \beta_i & \text{pour } x > 0, \end{cases}$$

Chaque discontinuité se propage à la vitesse λ_i de sorte que l'on ait au temps t

$$w_i^0(x, t) = \begin{cases} \alpha_i & \text{pour } x < \lambda_i t, \\ \beta_i & \text{pour } x > \lambda_i t, \end{cases}$$

On peut partitionner le diagramme $x - t$ en trois coins où $\mathbf{U}$ est constant et qui sont séparés par les courbes caractéristiques $x = \lambda_i t$. En tout point M on peut déterminer la valeur de $\mathbf{U}$

en tirant les courbes caractéristiques passant par ce point M jusqu'à l'axe des abscisses $t = 0$. Par exemple, la solution dans le cas particulier de la figure 3.9 est

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}^* = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2.$$

Dans toute la région délimitée par les caractéristiques $x = \lambda_1 t$ et $x = \lambda_2 t$, la solution est constante et prend la même valeur $\mathbf{U}^*$.

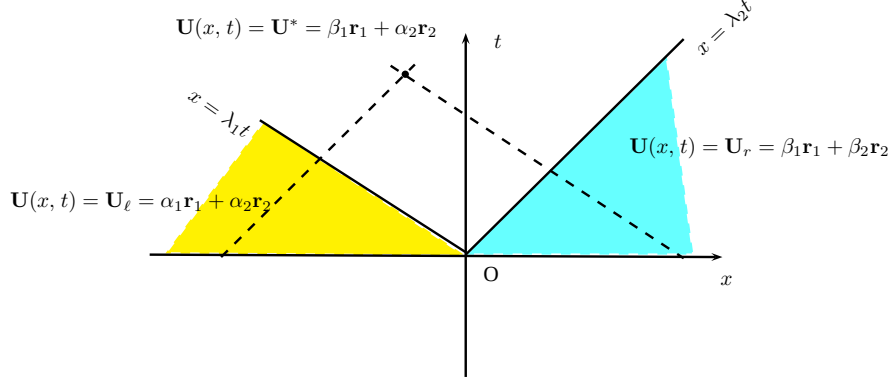


Figure 3.9 : construction de la solution pour un problème de Riemann linéaire dans un diagramme $x - t$.

Il en est de même pour la région sous les courbes caractéristiques $x = \lambda_2 t$ et $x = \lambda_1 t$, la solution est constante et prend la même valeur $\mathbf{U}_r$ et $\mathbf{U}_l$, avec

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_r = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \beta_2 \mathbf{r}_2 \text{ si } x - \lambda_1 < 0, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_l = \alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 \text{ si } x - \lambda_2 > 0. \quad (3.53)$$

D'une région à l'autre, la solution subit une discontinuité. Par exemple, en passant de la région $\mathbf{U}^*$ à $\mathbf{U}_r$, la solution subit une discontinuité égale à

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_r - \mathbf{U}^* = (\beta_2 - \alpha_2) \mathbf{r}_2.$$

À travers la 2-caractéristique séparant les deux domaines, la solution subit donc un saut $(\beta_2 - \alpha_2) \mathbf{r}_2$, qui est un multiple de $\mathbf{r}_2$; cela montre donc que le vecteur saut est un vecteur propre de $\mathbf{A}$. Cette propriété se vérifie également pour un système non linéaire, ce qui la rend particulièrement utile.

Une autre façon de représenter la solution est de la tracer dans un diagramme (u_1, u_2) (où les u_i sont les composantes de $\mathbf{u}$). Dans un tel diagramme, toute fonction $\mathbf{u}(x, t) = (u_1, u_2)$ est représentée par un point, éventuellement mobile. Ainsi, comme le montre la figure 3.10, les deux fonctions servant aux conditions initiales $\mathbf{U}_l$ et $\mathbf{U}_r$ sont deux points. Les deux vecteurs propres $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ représentent les directions le long desquelles se propagent les chocs. Si le vecteur des conditions initiales $\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_l$ est parallèle à l'un de ces deux vecteurs, cela veut dire que la discontinuité initiale entre les deux états se propage selon une des deux directions (celle à laquelle $\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_l$ est parallèle). Cela veut aussi dire que si l'on se place en un point M de l'espace donné, on peut tracer deux droites de direction $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$. Si M représente l'état à gauche $\mathbf{U}_l$, alors tout point situé sur l'une des deux droites représente un état initial à droite $\mathbf{U}_r$ pour lequel une seule discontinuité va résulter. Ce réseau de droites qui représentent tous les états à droite qui peuvent être reliés à $\mathbf{U}_l$ par un 1-choc ou un 2-choc est appelé les *courbes de Hugoniot*.

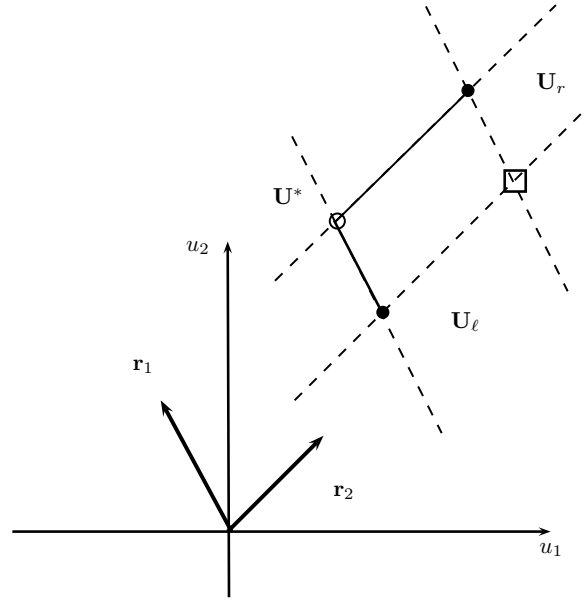


Figure 3.10 : construction de la solution pour un problème de Riemann linéaire dans le plan (u_1, u_2) . Les deux disques noirs représentent l'état initial à gauche $\mathbf{U}_\ell$ et l'état à droite $\mathbf{U}_r$. Pour passer de $\mathbf{U}_\ell$ à $\mathbf{U}_r$, on suit tout d'abord la direction $\mathbf{r}_1$ jusqu'à un état intermédiaire $\mathbf{U}^*$ (cercle), puis de là on rejoint $\mathbf{U}_r$ en suivant la direction $\mathbf{r}_1$. Le chemin alternatif qui passe par le point marqué d'un carré n'est physiquement pas possible.

En général, les conditions initiales sont quelconques et donc $\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_\ell$ n'est pas parallèle à l'un de ces deux vecteurs $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$. Dans ce cas, la solution est la somme de deux discontinuités se propageant aux vitesses λ_1 et λ_2 . Un nouvel état constant $\mathbf{U}^*$ émerge entre les deux états initiaux; cet état permet de relier l'état à droite en suivant une 2-onde et l'état à gauche en suivant une 1-onde. Cela permet donc une seule construction possible; on note sur la figure 3.10 que le sommet du parallélogramme marqué par un carré est bien relié à l'état à gauche par une droite de Hugoniot, mais il s'agit d'un 2-choc alors que seul un 1-choc peut relier l'état à gauche $\mathbf{U}_\ell$ et l'état intermédiaire $\mathbf{U}^*$. Puisque $\lambda_1 < \lambda_2$, on se déplace toujours le long de $\mathbf{r}_1$ quand on part d'un état à gauche $\mathbf{U}_\ell$, puis on suit la direction $\mathbf{r}_2$ pour atteindre l'état à droite $\mathbf{U}_r$. On va servir de cette construction pour mieux comprendre le cas non linéaire dans ce qui suit.

Systèmes non linéaires

On considère le système d'équations non linéaires à deux équations :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.54)$$

ou bien sous la forme conservative

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0,$$

où l'on a la relation : $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}(\mathbf{u})$. $\mathbf{A}$ est une matrice 2×2 possédant 2 valeurs propres distinctes et réelles notées $\lambda_1(\mathbf{u})$ et $\lambda_2(\mathbf{u})$. Les vecteurs à gauche associés sont respectivement $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Les conditions initiales :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \text{ pour } -\infty \leq x \leq \infty.$$

Au § 3.2.1 on a vu qu'il était possible de passer d'un système d'équations couplées à un système de deux équations non couplées à l'aide des variables de Riemann. Cela revient à chercher deux fonctions r_1 et r_2 dites *invariants de Riemann* et deux fonctions dites *facteurs intégrants* μ_1 et μ_2 telles que

$$\mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mu_1 \frac{dr_1}{dt}, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mu_2 \frac{dr_2}{dt}. \quad (3.56)$$

En multipliant l'équation (3.54) par $\mathbf{v}_i$, on arrive à

$$\frac{dr_1}{dt} = 0 \text{ le long d'une courbe caractéristique } \mathcal{C}_1 \text{ telle que } \frac{dx(t)}{dt} = \lambda_1(r_1, r_2), \quad (3.57)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = 0 \text{ le long d'une courbe caractéristique } \mathcal{C}_2 \text{ telle que } \frac{dx(t)}{dt} = \lambda_2(r_1, r_2). \quad (3.58)$$

Par rapport au cas linéaire vu plus haut, la principale difficulté que nous rencontrons ici est que les courbes caractéristiques sont des courbes quelconques et non plus des droites de pente connue et fixée. Il n'existe donc pas de solution générale au système non linéaire (3.54). On peut retenir qu'il existe deux ondes, dont la forme et la trajectoire varient au cours du temps et qui peuvent interagir entre elles. Il existe deux types de solutions pour lesquelles on peut déterminer plus précisément la forme de la solution : ce sont les ondes simples et les chocs.

Onde simple Un cas particulier important d'onde est l'*onde simple*. Comme on l'a indiqué précédemment, il s'agit d'une onde qui ne se déplace que le long d'une seule caractéristique (ou famille de caractéristiques) :

- pour la 1-onde simple, on n'observe une propagation que le long de la 1-caractéristique tandis qu'aucune information ne se propage pas le long des 2-caractéristiques ; il existe donc un domaine du plan $x - t$ où $r_2 = \text{cste}$. L'équation (3.58) est donc trivialement satisfaite. L'équation (3.57) nous dit donc que $\lambda_1(r_1, r_2) = \lambda_1(r_1, \text{cste})$ est une constante car $dr_1/dt = 0$ le long de chaque courbe caractéristique ; chaque courbe caractéristique prend une valeur constante différente en fonction des conditions initiales imposées. La 1-courbe caractéristique est donc une droite et la famille des 1-ondes simples forment un jeu de droites non parallèles ;
- pour la 2-onde simple, on n'observe une propagation que le long de la 2-caractéristique tandis qu'aucune information ne se propage pas le long des 1-caractéristiques. Il existe un domaine du plan $x - t$ où $r_1 = \text{cste}$. Les 2-caractéristiques sont des droites dans ce domaine.

À noter que si u_1 et u_2 sont les composantes de $\mathbf{u}$, alors on peut tracer dans un plan $u_1 - u_2$ deux familles d'ondes simples paramétrées par un seul paramètre ρ . En effet, pour une 1-onde simple, on doit $r_1 = \rho$ pour chacune des courbes avec ρ une constante (deux courbes différentes ne peuvent pas être associées à la même valeur de ρ). Il en est de même pour la 2-onde simple. Pour qu'une onde simple puisse être la solution d'un problème, encore faut-il que les conditions initiales soient compatibles avec la constance d'un des deux invariants de Riemann ; une telle condition est par exemple rencontrée lorsque les conditions initiales sont constantes en x ou bien constantes par morceau (problème de Riemann).

Onde de choc Au § 3.2.2 on a vu que des ondes pouvaient se former spontanément pour des systèmes non linéaires ou bien se propager si initialement le vecteur $\mathbf{u}$ ou l'une de ses

composantes était discontinu. Le choc situé en $x = s(t)$ se propage à la vitesse $\dot{s}$ donnée par la condition de Rankine-Hugoniot (3.48)

$$\dot{s}[\mathbf{u}] = [\mathbf{F}(\mathbf{u})].$$

Si u_1 et u_2 sont les composante de $\mathbf{u}$, F_1 et F_2 sont les composante de $\mathbf{F}$, alors cette condition peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{s}[u_1] = [F_1(u_1, u_2)], \quad (3.59)$$

$$\dot{s}[u_2] = [F_2(u_1, u_2)]. \quad (3.60)$$

Il s'agit d'un système de deux équations avec trois inconnues : $\dot{s}$, u_1^+ , et u_2^+ (les composantes u_1^- et u_2^- avec le choc sont supposées connues). En éliminant $\dot{s}$, on obtient une famille de courbes solutions de la forme $u_2 = G(u_1)$; on trouve en fait qu'il n'existe pas une, mais deux familles de courbes vérifiant la condition de Rankine-Hugoniot (3.48).

Problème de Riemann On cherche à résoudre le problème de Riemann :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.61)$$

avec des conditions initiales qui sont constantes par morceau

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_\ell & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{u}_r & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Dans le cas unidimensionnel on avait trouvé qu'il y avait deux types de solutions : des ondes de détente et de choc. On va voir que c'est encore le cas ici, avec également la possibilité de combiner les deux types.

Une onde de détente est une onde qui vérifie l'équation $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{W}(\xi)$ avec $\xi = x/t$. Quand on substitue cette forme dans l'équation (3.61), on obtient :

$$-\frac{\xi}{t} \mathbf{W}'(\xi) + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \cdot \frac{1}{t} \mathbf{W}' = \mathbf{0},$$

ce qui donne

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{W}'(\xi) = \xi \mathbf{W}'(\xi),$$

avec $\mathbf{W}' = d\mathbf{W}/d\xi$. Il s'ensuit que $\mathbf{W}'(\xi)$ est un vecteur propre (à droite) de $\mathbf{F}$ associé à la valeur propre ξ . On déduit donc que $\mathbf{W}'(\xi)$ est nécessairement colinéaire à un des deux vecteurs à droite $\mathbf{w}_i$. Il existe donc un coefficient de proportionnalité $\alpha_i(\xi)$ tel que

$$\mathbf{W}'(\xi) = \alpha_i(\xi) \mathbf{w}_i. \quad (3.62)$$

Ce coefficient peut être déterminé en se servant de la seconde condition, à savoir que la valeur propre associée est ξ

$$\lambda_i(\mathbf{W}) = \xi.$$

En différentiant cette équation par rapport à ξ , on obtient

$$\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_i(\mathbf{W}) \cdot \frac{d\mathbf{W}}{d\xi} = 1.$$

Comme $\mathbf{W}'(\xi) = \alpha_i(\xi) \mathbf{w}_i$, on déduit donc :

$$\alpha_i(\xi) = \frac{1}{\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_i(\xi)}$$

sous réserve que $\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_i \neq 0$ (condition de dégénérescence). L'onde de détente est donc la solution de

$$\frac{d\mathbf{W}}{d\xi} = \frac{\mathbf{w}_i}{\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_i(\xi)}$$

En dimension 2, il y a deux familles d'ondes de détente : les 1-détentes et 2-détentes. Au § 3.2.1, on a vu que les vecteurs à droite étaient orthogonaux aux gradients des variables de Riemann :

$$\mathbf{w}_1 \cdot \nabla r_2 = 0 \text{ et } \mathbf{w}_2 \cdot \nabla r_1 = 0.$$

Rappelons (voir § A.3.1) que le vecteur ∇r_1 est normal à la courbe d'équation $r_1 = cste$ (voir figure 3.11). On en déduit que :

- l'invariant de Riemann r_1 est constant le long d'une 2-détente ;
- l'invariant de Riemann r_2 est constant le long d'une 1-détente.

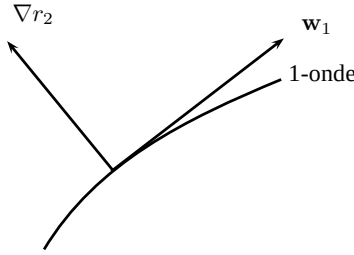


Figure 3.11 : dans le plan $u_1 - u_2$ une 1-détente est tangente au vecteur à droite $\mathbf{w}_1$, qui est orthogonal à ∇r_2 , donc il s'ensuit que r_2 est constant le long d'une 1-détente.

Cela fournit une manière de calculer les équations des courbes de détente de façon plus aisée que la résolution de l'équation différentielle (3.62). Cela montre aussi que les ondes de détente sont des ondes simples ; comme elles émanent toutes du point O , on les appelle *ondes simples centrées*. En effet, lorsque la solution suit une courbe de détente, cela veut dire que pour toute une partie du domaine $x - t$ l'un des deux invariants de Riemann est constant, ce qui est la définition donnée aux ondes simples. Une conséquence est qu'une onde de détente R_i se présente sous la forme d'un éventail de droites émanant du point O

$$\frac{x}{t} = \lambda_i$$

dans le plan $x - t$. Le côté gauche de cet éventail est la droite $x = \lambda_i(\mathbf{u}_\ell)t$ tandis que le côté droit est la droite $x = \lambda_i(\mathbf{u}_r)t$.

Comme on l'a fait précédemment pour le cas linéaire, on peut construire une solution en se plaçant dans le plan $u_1 - u_2$. La figure 3.13 montre un exemple de construction pour un jeu particulier d'états initiaux $\mathbf{u}_\ell$ et $\mathbf{u}_r$. Il s'agit du même type de construction géométrique que celle présentée dans la figure 3.10 dans le cas linéaire. De chaque point $\mathbf{u}_\ell$ et $\mathbf{u}_r$ émanent deux familles de courbes : les 1- et 2-détentes notées ici R_1 et R_2 (R car en anglais, on emploie « rarefaction » pour détente) et les 1- et 2-chocs (S car en anglais, on emploie « shock » pour choc). On remarque tout de suite que les courbes de détente et de choc se raccordent au point initial à la même tangente, ce qui est normal puisque les tangentes à ces courbes sont les mêmes (ce sont les vecteurs à droite $\mathbf{w}_i$). Ce réseau de courbes constitue un maillage de l'espace $u_1 - u_2$. Pour passer d'un état initial à gauche $\mathbf{u}_\ell$ à un état $\mathbf{u}_r$, il faut généralement suivre des courbes de détente et de choc. À chaque reprise, il y a deux chemins possibles, mais un seul est physiquement possible (du point de vue de la dissipation d'énergie).

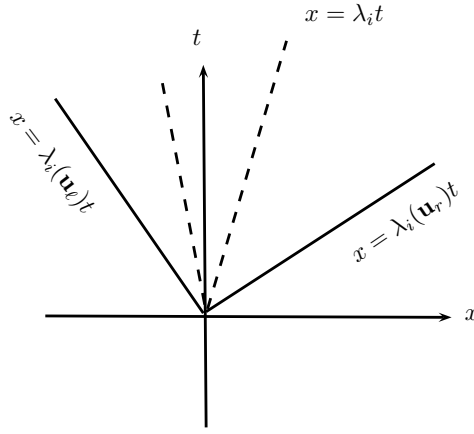


Figure 3.12 : dans le plan $x - t$ une i -détente se présente sous la forme d'un éventail de droites émanant du point origine : $x = \lambda_i t$ avec $\lambda_i(\mathbf{u}_\ell) \leq \lambda_i \leq \lambda_i(\mathbf{u}_r)$.

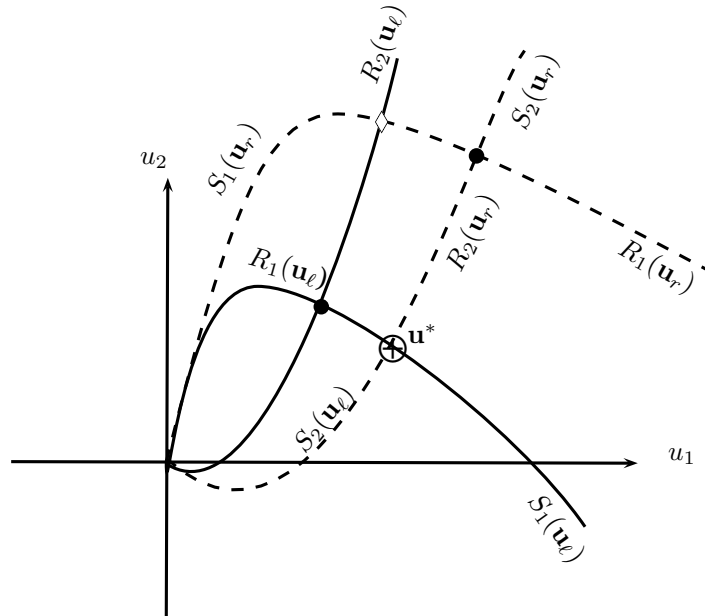


Figure 3.13 : construction de la solution pour un problème de Riemann non linéaire dans le plan (u_1, u_2) . Les deux disques noirs représentent l'état initial à gauche $\mathbf{u}_\ell$ et l'état à droite $\mathbf{u}_r$. Pour passer de $\mathbf{u}_\ell$ à $\mathbf{u}_r$, on suit tout d'abord la courbe S_1 (choc) jusqu'à un état intermédiaire $\mathbf{u}^*$ (cercle avec une croix), puis de là on rejoint $\mathbf{u}_r$ en suivant la direction R_2 (détente). Le chemin alternatif qui passe par le point marqué d'un losange n'est physiquement pas possible.

Exemple : équations de Saint-Venant

Mise sous forme conservative Nous considérons le jeu d'équations de Saint-Venant sur fond plat et lisse (pas de dissipation) :

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x (uh) &= 0, \\ \partial_t hu + \partial_x hu^2 + gh\partial_x h &= 0.\end{aligned}$$

On introduit le vecteur $\mathbf{U} = (h, hu)$, $\mathbf{F} = (hu, hu^2 + gh^2/2)$ et la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}.$$

Le système se met sous la forme conservative³ et homogène :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0.$$

Tableau 3.1 : récapitulatif des valeurs propres et des vecteurs propres pour des variables conservatives ; on a introduit la notation classique $c = \sqrt{gh}$. Les champs λ_i sont vraiment non linéaires.

	$i = 1$	$i = 2$
λ_i	$u - c$	$u + c$
$\mathbf{w}_i$	$\{\frac{1}{u-c}, 1\}$	$\{\frac{1}{u+c}, 1\}$
$\mathbf{w}_i \cdot \nabla \lambda_i$	$\frac{1}{2(c-u)}$	$\frac{1}{2(c+u)}$

Autre forme non conservative On peut prendre comme variable (h, u) , ce qui a l'inconvénient de ne plus travailler avec les vraies variables conservatives mais a l'avantage d'amener à des solutions analytiques plus simples. On a alors avec $\mathbf{U} = (h, u)$, $\mathbf{F} = (hu, hu^2 + gh^2/2)$ et la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0.$$

Conditions de saut Les conditions de saut s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{s} \llbracket h \rrbracket &= \llbracket hu \rrbracket, \\ \dot{s} \llbracket hu \rrbracket &= \llbracket hu^2 + gh^2/2 \rrbracket, \end{aligned}$$

avec $\dot{s}$ la vitesse de propagation du choc. Si l'on écrit ces relations dans un repère lié à l'onde de choc, alors on a $v = u - \dot{s}$:

$$\begin{aligned} h_1 v_1 &= h_2 v_2, \\ h_1 v_1^2 + gh_1^2/2 &= h_2 v_2^2 + gh_2^2/2. \end{aligned}$$

où les indices 1 et 2 renvoient à l'état de part et d'autre du choc. Il y a deux types de choc :

- Le 1-choc pour lequel on a les inégalités : $\dot{s} < u_L - c_L$ et $u_R - c_R < \dot{s} < u_R + c_R$. Soit encore $v_L > v_R$: le flux de matière se fait de la gauche vers la droite si $v_L > 0$ (*stricto sensu*, si l'on se déplace à la même vitesse que le front, les perturbations animées d'une vitesse v_L quand elles sont à gauche du front se déplacent plus rapidement que celles à droite ; elles peuvent venir rattraper le front) ;

3. Il s'agit d'une vraie formulation conservative.

Tableau 3.2 : récapitulatif des valeurs propres et des vecteurs propres pour des variables non conservatives.

		$i = 1$	$i = 2$
valeur propre	λ_i	$u - c$	$u + c$
vecteur propre à droite	$\mathbf{w}_i$	$\left\{-\frac{c}{g}, 1\right\}$	$\left\{\frac{c}{g}, 1\right\}$
vecteur propre à gauche	$\mathbf{v}_i$	$\left\{-\frac{c}{h}, 1\right\}$	$\left\{\frac{c}{h}, 1\right\}$
condition de dégénérescence	$\mathbf{w}_i \cdot \nabla \lambda_i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
invariants de Riemann	r_i	$u + 2c$	$u - 2c$

- Le 2-choc pour lequel on a les inégalités : $\dot{s} > u_R + c_R$ et $u_L - c_L < \dot{s} < u_L + c_L$. Soit encore $v_R > v_L$: le flux de matière se fait de la droite vers la gauche si $v_L > 0$.

On peut en déduire les couples de points (h_2, v_2) qui sont reliés à (h_1, v_1) par une 1- ou une 2-onde de choc. On a ainsi :

$$\dot{s} = \frac{h_2 v_2 - h_1 v_1}{h_2 - h_1},$$

$$\frac{(h_2 u_2 - h_1 u_1)^2}{h_2 - h_1} = h_2 u_2^2 + \frac{g h_2^2}{2} - h_1 u_1^2 - \frac{g h_1^2}{2},$$

ce qui donne la vitesse de propagation du ressaut et $u_2(h_2 | h_1, v_1)$:

$$u_2 = u_1 \mp (h_2 - h_1) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}},$$

$$\dot{s} = u_1 \mp \sqrt{\frac{g}{2} (h_1 + h_2) \frac{h_2}{h_1}}.$$

Conditions de détente Les ondes de détente se recherchent à partir des invariants de Riemann r_k . Ceux-ci sont définis comme : $\nabla_{\mathbf{u}} r_k \cdot \mathbf{w}_k = 0$. À noter qu'il est ici plus simple de travailler avec la variable (h, u) . On tire alors pour le premier invariant :

$$-c \frac{\partial r}{\partial h} + \lambda_1 \frac{\partial r}{\partial u} = 0,$$

dont le système caractéristique est :

$$\frac{du}{g} = -\frac{dh}{c}.$$

Il s'ensuit immédiatement qu'une intégrale première est $u + 2c$. De même pour le second invariant, on aboutit à $u - 2c$.

- Le long d'une 1-onde de détente, on a donc : $u_2 + 2\sqrt{g h_2} = u_1 + 2\sqrt{g h_1}$ et l'invariant $r_1 = u + 2c$ est constant le long de toutes les caractéristiques associées à la valeur $\lambda_1 = u - c$ (celles-ci remplissant un cône, r_1 est constant dans un cône) ;

- Le long d'une 2-onde de détente, on a donc : $u_2 - 2\sqrt{gh_2} = u_1 - 2\sqrt{gh_1}$ et l'invariant $r_2 = u - 2c$ est constant le long de toutes les caractéristiques associées à la valeur $\lambda_1 = u + c$.

Si on se ramène à la variable $(h, q = hu)$, on tire :

- Le long d'une 1-onde de détente, on a donc : $q_2/h_2 + 2\sqrt{gh_2} = q_1/h_1 + 2\sqrt{gh_1}$;
- Le long d'une 2-onde de détente, on a donc : $q_2/h_2 - 2\sqrt{gh_2} = q_1/h_1 - 2\sqrt{gh_1}$.

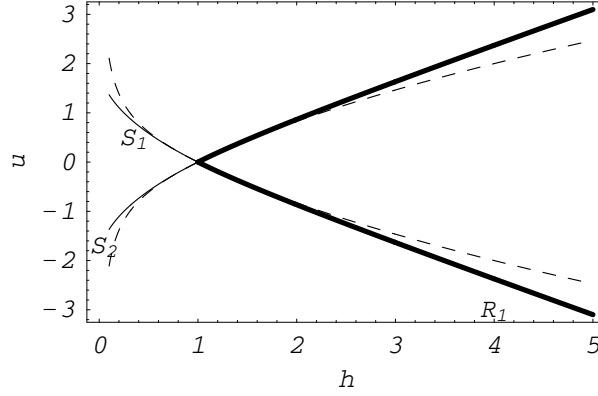


Figure 3.14 : ondes de choc (en gras) et de détente dans un espace (h, u) (unités arbitraires). Le point origine des courbes est $(h, u) = (1, 0)$.

Construction de la solution au problème de Riemann La méthode de construction consiste à introduire un état intermédiaire u_* . L'état (h_*, u_*) peut être relié à un état à gauche (h_L, u_L) par une 1-onde :

$$u_* = \begin{cases} S_1(h_* | h_L, u_L) = u_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh_*} & \text{si } h_* < h_L \quad \text{1-onde de détente} \\ R_1(h_* | h_L, u_L) = u_L - (h_* - h_L) \sqrt{g \frac{h_* + h_L}{2h_* h_L}} & \text{si } h_* > h_L \quad \text{1-onde de choc} \end{cases} \quad (3.63)$$

Il peut également être relié à l'état à droite (h_R, u_R) par une 2-onde :

$$u_* = \begin{cases} S_2(h_* | h_R, u_R) = u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\sqrt{gh_*} & \text{si } h_* < h_R \quad \text{2-onde de détente} \\ R_2(h_* | h_R, u_R) = u_R + (h_* - h_R) \sqrt{g \frac{h_* + h_R}{2h_* h_R}} & \text{si } h_* > h_R \quad \text{2-onde de choc} \end{cases} \quad (3.64)$$

On commence par cet ordre (1-onde puis 2-onde) car l'information à gauche est transmise en tout premier lieu par la plus petite des valeurs propres, puis par les autres. On a reporté sur la figure 3.14 une représentation des courbes de choc et de détente. On notera qu'au point d'intersection, les tangentes des courbes R_1 et S_1 sont identiques. Par ailleurs, un état intermédiaire n'est possible que si :

$$u_R - u_L < 2(\sqrt{gh_R} + \sqrt{gh_L}).$$

Attention ! Il faut noter aussi que pour $h_L = 0$ (resp. $h_R = 0$), la 1-onde (resp. la 2-onde) de choc n'est pas définie. Notamment si on reprend le problème de rupture de barrage vu précédemment, on a : $(h_L, u_L) = (h_L, 0)$ et $(h_R, u_R) = (0, 0)$; dans ce cas que la seule solution possible est une onde de détente ; l'onde de choc n'est pas définie.



On a représenté sur la figure 3.15 un problème de Riemman avec les états initiaux suivants : $(h_L, u_L) = (1, 0)$ et $(h_R, u_R) = (2, 0)$. On a indiqué en trait continu le réseau d'ondes émanant du point à gauche (L) et en trait discontinu les ondes émanant de l'état à droite (R). Deux états intermédiaires sont possibles : le point A ou B . On voit que le point A est sur une 1-onde alors que B est sur une 2-onde (émanant de L). Cela veut donc dire que le chemin $L \rightarrow A$ est une 1-onde de choc alors que le chemin $A \rightarrow R$ est une 2-onde de détente.

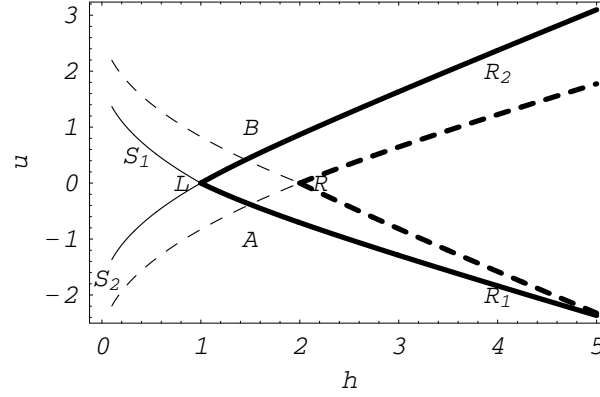


Figure 3.15 : résolution du problème de Riemann pour $(h_L, u_L) = (1, 0)$ et $(h_R, u_R) = (2, 0)$.

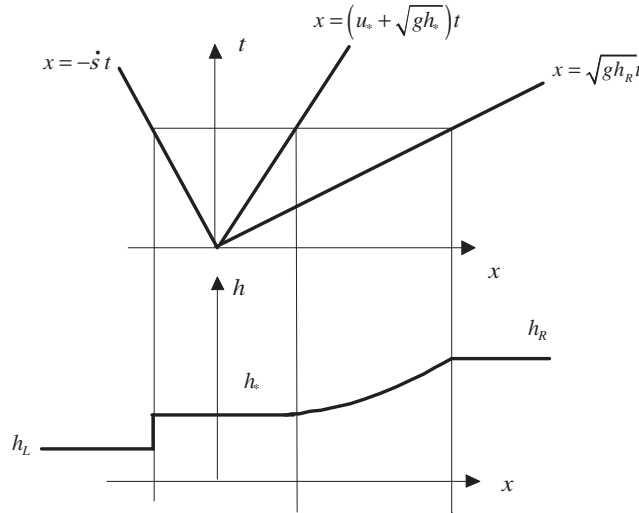


Figure 3.16 : forme de la solution à un temps t .

3.2.5 Généralisation à des systèmes à n dimensions

Ce que l'on vient de faire pour la dimension $n = 2$ peut se généraliser au cas multidimensionnel. Comme précédemment le cas linéaire ne pose pas de problème : les caractéristiques étant des droites, on peut facilement calculer la solution en un point M du plan caractéristique $x - t$ en examinant le parcours de l'information le long des droites caractéristiques. Le problème non linéaire est plus complexe car il peut donner naissance à des courbes caractéristiques quelconques ; les solutions élémentaires au problème de Riemann sont les chocs, les ondes de détente, et les combinaisons d'onde de détente et de choc.

Systèmes linéaires

Structure de la solution On considère le système d'équations linéaires :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice $n \times n$ possédant n valeurs propres distinctes et réelles. On peut donc écrire $\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{R}^{-1}$, avec $\mathbf{R}$ la matrice de passage⁴ et $\mathbf{\Lambda}$ la matrice diagonale des valeurs propres λ_i . On peut aussi introduire les vecteurs propres à gauche $\mathbf{l}$: $\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{l}_i$. La matrice $\mathbf{L}$ dont les lignes sont les vecteurs propres à gauche $\mathbf{l}_i$ vérifie : $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}$. Vecteurs propres à gauche et à droite sont orthogonaux ; en effet, on a

$$\begin{aligned} \lambda_i \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_j &= (\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_j, \\ &= \mathbf{l}_i \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_j), \\ &= \mathbf{l}_i \cdot (\lambda_j \mathbf{r}_j), \\ &= \lambda_j \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_j, \end{aligned}$$

ce qui dans le cadre d'une stricte hyperbolicité (où toutes les valeurs propres sont distinctes) que $\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0$ pour $i \neq j$. Notons que l'on peut toujours choisir les vecteurs propres de telle sorte que $\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_{ij}$, ce qui veut dire que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1}$ ou encore que $\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1}$.

En faisant le changement de variable $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U}$, le système d'équations prend une forme plus simple :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0.$$

Il s'agit donc d'une série d'équations d'advection, linéaires et indépendantes, de la forme : $\partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i = 0$, donc la solution est de la forme $w_i = \omega_i(x - \lambda_i t)$, avec ω_i une fonction qui dépend des conditions initiales. Admettons par exemple que l'on cherche à résoudre un problème de Cauchy de la forme :

$$\mathbf{W}(x, 0) = \mathbf{W}^0(x) \text{ pour } -\infty \leq x \leq \infty.$$

La solution à ce problème initial est

$$w_i(x, t) = \omega_i(x - \lambda_i t) \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Par un changement de variable inverse, on trouve $\mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}$ ou bien encore en appliquant les règles du calcul matriciel

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n w_i(x, t) \mathbf{r}_i,$$

4. Les colonnes de cette matrice sont les vecteurs propres à droite $\mathbf{r}_i$ de $\mathbf{A}$.

où $\mathbf{r}_i$ désigne le vecteur propre à droite de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ_i et w_i est le $i^{\text{ème}}$ composant de $\mathbf{W}$. La solution est donc la superposition de n ondes se déplaçant à la vitesse λ_i ; ces ondes sont indépendantes, ne changent pas de forme, et leur forme est donnée par $w_i^0(x)$.

Ces formes se propagent à la vitesse λ_i le long de courbes caractéristiques $x = x_0 + \lambda_i t$, qui sont des droites si λ_i est constant. Comme précédemment, pour un système d'équations linéaires, la seule possibilité d'observer des solutions discontinues est qu'originellement la condition initiale est elle-même porteuse d'une discontinuité.

Problème de Riemann Le problème de Riemann est un problème aux conditions initiales de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

avec

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_\ell & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_r & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ce système peut se résoudre ici simplement. Il est important de bien comprendre la structure de la solution car celle-ci possède les mêmes caractéristiques dans le cas non linéaire. En outre, plusieurs méthodes numériques, comme celles employées dans Clawpack ([LeVeque, 2002](#)), sont fondées sur les propriétés de ces solutions.

On décompose $\mathbf{U}_\ell$ et $\mathbf{U}_r$ dans la base des vecteurs propres $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{U}_\ell = \sum_{i=1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i \text{ et } \mathbf{U}_r = \sum_{i=1}^n w_i^{(r)} \mathbf{r}_i, \quad (3.65)$$

avec $\mathbf{w}_\ell = w_i^{(\ell)}$ et $\mathbf{w}_r = w_i^{(r)}$ des vecteurs dont les composantes sont constantes. Le problème de Riemann est en fait composé de n problèmes scalaires :

$$w_i(x, 0) = \begin{cases} w_i^{(\ell)} & \text{si } x < 0, \\ w_i^{(r)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La solution des équations d'advection est donc :

$$w_i(x, t) = \begin{cases} w_i^{(\ell)} & \text{si } x - \lambda_i t < 0, \\ w_i^{(r)} & \text{si } x - \lambda_i t > 0. \end{cases}$$

Soit $I(x, t)$ le plus grand des indices i tels que $x - \lambda_i t > 0$. On a alors :

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{i=1}^I w_i^{(r)} \mathbf{r}_i + \sum_{i=I+1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i. \quad (3.66)$$

Considérons le cas $n = 3$. La solution se décompose dans le diagramme $x - t$ en des coins où $\mathbf{U}$ est constant et qui sont séparés par les courbes caractéristiques $x = \lambda_i t$. En tout point M on peut déterminer la valeur de $\mathbf{U}$ en tirant les courbes caractéristiques passant par ce point M jusqu'à l'axe des abscisses $t = 0$. Par exemple, la solution dans le cas particulier de la figure 3.17 est

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_\ell^* = w_1^{(r)} \mathbf{r}_1 + w_2^{(\ell)} \mathbf{r}_2 + w_3^{(\ell)} \mathbf{r}_3.$$

Dans toute la région délimitée par les caractéristiques $x = \lambda_1 t$ et $x = \lambda_2 t$, la solution est constante et prend la même valeur $\mathbf{U}_\ell^*$.

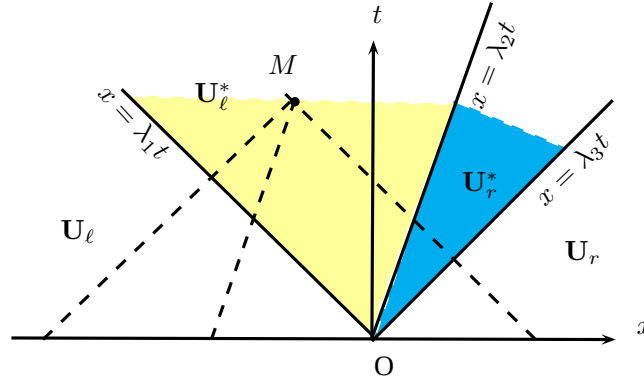


Figure 3.17 : construction de la solution pour un problème de Riemann linéaire.

Il en est de même pour la région $x = \lambda_2 t$ et $x = \lambda_3 t$, la solution est constante et prend la même valeur $\mathbf{U}_r^*$, avec

$$\mathbf{U}_r^* = w_1^{(r)} \mathbf{r}_1 + w_2^r \mathbf{r}_2 + w_3^{(\ell)} \mathbf{r}_3.$$

D'une région à l'autre, la solution subit une discontinuité. Par exemple, en passant de la région $\mathbf{U}_\ell^*$ à $\mathbf{U}_r^*$, la solution subit une discontinuité égale à

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_r^* - \mathbf{U}_\ell^* = (w_2^{(r)} - w_2^{(\ell)}) \mathbf{r}_2.$$

À travers la caractéristique 2 séparant les deux domaines, la solution subit donc un saut $(w_2^{(r)} - w_2^{(\ell)}) \mathbf{r}_2$, qui est un multiple de $\mathbf{r}_2$; cela montre donc que le vecteur saut est un vecteur propre de $\mathbf{A}$. Cette propriété se vérifie également pour un système non linéaire, ce qui la rend particulièrement utile.

Notons que l'on peut transformer l'équation (3.66)

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{i=1}^I w_i^{(r)} \mathbf{r}_i + \sum_{i=I+1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i$$

en se servant de l'équation (3.65). On a par exemple

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, t) &= \mathbf{U}_\ell + \sum_{i=1}^I w_i^{(r)} \mathbf{r}_i + \sum_{i=I+1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n w_i^{(\ell)} \mathbf{r}_i, \\ &= \mathbf{U}_\ell + \sum_{i=1}^I (w_i^{(r)} - w_i^{(\ell)}) \mathbf{r}_i, \end{aligned}$$

ce qui donne en introduisant l'onde de discontinuité $\mathbf{W}_i = (w_i^{(r)} - w_i^{(\ell)}) \mathbf{r}_i$

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_\ell + \sum_{i=1}^I \mathbf{W}_i, \quad (3.67)$$

ou bien encore si l'on utilise $\mathbf{U}_r$ au lieu de $\mathbf{U}_\ell$

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}_r - \sum_{i=I+1}^n \mathbf{W}_i. \quad (3.68)$$

Cette décomposition sert notamment dans la méthode des volumes finis à construire des solutions numériques.

Généralités sur les systèmes non linéaires

Remarque préliminaire Nous allons généraliser la solution classique du problème de Riemann, où l'on montre que cette solution peut se décomposer en onde de choc, onde de détente, et onde de contact. Pour qu'une telle situation se rencontre, il faut que certaines conditions soient vérifiées. La première de ces conditions est que le système doit être strictement hyperbolique⁵, c'est-à-dire les valeurs propres sont toujours distinctes. Nous allons voir qu'elles doivent également être *authentiquement non linéaires*; cette notion de champ authentiquement linéaire peut être vue comme une généralisation de la notion de convexité dans le cas scalaire. En effet, dans le cas scalaire, il est souhaitable que la vitesse caractéristique soit monotone, c'est-à-dire $\lambda(u) = f'(u)$ varie de manière monotone avec u et donc que $f''(u) > 0$ ou < 0 (f doit être convexe ou concave) sinon le problème de Riemann est plus complexe, avec des ondes mixtes (*compound waves*) ou de choc sur-compressif ou sous-compressif.

Mise sous forme caractéristique L'idée de base est de passer d'un système d'équations fortement couplées

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (3.69)$$

en un système de n équations où le couplage n'apparaît pas directement et qui expriment la conservation de certaines quantités

$$\frac{dr_i}{dt} = 0 \text{ le long d'une courbe caractéristique } \frac{dx}{dt} = \lambda_i(\mathbf{u}),$$

où $r_i(\mathbf{u})$ est une fonction qu'on appelle i -invariant de Riemann et où $1 \leq i \leq n$. Comme on le voit le couplage apparaît essentiellement dans la valeur propre λ_i qui dépend de la valeur prise par les composantes $\mathbf{u}$

Pour faire cette transformation on utilise la méthode du facteur intégration. Quand on multiplie (3.69) par un vecteur à gauche $\mathbf{v}_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \\ &= \mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right), \\ &= \mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mu_i \frac{dr_i}{dt}. \end{aligned}$$

On souhaite pouvoir écrire le terme différentielle sous la forme d'une différentielle exacte

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mu_i \frac{dr_i}{dt},$$

où $r_i(\mathbf{u})$ est le i -invariant de Riemann et μ_i un facteur intégrant. Développons les termes différentiels et le produit scalaire :

$$v_{i,1} \frac{du_1}{dt} + v_{i,2} \frac{du_2}{dt} + \cdots + v_{i,n} \frac{du_n}{dt} = \mu_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial r_i}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial r_i}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt} \right),$$

5. Le cas non strictement hyperbolique correspond à la situation où des valeurs propres sont égales. Il s'agit d'un sujet de recherche encore très actif et assez complexe. On va en effet voir que, pour un problème strictement hyperbolique, il y a n valeurs propres associées à n vecteurs propres différents, qui génèrent un espace de dimension n . Les courbes intégrales que l'on déduit (ondes de choc et de détente) constituent localement une base de cet espace et si les états initiaux u_R et u_L sont assez proches, alors on peut résoudre le problème de Riemann. Dans le cas contraire, plusieurs problèmes peuvent se poser : quelle est la dimension du sous-espace généré par les vecteurs associés à une valeur propre multiple (LeVeque, 2002, voir pp. 358–362) ? Un autre problème est lié à la perte locale d'hyperbolicité, par exemple avec des valeurs propres qui deviennent complexes dans un certain domaine (le problème devenant localement elliptique).

En identifiant les termes membre à membre nous trouvons que r_i vérifie une série d'équations :

$$\begin{aligned} v_{i,1} &= \mu_1 \frac{\partial r_i}{\partial u_1}, \\ v_{i,1} &= \mu_1 \frac{\partial r_i}{\partial u_1}, \\ &\vdots \\ v_{i,n} &= \mu_1 \frac{\partial r_i}{\partial u_n}. \end{aligned}$$

En éliminant le facteur intégrant μ_i on obtient l'équation

$$\frac{1}{v_{i,1}} \frac{\partial r_i}{\partial u_1} = \frac{1}{v_{i,2}} \frac{\partial r_i}{\partial u_2} = \dots = \frac{1}{v_{i,n}} \frac{\partial r_i}{\partial u_n}.$$

Ces équations peuvent également être interprétées comme le fait que le vecteur

$$\nabla_{\mathbf{u}} r_i = (\partial_{u_1} r_i, \partial_{u_2} r_i, \dots, \partial_{u_n} r_i)$$

est proportionnel au vecteur propre à gauche $\mathbf{v}_i$ (le facteur de proportionnalité étant le facteur intégrant μ_i). Le problème est qu'il faudrait calculer le facteur intégrant. On peut contourner cette difficulté en rappelant que le vecteur propre à gauche $\mathbf{v}_i$ est perpendiculaire à tous les vecteurs à droite propre à gauche $\mathbf{w}_k$ avec $k \neq i$. En effet écrivant le produit scalaire $\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{v}_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{v}_i &= \mathbf{w}_k \cdot \left(\frac{1}{\lambda_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i \right), \\ &= \frac{1}{\lambda_i} (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}_i, \\ &= \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'un i -invariant de Riemann vérifie la condition d'orthogonalité :

$$\boxed{\mathbf{w}_k \cdot \nabla_{\mathbf{u}} r_i = 0 \text{ pour tout } k \neq i.} \quad (3.70)$$

Les $n - 1$ i -invariants de Riemann (autre que k) vérifient cette relation.

Solution auto-similaire Précédemment, on avait fait remarquer l'invariance de l'équation aux dérivées partielles par une transformation $(x, t) \rightarrow \xi(x, t)$, qui permet de passer d'une équation aux dérivées partielles en x et t en une équation différentielle ordinaire en ξ . Cela nous amène à penser que dans certains cas la solution se présente sous la forme auto-similaire : $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{W}(\xi, u_L, u_R)$, avec : $\xi = x/t$. Dans ce cas, on doit avoir :

$$-\xi \frac{d\mathbf{W}}{d\xi} + \nabla \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{W}}{d\xi} = 0, \quad (3.71)$$

c'est-à-dire :

- soit $\mathbf{W}'(\xi) = 0$, c'est l'état constant ;
- soit la solution $\mathbf{W}'(\xi)$ est un vecteur propre à droite de $\nabla \mathbf{F}$ associé à la valeur propre ξ pour toute valeur du paramètre ξ . Cela veut dire aussi que la courbe $\mathbf{W}(\xi)$ paramétrée par ξ est tangente à un vecteur propre à droite $\mathbf{w}$. Il y a donc n fonctions possibles pour $\mathbf{W}$. On va les indiquer par i : on parle de i -onde de détente.

Pour déterminer $\mathbf{W}$, il faut résoudre

$$\begin{aligned}\xi &= \lambda_k(\mathbf{W}), \\ \mathbf{W}'(\xi) &= \alpha \mathbf{w}_k,\end{aligned}$$

où α est un coefficient de proportionnalité. En dérivant la première équation par rapport à ξ , on tire :

$$\begin{aligned}1 &= \nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{W}'(\xi), \\ &= \alpha \nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_k,\end{aligned}$$

donc le coefficient de proportionnalité vaut :

$$\alpha = \frac{1}{\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_k}.$$

La fonction $\mathbf{W}$ est donc aussi solution de l'équation différentielle

$$\boxed{\mathbf{W}'(\xi) = \frac{\mathbf{w}_k}{\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}_k}}.$$

Notons que cette équation n'a de sens que si le dénominateur est différent de 0. Pour des systèmes non linéaires à n dimensions, les valeurs propres sont des fonctions non linéaires de $\mathbf{U}$; elles définissent donc des champs vectoriels dits *caractéristiques*. Lorsque le gradient d'un champ est normal à son vecteur propre à droite, on parle de *champ linéairement dégénéré*⁶ :

$$\nabla \lambda_i \cdot \mathbf{w}_i = 0.$$

Dans le cas contraire on parle de *champ authentiquement non linéaire*. En effet, si l'on veut qu'une valeur propre λ_k ne s'annule pas le long d'une courbe caractéristique $\mathcal{C}_k$ (rappelons-le, une courbe intégrale du vecteur à droite), alors on doit avoir

$$\frac{d\lambda_k}{d\xi} = \nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\xi} > 0 \text{ ou } < 0,$$

avec $\tilde{\mathbf{u}}$ décrivant $\mathcal{C}_k$; cela veut dire que $\tilde{\mathbf{u}} \propto \mathbf{w}_k$. La *condition de non-dégénérescence* s'écrit donc $\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k \cdot \mathbf{w}_k \neq 0$. Si la variation $d\lambda_k/d\xi$ est strictement positive (resp. négative), la vitesse caractéristique est toujours croissante (resp. négative) et l'onde est en expansion (resp. en contraction)⁷. Si elle s'annule en un point donné, alors la caractéristique est localement une droite comme dans le cas linéaire.

Onde simple Lorsqu'une solution $\mathbf{u}$ est continûment dérivable sur un domaine $\mathcal{D}$ et que tous ses $(n-1)$ i -invariants de Riemann parmi les n invariants (notés ici r_j avec $j \neq i$) sont constants en tout point de ce domaine, alors la solution est appelée une *i -onde simple*. Sur ce domaine, les i -caractéristiques sont des droites et le long de ces droites, $\mathbf{u}$ est constant.

✂ **Démonstration.** Rappelons que l'équation (3.69) est équivalente au système d'équations :

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ le long de } \mathcal{C}_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

où $d/dt = \partial_t + \lambda_i \partial_x$. Par définition une i -onde simple solution de (3.69) est telle que

- il y a $(n-1)$ i -invariants r_j ($j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$), qui sont constants, donc $dr_j/dt = 0$ le long de $\mathcal{C}_i$ pour $j = 1 \dots n$ excepté $j = i$. Autrement dit, on a :

$$\frac{dr_j}{dt} = \nabla_{\mathbf{u}} r_j \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ le long de } \mathcal{C}_i ;$$

6. Rappelons que, dans le cas linéaire, les champs sont dégénérés et les ondes sont des chocs de vitesse λ_i .

7. *expanding* ou *compressing wave* (LeVeque, 2002, voir pp. 274–275).

– on a par ailleurs :

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ le long de } \mathcal{C}_i.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \nabla_{\mathbf{u}} r_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{u}} r_{n-1} \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ le long de } \mathcal{C}_i$$

Les gradients étant indépendants, la matrice est non singulière (c'est-à-dire son déterminant n'est pas nul) ; la solution de cette équation est donc $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$ le long de $\mathcal{C}_i$, ce qui veut dire que $\mathbf{u}$ est constant le long de la courbe caractéristique et donc $\lambda_k(\mathbf{u})$ est également constant. Pour une i -onde simple, les caractéristiques sont des droites. $\square$

Dans un diagramme $x - t$, on représente une onde de détente centrée en O par un éventail de droites, limitées à gauche par la droite de pente $\lambda(\mathbf{u}_\ell)$ et à droite par la droite de pente $\lambda(\mathbf{u}_r)$.

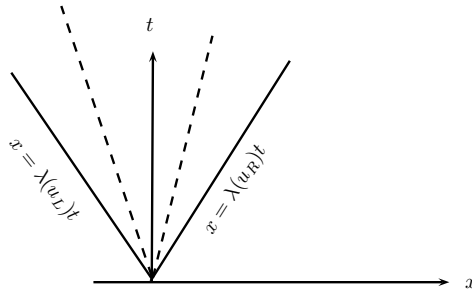


Figure 3.18 : cône des caractéristiques d'une onde de détente.

Onde de détente Une onde de détente centrée⁸ est une onde simple pour un champ authentiquement non linéaire, pour lequel $\xi = x/t$. La solution a alors la forme suivante :

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si } x/t \leq \xi_1, \\ \mathbf{W}(\xi, u_L, u_R) & \text{si } \xi_1 \leq x/t \leq \xi_2, \\ \mathbf{u}_R & \text{si } x/t \geq \xi_2. \end{cases}$$

où $\mathbf{u}_R$ et $\mathbf{u}_L$ doivent être deux points sur la caractéristique tels que $\lambda_k(\mathbf{u}_L) < \lambda_k(\mathbf{u}_R)$; cette condition est indispensable pour que les caractéristiques se répandent dans un cône quand t croît et que l'onde ait un sens physique (voir figure 3.19). Pour une onde de détente, la vitesse caractéristique coïncide avec ξ comme le montre l'équation (3.71). Cela entraîne que la limite à gauche de l'éventail couvert par une onde de détente est $\xi_1 = \lambda_k(\mathbf{u}_L)$ et la limite à droite est $\xi_2 = \lambda_k(\mathbf{u}_R)$. L'onde de détente est solution de l'équation (3.2.5) ; elle est pour un intervalle de ξ de la forme $[\xi_1, \xi_2]$. On retrouve la condition sur le caractère monotone de la variation de λ_k pour que le dénominateur ne s'annule pas.

Onde de choc On appelle k -choc une discontinuité matérialisée par une courbe $x = s(t)$ telle que la condition de Rankine-Hugoniot soit satisfaite :

$$\dot{s}(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) = f(\mathbf{u}_L) - f(\mathbf{u}_R),$$

8. *Centered rarefaction wave* en anglais.

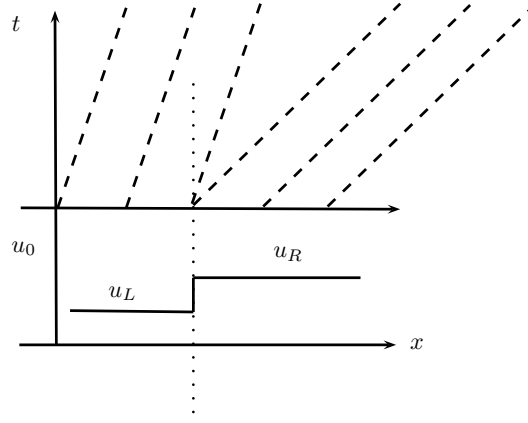


Figure 3.19 : onde de détente.

et telle que la *condition d'entropie* de Lax soit également vérifiée :

$$\lambda_k(\mathbf{u}_L) > \dot{s} > \lambda_k(\mathbf{u}_R),$$

impliquant que les caractéristiques se croisent au niveau de la discontinuité (voir figure 3.20), tandis que les autres caractéristiques doivent traverser la discontinuité sans s'y croiser, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} \lambda_j(\mathbf{u}_L) < \dot{s} \text{ et } \lambda_j(\mathbf{u}_R) < \dot{s} \text{ pour } j < k, \\ \lambda_j(\mathbf{u}_L) > \dot{s} \text{ et } \lambda_j(\mathbf{u}_R) > \dot{s} \text{ pour } j > k. \end{aligned}$$

Cette condition est correcte pour des problèmes strictement hyperboliques et des champs authentiquement non linéaires. Pareillement au cas de k -ondes, on peut montrer qu'il existe n familles de courbes dont n'importe quel point peut être relié à un point origine $\mathbf{u}_L$ par un choc (Smoller, 1982, voir pp. 328–329).

Onde de contact Si un k -champ caractéristique est linéairement dégénéré ($\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k \cdot \mathbf{w}_k = 0$) alors, par définition, λ_k est alors un k -invariant de Riemann : λ_k est constant le long de la caractéristique C_k . Le problème non linéaire se comporte comme un problème linéaire, c'est-à-dire une onde se propage sans déformation ni atténuation à une vitesse constante. Si l'état initial comporte une discontinuité, avec $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$ sur la même courbe caractéristique, alors la solution n'est rien d'autre que la translation de cette discontinuité à la vitesse λ_k ; la courbe de choc (de Rankine-Hugoniot) coïncide alors avec la caractéristique. Il ne s'agit pas d'un vrai choc puisque la vitesse caractéristique est la même de part et d'autre de la discontinuité : $s = \lambda_k(\mathbf{u}_L) = \lambda_k(\mathbf{u}_R)$, ce qui implique qu'au niveau de la discontinuité, les courbes caractéristiques sont parallèles à l'onde dans le plan $x - t$.

♣ **Exemple.** – Un exemple de discontinuité de contact est donné par la diffusion d'un traceur dans un courant d'eau. Ce problème peut se modéliser en ajoutant une troisième équation aux équations de Saint-Venant. Soit par exemple ϕ la concentration d'un traceur, qui vérifie l'équation d'advection :

$$\phi_t + u\phi_x = 0.$$

Les équations forment alors le système suivant : $\mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}_x + \mathbf{B} = \mathbf{0}$, avec :

$$\mathbf{U} = \{h, hu, h\phi\}, \mathbf{A} = \nabla \mathbf{f}, \mathbf{f} = \{hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh^2, uh\phi\}.$$

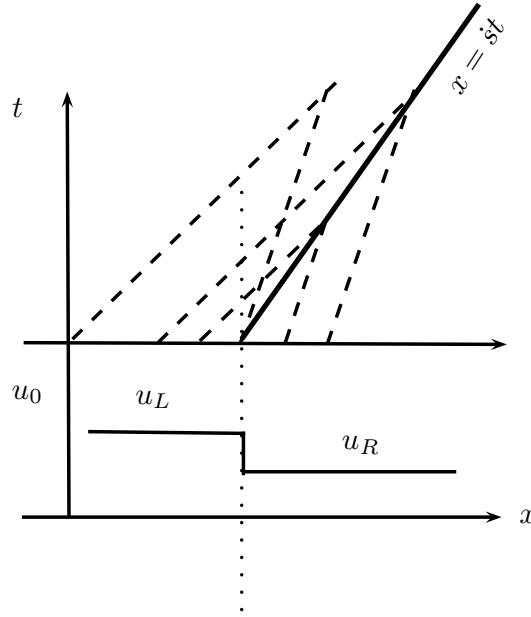


Figure 3.20 : onde de choc.

Il y a trois valeurs propres $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$, $\lambda_2 = u$, et $\lambda_3 = u + \sqrt{gh}$. Le champ 2 associé à la valeur propre u est linéairement dégénéré (il s'agit d'un problème d'advection puisqu'il s'agit de la valeur propre associée à la troisième équation, donc le résultat est sans surprise⁹).

Conditions aux limites. – De même, si au lieu d'une frontière, on considère une discontinuité, les remarques précédentes peuvent être généralisées. On appelle $\dot{s}$ la vitesse de la discontinuité et on admet qu'il existe un indice k pour lequel on a $\lambda_k(u_R) < \dot{s} < \lambda_{k+1}(u_R)$. Alors il faut $n - k$ conditions aux limites sur le bord droit de la discontinuité. De même si on trouve un indice j tel que $\lambda_j(u_L) < \dot{s} < \lambda_{j+1}(u_L)$, alors il faut donner j conditions aux limites sur le bord gauche de la discontinuité. On doit avoir $j = k - 1$. En résumé, la solution admet une discontinuité $(u_L, u_R, \dot{s})$ si on trouve un indice k tel que :

$$\lambda_k(u_R) < \dot{s} < \lambda_{k+1}(u_R) \text{ et } \lambda_{k-1}(u_L) < \dot{s} < \lambda_k(u_L), \quad (3.72)$$

ou bien encore sous une forme différente :

$$\boxed{\lambda_k(u_R) < \dot{s} < \lambda_k(u_L) \text{ et } \lambda_{k-1}(u_L) < \dot{s} < \lambda_{k+1}(u_R).} \quad (3.73)$$

On appelle une telle discontinuité un k -choc.

À noter que si $n = 1$, on retombe sur le cas vu précédemment puisque $\lambda = f'(u)$. La condition de choc est alors $f'(u_L) > \dot{s} > f'(u_R)$.

Solution générale du problème de Riemann Le problème de Riemann est un problème aux conditions initiales de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0,$$

9. En général le scalaire $\phi(x, t)$ est déformé lors du transport par advection car la vitesse de transport est $u(x, t)$, qui varie selon x et t . Ici on considère une *onde simple*, c'est-à-dire les variations de $\mathbf{u}$ ne sont pas quelconques car $\mathbf{u}$ doit suivre la courbe caractéristique associée à la valeur propre λ_2

avec :

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On rappelle que le vecteur $\mathbf{U}$ est de dimension n . On peut montrer que la solution consiste en $n + 1$ états séparés par les n ondes associées à chaque valeur propre.

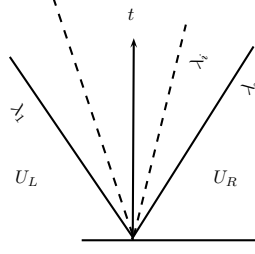


Figure 3.21 : structure de la solution pour un problème de Riemann.

Pour les systèmes linéaires, les valeurs propres définissent des familles d'ondes de choc. Pour les systèmes non linéaires, différents types de solution sont possibles :

- ondes de choc : dans ce cas, on a différentes conditions qui s'appliquent : Rankine-Hugoniot $\dot{s} [\mathbf{U}]_{x=s(t)} = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R))$ et condition d'entropie $\lambda_i(\mathbf{U}_L) > \dot{s}_i > \lambda_i(\mathbf{U}_R)$;
- ondes de contact : condition de Rankine-Hugoniot, invariants de Riemann, condition $\lambda_i(\mathbf{U}_L) = \lambda_i(\mathbf{U}_R)$;
- ondes de détente : invariants de Riemann, divergence des caractéristiques $\lambda_i(\mathbf{U}_L) < \lambda_i(\mathbf{U}_R)$.

En pratique, on se donne un état à gauche $\mathbf{u}_L$ et on se demande quels sont les états à droite $\mathbf{u}_R$ qui peut être relié par un k -choc. On réitère la question pour k compris entre 1 et n . On fait de même pour les k -ondes simples et, si nécessaire, pour les discontinuités de contact si des champs sont dégénérés. La réponse est contenue dans les théorèmes énoncés dans les paragraphes précédents : on peut trouver le lieu des points qui sont reliés à $\mathbf{u}_L$ par des k -ondes simples et k -chocs, ce sont des courbes qu'on notera ici S_k et R_k . Quand on les trace dans un espace $\mathbb{R}^n$, on obtient un réseau de courbes d'état tels que, par exemple $\mathbf{u} - \mathbf{u}_L = R_1(\mathbf{v}_L, \mathbf{u}_L)$.

On se fixe $\mathbf{u}_L$ et on admet que $\mathbf{u}_R$ varie. Si $\mathbf{u}_R$ est sur une des courbes précédemment, le problème de Riemann est résolu immédiatement. Si $\mathbf{u}_R$ est dans l'un des secteurs découpés par le réseau de courbes, alors on procède de la manière suivante. Les courbes précédents peuvent servir à définir un maillage curviligne de l'espace.

Stratégie de résolution du problème de Riemann

Pour aboutir à une solution analytique exacte d'un problème de Riemann pour des conditions initiales quelconques, on doit suivre le raisonnement suivant :

1. Déterminer si chacune des deux vagues est une onde de choc ou de détente, éventuellement en utilisant la condition d'entropie.
2. Déterminer l'état intermédiaire q_* entre les deux ondes.
3. Déterminer la structure de la solution pour toute onde de détente.

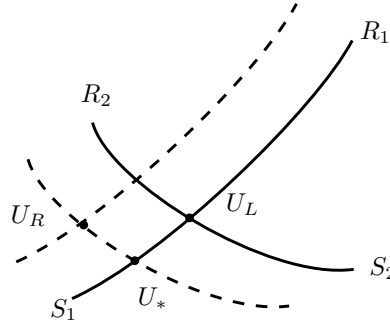


Figure 3.22 : courbes d'état.

3.2.6 Quelques solutions analytiques au problème Riemann

Cette détermination de la solution analytique par résolution du problème de Riemann avec recherche des ondes de choc et de détente peut être étendue à d'autres problèmes, notamment des problèmes avec des termes sources [comme un fond plat en marche d'escalier ([Alcrudo & Benkhaldoun, 2001](#); [Ostapenko, 2003a,b](#))]. Il faut noter que la résolution est rendue possible car les problèmes sont auto-similaires (ils dépendent en fait du rapport x/t) ; on peut montrer que pour des fonds de pente non uniforme, il n'y a pas d'ondes simples qui soient solutions des équations de Saint Venant ([Karelsky et al., 2000b](#)). On peut citer :

- [Stoker \(1957\)](#) a étudié l'onde de rupture d'un barrage sur fond sec ou mouillé. Dans le cas d'un fond mouillé la solution est obtenue graphiquement ;
- [Dressler \(1958\)](#) a proposé une méthode de calcul analytique pour une rupture de barrage sur un fond incliné et de volume fini. Le même problème a été étudié de nouveau par [Mangeney et al. \(2000\)](#) et ([Karelsky et al., 2000a](#)) ;
- [Wu et al. \(1999\)](#) a complété la solution obtenue par [Stoker \(1957\)](#) pour l'onde de rupture sur fond mouillée ;
- [Ancy et al. \(2008\)](#) ont obtenu une solution pour la rupture de barrage d'un volume fini sur une pente tandis que [Hogg \(2006\)](#) a étudié le lâcher d'un volume fini de fluide sur un fond horizontal ;
- [Alcrudo & Benkhaldoun \(2001\)](#); [Ostapenko \(2003a,b\)](#) ont étudié le problème de Riemann dans le cas d'un fond avec un décrochement (en marche d'escalier).

3.2.7 Solution des équations avec un terme source

Considérons les équations de Saint-Venant avec un terme source $F(x, t)$:

$$\partial_t h + \partial_x(uh) = 0, \quad (3.74)$$

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_x h = F. \quad (3.75)$$

L'existence d'un terme source ne modifie pas l'hyperbolicité du problème. On peut donc transformer ce système d'équations comme précédemment en faisant un changement de variables $(u, h) \rightarrow (r, s)$, où $r = u + 2c$ et $s = u - 2c$ sont les deux invariants de Riemann, avec ici $c = \sqrt{gh}$ comme précédemment. Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\partial_t r + (u + c)\partial_x r = F,$$

$$\partial_t s + (u - c)\partial_x s = F.$$

Soit encore après exprimé $u \pm c$ en fonction des variables r et s

$$\partial_t r + \frac{1}{4}(3r + s)\partial_x r = F,$$

$$\partial_t s + \frac{1}{4}(3s + r)\partial_x s = F.$$

Examinons s'il est possible d'avoir des ondes simples, c'est-à-dire des ondes pour lesquelles une des deux équations est identiquement satisfaite (i.e., si on considère l'équation de r , elle doit être valable quelle que soit la valeur de s). Karelsky *et al.* (2000b) montrent que la condition d'existence de telles ondes est que $\partial_x F = 0$. Si la première équation est satisfaite quelle que soit s , cela oblige à ce que le terme $\partial_x r = 0$; en revanche, si $F \neq 0$, on ne peut pas avoir $\partial_t r = 0$, d'où $r = r(t)$. En différentiant l'équation par rapport à x , on trouve que la condition nécessaire est bien $\partial_x F = 0$ puisque $\partial_x \partial_t r = 0$.

Considérons le cas $F(t) = m$ (par exemple $m = g \sin \theta$). On appelle *onde de Riemann progressive*¹⁰ une onde pour laquelle l'équation $\partial_t r + \frac{1}{4}(3r + s)\partial_x r = F$ est vérifiée quelle que soit la valeur de s . De même, on appelle *onde de Riemann régressive*¹¹ une onde pour laquelle l'équation $\partial_t s + \frac{1}{4}(3s + r)\partial_x s = F$ est vérifiée quelle que soit la valeur de r .

Considérons tout d'abord le cas de l'onde progressive. Pour que $\partial_t r + \frac{1}{4}(3r + s)\partial_x r = F$ soit satisfaite quelle que soit la valeur de s , cela veut impliquer que $r - mt$ doit être constant. Posons alors $r - mt = r_0$. En reportant la valeur de r dans la seconde équation on tire que

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{4}(3s + r_0 + mt)\frac{\partial s}{\partial x} = F.$$

Sur la seconde caractéristique C_s définie par $dx_s/dt = \frac{1}{4}(3s + r_0 + mt)$, on a $ds/dt = m$. Par intégration, on tire donc $s(x_s(t), t) = mt + s(x_s(0), 0)$. Retournant à la seconde courbe caractéristique C_s , on reporte la valeur de s ainsi déterminée :

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{1}{4}(3s + r) = mt + \frac{1}{4}(r_0 + 3s(x_s(0), 0)),$$

dont l'intégration donne :

$$x_s(t) = m\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}(r_0 + 3s(x_s(0), 0))t + x_s(0).$$

Les courbes C_s sont des droites si $m = 0$ et des paraboles si $m \neq 0$ dans le plan $x - t$. On fait de même pour les équations donnant la courbe caractéristique C_r le long de laquelle $s - mt$ est constant. On trouve :

$$x_r(t) = m\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}(s_0 + 3r(x_r(0), 0))t + x_r(0).$$

On peut caractériser une s -onde ($s - mt = s_0$ constant le long de la caractéristique C_r) selon la variation de la variable s :

- si $\partial_x s > 0$, alors on $\partial_x u = \frac{1}{2}\partial_s > 0$, donc $\partial_x h < 0$ (h décroît) et on parle donc d'onde de détente/raréfaction. Dans le plan $x - t$, les caractéristiques C_r sont divergentes puisque $\partial_x x_r = \frac{1}{4}\partial_x s > 0$;
- si $\partial_x s < 0$, h croît et on parle d'onde de compression et les caractéristiques C_r sont convergentes. Ces caractéristiques aboutissent à la formation d'un choc ;

10. *forward Riemann wave*

11. *backward Riemann wave*

- si $\partial_x s = 0$, les caractéristiques C_r sont parallèles.

On peut faire de même avec C_r et on obtient, au signe près, le même tableau.

La figure 3.23 reporte les r et s -caractéristiques dans le cas où les conditions initiales sont :

- pour $x \leq 0$, $u = 0$ et $h = h_0$;
- pour $x > 0$, $u = 0$ et $h = 0$.

On note que les s -ondes sont des ondes de détente alors que les r -ondes aboutissent à la formation d'un choc.

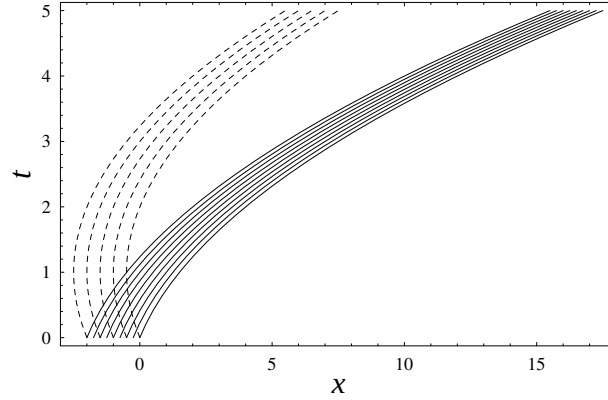


Figure 3.23 : Courbes caractéristiques s -caractéristiques (trait discontinu) et r -caractéristiques (ligne continue).

Contrairement aux ondes de détente, les conditions de choc sont identiques¹² aux équations de Saint-Venant sans choc (Karelsky *et al.*, 2000b). On peut alors écrire les conditions de saut :

$$\begin{aligned}\dot{s}[[h]] &= [[hu]], \\ \dot{s}[[hu]] &= [[hu^2 + gh^2/2]],\end{aligned}$$

avec $\dot{s}$ la vitesse de propagation du choc. Si l'on écrit ces relations dans un repère lié à l'onde de choc, alors on a $v = u - \dot{s}$:

$$\begin{aligned}h_1 v_1 &= h_2 v_2, \\ h_1 v_1^2 + gh_1^2/2 &= h_2 v_2^2 + gh_2^2/2,\end{aligned}$$

où les indices 1 et 2 renvoient à l'état de part et d'autre du choc. La vitesse du choc est : $\dot{s} = [hu]/[h]$. Il y a deux types de choc :

- Le 1-choc pour lequel on a les inégalités : $\dot{s} < u_L - c_L$ et $u_R - c_R < \dot{s} < u_R + c_R$. Soit encore $v_L > v_R$: le flux de matière se fait de la gauche vers la droite si $v_L > 0$ (*stricto sensu*, si l'on se déplace à la même vitesse que le front, les perturbations animées d'une vitesse v_L quand elles sont à gauche du front se déplacent plus rapidement que celles à droite ; elles peuvent venir rattraper le front) ;
- Le 2-choc pour lequel on a les inégalités : $\dot{s} > u_R + c_R$ et $u_L - c_L < \dot{s} < u_L + c_L$. Soit encore $v_R > v_L$: le flux de matière se fait de la droite vers la gauche si $v_L > 0$.

12. Les courbes de Hugoniot dans l'espace d'état sont identiques, mais les trajectoires dans un diagramme $x - t$ sont différentes.

3.2.8 Méthode de l'hodographe

Principe

L'idée est d'échanger le rôle de la variable dépendante et de la variable indépendante. Par exemple, si on a un système d'équations aux dérivées partielles impliquant les variables dépendantes $u(x, y)$ et $v(x, y)$, on peut transformer ce système en système d'équations pour $x(u, v)$ et $y(u, v)$. Par exemple, pour ce type de problème à deux variables, on pose ([Kevorkian, 2000](#), voir pp. 462-476)

$$\begin{aligned}x &= x(u, v), \\y &= y(u, v),\end{aligned}$$

ce qui en différentiant par rapport à x , donc

$$\begin{aligned}1 &= x_u u_x + x_v v_x, \\0 &= y_u u_x + y_v v_x,\end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer u_x et v_x

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{y_v}{J}, \\v_x &= -\frac{y_u}{J},\end{aligned}$$

avec $J = x_u y_v - x_v y_u$ le jacobien. En faisant de même avec y , on obtient

$$\begin{aligned}u_y &= -\frac{x_v}{J}, \\v_y &= \frac{x_u}{J}.\end{aligned}$$

Tant que le jacobien est non nul, on peut faire l'inversion. Notons que le jacobien de la transformation inverse $\tilde{J} = u_x v_y - u_y v_x$ est non nul si J est non nul. La condition $J \neq 0$ exclut donc le cas où soit u , soit v est constant ainsi que le cas où u est une fonction univoque de v ; le dernier cas correspond au cas de l'onde simple (voir § 3.2.8).

♣ **Exemple.** – Considérons le système d'équations quasi-linéaires

$$h_t + a(h, u)h_x + b(h, u)u_x = 0, \quad (3.76)$$

$$u_t + c(h, u)h_x + d(h, u)u_x = 0. \quad (3.77)$$

Le cas $a(h, u) = u$, $b(h, u) = h$, $c(h, u) = 1$, et $d(h, u) = u$ correspond aux équations de Saint-Venant sous forme sans dimension. Le système non linéaire (3.76–3.77) peut être transformé en un système linéaire en appliquant la méthode de l'hodographe. En notant $J = x_h t_u - x_u t_h$, on fait le changement de variable

$$h_x = \frac{t_u}{J}, u_x = -\frac{t_h}{J} h_t = -\frac{x_u}{J}, \text{ et } u_t = \frac{x_h}{J}.$$

On obtient alors un système linéaire

$$\begin{aligned}-x_u + a(h, u)t_u - b(h, u)t_h &= 0, \\x_h + c(h, u)t_u - d(h, u)t_h &= 0.\end{aligned}$$

Cela peut s'écrire sous une forme d'un système d'évolution d'un système physique

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -d \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial h} + \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u} = 0,$$

avec $\mathbf{V} = (x, t)$. Après inversion de la première matrice et en supposant $b \neq 0$, on déduit

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial h} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u} = 0, \text{ avec } \mathbf{B} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} d & bc - ad \\ 1 & -a \end{bmatrix}.$$

Examinons les courbes caractéristiques dans le plan physique $x - t$ et dans le plan de l'hodographe. Comme cela est détaillé au § 3.2.1, on cherche à écrire le système couplé (3.76–3.77) sous la forme d'équations différentielles ordinaires. Pour cela, on commence par écrire sous forme matricielle le système

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = 0, \text{ avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

et $\mathbf{U} = (h, u)$. Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont notées $\lambda_{1,2}$ (avec $\lambda_1 > \lambda_2$) et sont les solutions de $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$. Les valeurs propres à gauche de $\mathbf{A}$ sont notées $\mathbf{v}_{1,2}$ et celles à droite $\mathbf{w}_{1,2}$. On a [voir équations (3.27–3.28)]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{2c}{d - a + \sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a - d + \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2}, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{2c}{d - a - \sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a - d - \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2}, \end{aligned}$$

avec $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$. Les courbes caractéristiques dans le plan physique sont les intégrales premières de $dx/dt = \lambda_i$, avec $i = 1, 2$. Dans le plan de l'hodographe, les deux courbes caractéristiques sont les intégrales premières de $du/dh = \mu_i$ avec μ_i les racines de $\det(\mathbf{B} - \mu \mathbf{1}) = 0$,

$$\mu_1 = \frac{d - a + \sqrt{\Delta}}{2b} \text{ et } \mu_2 = \frac{d - a - \sqrt{\Delta}}{2b}.$$

On note qu'on a les relations suivantes

$$\mu_2 = \frac{d - \lambda_1}{b} \text{ et } \mu_1 = \frac{d - \lambda_2}{b},$$

ce qui montre que les caractéristiques sont reliées entre elles : la 1-caractéristique du plan physique est reliée à la 2-caractéristique du plan de l'hodographe (et réciproquement).

Onde simple

Pour les équations homogènes, un cas important où la méthode de l'hodographe ne s'applique pas (car $J = 0$) est celui de l'onde simple (Courant & Friedrich, 1948). Ce cas se rencontre lorsque les fonctions u et v sont liées entre elles. Un résultat essentiel est qu'au voisinage de tout état constant (un domaine de l'espace $x-t$ où à la fois u et v sont constantes), alors il existe un domaine où nécessairement on a une onde simple, c'est-à-dire une relation

fonctionnelle entre u et v (par exemple de la forme $v = f(u)$). Voici les autres caractéristiques des ondes simples

- une des deux familles de caractéristiques est constituée de droites dans le plan $x - t$ (par exemple, la famille C_+ d'équation $dx/dt = \lambda_+^i$ sur la figure 3.24, correspondant à $\xi = cste$);
- l'autre famille est une courbe quelconque;
- dans le plan de l'hodographe, une onde simple est une courbe unique puisque u et v sont liées entre elles.

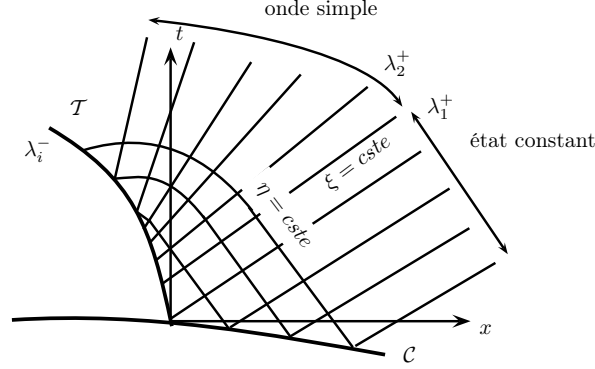


Figure 3.24 : onde simple générée par un état constant le long d'un arc spatial.

En effet, considérons un état constant $\mathcal{D}$ (par exemple, un fluide en écoulement permanent uniforme ou bien au repos) délimité par un arc (spatial) $\mathcal{C}$. Les caractéristiques dans le plan physique $x - t$ sont des droites¹³ car les valeurs propres $\lambda_+(u, v)$ et $\lambda_-(u, v)$ sont constantes. Considérons un arc temporel $\mathcal{T}$ coupant l'arc $\mathcal{C}$; les familles de caractéristiques émanent donc de part et d'autre de $\mathcal{T}$. Sur la figure 3.24, on considère que la famille C_- d'équation $dx/dt = \lambda_-$ (correspondant à $\eta = cste$) pointent vers la gauche, alors que la famille C_+ d'équation $dx/dt = \lambda_+$ (correspondant à $\xi = cste$) pointent vers la droite. Il s'ensuit que, puisqu'elle pointent vers la gauche, les courbes C_- propagent l'information de la zone $\mathcal{D}$ vers l'arc $\mathcal{T}$. Le long de chaque caractéristique de cette famille, le second invariant de Riemann $r_2(u, v)$ est constant et la constante est fournie par la valeur prise par r_2 dans le domaine $\mathcal{D}$; de la relation $r_2(u, v) = cste$, on peut tirer la relation qui lie u et v , une relation qui peut s'écrire $v = f(u)$ (ou bien $f(u, v) = 0$). Par ailleurs, la seconde famille de courbes C_+ , qui pointent vers la droite, est constituée de droites dans le plan $x - t$. Le long d'une caractéristique C_+ , on a $r_1(u, v) = cste$; comme la caractéristique émane de $\mathcal{T}$, la valeur de la constante est fixée par la condition aux limites imposées sur cet arc. La caractéristique traverse une zone couverte par la famille C_- , donc en tout point on a une relation de la forme $v = f(u)$, donc puisque $r_1(u, f(u)) = cste$, u doit être constant le long de C_- , donc $\lambda(u, f(u))$ l'est également et la caractéristique C_+ est une droite. Il s'ensuit qu'à la fois u et v se propagent en gardant une valeur constante le long de C_+ et que la valeur constante est imposée par la condition aux limites sur $\mathcal{T}$.

Les conditions d'existence d'un domaine « onde simple » apparaissent assez aisément à la lecture de la figure 3.24 :

- il faut que la famille C_- pointe vers la gauche, donc $\mathcal{T}$ doit être un arc temporel;
- il faut également que les valeurs de λ^+ décroissent quand ξ croît de telle sorte que les caractéristiques soient en « éventail ». Si cela n'est pas le cas, les caractéristiques (qui

13. l'état est représenté par un point dans le plan de l'hodographe.

sont des droites) se recoupent nécessairement, ce qui implique qu'une solution continue n'est pas possible et qu'un choc apparaît.

Ces deux propriétés sont fixées par les conditions imposées sur $\mathcal{T}$.

Dans le cas particulier où l'on fixe une variable (par exemple u) sur les arcs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$

$$u = U_0 = \text{cste} \text{ sur l'arc } \mathcal{C},$$

$$u = U_1 = \text{cste} \neq U_0 \text{ sur l'arc } \mathcal{T},$$

(outre la condition pour v : $v = V_0 = \text{cste}$ sur $\mathcal{C}$) et en admettant que les caractéristiques C_+ sont en éventail (donc elles ne se croisent pas)

$$\lambda_+(U_0, V_0) > \lambda_+(U_1, f(U_1)),$$

alors, on observe un domaine d'écoulement appelé « onde simple centrée » comme l'illustre la figure 3.25.

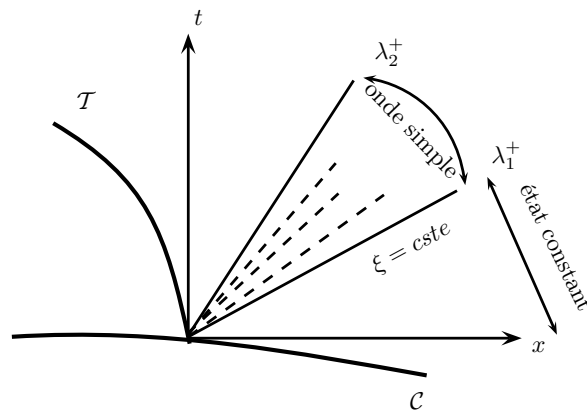


Figure 3.25 : onde simple centrée.

Exercices



Exercice 3.1 On veut résoudre sur l'intervalle $[0, 1]$ l'équation :

$$\epsilon y'' + y' + y = 0,$$

avec comme conditions initiales $y(0) = 1$ et $y(1) = 1$. Montrer qu'il n'existe pas de développement asymptotique régulier de la solution à cette équation différentielle. Devinez-vous la raison pour laquelle la méthode aux perturbations ne marche pas ici ?



Exercice 3.2 Considérons le problème aux conditions initiales

$$t \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

avec $u(x, 0) = f(x)$ pour $x > 0$. Quel est le type de cette équation. La résoudre après avoir déterminé l'équation caractéristique associée.



Exercice 3.3 Une fonction $u(x, t)$ décroît comme

$$\frac{du}{dt} = -k,$$

le long d'une courbe $x = x_s(t)$ du plan $x - t$. Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u . Inversement, montrer que toute équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = b(u, x, t),$$

peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle ordinaire

$$\frac{du}{dt} = g$$

le long d'une courbe dont on précisera l'équation.



Exercice 3.4 L'équation d'Euler-Darboux s'écrit

$$u_{xy} + \frac{au_x - bu_y}{x - y} = 0.$$

Caractériser cette équation.



Exercice 3.5 L'équation de Helmholtz s'écrit

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0.$$

Caractériser cette équation.



Exercice 3.6 L'équation de Klein-Gordon est une variante de l'équation de Schrödinger, qui sert en physique à décrire l'évolution d'une particule. Elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u = 0.$$

Quel est le type de cette équation ? Rechercher des solutions périodiques sous la forme $u(x, t) = a(k) \exp(ikx + \lambda(k)t)$, avec a l'amplitude de l'onde, λ et k sont les modes. Déterminer le mode λ ? Est-ce que la solution est stable ?

Exercice 3.7 Les équations de Saint-Venant s'écrivent pour un écoulement non frottant le long d'une surface horizontale



$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (3.79)$$

avec $\bar{u}(x, t)$ la vitesse moyenne de l'eau, $h(x, t)$ la profondeur d'eau, g la gravité. Une onde se propage à la vitesse constante $c = \sqrt{gh_0}$ avec h_0 une hauteur caractéristique. Comment s'écrivent les équations dans le repère en translation liée à l'onde ? Est-ce que le système d'équations (3.78–3.79) admet des solutions de la forme $h = H(x - \omega t)$ et $\bar{u} = U(x - \omega t)$? Est-ce qu'il admet des solutions sous la forme $h = t^a H(x/t)$ et $\bar{u} = t^b U(x/t)$?

Exercice 3.8 Considérons l'équation :



$$\dot{y} = -\frac{y(y^2 - x)}{x^2},$$

avec pour condition initiale $y(1) = 0$. On demande :

- quel est le type de cette équation ?
- la résoudre numériquement ;
- mettre l'équation sous la forme $A dx + B dy = 0$. Est-ce une différentielle exacte ?
- multipliez l'équation ci-dessus par $2/(2xy^3 - x^2y)$. Est-ce une différentielle exacte ?
- intégrer l'équation et la comparer avec la solution numérique.

Exercice 3.9 L'équation de Boussinesq sert à calculer le niveau d'une aquifère dans un sol ; par exemple, comme le montre la figure 3.26, un écoulement d'eau dans un canal, où la hauteur d'eau est variable, provoque un écoulement souterrain. Pour un problème unidimensionnel, l'équation de Boussinesq s'écrit



$$\theta \frac{\partial h}{\partial t} = K_s \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

avec θ la porosité du sol, K_s la conductivité hydraulique, h la hauteur de la nappe. Les conditions aux limites sont

$$h(0, t) = h_0(t),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, t) = 0.$$

La condition initiale est $h(x, 0) = 0$ pour $x \geq 0$. On demande le travail suivant :

- mettre l'équation de Boussinesq sous une forme adimensionnelle ;
- rechercher sous quelle forme s'écrivent les solutions auto-similaires lorsque $h_0(t) = At^n$ (on recherche par exemple les solutions sous la forme $h = t^\alpha H(\xi)$ avec $\xi = xt^{-\beta}$) ;
- montrer que le problème différentiel initial se transforme en un problème différentiel ordinaire en H ;
- on considère le cas où le niveau dans le canal est constant $h_0 = A$ ($n = 0$). Montrer que l'équation différentielle régissant H peut se ramener à une équation quasi-linéaire du premier ordre en posant le changement de variable $z = H/\xi^2$ et $p = H'/\xi$;
- écrire cette équation sous la forme $dp/dz = f(p, z)$ avec f une fonction à déterminer ;

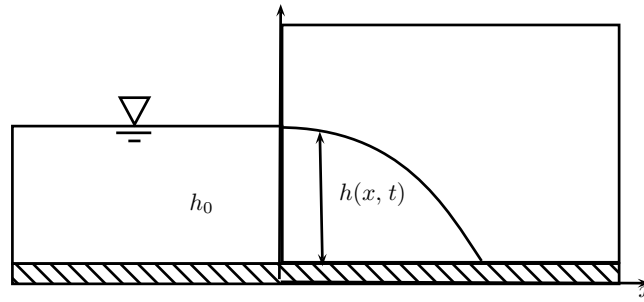


Figure 3.26 : pénétration et propagation d'une nappe aquifère dans un sol.

- montrer qu'il existe un front de propagation, c'est-à-dire un point x_f où $h(x_f) = 0$ et $h = 0$ au-delà.

Ex

Exercice 3.10 Déterminer la fonction $y(x)$ qui minimise la fonctionnelle

$$J[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx,$$

sachant que $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

Ex

Exercice 3.11 Résoudre le problème aux conditions initiales :

$$u_x + u_t = 0,$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et sachant que $u(x, 0) = \cos x$.

✱

Exercice 3.12 Résoudre analytiquement, puis de façon approchée à l'ordre ϵ l'équation

$$\frac{dy(x)}{dx} + \epsilon y(x) = 1,$$

avec pour condition aux limites $y(0) = 1$ et où $\epsilon = 0,01$ est un petit paramètre.

↪ Réponse : la solution analytique est

$$y(x) = \frac{e^{-x\epsilon} (\epsilon + e^{x\epsilon} - 1)}{\epsilon}.$$

Si maintenant on fait l'approximation suivante: $y = y_0 + \epsilon y_1 + \dots$. À l'ordre ϵ^0 , on a à résoudre l'équation très simple $y'_0 = 1$ avec $y_0(0) = 1$, soit $y(x) = x + 1$. À l'ordre ϵ^1 , on doit résoudre $y'_1 + y_0 = 0$ avec $y_1(0) = 0$, soit $y_1(x) = -x - \frac{1}{2}x^2$.

Comme le montre la figure 3.27, l'écart entre la solution théorique et la solution approchée est très faible dès l'ordre ϵ^0 . □

✱

Exercice 3.13 Résoudre l'équation de Huppert, qui représente le mouvement d'un fluide très visqueux sur un plan incliné :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.80)$$

Notons que cette équation est obtenue à partir des équations de Navier-Stokes en supposant que les termes inertiels sont négligeables et en utilisant l'approximation d'onde longue (Huppert, 1982a). Les conditions aux limites sont données à la figure 3.28 : il s'agit du lâcher d'un volume fini de fluide.

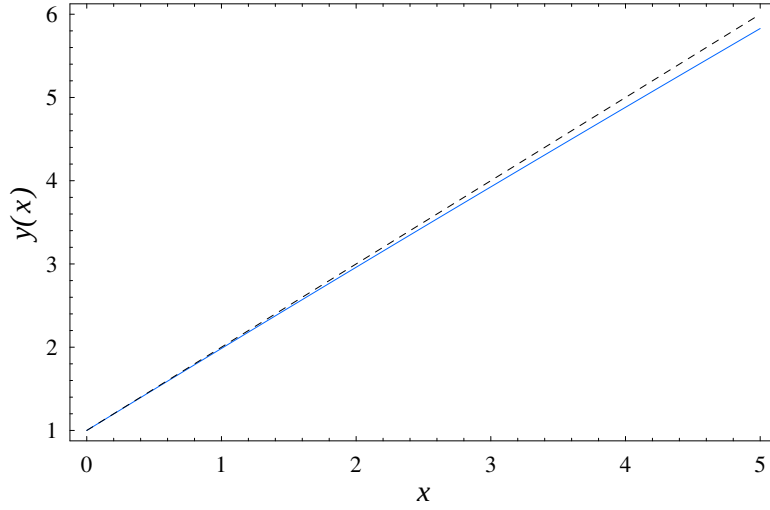


Figure 3.27 : comparaison entre la solution théorique et la solution approchée à l'ordre ϵ^0 $y = x + 1$ (trait à tiret) sur le domaine $0 \leq x \leq 5$.

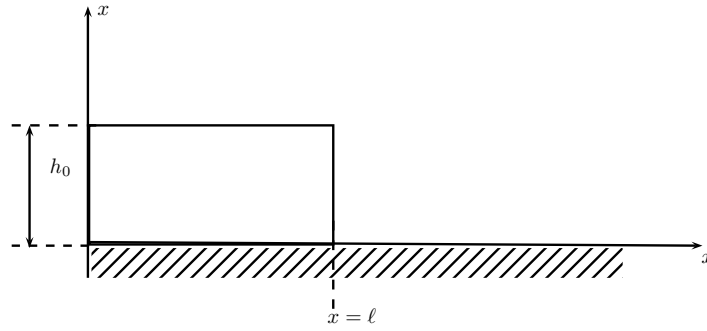


Figure 3.28 : configuration initiale de l'écoulement.

$\rightsquigarrow$ Réponse : Il s'agit d'une équation non linéaire de convection de la forme $\partial_t h + c(h)\partial_x h = 0$ avec $c(h) = \rho g h^2 \sin \theta / \mu$ ou bien encore $\partial_t h + \partial_x f(h) = 0$ avec $f(h) = \rho g h^3 \sin \theta / (3\mu)$.

Cette équation se résout assez simplement avec les conditions aux limites. Il s'agit en effet d'un double problème de Riemann, un premier en $x = 0$ et un autre en $x = \ell$. Il faut donc chercher les solutions faibles (choc) et les ondes de détente associées à cette équation. Pour les solutions faibles présentant une discontinuité en $x = s(t)$, on a une relation qui donne h de part et d'autre de $x = s$

$$\dot{s}[[h]] = [[f(h)]] \quad (3.81)$$

en fonction de $\dot{s}$ la vitesse de la discontinuité. Les ondes de détente sont des solutions auto-similaires de la forme $\mathcal{H}(\xi)$ avec $\xi = x/t$. Ici, en substituant $h(x, t)$ par $\mathcal{H}(\xi)$ dans (3.80), on obtient

$$\mathcal{H}'(-\xi + c(\mathcal{H})) = 0,$$

ce qui veut dire qu'on a soit $\mathcal{H}' = 0$, soit

$$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta}} \xi. \quad (3.82)$$

Notons que mise sous forme caractéristique, l'équation (3.80) s'écrit

$$\frac{dh}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = c(h). \quad (3.83)$$

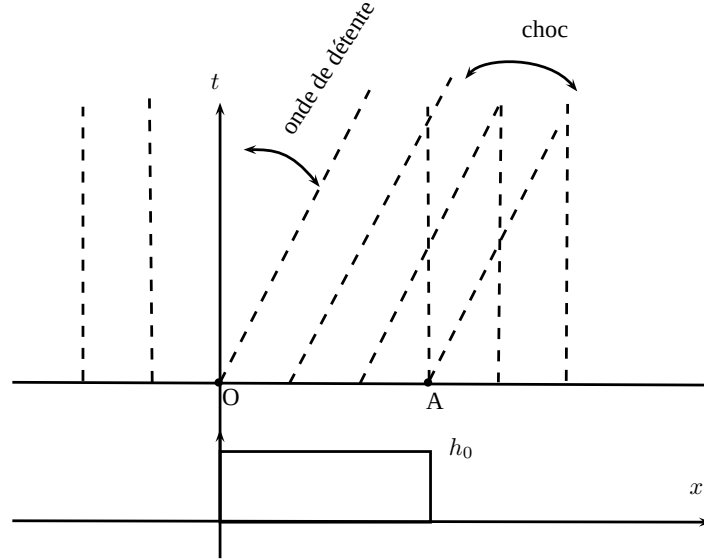


Figure 3.29 : caractéristiques.

Il s'ensuit qu'initialement les caractéristiques sont des droites, dont la pente est donnée par $c(h_0)$ comme le montre la figure 3.29.

Dans les tout premiers temps, il se développe

- à droite un choc. D'après (3.46), on a

$$\begin{aligned}\dot{s}_0 \llbracket h \rrbracket &= \llbracket f(h) \rrbracket, \\ \dot{s}_0(0 - h_0) &= f(0) - f(h_0), \\ \dot{s}_0 &= \frac{f(h_0)}{h_0} = \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{3\mu}\end{aligned}$$

donc la caractéristique émanant de A a pour équation

$$x = \ell + \dot{s}_0 t = \ell + \frac{1}{3} \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{\mu} t.$$

- à gauche une onde de détente. La solution est donnée par (3.71). Du point O, il part un faisceau en éventail de courbes caractéristiques d'équation

$$x = mt,$$

avec m un réel variant entre 0 et $m_0 = \rho g h_0^2 \sin \theta / \mu$.

Les deux caractéristiques $x = m_0 t$ et $x = \ell + \dot{s}_0 t$ se rencontrent au point B au temps t_B

$$t_B = \frac{\ell}{m_0 - \dot{s}_0} = \frac{3}{2} \frac{\mu \ell}{\rho g h_0^2 \sin \theta}.$$

L'abscisse de B sera

$$x_B = m_0 t_B = \frac{3}{2} \ell.$$

La solution aux temps courts ($0 \leq t \leq t_B$) est donc

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq m_0 t, \quad (3.84)$$

$$h(x, t) = h_0 \text{ pour } m_0 t \leq x \leq \ell + \dot{s}_0 t \quad (3.85)$$

$$h(x, t) = 0 \text{ pour } x > s(t) = \ell + \dot{s}_0 t \text{ ou } x < 0. \quad (3.86)$$

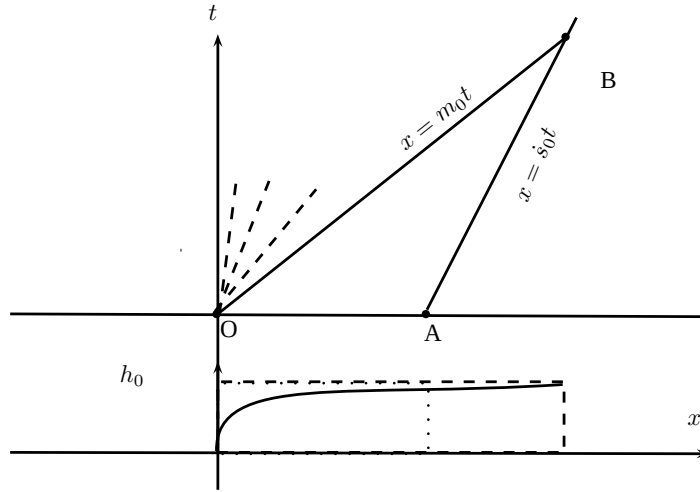


Figure 3.30 : rencontre des deux caractéristiques.

On vérifie par intégration que le volume est bien conservé.

Pour $t > t_B$, la hauteur à droite de $x = s(t)$ est toujours 0, mais à gauche la hauteur a diminué ; elle vaut d'après (3.80)

$$h_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{s}{t}}$$

d'où l'on déduit la nouvelle vitesse de choc

$$\begin{aligned} \dot{s}[[h]] &= [[f(h)]], \\ \dot{s}(0 - h_s) &= f(0) - f(h_s), \\ \dot{s} &= \frac{f(h_s)}{h_s} = \frac{\rho g h_s^2 \sin \theta}{3\mu} = \frac{1}{3} \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

En intégrant cette équation on trouve que la caractéristique associée au choc est

$$s(t) = x_B \left(\frac{t}{t_B} \right)^{1/3} = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{\rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{\mu} t \right)^{1/3} = A t^{1/3},$$

avec $A = \left(\frac{9}{4} \frac{\rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{\mu} \right)^{1/3}$. La solution aux temps longs ($t > t_B$) est donc

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq A t^{1/3}, \quad (3.87)$$

$$h(x, t) = 0 \text{ pour } x > s(t) = A t^{1/3} \text{ ou } x < 0. \quad (3.88)$$

Exercice 3.14 On cherche à résoudre les équations (3.74) de Saint Venant avec terme source et pour une rupture de barrage, qui s'écrivent



$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(uh) &= 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x h &= F(x, t), \end{aligned}$$

avec ici l'hypothèse $F = m$. On considère le problème aux valeurs initiales :

$$\mathbf{U}_L : (h_L, u_L) = (h_0, 0) \text{ et } \mathbf{U}_R : (h_R, u_R) = (0, 0).$$

Il s'agit d'un cas un peu particulier parce que l'état à droite est « vide ». Le vide¹⁴ n'ayant pas d'équation d'état, on peut considérer que la vitesse n'y est pas définie et donc que l'équation $u_R = 0$ est purement formelle. Montrer que la solution ne se compose que d'une courbe de 1-détente et que les ondes de choc ne sont possibles (en suivant pas à pas la stratégie définie plus haut).

↪ Réponse :

Étape 1 : détermination des courbes de Hugoniot Les conditions de saut permettent de déterminer l'état (u, h) à partir de l'état (u_*, h_*) :

$$u = u_* \mp (h - h_*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h}{h_* h}},$$

et la vitesse de l'onde de choc est donnée par :

$$\dot{s} = u_* \mp \sqrt{\frac{g}{2} (h_* + h) \frac{h_*}{h}}.$$

Le problème est de savoir quelle est la forme correspondante à la 1-onde de choc (resp. 2-onde de choc). Pour cela il faut rappeler que la courbe de choc doit être tangente au point (u_*, h_*) au vecteur propre à droite $\mathbf{w}_i$. Le tableau 3.2 donne les valeurs de ces vecteurs propres. La figure 3.31 montre les courbes de Hugoniot relatives aux 1- et 2-ondes de choc ainsi déterminées. Attention : la fonction $u = u_* + (h - h_*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_* + h}{h_* h}}$ correspond à une partie de la 1-onde de choc et à une autre partie de 2-onde de choc ; les deux parties se rejoignent au point A de coordonnées (u_*, h_*) . La figure 3.32 montre le réseau d'ondes de choc émanant du point A.

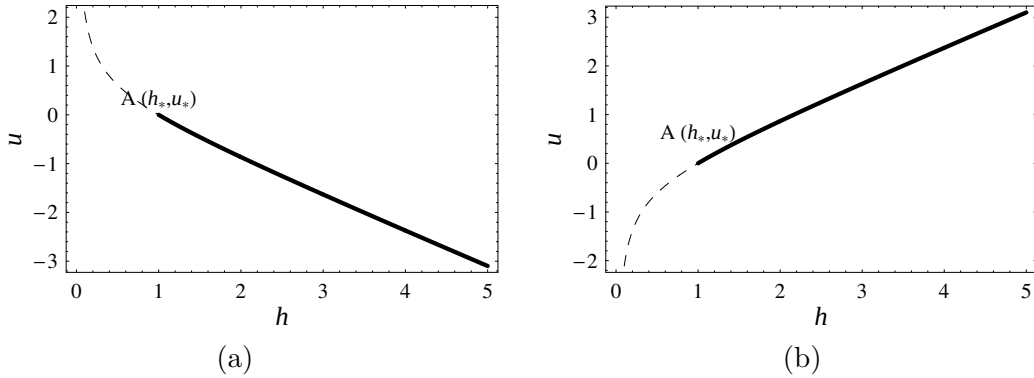


Figure 3.31 : (a) 1-onde de choc. (b) 2-onde de choc.

Lorsqu'on dispose des conditions initiales « normales », c'est-à-dire de deux points A (u_l, h_l) et B (u_r, h_r) avec des hauteurs non nulles, on se trouve dans l'une des trois situations suivantes :

1. B est sur l'une des courbes de choc (portions en gras). Les états intermédiaires entre A et B se calculent immédiatement.
2. B n'est pas sur l'une des courbes de Hugoniot. On introduit un point intermédiaire C (u_m, h_m) qui se trouve à l'intersection de deux courbes de choc [une 1- et une 2-onde de choc, portions en gras, comme sur la figure 3.33 (a)].
3. B n'est pas sur l'une des courbes de Hugoniot. On introduit un point intermédiaire C (u_m, h_m) , mais ce point ne se trouve pas sur des portions en gras des courbes de choc [voir exemple de la figure 3.33 (b)]. La solution ne vérifie pas la condition d'entropie et n'est donc pas physique.

Dans le cas présent, les courbes de choc ne sont pas définies pour des hauteurs s'annulant. Le point à droite ne peut être relié au point à gauche ou au point intermédiaire par une courbe de choc.

14. dry area.

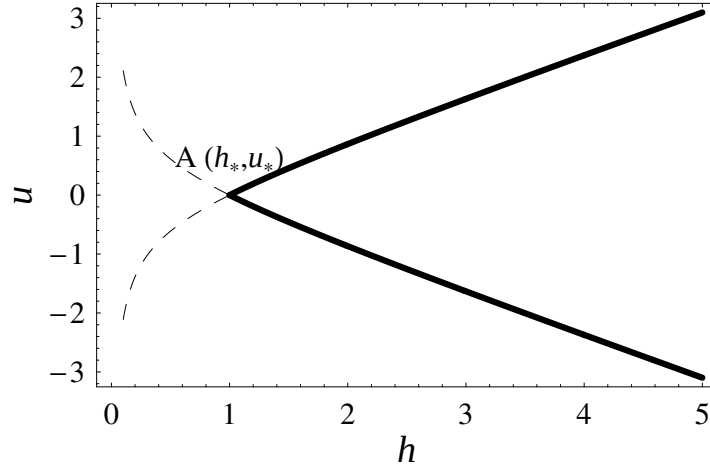
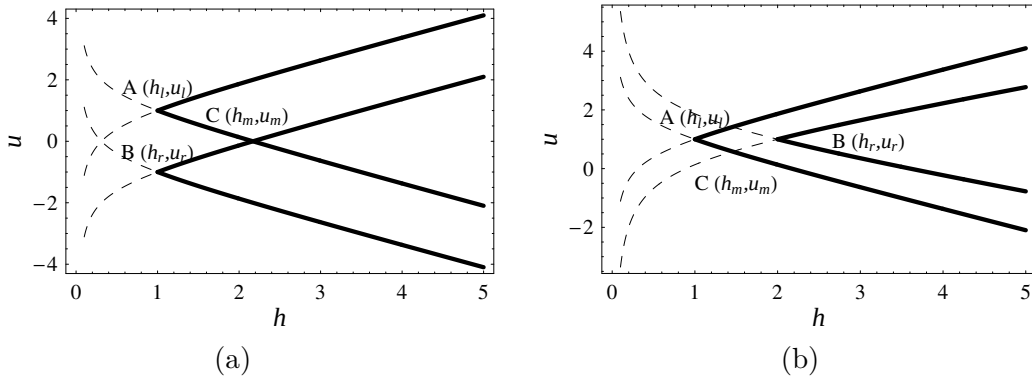
Figure 3.32 : onde de choc émanant d'un point A (u_* , h_*).

Figure 3.33 : (a) solution composée de deux ondes de choc. (b) solution composée d'ondes de choc, non physique.

Étape 2 : détermination des courbes de détente Les courbes de détente sont données par le lieu décrit par les points (u, h) à partir du point A de coordonnées (u_*, h_*) :

- 1-onde de détente au temps t : $u = 2\sqrt{g}(\sqrt{h_*} - \sqrt{h}) + u_* + mt$, avec $h < h_*$,
- 2-onde de détente au temps t : $u = 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_*}) + u_* + mt$, avec $h < h_*$.

Les courbes de détente sont translatées d'une quantité mt au cours du temps. Comme le montre la figure 3.35, le point A devient au bout d'un temps δt le point A'.

Dans le cas présent, la zone vide (appelée encore zone sèche) est à droite du barrage, l'onde de détente solution du problème est donc la 1-onde (ou r -onde) simple associée à la valeur propre $u - c$. On a donc $r = u + 2c - mt$ constant dans le cône de détente. La valeur de cette constante est $r = u_L + 2\sqrt{gh_L} = 2c_0$. Dans l'espace d'état $h-u$, le point L de coordonnées (h_L, u_L) est relié à un point intermédiaire M de coordonnées (h_*, u_*) . Ce point se trouvant au niveau du front, on a nécessairement $h_* = 0$; on peut calculer u_* en servant de l'invariance de $r - mt$: $u_* + 2\sqrt{gh_*} = u_L + 2\sqrt{gh_L}$ et donc $u_* = 2c_0$. Le cône de détente est donc encadré par les courbes caractéristiques C_s associées aux valeurs propres $\lambda = u - c$, avec donc ici λ dans l'intervalle : $u_L - c_L = -c_0 \leq \lambda \leq u_* - c_* = 2c_0$ à $t = 0$. Les courbes C_s s'écrivent :

$$\frac{dx_s}{dt} = u - c,$$

or $u + 2c - mt = 2c_0$, donc $u = 2(c_0 - c) + mt$. On sait aussi que $c = \sqrt{gh}$ est compris le long de la courbe de détente entre $-c_0$ et $2c_0$. Le « cône » de détente est donc balayée par des paraboles

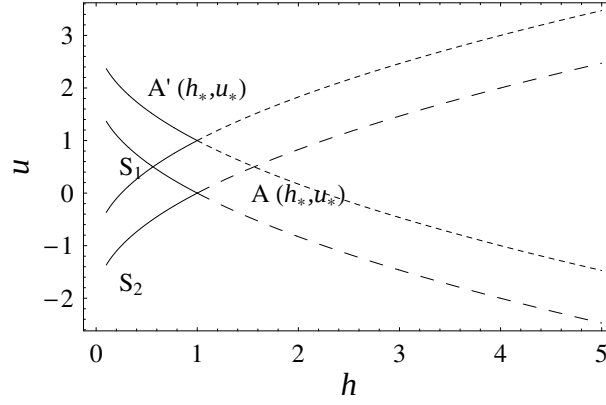


Figure 3.34 : Onde de détente émanant d'un point $A (u_*, h_*)$.

d'équation :

$$\frac{dx_s}{dt} = 2 \left(c_0 - \frac{3}{2}c \right) + mt,$$

avec $-c_0 \leq c \leq 2c_0$. Il existe donc deux paraboles limitant le cône :

$$P_1 : x_s(t) = -c_0 t + m \frac{t^2}{2} \text{ et } P_2 : x_s(t) = 2c_0 t + m \frac{t^2}{2}.$$

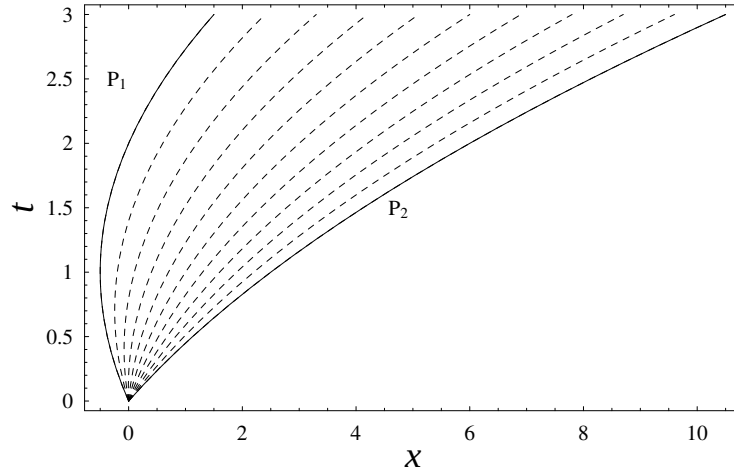


Figure 3.35 : « Cône » de détente encadré par P_1 et P_2 .

On en déduit que le solution de paraboles de la forme: $x = 2(c_0 + \frac{3}{2}c)t + mt^2/2$, on a $u = 2(c_0 - c) + mt$. La résolution du système donne u et h en fonction de x et t :

$$h = \frac{1}{9g} \left(2c_0 - \frac{x}{t} + m \frac{t}{2} \right)^2,$$

$$u = \frac{2}{3} \left(c_0 + \frac{x}{t} + mt \right).$$

Les figures 3.36 et 3.37 donnent l'allure des solutions pour $m = 0$ et $m > 0$.

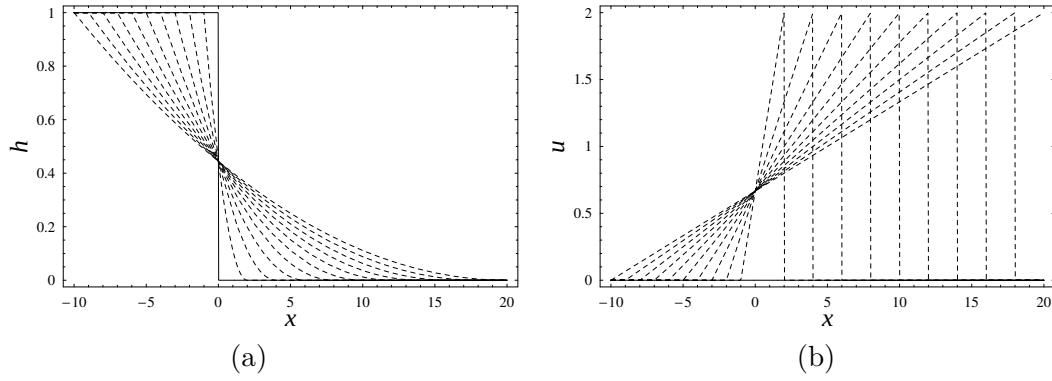


Figure 3.36 : Rupture de barrage sur fond plat ($m = 0$). (a) hauteur (b) vitesse.

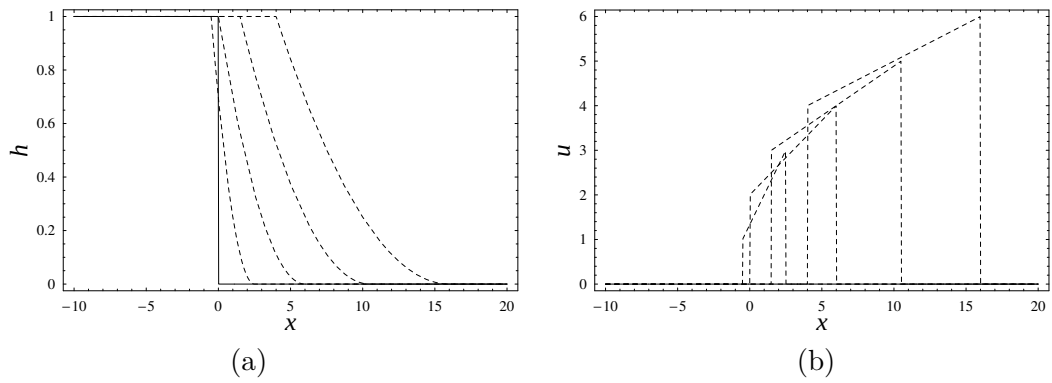


Figure 3.37 : Rupture de barrage sur fond incliné ($m > 0$). (a) hauteur (b) vitesse.

Méthodes numériques

LA PLUPART DES PROBLÈMES RENCONTRÉS aujourd'hui en hydraulique peuvent se résoudre à l'aide de codes numériques. Les dernières décennies ont vu une explosion de méthodes et d'outils numériques, qui d'un côté ont permis de résoudre efficacement un nombre croissant de problèmes d'ingénierie, mais d'un autre côté plongent l'ingénieur dans un abîme de perplexité quant au choix du bon outil.

L'accent dans ce chapitre va être mis sur des problèmes de propagation d'onde de crue ou bien de vagues. Sur le plan numérique, ce type de problèmes soulève plusieurs difficultés majeures telles que l'apparition de solutions discontinues (mascaret, ressaut hydraulique), l'existence de variations brutales des variables d'écoulement (vague, tsunami), la nécessité de travailler avec des fonds topographiques plus ou moins complexes. La résolution de ces problèmes nécessite donc des outils numériques spécifiques, que l'on va passer en revue ici. Le lecteur pourra aussi consulter des revues plus complètes consacrées à la résolution numériques des équations de Saint-Venant ([Toro, 2001](#); [Toro & Garcia-Navarro, 2007](#)).

Pour l'ingénieur, le choix est grand. C'est avec une vigilance particulière qu'il doit examiner différents points avant de se décider à utiliser un outil numérique

- quelles sont les équations considérées dans le modèle numérique? Sont-elles sous forme conservative ou non conservative? Le choix d'une formulation non conservative peut amener à des modèles plus simples, mais qui conduisent à des résultats incorrects si la solution devient discontinue (apparition d'un ressaut hydraulique par exemple). Dans certains cas (par exemple, équations de Saint-Venant couplées à l'équation d'Exner), il n'existe pas de formulation conservative ;
- faut-il utiliser un modèle unidimensionnel ou multidimensionnel? Un modèle unidimensionnel est plus simple à résoudre, mais il est peu précis (imaginons l'arrivée d'une crue dans le delta d'une rivière). Les modèles multidimensionnels sont en principe plus précis, mais sont plus complexes à résoudre numériquement et nécessitent une grande quantité d'information (topographie, conditions aux limites et initiales) et des temps de calcul parfois prohibitifs. Pour les problèmes multidimensionnels, il faut choisir une technique de maillage adaptée (maillage structuré ou non) ;
- quelle stratégie de calcul est employée pour résoudre ces équations? Pour les équations hyperboliques, on privilégie les méthodes aux volumes finis qui sont plus précises pour calculer des solutions éventuellement discontinues ;
- quel schéma numérique est utilisé pour discrétiser les équations? Les techniques les plus récentes font appel à des schémas de Godunov approché, d'ordre 2 ou supérieur ;
- à quel ordre les équations sont-elles discrétisées? Lorsqu'on utilise des méthodes aux volumes finis, les schémas d'ordre¹ 2 (et supérieur) sont plus précis que les schémas

1. Le plus souvent dans la littérature, l'ordre d'un schéma numérique est implicitement l'ordre auquel on

d'ordre 1 (où on approche par une fonction constante par morceaux), mais génèrent des oscillations importantes dans les zones à fort gradient, ce qui nécessite des étapes supplémentaires de correction de la solution (méthodes dites TVD pour *total variation diminishing*) ;

- comment sont traités les termes sources²? Un traitement trop approximatif des termes sources peut conduire à des erreurs importantes lorsqu'on calcule un régime stationnaire (régime pour lequel les variations temporelles disparaissent et où les termes sources contrebalancent les termes de gradient). De nos jours, on privilégie les schémas dits « bien équilibrés » (*well-balanced* en anglais) ;
- comment sont incorporées les conditions aux limites? En particulier, comment est géré le cas de « front sec », c'est-à-dire le lieu des points où la hauteur d'eau devient nulle lorsqu'il y a un déplacement d'eau (par exemple, rupture de barrage sur un lit sec)? Ce problème est délicat car les points où $h \rightarrow 0$ conduisent souvent à l'apparition d'instabilités numériques et des problèmes d'extrapolation (localisation précise du point où $h = 0$)?

discrétise le gradient spatial. Un ordre 1 signifie donc que les termes de gradient de la forme $\partial u \partial x$ sont calculés par des approximations de la forme $(u(x + \Delta x) - u(x)) / \Delta x$, qui correspond à un développement limité à l'ordre 1.

2. Pour les équations de Saint-Venant, les termes sources comprennent les termes de frottement et l'accélération due à la gravité.

4.1 Méthodes numériques

Il existe plusieurs stratégies de résolution numérique des équations aux dérivées partielles, dont les trois plus utilisées sont

- la *méthode aux différences finies* : les termes différentiels sont évalués à l'aide de différences finies (développement de Taylor) ;
- la *méthode aux volumes finis* : la plupart des équations de la mécanique traduisant la variation d'une grandeur sous l'effet de flux entrant ou sortant, il peut être plus avantageux d'écrire l'équation aux dérivées partielles sous une forme intégrée (sur un volume de contrôle) et de discrétiser l'équation résultante. Le principal avantage par rapport à la méthode aux différences finies est de pouvoir traiter des solutions qui peuvent devenir discontinues ;
- la *méthode aux éléments finis* : l'équation originale est intégrée sur un volume de contrôle, puis la solution numérique est recherchée sous la forme d'une décomposition dans une base de fonctions choisies pour leurs propriétés.

Outre la stratégie de résolution, il est important de savoir comment on discrétise le domaine de calcul. On peut choisir des maillages réguliers/ irréguliers, structurés/déstructurés, des maillages mobiles ou stationnaires, des maillages adaptatifs (c'est-à-dire des maillages dont la forme et le nombre de mailles peuvent varier dans l'espace et le temps pour gagner en précision et temps de calcul), maillages cartésiens/curvilignes.

Nous allons ici surtout détailler la méthode aux différences finies qui est la plus simple à mettre en œuvre. Nous dirons quelques mots sur les méthodes aux éléments finis et aux volumes finis, qui sont plus puissantes, mais également bien plus complexes.

4.1.1 Méthode aux différences finies

L'idée de base de la méthode aux différences finies est d'utiliser le développement en série de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \dots$$

pour discrétiser les équations différentielles. Par exemple, une dérivée d'ordre 1 peut s'évaluer à partir de la connaissance de f en x et $x+h$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(schéma décentré amont) ou bien encore en $x-h$ et x

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

(schéma décentré aval) ou bien encore en $x-h$ et $x+h$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

(schéma centré). On peut faire de même avec les termes différentiels d'ordre supérieur ; par exemple, la dérivée d'ordre 2 est évaluée

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

La façon dont on va écrire le schéma va conditionner la stabilité, la précision, et la vitesse de convergence. Nous allons voir deux schémas classiques qui peuvent être utilisés pour résoudre l'équation de diffusion de la chaleur :

- *schéma explicite* : c'est le schéma le plus simple, où l'on exprime que ce qui se passe au temps $t + \delta t$ ne dépend que du passé (au temps t). L'inconvénient est que le schéma est instable³ si δt est choisi trop grand ;
- *schéma implicite* : dans ce schéma, ce qui se passe au point x et au temps $t + \delta t$ dépend naturellement du passé immédiat dans le voisinage de x , mais également du voisinage de x au temps $t + \delta t$. Il faut donc résoudre un système d'équations linéaires pour déterminer ce qui se passe en tout x au temps $t + \delta t$. On gagne en stabilité grâce à cela.

♣ **Exemple.** – Considérons maintenant que l'on veuille résoudre l'équation de la chaleur sur le domaine $0 \leq x \leq 1$ et pour $t \geq 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

avec pour conditions initiales

$$T(x, 0) = 0,$$

et pour conditions aux limites

$$\begin{aligned} T(0, t) &= 1, \\ \partial_x T(1, t) + T(1, t) &= g(t). \end{aligned}$$

Ce problème représente, par exemple, la diffusion de température au sein d'un mur dont la paroi interne est à température constante, tandis que la paroi extérieure est soumise à une variation de température.

On note $T_{i,j}$ la valeur de T au point $x = j\Delta x$ ($0 \leq j \leq n$) et au temps $t = i\delta t$, avec Δx le pas d'espace et δt le pas de temps. Chaque contribution de l'équation de diffusion peut ainsi se discrétiser

$$\begin{aligned} \partial_t T|_{ij} &\approx \frac{T(x, t + \delta t) - T(x, t)}{\delta t} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta t}, \\ \partial_{xx} T|_{ij} &\approx \frac{T(x + \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

La forme discrétisée de l'équation de diffusion linéaire est donc

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + \frac{\delta t}{\Delta x^2} (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}).$$

Un tel schéma, où ce qui se passe au temps $i + 1$ est entièrement déterminé par ce qui se passe au temps i est dit *explicite* (voir figure 4.1).

Il reste maintenant à discrétiser les conditions aux limites. La limite à gauche du domaine impose que

$$T_{i,0} = 1,$$

tandis que la limite à la droite du domaine est approchée au premier ordre par

$$\frac{1}{\Delta x} (T_{i,n} - T_{i,n-1}) = g_i - T_{i,n} \Rightarrow T_{i,n} = \frac{T_{i,n-1} + \Delta x g_i}{1 + \Delta x},$$

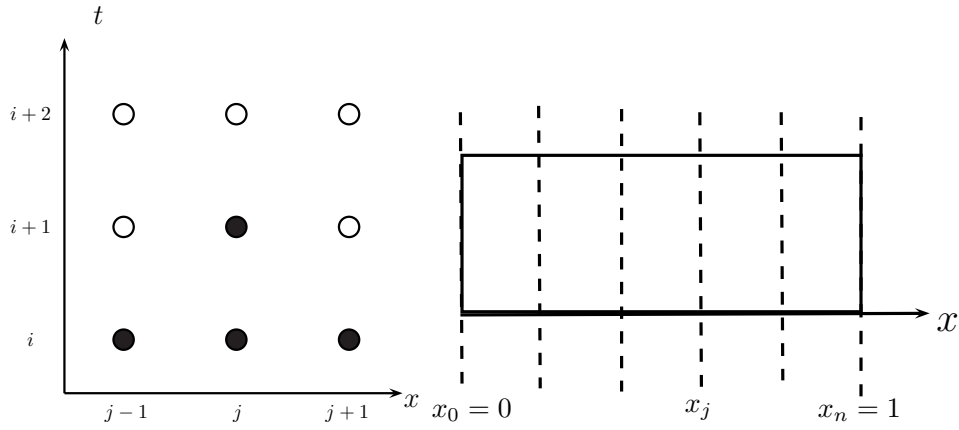


Figure 4.1 : à gauche, grille de calcul dans le plan $x - t$ pour un schéma implicite ; lorsqu'on veut calculer ce qui se passe au temps i , on se sert des valeurs trouvées au temps $i - 1$. À droite : découpage du mur en tronçons élémentaires.

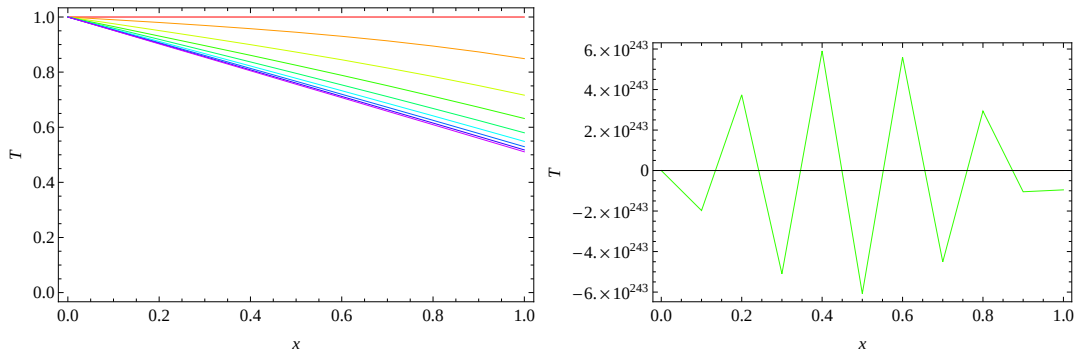


Figure 4.2 : variation $T(x,t)$ pour t allant de 0 à 10 avec un pas de 0,5 ; $g(t) = \exp(-t)$. À droite, on a pris $\Delta x = 0,1$ et $\delta t = 0,005$. À gauche, on a pris $\Delta x = 0,1$ et $\delta t = 0,02$: le schéma est instable.

où $g_i = g(i\delta t)$.

La figure 4.2 montre un exemple de résultat numérique lorsque $g(t) = \exp(-t)$; lorsque $t \rightarrow \infty$, la température extérieure tend vers 0 tandis que la température intérieure reste égale à 1 ; le profil de température devient alors stationnaire et tend vers une ligne droite (solution de $\partial_{xx}T = 0$) : $T = -x$.

Un handicap certain de la méthode explicite est que le pas de temps δt doit rester petit sinon le schéma devient instable. On peut montrer que l'on doit choisir

$$\delta t \leq \frac{1}{2} \Delta x^2$$

(la taille limite des incréments δt et Δx dépend de l'équation à résoudre et de ses conditions aux limites). Le graphique de droite de la figure 4.2 montre l'instabilité qui apparaît lorsque le pas de temps est choisi trop grand. Un autre problème peut survenir : si l'on choisit des incréments δt et Δx trop petits, on va être confronté à des problèmes d'erreur d'arrondi dans les calculs numériques. Ce problème dépend de la précision (8 bits, 16 bits, etc.) avec laquelle l'ordinateur travaille. Il faut donc choisir la taille de δt et Δx en favorisant un compromis entre stabilité et précision. $\square$

3. Un schéma est dit instable si la solution n'est pas bornée dans le temps. Une solution instable se met à osciller avec des valeurs de plus en plus fortes et/ou bien diverge de la solution physique.

♣ **Exemple.** – Une façon de contourner les problèmes surgissant avec les schémas explicites est d'employer un schéma de discrétisation différent ; c'est ce qui est fait dans un schéma *implicite* où la dérivée spatiale – discrétisée par un schéma centré au temps t – est discrétisée à l'aide d'une moyenne pondérée de l'approximation du comportement aux temps t et $t + \delta t$, toujours à l'aide d'un schéma centré. En d'autres termes, cela consiste à écrire

$$T|_{i+1,j} \approx \lambda \left(\frac{T_{i+1,j+1} - 2T_{i+1,j} + T_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta x^2} \right), \quad (4.1)$$

pour $1 \leq j \leq n - 1$ et $i \geq 1$. Les conditions aux limites imposent

$$T_{i,0} = 1 \text{ et } T_{i,n} = \frac{T_{i,n-1} + \Delta x g_i}{1 + \Delta x}.$$

En dehors des frontières du domaine, il faut donc 6 points pour discrétiser l'équation de diffusion au lieu de 4 pour un schéma explicite. Matriciellement on a :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{i+1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^i + \mathbf{C}^i \Rightarrow \mathbf{T}^{i+1} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^i + \mathbf{C}^i)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a' & b' & c' & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}^i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g_i \Delta x \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} T_{i,0} \\ T_{i,1} \\ T_{i,2} \\ T_{i,3} \\ \vdots \\ T_{i,n-2} \\ T_{i,n-1} \\ T_{i,n} \end{bmatrix},$$

$$a = -\lambda \frac{\delta t}{\Delta x^2}, \quad b = 1 + 2\lambda \frac{\delta t}{\Delta x^2}, \text{ et } c = -\lambda \frac{\delta t}{\Delta x^2},$$

$$a' = (1 - \lambda) \frac{\delta t}{\Delta x^2}, \quad b' = 1 - 2(1 - \lambda) \frac{\delta t}{\Delta x^2}, \text{ et } c' = (1 - \lambda) \frac{\delta t}{\Delta x^2}$$

La matrice $\mathbf{A}$ est une matrice tridiagonale (creuse) simple à inverser même lorsque sa dimension est grande. Lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$, on dit que le schéma est de *Crank-Nicolson*. Lorsque $\lambda = 0$, on retombe sur le schéma explicite vu précédemment. Lorsque $\lambda = 1$, on a un schéma qui est dit *totalelement implicite*. Une matrice peut s'inverser facilement, notamment à l'aide de l'*algorithme de Thomas*⁴.

4. Voir par exemple A. Quarteroni et al., Méthodes numériques pour le calcul scientifique, Springer, Paris 2006, pp. 92–93.

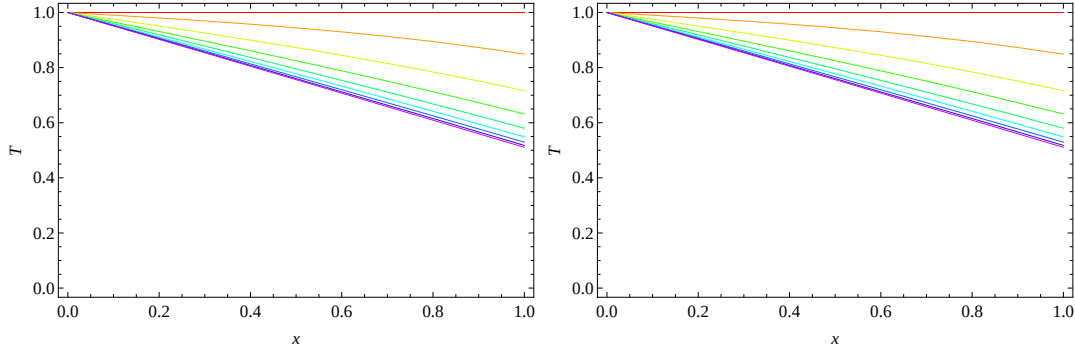


Figure 4.3 : variation $T(x,t)$ pour t allant de 0 à 10 avec un pas 0,5; $g(t) = \exp(-t)$. À gauche, on a pris $\Delta x = 0,1$ et $\delta t = 0,005$. À droite, on a pris $\Delta x = 0,1$ et $\delta t = 0,02$.

Le principal avantage du schéma implicite est que le schéma est stable. La figure 4.3 montre par exemple le résultat d'une simulation numérique obtenue soit avec $\delta t = \frac{1}{2}\Delta x^2$, soit $\delta t = 2\Delta x^2$. Si l'on compare avec la méthode explicite, on note que quel que soit le schéma utilisé pour résoudre le problème, les résultats sont assez proches (écart inférieur à 0,2 %), mais les schémas implicites sont plus stables et nécessitent moins de pas de temps, donc sont finalement plus rapides (malgré le coût lié à l'inversion des matrices). $\square$

4.1.2 Méthode aux volumes finis

Le problème de la méthode aux différences finies est que l'information qu'elle prend en compte n'est constituée que par les valeurs prises par la fonction u en différents points de l'espace, ce qui veut dire que l'information qui est située entre ces points de discrétisation est perdue (voir figure 4.4). La méthode aux volumes finis remédie à cela en considérant toute l'information, mais sous une forme moyennée, contenue entre deux nœuds.

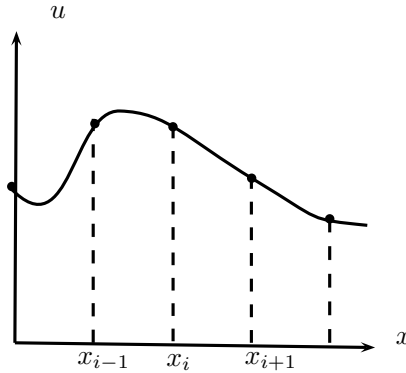


Figure 4.4 : discrétisation d'une fonction.

Pour cela, la méthode aux volumes finis se ramène à la formulation conservative de l'équation à résoudre, puis discrétise les flux pour déterminer l'évolution du système. Considérons par exemple une équation d'advection de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad (4.2)$$

soumise à des conditions initiales et/ou aux frontières. Intégrons cette équation (pour retrouver sa « forme conservative ») sur un volume de contrôle, qui en dimension 1 n'est qu'un

segment centré autour de $x_i = i\Delta x$, où Δx est la taille des cellules du maillage. Les bornes de ce segment sont $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$; ici l'indice $1/2$ nous dit que ces deux points sont à l'interface avec les cellules voisines centrées en x_{i-1} et x_{i+1} . Plutôt que de considérer comme auparavant la valeur prise par u en $x = x_i$, on introduit la valeur moyenne de u sur le segment $\mathcal{C}_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_i} u(x, t_n) dx.$$

L'avantage de cette discrétisation par rapport aux techniques de différence finie est que la méthode est conservative, c'est-à-dire les flux (exprimant des bilans de masse, de quantité de mouvement, etc.) sont correctement décrits.

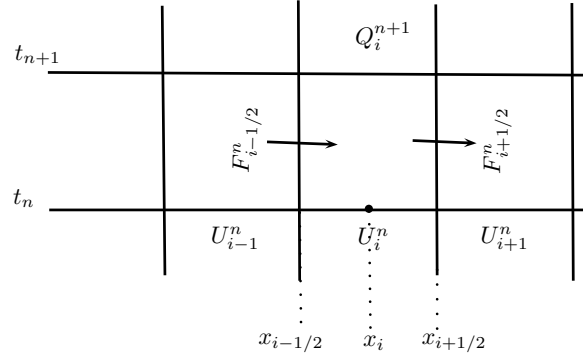


Figure 4.5 : plan $x - t$ et flux entre cellules.

Intégrons (4.2) sur le volume de contrôle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$. Commençons par intégrer par rapport à la variable d'espace x . Comme la grille est fixe on peut intervertir les opérations de différentiation :

$$\int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}_i} u dx.$$

On a également :

$$\int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial u}{\partial x} f(u) dx + [f(u)]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = 0.$$

L'intégration de (4.2) sur $\mathcal{C}_i$ est donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_i} u(x, t) dx = f(u(x_{i-1/2}, t)) - f(u(x_{i+1/2}, t)).$$

Une intégration par rapport au temps entre les instants t_n et t_{n+1} fournit l'équation

$$\int_{\mathcal{C}_i} u(x, t_{n+1}) dx - \int_{\mathcal{C}_i} u(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(u(x_{i-1/2}, t)) - f(u(x_{i+1/2}, t))) dt,$$

qui peut également s'écrire sous la forme

$$\boxed{U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)}, \quad (4.3)$$

où on a introduit le flux moyen (au cours du temps) :

$$F_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt,$$

avec $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Tout le jeu des méthodes aux volumes finis va être de trouver une approximation du flux moyen $F_{i+1/2}^n$ à l'interface entre deux cellules (voir fig. 4.5). Une des méthodes aux volumes finis est le schéma de Lax-Friedrichs, qui consiste à définir une fonction numérique de flux de la façon suivante :

$$F_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) = \frac{1}{2} (f(U_{i+1}^n) + f(U_i^n)) - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} (U_{i+1}^n - U_i^n).$$

Ce schéma s'apparente à une discrétisation numérique de l'équation d'advection non linéaire avec un terme diffusif

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

avec $\beta = \frac{1}{2} \Delta x^2 / \Delta t$. Le terme diffusif supplémentaire par rapport à l'équation originale (4.2) sert à stabiliser la solution numérique, la diffusion servant ici à atténuer toute instabilité qui apparaîtrait.

Nous verrons par la suite des schémas bien plus performants que le schéma de Lax-Friedrichs, qui introduit trop de diffusion numérique. Ces schémas exploitent les caractéristiques spécifiques des équations hyperboliques, en particulier la propagation de choc et de l'information.

4.2 Méthode de résolution numérique des équations hyperboliques

On s'intéresse à la résolution de problèmes hyperboliques sous la forme (4.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{B}. \quad (4.4)$$

4.2.1 Équation d'advection : schéma amont

L'équation hyperbolique la simple est le problème d'advection linéaire scalaire

$$\frac{\partial}{\partial x} u + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

où la quantité $u(x, t)$ est advectée à la vitesse constante a . On va ici considérer le cas $a > 0$. Les caractéristiques sont donc des droites $x = at + b$ dans le plan $x - t$, ce qui veut dire que le long de ces droites, la quantité u reste constante. Examinons une cellule centrée autour de x_i au temps t_n . Au temps ultérieur, l'information s'est propagée à la vitesse. Une partie de la cellule a donc reçu de l'information de la cellule amont centrée en x_{i-1} (flèches rouges continues sur la figure 4.6) tandis que l'autre partie n'a pas reçu d'information et garde donc la même valeur que précédemment au temps t_n (flèches rouges pointillées).

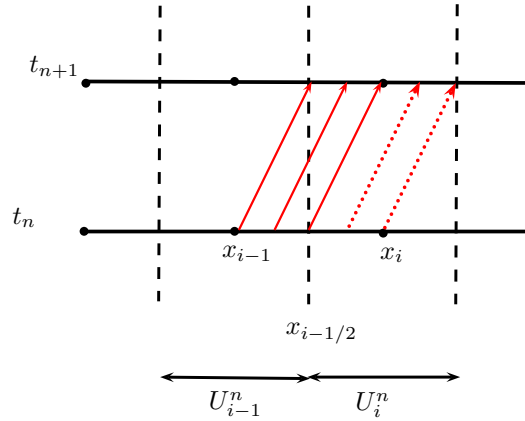


Figure 4.6 : problème d'advection linéaire.

Le flux qui passe à travers l'interface $x_{i-1/2}$ est donc

$$F_{i-1/2}^n = aU_{i-1}^n,$$

comme le montre la figure 4.6. Par définition, U_i^{n+1} est la moyenne de u le long de la cellule x_i au temps t_{n+1} . Le long de cette cellule, une partie $a\Delta t$ prend maintenant la valeur U_{i-1}^n tandis que l'autre partie de longueur $\Delta x - a\Delta t$ garde la valeur qu'elle avait auparavant U_i^n . La moyenne est donc :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} (U_{i-1}^n a\Delta t + (\Delta x - a\Delta t)U_i^n), \quad (4.6)$$

soit encore

$$U_i^{n+1} = U_{i-1}^n a \frac{\Delta t}{\Delta x} + \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) U_i^n,$$

ce qui peut également se mettre sous la forme

$$U_i^{n+1} = U_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} + (U_{i-1}^n - U_i^n).$$

C'est le *schéma amont au premier ordre*. Notons que la construction géométrique n'est possible que si l'on choisit un petit pas de temps tel que

$$0 \leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (4.7)$$

En effet, si cela n'est pas le cas, alors l'information qui arrive à la cellule centrée en x_i au temps t_{n+1} provient non seulement de la cellule x_{i-1} au temps t_n , mais également de cellules encore plus en amont comme le montre la figure 4.7. La condition exprimée dans les inégalités (4.7) s'appelle la condition de Courant-Friedrichs-Lewy du nom des mathématiciens qui l'ont énoncée pour la première fois. Elle est souvent abrégée sous le nom de **condition CFL**. Il s'agit d'une condition nécessaire de convergence de la solution numérique vers la bonne solution.

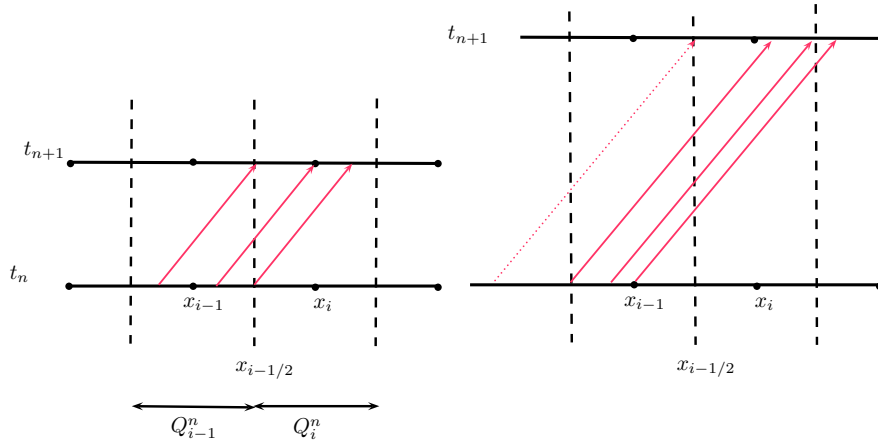


Figure 4.7 : si on prend un pas de temps qui satisfait la condition CFL, alors toute l'information reçue au temps t_{n+1} dans la cellule x_i provient de la cellule juste à l'amont. Si le pas de temps ne satisfait pas la condition CFL, alors une partie de l'information provient de cellules encore plus en amont (flèche en pointillé) et dans ce cas, le calcul de la valeur moyenne dans l'équation (4.6) n'est plus correct.

Une autre façon d'aborder le problème est de considérer qu'à chaque pas de temps, on doit résoudre un problème de Riemann, puisque la fonction u_i^n est constante par morceaux ; à chaque interface $x_{i-1/2}$, elle est susceptible de subir une discontinuité, qui se propage à la vitesse a et avec une amplitude $\mathcal{W}_{i-1/2} = U_i^n - U_{i-1}^n$. Sur un pas de temps Δt , la vague $\mathcal{W}$ s'est donc propagée sur une distance $a\Delta t$ et la partie de la cellule affectée par cette vague a subi une variation $-\mathcal{W}_{i-1/2}$. En recalculant la moyenne U_i^{n+1} , on a abouti à une expression similaire à (4.6) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (-\mathcal{W}_{i-1/2}).$$

Notons que si on a $a < 0$, la propagation se fait d'aval vers l'amont. Le flux se fait de la droite vers la gauche et on a :

$$F_{i-1/2}^n = aU_i^n.$$

Le schéma est alors aval

$$U_i^{n+1} = U_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1}^n - U_i^n) \text{ ou bien encore } U_i^{n+1} = U_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{W}_{i+1/2}.$$

Sur le plan numérique, les deux possibilités peuvent être synthétisées en introduisant un flux de la forme

$$F_{i-1/2}^n = a^- U_i^n + a^+ U_i^n,$$

avec

$$a^- = \min(a, 0) \text{ et } a^+ = \max(a, 0).$$

Cela permet d'écrire que la valeur de U_i^{n+1} varie en fonction des flux qui arrivent soit de la droite (vague à la vitesse a^-), soit de la gauche (vague à la vitesse a^+).

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (a^- \mathcal{W}_{i+1/2} + a^+ \mathcal{W}_{i-1/2}). \quad (4.8)$$

La force de cette formulation est qu'elle n'est pas propre à l'équation d'advection linéaire que l'on vient d'étudier et qu'elle peut se généraliser à un grand nombre de problèmes non linéaires. C'est le principe même de la méthode de Godunov.

4.2.2 Schéma de Godunov pour les systèmes linéaires

Schéma originel

Godunov⁵ a proposé à la fin des années 1950 un algorithme pour résoudre des systèmes d'équations hyperboliques linéaires. L'idée de base exploitée par Godunov est de (1) reconstruire une fonction constante par morceaux, (2) propager les discontinuités aux interfaces $x_{i-1/2}$, (3) moyenner les fonctions altérées par le passage des discontinuités ; c'est typiquement ce que nous avons fait au § 4.2.1. On répète la séquence d'opérations suivantes :

1. Reconstruction d'une fonction $\tilde{u}^n(x, t^n)$ en tout x du domaine de calcul et au temps t_n , à partir des valeurs moyennes sur les cellules (obtenues à l'étape 3 de moyenne au t_n). Le plus simple est de considérer des fonctions constantes par morceaux (schéma de Godunov du premier ordre) :

$$\tilde{U}(x, t_n) = U_i^n,$$

pour $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$. Cela permet de considérer qu'à chaque pas de temps et à chaque interface entre deux cellules, on résout un problème de Riemann. Il est naturellement possible d'envisager des formes plus complexes de reconstruction, par exemple en considérant des fonctions linéaires par morceaux. C'est ce qui est fait avec les méthodes dites à grande résolution (high-resolution methods).

2. Propagation en prenant comme condition initiale les valeurs $\tilde{U}^n(x, t^n)$. On peut par exemple employer la méthode décrite à l'équation (4.3). On déduit $U(x, t_{n+1})$:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n),$$

5. Sergei Konstantinovich Godunov (né en 1929) est un mathématicien russe. Membre de l'Académie des Sciences, il est également professeur à l'Institut de mathématiques Sobolev à Novosibirsk. Il a été l'un des grands pionniers qui ont révolutionné les méthodes de calcul numériques en proposant une méthode de calcul, qui porte aujourd'hui son nom, adaptée aux problèmes hyperboliques. À cette époque, la conquête spatiale et l'industrie aéronautique avaient donné naissance à des développements numériques intenses pour résoudre les équations d'Euler pour l'air considéré comme un fluide compressible ; le traitement des ondes de choc posait problème à toutes les méthodes classiques. L'avancée majeure permise par Godunov a été de proposer une méthode compatible avec la propagation de discontinuités.

avec le flux moyenné :

$$F_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i\pm 1/2}, t)) dt. \quad (4.9)$$

Ce flux peut se calculer facilement dans un problème de Riemann linéaire. Prenons l'exemple de la figure 4.10. À l'interface $x_{i-1/2}$, deux discontinuités se propagent aux vitesses λ_1 et λ_2 . Sur chacun des domaines (triangulaires) départagés par les caractéristiques $x = x_{i-1/2} + \lambda_i t$, la fonction u est constante⁶ et change de valeur au passage de l'une des deux caractéristiques. Donc, hormis dans le cas où $\lambda_i = 0$, l'interface $x_{i-1/2}$ garde une valeur constante entre les instants t_n et t_{n+1} et cette valeur est soit la valeur initiale à gauche U_{i-1}^n soit la valeur à droite U_i^n (respectivement U_i^n et U_{i+1}^n pour l'interface $x_{i+1/2}$). Il s'ensuit que

$$F_{i\pm 1/2}^n = f(u(x_{i\pm 1/2}, t)).$$

3. Moyenner les valeurs obtenues sur chacune des cellules du domaine de calcul :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \tilde{U}^n(x, t_{n+1}) dx.$$

On obtient alors le schéma de discrétisation déjà vu à l'équation (4.3) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \quad (4.10)$$

où on a introduit le flux moyen (au cours du temps) est :

$$F_{i\pm 1/2}^n = f(u(x_{i\pm 1/2}, t)).$$

Notons que dans l'équation (4.10), la valeur U_i^n est incrémentée d'une quantité qui est proportionnelle à la différence de flux de part et d'autre de la cellule, d'où le nom de « schéma à différence de flux » (*flux difference splitting* en anglais).

Variante : formulation en termes d'onde de discontinuité

LeVeque a proposé une formulation différente du schéma de Godunov, qui présente de nombreux avantages à la fois sur le plan de l'interprétation physique et du point de vue algorithmique (LeVeque, 2002). À l'étape n° 2, on a employé la méthode originale de Godunov, mais on peut également une formule de propagation comme la méthode utilisée pour l'équation d'advection linéaire (4.8). L'avantage est alors de fournir une méthode un peu plus générale (LeVeque, 2002, voir pp. 79–82). Si on examine l'exemple de la figure 4.10, on observe que l'onde $\mathcal{W}_{i-1/2}^2 = U_i^n - U_{i-1}^n$ va vers la droite (ici la cellule $\mathcal{W}_i$) et modifie donc la valeur de U_i . Au temps t_{n+1} , sur une distance $\lambda_2 \Delta t$, la valeur de u est modifiée d'une quantité $\mathcal{W}_{i-1/2}^2$.

La valeur moyenne de u est donc à son tour changée d'une quantité

$$-\lambda_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{W}_{i-1/2}^2,$$

on prendra garde au signe négatif (compte tenu de la définition de $\mathcal{W}_{i-1/2}$). L'effet de chaque onde est additif (le système étant linéaire) de telle sorte que la valeur réactualisée U_i^{n+1} est

6. On se reportera utilement au § 3.2.4 pour des rappels sur la construction des solutions au problème de Riemann linéaire.

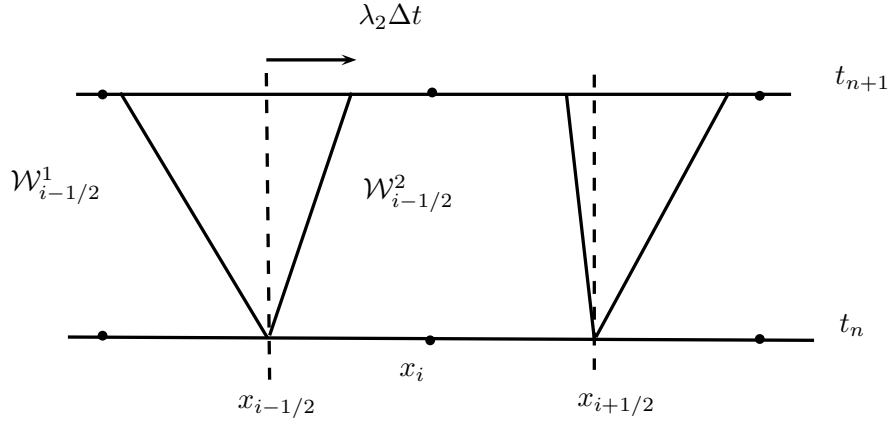


Figure 4.8 : pour un problème linéaire, la discontinuité initiale au temps t_n se propage selon deux caractéristiques (on prend ici arbitrairement $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$).

pour l'exemple de la figure 4.10 avec $n = 2$ ondes :

$$\begin{aligned}
 U_i^{n+1} &= U_i^n - \lambda_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{W}_{i-1/2}^2 - \lambda_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{W}_{i+1/2}^1, \\
 &= U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda_2 \mathcal{W}_{i-1/2}^2 + \lambda_1 \mathcal{W}_{i+1/2}^1 \right), \\
 &= U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \mathcal{W}_{i-1/2}^j + \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \mathcal{W}_{i+1/2}^j \right),
 \end{aligned}$$

où l'on a employé la notation

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda) \text{ et } \lambda^- = \min(0, \lambda).$$

La valeur U_i^{n+1} est donc actualisée en prenant en compte les ondes (allant de gauche à droite) issues de $x_{i-1/2}$ et celles (allant de droite à gauche) issues de $x_{i+1/2}$.

La formulation en termes d'ondes peut être synthétisée de la façon suivante quand on s'intéresse à des systèmes linéaires de n équations de la forme

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_x = 0.$$

Comme on l'a vu au § 3.2.4, les ondes de discontinuités sont définies par

$$\mathcal{W}^i = \alpha^i \mathbf{r}^i,$$

avec $\mathbf{r}^i$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur propre à droite de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ_i , α^i la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_\ell) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{U}_r - \mathbf{U}_\ell)$ où $\mathbf{U}_r$ et $\mathbf{U}_\ell$ sont les conditions initiales à droite et à gauche d'une interface $x_{i-1/2}$, $\mathbf{R}$ est la matrice dont les colonnes sont composées des vecteurs propres ($\mathbf{L}$ la matrice dont les lignes sont les vecteurs propres à gauche). On introduit les matrices

$$\mathbf{\Lambda}^+ = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^+ \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{\Lambda}^- = \begin{bmatrix} \lambda_1^- & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^- & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^- \end{bmatrix}$$

Cela revient à scinder la matrice diagonale des valeurs propres en une matrice dont les composantes ne comportent que les valeurs propres positives (les valeurs propres négatives sont remplacées par 0) et une matrice dont les composantes sont les valeurs propres négatives. On peut écrire

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^+ \cdot \mathbf{R}^{-1} \text{ et } \mathbf{A}^- = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^- \cdot \mathbf{R}^{-1}. \quad (4.11)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \mathcal{W}_{i-1/2}^j + \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \mathcal{W}_{i+1/2}^j \right), \\ &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \alpha_{i-1/2}^j \mathbf{r}^j + \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \alpha_{i+1/2}^j \mathbf{r}^j \right), \\ &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i-1/2} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i+1/2} \right), \\ &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^+ \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n) + \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda}^- \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n) \right), \\ &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n + \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n \right), \end{aligned}$$

ce qui permet d'aboutir à un schéma numérique relativement simple pour calculer $\mathbf{U}_i^{n+1}$:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n + \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n \right), \quad (4.12)$$

avec $\mathbf{A}^+$ et $\mathbf{A}^-$ définis par (4.11) ou bien encore par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \alpha_{i-1/2}^j \mathbf{r}^j, \\ \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \alpha_{i+1/2}^j \mathbf{r}^j. \end{aligned}$$

4.2.3 Schéma de Godunov pour les équations scalaires non linéaires

Ce que nous avons dit précédemment pour les équations linéaires se généralise sans problème aux équations non linéaires. Le schéma de discrétisation d'une équation de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,$$

par la méthode des volumes finis est toujours

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right)$$

(voir équation (4.10)). On a vu avec l'équation (4.9) que $F_{i\pm 1/2}^n$ est le flux moyen

$$F_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i\pm 1/2}, t)) dt.$$

et qu'il prenait la valeur

$$F_{i\pm 1/2}^n = f(u(x_{i\pm 1/2}, t))$$

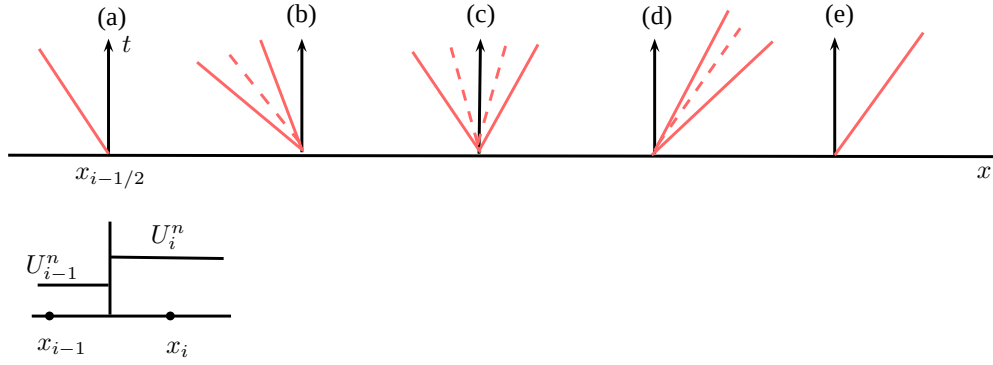


Figure 4.9 : solutions possibles au problème de Riemann pour une équation hyperbolique scalaire non linéaire. (a) choc à gauche avec $u(x_{i-1/2}, t) = U_i^n$, (b) onde de détente à gauche avec $u(x_{i-1/2}, t) = U_i^n$, (c) onde de détente transsonique avec $u(x_{i-1/2}, t) = u_s$, (d) onde de détente à droite avec $u(x_{i-1/2}, t) = U_{i-1}^n$, (e) onde de choc à droite avec $u(x_{i-1/2}, t) = U_{i-1}^n$.

où $u(x_{i\pm 1/2}, t)$ est la valeur de u à l'interface $x_{i\pm 1/2}$ car u était constant le long de la caractéristique $x = x_{i\pm 1/2}$.

Comme le résume la figure 4.9, dans un problème de Riemann, u reste constant dans des secteurs délimités par des ondes de détente ou des ondes de choc. Dans tous les cas sauf le cas (c), la valeur $u(x_{i\pm 1/2}, t)$ est soit U_{i-1}^n , soit U_i^n selon que l'onde se déplace vers la droite ou vers la gauche. Pour le cas (c), l'interface $x_{i\pm 1/2}$ se trouve dans l'éventail des caractéristiques $x = x_{i\pm 1/2} + \lambda t$ de l'onde de détente, donc $u(x_{i\pm 1/2}, t)$ prend une valeur comprise entre U_{i-1}^n et U_i^n . Comme cette interface correspond à une caractéristique verticale (vitesse de propagation nulle, soit encore $\lambda = 0$), la valeur u_s prise par u est celle qui correspond à une vitesse caractéristique nulle

$$f'(u_s) = 0.$$

Un tel point s'appelle *point de stagnation* ou point sonique. L'onde de détente correspondante [cas (c) sur la figure 4.9] est appelée *onde transsonique* car dans le cas d'un gaz, cette onde correspond au passage d'une vitesse subsonique à une vitesse supersonique. Dans le cas d'un flux convexe ($f'' > 0$), on peut synthétiser les valeurs prises par le flux moyen de la façon suivante

$$F_{i-1/2}^n = \begin{cases} f(U_{i-1}^n) & \text{si } U_{i-1}^n > u_s \text{ et } \dot{s} > 0, \\ f(U_i^n) & \text{si } U_{i-1}^n < u_s \text{ et } \dot{s} < 0, \\ f(u_s) & \text{si } U_{i-1}^n < u_s < U_i^n, \end{cases} \quad (4.13)$$

avec

$$\dot{s} = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{f(U_i^n) - f(U_{i-1}^n)}{U_i^n - U_{i-1}^n},$$

la vitesse de choc.

Il s'ensuit que l'on peut construire un schéma de résolution exact du problème de Riemann pour le schéma de Godunov. On discrétise l'équation selon l'équation (4.10), avec la fonction de flux définie par l'équation (4.9). Ce flux prend l'une des valeurs données par l'équation (4.13). Par itérations successives, on peut donc construire la solution à tout temps. Le problème avec cette façon de faire est que si le schéma est précis, il est également coûteux en temps de calcul ; en pratique, il est souvent plus intéressant d'utiliser un schéma approché (voir § 4.2.5).

4.2.4 Schéma de Godunov pour les systèmes d'équations non linéaires

Tout ce qui a été décrit au § 4.1.2 pour les équations scalaires peut être reproduit pour les systèmes d'équations. Notamment le schéma de volumes finis donné par l'équation (4.3) se généralise aux systèmes d'équations sans difficulté particulière. Quand on résout un système d'équation hyperboliques homogènes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad (4.14)$$

on obtient un schéma conservatif en intégrant sur une maille $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$. On aboutit à

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n), \quad (4.15)$$

avec

$$\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t) dx \text{ et } \mathbf{F}_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i\pm 1/2}, t)) dt.$$

À chaque pas de temps et pour chaque nœud de la grille (voir figure 4.10), on est amené à résoudre problème de Riemann. L'incrément de temps Δt est choisi de telle sorte que les ondes solutions de chaque problème de Riemann ne se croisent pas. Donc si s_{max} désigne la vitesse caractéristique maximale pour tous les nœuds ($s_{max} = \max_i \max_k |\lambda_{i-1/2}^k|$), alors la condition de non-croisement des ondes (appelée « condition de Courant ») est

$$\frac{s_{max} \Delta t}{\Delta x} < 1. \quad (4.16)$$

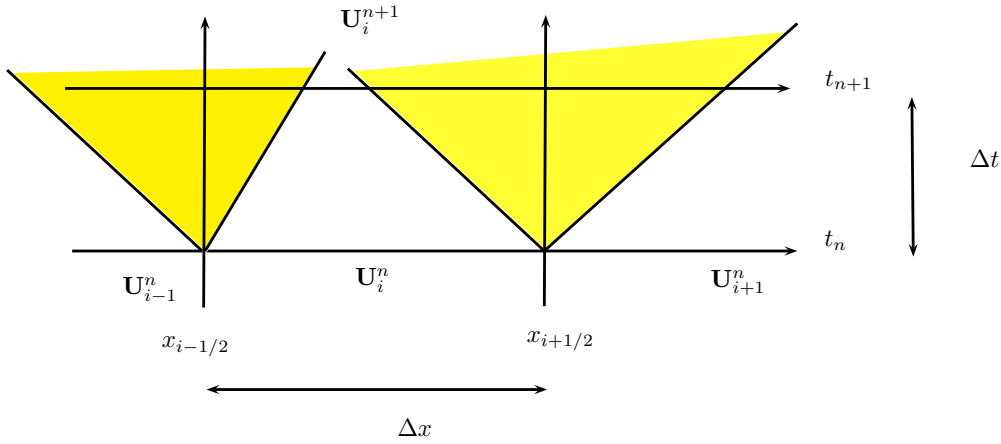


Figure 4.10 : grille de calcul servant dans la discrétisation de l'équation (4.14).

Comme la solution au problème de Riemann est composée d'ondes de choc ou de détente, dont les caractéristiques sont des droites émanant/rayonnant depuis l'interface $x_{i\pm 1/2}$, on déduit que

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i\pm 1/2}, t)) dt = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i\pm 1/2}^n),$$

avec $\mathbf{U}_{i\pm 1/2}^n$ la valeur par $\mathbf{u}$ le long de l'interface $x_{i\pm 1/2}$.

À la place de la formulation en termes de différence de flux de l'équation (4.15), on peut préférer la formulation en termes de propagation, qui n'est que la généralisation de l'équation (4.12)

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n + \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n), \quad (4.17)$$

avec $\mathbf{A}^+$ et $\mathbf{A}^-$ définis par (4.11) ou bien encore par :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2}^n &= \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1/2}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^+ \alpha_{i-1/2}^j \mathbf{r}^j, \\ \mathbf{A}^- \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n &= \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+1/2}^n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^- \alpha_{i+1/2}^j \mathbf{r}^j.\end{aligned}$$

4.2.5 Schéma de Godunov approché

Quoiqu'en théorie, la méthode de Godunov s'applique à toute équation hyperbolique, elle est en pratique très coûteuse en temps de calcul puisqu'à chaque itération et à chaque pas d'espace il faut résoudre un problème de Riemann. De plus, seule une partie de la solution au problème de Riemann est exploitée et l'information doit également être moyennée à chaque pas de temps. Il est donc plus astucieux d'utiliser des solveurs de Riemann approchés, qui ne calculent que l'information dont on a réellement besoin. L'un des solveurs approchés les plus connus est le solveur de Roe. Ce solveur pose toutefois des problèmes en hydraulique car il peut générer des hauteurs d'eau négatives et on lui préfère souvent des solveurs non linéaires comme le solveur HLL ([Toro & Garcia-Navarro, 2007](#)).

Solveur de Roe

L'idée de [Roe \(1981\)](#) est de remplacer un problème non linéaire de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad (4.18)$$

en un problème linéarisé simplifié

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (4.19)$$

lorsqu'on résout un problème de Riemann, c'est-à-dire un problème aux valeurs initiales

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_\ell \text{ pour } -\infty < x < 0 \text{ et } \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_r \text{ pour } 0 < x < \infty.$$

La fonction $\mathbf{f}$ est telle que la matrice jacobienne associée $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u})$ possède n valeurs propres distinctes et réelles notées $\lambda_1(\mathbf{u})$ (problème strictement hyperbolique). La question est de savoir comme passer de la matrice jacobienne $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ à la matrice constante $\tilde{\mathbf{A}}$ (les composantes de cette matrice ne dépendent que des valeurs initiales $\mathbf{u}_\ell$ et $\mathbf{u}_r$).

La matrice approchée doit vérifier un certain nombre de propriétés pour qu'une telle substitution soit possible :

1. la matrice doit être diagonalisable et posséder n valeurs propres réelles distinctes (pour que le problème soit toujours strictement hyperbolique) ;
2. une condition de consistance avec l'équation originale impose que pour tout vecteur $\bar{\mathbf{u}}$

$$\lim_{\mathbf{u}_\ell, \mathbf{u}_r \rightarrow \bar{\mathbf{u}}} \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}}) ;$$

3. pour tout couple $(\mathbf{u}_\ell, \mathbf{u}_r)$, on a

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r), \quad (4.20)$$

ce qui veut dire que si la condition de choc est bien respectée. En effet, si $(\mathbf{u}_\ell, \mathbf{u}_r)$ satisfont une condition de Rankine-Hugoniot (ils sont tous deux situés sur une courbe de choc, voir § 3.2.5), alors on a d'après la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) = \dot{s}(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r),$$

avec $\dot{s}$ la vitesse de l'onde de choc, donc on a : $\tilde{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r) = \dot{s}(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r)$, ce qui montre que la relation de choc est également vérifiée dans le cas linéarisé. Notons au passage que s'il existe plusieurs façons de linéariser le problème initial, le respect de la condition de choc conduit à écarter beaucoup de prétendants.

La principale difficulté dans la détermination des matrices $\tilde{\mathbf{A}}$ réside donc dans la propriété (3). En théorie, on peut construire de telles matrices en considérant une droite reliant $\mathbf{u}_\ell$ à $\mathbf{u}_r$ et en intégrant $d\mathbf{F}$ le long de ce chemin ; la figure montre un tel chemin (ligne droite) en dimension $n = 2$. La position de tout point sur cette droite peut être décrite à l'aide de l'équation paramétrique

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_\ell + \xi(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell), \quad (4.21)$$

avec $0 \leq \xi \leq 1$; cela implique $d\mathbf{u} = d\xi(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell)$. Si on intègre $\mathbf{F}$ le long de chemin on a

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) &= \int_0^1 \frac{d\mathbf{f}}{d\xi} d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell) d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{A} d\xi \cdot (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell), \end{aligned}$$

ce qui implique, après comparaison avec la propriété (3) ci-dessus, qu'il nous faut définir la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ comme

$$\tilde{\mathbf{A}} = \int_0^1 \mathbf{A} d\xi,$$

c'est-à-dire la valeur moyenne de $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ sur un chemin reliant $\mathbf{u}_\ell$ à $\mathbf{u}_r$. Le problème est d'arriver à obtenir un résultat analytique pour cette intégrale. Un autre problème est que rien ne garantit que la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ ainsi définie respecte la condition (1) ci-dessus. Une solution astucieuse pour contourner cette difficulté est due à [Roe \(1981\)](#).

Plutôt que d'intégrer $d\mathbf{F}$ le long de la droite (4.21) dans le plan $\mathbf{u}$, on fait un changement de variable $\mathbf{z} = g(\mathbf{u})$, ce qui revient à intégrer le long d'une droite dans le plan $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z}(\xi) = \mathbf{z}_\ell + \xi(\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_\ell), \quad (4.22)$$

avec $\mathbf{z}_\ell = g(\mathbf{u}_\ell)$ et $\mathbf{z}_r = g(\mathbf{u}_r)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) &= \int_0^1 \frac{d\mathbf{f}}{d\xi}(\mathbf{z}(\xi)) d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{z}}{d\xi} d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{C} d\xi \cdot (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_\ell), \end{aligned}$$

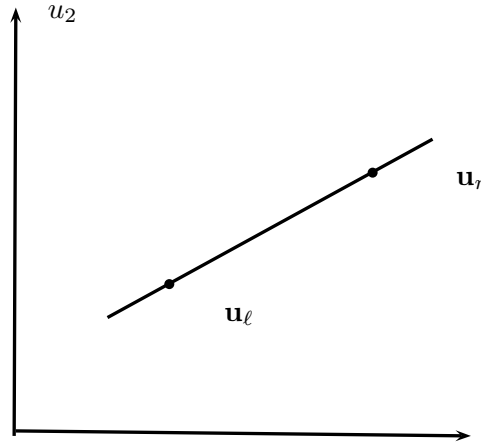


Figure 4.11 : chemin entre $\mathbf{u}_\ell$ à $\mathbf{u}_r$ dans le plan $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$.

avec $\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{f}$. Sur le même chemin (4.22), on intègre du

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell &= \int_0^1 \frac{d\mathbf{u}}{d\xi}(\mathbf{z}(\xi)) d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{z}}{d\xi} d\xi, \\ &= \int_0^1 \mathbf{B} d\xi \cdot (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_\ell), \end{aligned}$$

avec $\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{u}$. L'équation implique qu'on a la relation

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{-1}, \quad (4.23)$$

avec $\bar{\mathbf{C}}$ et $\bar{\mathbf{B}}$ les intégrales de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{B}$ sur le chemin (4.22). Roe (1981) a montré que pour plusieurs systèmes hyperboliques, dont les équations d'Euler et les équations de Saint-Venant, il est possible de contourner cette dernière difficulté en effectuant un changement de variable de la forme

$$\mathbf{z} = g(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{h}} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{h\bar{u}} \end{bmatrix}.$$

L'exemple suivant permet d'illustrer l'application de la méthode de Roe dans le cas des équations de Saint-Venant. Dans la plupart des cas, la méthode de Roe donne de bons résultats. Toutefois, dans certains cas, la méthode peut fournir des résultats incorrects car elle peut générer des hauteurs d'eau négatives ou bien fournir des valeurs erronées (notamment parce que toutes les solutions au problème de Riemann, y compris les ondes de détente, sont discrétisées sous forme d'onde de choc). Il faut alors ajouter des correctifs appelés « correction d'entropie » (*entropy fix*) (voir LeVeque, 2002, pp. 323–327).

♣ **Exemple.** – Prenons l'exemple des équations de Saint-Venant, on a :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ \bar{u}h \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gu_1 - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & 2\frac{u_2}{u_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - \bar{u}^2 & 2\bar{u} \end{pmatrix}$$

À titre d'exercice, on peut vérifier que si l'on calcule $\tilde{\mathbf{A}} = \int_0^1 \mathbf{A} d\xi$ le long du chemin (4.21), on aboutit à une matrice dont les composantes sont des fonctions rationnelles de h et $\bar{u}$. Avec

le changement de variables de Roe, on aboutit à des matrices dont les composantes sont des formes polynômiales simples. Après un peu de calcul, on trouve

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2\bar{z}_1 & 0 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & z_1 \\ 2gz_1\bar{h} & 2\bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

avec $\bar{z}_i = (z_{\ell, i} + z_{r, i})/2$ et $\bar{h} = (h_{\ell} + h_r)/2$. On a donc finalement d'après l'équation (4.23)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\bar{h} - \hat{u}^2 & 2\hat{u} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

avec

$$\hat{u} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\sqrt{h_{\ell}}u_{\ell} + \sqrt{h_r}u_r}{\sqrt{h_{\ell}} + \sqrt{h_r}}.$$

On note tout de suite que l'on a

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_{\ell}, \mathbf{u}_r) = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}}) \text{ avec } \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{h} \\ \hat{u}\bar{h} \end{pmatrix},$$

ce qui permet de montrer que la matrice de Roe (4.24) vérifie bien les propriétés (1) à (3).

Il est à partir de là possible de construire un schéma numérique approché en se servant de la méthode de Godunov (4.12). Pour cela, il faut calculer les valeurs propres, les vecteurs propres à droite, et les coefficients α^i . On a :

$$\lambda_1 = \hat{u} - \hat{c} \text{ et } \lambda_2 = \hat{u} + \hat{c},$$

avec $\hat{c} = \sqrt{g\bar{h}}$. On a

$$\mathbf{r}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{r}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} + \hat{c} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients α^i sont donnés par

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n) \text{ avec } \mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{2\hat{c}} \begin{pmatrix} \hat{u} + \hat{c} & -1 \\ -\hat{u} + \hat{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

Le schéma de Godunov (4.12) est donc

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_j^+ \alpha_{i-1/2}^j \mathbf{r}^j + \sum_{j=1}^2 \lambda_j^- \alpha_{i+1/2}^j \mathbf{r}^j \right)$$

avec toujours $\lambda^+ = \max(0, \lambda)$ et $\lambda^- = \min(0, \lambda)$. $\square$

Solveur de Harten, Lax, et van Leer

Le solveur HLL a été proposé par [Harten et al. \(1983\)](#). Il permet de contourner certaines lacunes du solveur de Roe (telles que la violation d'entropie et l'apparition de hauteur négative). L'idée fondamentale est de simplifier le problème de Riemann (4.18) en ne sélectionnant que les ondes qui ont la plus grande et la plus petite vitesse. Pour un système de $n = 2$ équations hyperboliques, il n'y a pas de perte d'information, mais pour $n > 2$ équations, on

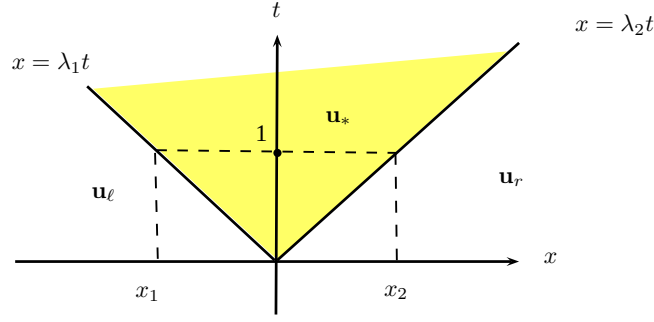


Figure 4.12 : pour le schéma HLL, toute l'information comprise entre les deux caractéristiques $x = \lambda_1 t$ et $x = \lambda_2 t$ est remplacée par un état constant $\mathbf{u}_*$ (fonction de $\mathbf{u}_\ell$ et $\mathbf{u}_r$).

perd totalement l'information véhiculée par les $n - 2$ ondes dont la vitesse est intermédiaire. La solution est composée de trois états constants (voir figure 4.12) :

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_\ell & \text{si } x/t < \lambda_1, \\ \mathbf{u}_* & \text{si } \lambda_1 \leq x/t \leq \lambda_2, \\ \mathbf{u}_r & \text{si } \lambda_2 < x/t, \end{cases} \quad (4.25)$$

Pour trouver $\mathbf{u}_*$, on va intégrer l'équation (4.18) sur le volume $[x_1, x_2] \times [0, 1]$, avec ici $x_1 = \lambda_1$ et $x_2 = \lambda_2$ puisque $t = 1$ (voir fig. 4.12). On a

$$\int_0^1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt dx + \int_0^1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) dt dx = 0,$$

soit encore

$$\int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{u}(x, 1) - \mathbf{u}(x, 0)) dx = - \int_0^1 (\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell)) dt,$$

ce qui permet d'aboutir à la relation suivante en tenant compte de la solution *ad hoc* (4.25):

$$\mathbf{u}_*(\lambda_2 - \lambda_1) - (\lambda_2 \mathbf{u}_r - \lambda_1 \mathbf{u}_\ell) = -\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell).$$

On en déduit

$$\mathbf{u}_* = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \lambda_2 \mathbf{u}_r + \lambda_1 \mathbf{u}_\ell}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (4.26)$$

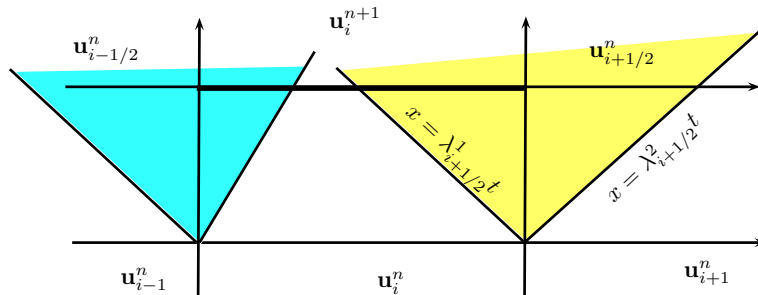


Figure 4.13 : principe de résolution du schéma HLL.

Le schéma numérique est donné par l'équation (4.15) :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n),$$

On prendra garde que $\mathbf{F}_{i-1/2}^n \neq \mathbf{f}(\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n)$ car $\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n$ donnée par (4.26) est une valeur moyennant l'information sur tout un domaine autour de l'interface $x_{i-1/2}$ et non la valeur particulière prise par $\mathbf{u}$ le long de l'interface $x_{i-1/2}$. Pour déterminer $\mathbf{F}_{i-1/2}^n$ dans le cas où $\lambda_{i-1/2}^1 \leq 0 \leq \lambda_{i-1/2}^2$ (cela correspond au cas reporté sur la figure 4.13 où l'interface $x_{i-1/2}$ est comprise entre deux des caractéristiques extrêmes), on peut soit intégrer sur un volume de contrôle s'appuyant sur l'interface (par exemple $[x_{i-1/2}, x_{i-1/2} + \lambda_{i-1/2}^2 \Delta t] \times [t_n, t_{n+1}]$), soit se servir de la relation de Rankine-Hugoniot pour obtenir

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \lambda_{i-1/2}^2 (\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n - \mathbf{U}_i^n) \quad (4.27)$$

avec $\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n$ donnée par (4.26) en posant $\mathbf{u}_r = \mathbf{U}_i^n$ et $\mathbf{u}_\ell = \mathbf{U}_{i-1}^n$. Ce flux est également égal à

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n) + \lambda_{i-1/2}^1 (\mathbf{U}_{*,i-1/2}^n - \mathbf{U}_{i-1}^n). \quad (4.28)$$

Dans le cas où $\lambda_{i-1/2}^1 \geq 0$, les ondes extrêmes se propagent toutes deux vers la droite et donc $\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n)$. Dans le cas où $\lambda_{i-1/2}^2 \leq 0$, les ondes extrêmes se propagent toutes deux vers la gauche et donc $\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^n)$. On peut donc synthétiser tout cela à travers l'équation

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n) & \text{si } \lambda_{i-1/2}^1 \geq 0, \\ \frac{\lambda_{i-1/2}^2 \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}^n) - \lambda_{i-1/2}^1 \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^n) + \lambda_{i-1/2}^2 \lambda_{i-1/2}^1 (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n)}{\lambda_{i-1/2}^2 - \lambda_{i-1/2}^1} & \text{si } \lambda_{i-1/2}^1 \leq 0 \leq \lambda_{i-1/2}^2, \\ \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^n) & \text{si } \lambda_{i-1/2}^2 \leq 0, \end{cases} \quad (4.29)$$

Le schéma HLL est plus performant que le schéma de Roe dans bien des cas, mais pour les systèmes d'ordre supérieur à 2, ignorer une partie de l'information peut conduire à des erreurs significatives. Plusieurs approches ont été développées pour limiter le développement de ces erreurs (voir [Toro, 1997](#), chap. 10).

4.2.6 Traitement des termes sources

On s'intéresse au problème hyperbolique avec un terme source

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad (4.30)$$

où $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ est appelé « terme source » ; on suppose qu'il n'est fonction que de $\mathbf{u}$, mais non de ses dérivées. Une stratégie de résolution classique est appelée « étape fractionnaire » (*fractional step* en anglais) ou « séparation des opérateurs » (*operator splitting*). La méthode consiste tout d'abord à résoudre l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0,$$

par une méthode aux volumes finis, puis de résoudre une équation ordinaire

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{S}(\mathbf{u})$$

4.2.7 Schémas d'ordre 2

Si en principe le passage d'un schéma de Godunov d'ordre 1 à un schéma d'ordre 2 est possible, sa mise en pratique est délicate car la solution numérique développe des oscillations importantes dans les zones à fort gradient spatial (un phénomène appelé parfois phénomène de Gibbs). Il faut donc développer des méthodes spécifiques qui limitent l'amplitude de ces oscillations.

Méthode de Lax-Wendroff

Considérons l'équation d'advection suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

avec a une constante. Effectuons un développement limité à l'ordre 2

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + o((\Delta t)^2),$$

or comme on a par différenciation de l'équation d'advection

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Après substitution, on déduit

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - a \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

En discrétisant les gradients spatiaux par des différences finies centrées (voir § 4.1.1), on obtient le schéma suivant, appelé « schéma de Lax-Wendroff » :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} a (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 a^2 (Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n).$$

On peut reformuler ce schéma pour le mettre sous la forme d'une différence de flux comme pour la méthode des volumes finis (4.3) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n),$$

avec le flux moyen défini par

$$F_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} a (Q_i^n + Q_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2 (Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

On obtient donc un schéma précis à l'ordre 2. Tel quel, ce schéma est naturellement plus précis qu'un schéma à l'ordre 1. Toutefois, il est moins performant lorsque la solution présente des discontinuités ; dans ce cas-là, la solution numérique se met à osciller. L'idée des méthodes à grande résolution est de combiner des schémas d'ordre 2 et 1 : on emploie un schéma d'ordre 2 lorsque la solution est continue alors qu'un schéma d'ordre 1 est employé dès qu'une discontinuité est détectée. L'idée que l'on va développer dans ce qui suit est d'utiliser des « limiteurs » qui, comme leur nom l'indique, servent à limiter les effets de correction d'ordre 2 quand on estime que ceux-ci introduisent des fluctuations trop importantes.

Fonction linéaire par morceau

Une façon d'obtenir des schémas d'ordre supérieur à 1 est d'utiliser des fonctions continues par morceaux, par exemple des fonctions linéaires par morceaux (voir figure 4.14) :

$$\tilde{u}(x, t_n) = U_i^n + \sigma_i^n(x - x_i) \text{ pour } x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad (4.31)$$

avec x_i le centre de chaque maille et σ_i^n la pente au sein de la maille i . Notons que quelle que soit σ_i^n , la moyenne de $\tilde{u}(x, t_n)$ sur la cellule est U_i^n .

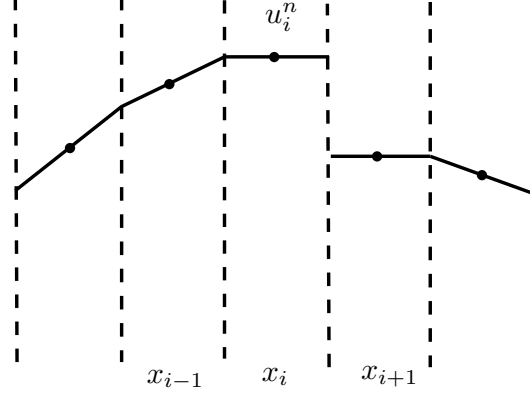


Figure 4.14 : fonction linéaire par morceaux.

On peut choisir entre plusieurs possibilités pour calculer la pente σ_i^n . Ainsi, le $\sigma_i^n = 0$ redonne la méthode de Godunov. Le choix

$$\sigma_i^n = \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x},$$

(schéma de Fromm) est un choix naturel. Un choix, qui permettrait de limiter l'apparition d'oscillations, est le suivant

$$\sigma = \text{minmod} \left(\frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x}, \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} \right),$$

où

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} |a| & \text{si } |a| < |b| \text{ and } ab > 0, \\ |b| & \text{si } |b| < |a| \text{ and } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab < 0, \end{cases}$$

Rupture de barrage

5.1 Rupture de barrage en ingénierie

IL EXISTE aujourd’hui environ 45000 barrages dans le monde pour la production hydroélectrique, l’alimentation en eau, ou bien la régulation des cours d’eau ([Marche, 2008](#)). Comme tout ouvrage de génie civil, les barrages peuvent connaître des défaillances de sécurité, qui peuvent aboutir à des accidents plus ou moins graves. Le taux de rupture moyen annuel est d’environ 3 pour l’ensemble des barrages construits dans le monde ([Marche, 2008](#)). Quelques catastrophes ont causé des dommages considérables et fait des centaines ou des milliers de victimes :

- Malpasset (Var, France) : le 2 décembre 1959, le barrage-voûte barrant la rivière Reyran cède à cause d’un défaut géologique dans le massif où s’ancrait la voûte. Une vague de 40 mètres déferle sur la vallée et atteint la ville de Fréjus. Des blocs rocheux (jusqu’à 600 t !) sont entraînés et détruisent le quartier de Malpasset. En tout, ce sont 423 victimes qui sont déplorées.
- Vajont (Italie) : le 9 octobre 1963 un glissement de terrain a mobilisé 260 Mm³ de terres et de roches dans la retenue du Vajont barrée par un barrage-voûte achevé en 1959 ([Panizzo et al., 2005a](#)). Deux vagues d’une hauteur prodigieuse (150–200 m) se sont engouffrées dans l’étroit ravin à l’aval du barrage 150 mètres de haut. La masse d’eau dévaste Longarone, Pirago, Rivalta, Villanova et Faè et de nombreux petits villages aux alentours. On estime à 1909 le nombre de personnes tuées. Le barrage n’a subi que de très légers dommages.
- Le barrage de Molare (bordure sud des Alpes italiennes au nord-est de Gênes) cède en août 1935 après des pluies diluviennes. Les évacuateurs de crue furent dans l’impossibilité d’évacuer le débit de crue généré par des pluies d’une intensité exceptionnelle (environ 500 mm dans la journée du 13 août 1935), ce qui entraîna la rupture de la digue de Zerbino. Une vague d’une hauteur de 20 mètres dévasta la vallée de l’Orba, causant environ la mort de 100 personnes ([Visentini, 1936](#)) ;
- aux États-Unis, à Tom Sauk dans les collines du Missouri, une retenue d’environ 5 millions de m³ implantée à 1500 m d’altitude a cédé en décembre 2005 et a généré une onde de submersion dévastatrice (dénivellation de l’ordre de 700 m).

Certains phénomènes assimilés à des ruptures de barrage concernent des ruptures de terrils miniers :

- catastrophe d’Aznalcóllar (Andalousie, Espagne) : le 25 avril 1998, la rupture d’une digue libère un volume considérable (8 km³) d’eau contaminée par des métaux lourds et de résidus miniers. La rupture a généré une onde de crue dans les rivières Guadiamar et Guadalquivir et a pollué le parc naturel de Doñana ;
- catastrophe du Val de Stava (Trentin-Haut-Adige, Italie) : le 19 juillet 1985, un barrage retenant les boues de décantation d’une mine cède sous la pression de l’eau après

qu'un drain vétuste s'est bouché. En environ une trentaine de secondes, ce sont quelque 200 000 m³ de boue qui sont libérés et s'écoulent dans le Rio di Stava. La coulée de boue a tué 268 personnes et détruit 62 bâtiments dans le village de Stava, près de Tesero.



Figure 5.1 : rupture du barrage de Taum Sauk dans le Missouri (États-Unis) en décembre 2005.



Figure 5.2 : barrage du Vajont après le mouvement de terrain du 9 octobre 1963.

5.1.1 Rupture de grand barrage

Causes de rupture

La rupture d'un barrage peut être causée par :

- par l'érosion provoquée par une surverse intempestive en cas de trop-plein (résultant d'une crue ou bien d'une arrivée d'eau mal contrôlée). En décembre 2005, le barrage de Taum Sauk s'est ainsi rompu à la suite de défaillances de plusieurs systèmes de contrôle et de pompage, qui ont amené à un niveau d'eau trop important dans la retenue ;
- par l'infiltration d'eau ou des phénomènes de « renard » dans les remblais ;
- par des fuites dans les conduites d'eau sous pression ;
- la rupture ou l'affaissement de la paroi du barrage. En décembre 1959, la retenue de Malpasset (Var, France) céda, libérant 48 millions de m³ d'eau. La rupture du barrage provoqua une crue majeure jusqu'à Fréjus, causant la mort de 423 personnes ;
- la surverse induite par une seiche, une avalanche, ou un mouvement de terrain entraînant une grande masse d'eau par-dessus le barrage. La catastrophe du Vajont résulta d'un glissement de terrain, qui en pénétrant dans le lac de retenue a provoqué une vague qui submergea le barrage-vôûte et s'engouffra dans un ravin étroit ;
- par un tremblement de terre, qui peut induire la rupture du barrage ou bien la formation de vagues déferlantes.

Tableau 5.1 : liste de quelques grands accidents intervenus sur des barrages de retenue artificielle. Se reporter au site www.hydrocoop.org pour de plus amples informations.

<i>Nom</i>	<i>Année</i>	<i>Lieu</i>	<i>Détails</i>	<i>Dommages</i>
Dale Dike Reservoir	1864	South Yorkshire, Royaume-Uni	défaut de construction, fuite dans le mur	Loxley, Don, le centre de Sheffield dévastés (plusieurs centaines de morts)
South Fork Dam	1889	Johnstown, Pennsylvania, États-Unis	rupture consécutive à de fortes pluies (mais barrage mal entretenu)	2200 morts à Johnstown, Pennsylvania, USA,
Llyn Eigiau Dam	1925	Dolgarrog, Royaume-Uni	rupture consécutive à de fortes pluies (630 mm en 5 j)	village de Dolgarrog endommagé, 17 morts
St. Francis Dam	1928	Valencia, Californie, États-Unis	instabilité géologique non détectée	~ 600 morts
Malpasset	1959	Fréjus, France	ouverture d'une faille géologique entraînant la rupture de la voûte	421 morts
Baldwin Hills Reservoir	1963	Los Angeles, Californie, États-Unis	subsidence causée par la sur-exploitation des champs de pétrole voisins	277 habitations détruites, 5 morts.
Barrage du Vajont	1963	Italie	vague d'impulsion créée par l'entrée massive d'un gigantesque mouvement de terrain	destruction de plusieurs villages, entraînant la mort de 2000 personnes environ
Buffalo Creek	1972	Virginie occidentale, États-Unis	affaissement d'une digue d'un terril minier (charbon) sous l'effet de fortes pluies	une crue d'un volume 0,5 Mm ³ d'un mélange de produits miniers et d'eau en résultat, détruisant plusieurs villages et tuant 125 personnes
Barrages Banqiao et Shimantan	1975	Chine	pluies extrêmes dépassant la capacité du barrage	la crue tua environ 26000 personnes ; 145,000 moururent à cause des épidémies et de la famine. En tout, 6 millions d'habitations furent détruites
Teton Dam	1976	Idaho, États-Unis	renard	11 personnes tuées, 13000 têtes de bétail emportées
Kelly Barnes Dam	1977	Géorgie, États-Unis	Unknown, possibly design error as dam was raised several times by owners to improve power generation.	39 fatalities and a major clean up effort.
Lawn Lake Dam	1982	Rocky Mountain National Park, États-Unis	renard	0,8 Mm ³ d'eau furent libérés, causant la mort de campeurs à l'aval et 31 millions US\$ de dommages à la ville d'Estes Park (Colorado).
Val di Stava	1985	Italie	renard dans un barrage minier	268 morts, 62 bâtiments détruits
Big Bay Dam	2004	Mississippi, États-Unis		104 bâtiments détruits
Barrage de Shakidor	2005	Pakistan	pluies extrêmes	~ 70 morts
Taum Sauk reservoir	2005	Lesterville, Missouri, États-Unis	sur-remplissage accidentel du barrage (erreur de consigne)	pas de victime

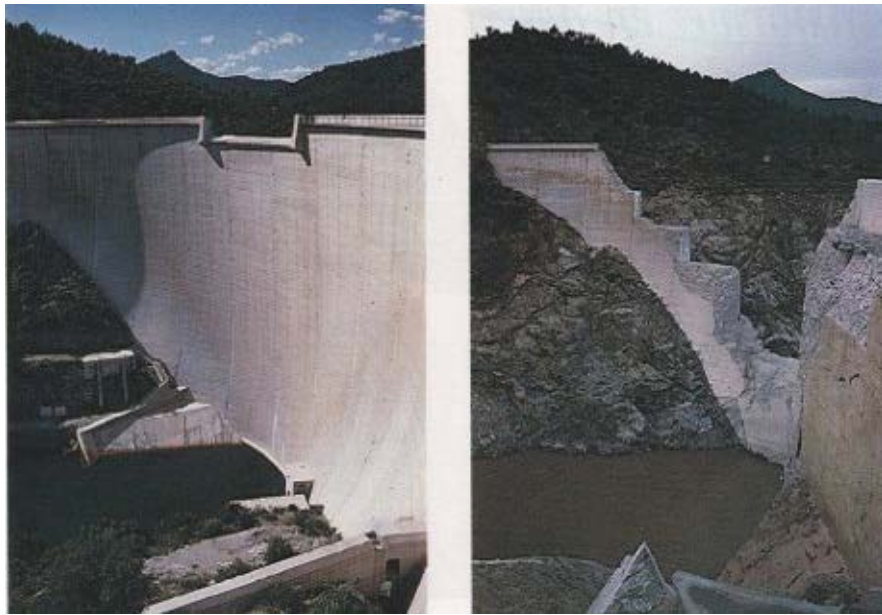


Figure 5.3 : barrage de Malpasset. [DR].

Rupture instantanée ou graduelle

La rupture d'un barrage est rarement instantanée. Que cela soit pour un barrage en béton ou bien en remblai, il y a en généralement la formation d'une brèche dans le barrage, qui s'agrandit progressivement. La libération de l'eau se fait donc de façon graduelle. Ce processus de formation de brèche dans un barrage ou une digue a fait l'objet de plusieurs études pour en étudier la dynamique. Cela reste un processus complexe et en général, on fait l'hypothèse que le volume d'eau est lâché instantanément : on parle d'*effacement* du barrage. Cette hypothèse va dans le sens de la sécurité, mais peut induire à majorer le risque hydraulique induit par l'onde de crue, en particulier pour les barrages en remblai (qui sont majoritaires) ; pour des barrages en remblai, on observe que la largeur ℓ de la brèche est généralement située dans la fourche $h_b \leq \ell \leq 3h_b$, où h_b est la hauteur du barrage. Pour ces barrages, le temps nécessaire à former une brèche varie de façon considérable (de quelques minutes à quelques heures) selon le matériau et la cause de la rupture.

En Suisse, l'Office fédéral de l'énergie (OFEN) recommande de procéder ainsi pour le scénario de rupture (Bischof *et al.*, 2002b) :

- pour les barrages-voûtes et barrages-poids : rupture totale et instantanée de tout le barrage ;
- pour les digues : formation d'une brèche de forme trapézoïdale de base égale à deux fois la hauteur d'eau et avec une pente de talus de 1:1 (en veillant que la surface ne soit pas plus grande que la digue elle-même) ;
- pour les barrages mobiles : rupture totale ou partielle en fonction du type de construction.

Le niveau d'eau est généralement le niveau des plus hautes eaux (PHE) admis dans la retenue. Pour certains petits ouvrages, en particulier en cas d'obstruction de l'évacuateur de crue par des flottants, il convient de prendre la hauteur du barrage (jusqu'au couronnement) comme niveau d'eau initial avant la rupture.

Le débit initial (au moment de la rupture) dépend de la forme de la brèche dans la digue.



Figure 5.4 : rupture du barrage en terre de Teton (Idaho) en 1976. (b) Ruines du barrage de Saint-Francis (Californie) en 1928. [DR].

La figure 5.5 et le tableau 5.2 recensent quelques formules empiriques.

Certaines formules fournissent également le débit maximal. La formule de Froehlich a été établie sur 22 événements bien documentés ; elle donne l'estimation suivante

$$Q_{max} = 0,607V_0^{0,295}h_0^{1,24}, \quad (5.1)$$

avec h_0 la hauteur initiale au niveau de la brèche et V_0 le volume d'eau stocké. Cette formule peut conduire à des sur-estimations d'un facteur 2 (Franca *et al.*, 2007). Pour des lacs morainiques, Costa & Schuster (1988) ont proposé une relation donnant le débit de pointe en

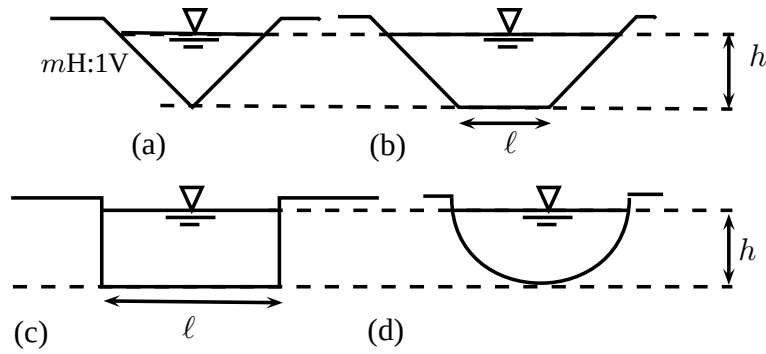


Figure 5.5 : forme des brèches considérée dans les calculs.

Tableau 5.2 : débit instantané au moment de la rupture. Pour les talus, on considère des déclivités (fruit) de $1/m$. ℓ désigne la largeur au miroir pour les profils paraboliques et rectangulaires, mais la base du trapèze pour une section trapézoïdale. D'après les recommandations de l'OFEN (Bischof et al., 2002b).

Forme de la brèche		Débit instantané
triangulaire	(a)	$Q_b = 0,72mh^{5/2}$
trapézoïdale	(b)	$Q_b = 0,93\ell h^{3/2} + 0,72mh^{5/2}$
rectangulaire	(c)	$Q_b = 0,93\ell h^{3/2}$
parabolique	(d)	$Q_b = 0,54\ell h^{3/2}$

fonction de l'énergie potentielle du lac

$$Q_p = 13 \times 10^{-5} (\rho ghV)^{0,6}, \quad (5.2)$$

avec V le volume d'eau stocké, g l'accélération de la gravité, h la hauteur moyenne d'eau, et ρ la masse volumique de l'eau.

Plan des études en ingénierie

Pour les calculs en ingénierie, on a généralement besoin de calculer :

- l'hydrogramme initial : en fonction de la brèche créée dans le barrage, il faut estimer le débit d'eau libéré au cours du temps. Il existe plusieurs méthodes de calcul fondées sur des données historiques (régression sur des observations) ou bien des modèles physiques reproduisant la rupture du remblai ou du béton ;
- la propagation de l'onde de crue (*flood routing*) : il faut estimer comment le volume d'eau libéré se propage dans le cours d'eau. Cette estimation peut se faire :
 - à la main à l'aide de méthodes simplifiées ;
 - numériquement en se servant de modèles « filaires » (écoulement unidimensionnel) ;
 - numériquement en utilisant des modèles bidimensionnels de type Saint-Venant.
- l'emprise des zones touchées par la crue : il faut cartographier les zones concernées par l'onde de crue. En Suisse, l'OFEN a fourni des critères pour distinguer différentes classes de danger (voir tableau 5.3).

Charges exceptionnelles

Les barrages sont dimensionnés pour résister à une multitude de phénomènes. Le risque de rupture toléré est généralement de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} par an. En termes de période de

Tableau 5.3 : valeurs seuils pour la mesure du danger en cas d'inondation rapide. D'après les recommandations de l'OFEN (Bischof et al., 2002b).

Valeurs seuils	Effets	Règle d'assujettissement
danger élevé : $h > 2$ m ou $q > 2$ m ² /s	Les personnes sont en danger même à l'intérieur des bâtiments. En cas d'érosion du lit et des berges, il y a aussi menace d'effondrement de constructions situées à proximité. Les laves torrentielles par l'effet de pression peuvent aussi conduire à la destruction de bâtiments.	L'ouvrage d'accumulation est assujetti si au moins une habitation, un lieu de travail, un bâtiment public, une place de camping publique, une route très fréquentée ou une ligne de chemin de fer est touchée.
danger moyen : $2 \geq h > 1$ m ou $2 \geq q > 1$ m ² /s	Les personnes à l'extérieur et dans les véhicules sont menacées. La retraite vers les étages supérieurs des bâtiments est la plupart du temps possible. Des bâtiments, selon leur mode de construction, peuvent subir des dégâts.	L'ouvrage d'accumulation est assujetti si une habitation (de construction légère), un lieu de travail (construction légère), une place de camping publique ou si une route très fréquentée est touchée.
danger modéré : $1 \geq h > 0,5$ m ou $1 \geq q > 0,5$ m ² /s	Les personnes à l'extérieur et dans les véhicules sont menacées. La retraite vers les étages supérieurs des bâtiments est la plupart du temps possible. Des bâtiments, selon leur mode de construction, peuvent subir des dégâts.	L'ouvrage d'accumulation est assujetti si une place de camping publique ou si une route très fréquentée est touchée.
danger faible : $h \leq 0,5$ m ou $q \leq 0,5$ m ² /s	Les personnes ne sont pratiquement pas menacées tant à l'extérieur qu'à l'intérieur des bâtiments.	L'ouvrage d'accumulation n'est pas assujetti.

retour (pour des phénomènes hydrologiques), cela veut dire qu'un barrage est généralement dimensionné pour résister à des phénomènes de période de retour 1000 à 10 000 ans. Pendant longtemps seuls les grands barrages étaient assujettis à cette contrainte de sécurité, mais dans de nombreux pays européens, la jurisprudence et l'état de l'art sont en train de changer pour les petits ouvrages.

Un barrage est soumis à des charges permanentes (son poids propre) et variables (la poussée des eaux retenues, les sous-pressions générées par la percolation des eaux sous le barrage), auxquelles il doit pouvoir résister sans dommage jusqu'à l'état limite de service. Il est également soumis à des charges exceptionnelles telles que :

- une crue des cours d'eau dans le bassin-versant alimentant la retenue et conduisant à faire monter le niveau des eaux. Si le niveau de la retenue dépasse le niveau des

plus hautes eaux (PHE), le surplus doit être évacué par des évacuateurs de crue ou bien vidangé/turbiné. Certaines retenues comme celle de la Grande Dixence sont dépourvues d'évacuateur ;

- un séisme. Il existe des critères statistiques qui permettent selon la région considérée de définir un « séisme de projet » ou « séisme de vérification » auquel le barrage doit résister ;
- une avalanche ou un mouvement de terrain, qui en entrant dans la retenue peut provoquer une intumescence submergeant le barrage. En Suisse, la période de retour de l'avalanche de projet est de 300 ans ;
- la poussée des glaces, qui peut générer des efforts importants ou endommager la couche de géotextile imperméabilisant une retenue artificielle de petit volume (par exemple pour la production de neige de culture). Le phénomène de poussée des glaces est encore documenté, mais les valeurs citées dans la littérature technique se situent dans une fourchette large 20–300 kN/ml.

Bases réglementaires

En Suisse, les bases légales relatives à la sécurité des ouvrages d'accumulation sont contenues dans :

- historiquement, l'article 3bis de la loi fédérale du 22 juin 1877 sur la police des eaux ;
- plus récemment l'ordonnance du 7 décembre 1998 sur la sécurité des ouvrages d'accumulation (OSOA).

L'article 3bis de la loi sur la police des eaux énonce que le Conseil fédéral doit veiller à ce que pour tout barrage (existant ou projeté), des mesures spécifiques soient mises en œuvre pour prévenir les dangers et les dommages qui pourraient résulter d'un problème dans leur construction, d'un défaut d'entretien, ou d'acte délibéré (bombardement, vandalisme, terrorisme).

L'ordonnance sur la sécurité des ouvrages d'accumulation (OSOA) complète la police des eaux. Cette ordonnance concerne tout ouvrage :

- dont la hauteur de retenue au-dessus du niveau d'étiage du cours d'eau (ou du niveau du terrain naturel) est supérieure ou égale à 10 m ;
- dont la hauteur est comprise en 5 et 10 m, avec une capacité de retenue supérieure à 50 000 m³ ;
- qui représentent un danger particulier pour les biens et les personnes (selon les critères édictés au tableau 5.3).

L'OSOA confie la surveillance des petites retenues aux cantons.

En France, la réglementation relative à la sécurité des barrages a longtemps été dictée par la circulaire interministérielle du 14 août 1970, qui introduisait la notion de « barrage intéressant la sécurité publique » comme seul classement des retenues. Cette circulaire a été récemment abrogée et remplacée par le décret n° 2007-1735 du 11 décembre 2007 relatif à la sécurité des ouvrages hydrauliques. Ce décret introduit un classement avec quatre classes d'ouvrages définies selon la géométrie du barrage et le volume de la retenue (voir tableau 5.4). Le décret n° 93-743 du 29 mars 1993 (modifié par le décret n° 2007-397 du 22 mars 2007) relatif à la nomenclature des opérations soumises à autorisation indique que toute construction d'ouvrage hydraulique est soumise à autorisation préalable ; la seule exception concerne les ouvrages de classe D qui ne barrent pas le lit mineur d'une rivière. Notons enfin que le préfet

du département dans lequel l'ouvrage hydraulique est construit peut modifier le classement de cet ouvrage s'il y a suffisamment d'éléments qui établissent un risque pour les personnes et les biens.

Tableau 5.4 : classes de barrage de retenue en France en fonction de la hauteur H (mesurée verticalement entre le terrain naturel et le sommet de l'ouvrage) et V le volume d'eau exprimé en millions de m^3 . D'après le décret du 11 décembre 2007 (Peyras & Mériaux, 2009).

Classe	Caractéristiques géométriques
A	$H \geq 20$ m
B	ouvrage non classé en A, et pour lequel $H^2 + \sqrt{V} \geq 200$ et $H \geq 10$ m
C	ouvrage non classé en A ou B et pour lequel $H^2 + \sqrt{V} \geq 20$ et $H \geq 5$ m
D	ouvrage non classé en A, B, ou C et pour lequel $H \geq 2$ m

Le classement a d'importances répercussions tant pour l'instruction du dossier (désignation du service instructeur, éléments du dossier) que pour l'exploitation de l'ouvrage (surveillance et auscultation, visite technique, dossier d'ouvrage, etc.). En particulier, le choix de la période de retour de la crue de projet pour les barrages en remblai dépend de la classe de l'ouvrage et du risque encouru, comme le récapitule le tableau 5.5.

Tableau 5.5 : période de retour minimale de la crue de projet des barrages en remblai en fonction de la classe, de la hauteur H (mesurée verticalement entre le terrain naturel et le sommet de l'ouvrage) et du volume V (exprimé en millions de m^3). D'après (Peyras & Mériaux, 2009).

Classe	Absence d'enjeu	Présence d'enjeu
A	$T = 10\,000$ ans	$T = 10\,000$ ans
B	$T = 5\,000$ ans	$T = 10\,000$ ans
C	$T = 1\,000$ ans	$T = 5\,000$ ans
D avec $H^2V^{1/2} \geq 5$	$T = 500$ ans	$T = 1\,000$ ans
D avec $H^2V^{1/2} < 5$	$T = 100$ ans	$T = 1\,000$ ans

5.1.2 Rupture de petit barrage d'accumulation

Les Alpes ont été équipées au cours du xx^e d'un grand nombre de barrages pour la production d'électricité. Plus récemment, au cours des 10–20 dernières années, des petits barrages ont été construits pour la production de neige de culture dans les stations de ski et, dans une moindre mesure, pour assurer l'approvisionnement en eau potable lors des pics de fréquentation touristique. On prévoit au cours des 10–20 prochaines années un accroissement considérable du nombre de petites retenues (d'un facteur 3 environ d'après les études prospectives) et une augmentation du volume de stockage (qui passerait de l'ordre de $50\,000\,m^3$ en moyenne actuellement à quelques centaines de milliers de m^3 dans le futur). Les petites retenues peuvent connaître des accidents plus ou moins graves. Ainsi, en août 2004 et au printemps 2005, deux ouvrages ont connu une rupture lors de leur mise en eau en France, entraînant une ruine partielle ou totale. En mars 2006, une retenue pour la production de neige de culture à Pelvoux (Hautes-Alpes, France) a été impactée et vidée par une avalanche, heureusement sans conséquence pour le camping (vide en saison) situé en contrebas.

En Suisse jusqu'à l'ordonnance sur la sécurité des ouvrages d'accumulation, les nouveaux ouvrages de retenue ont échappé aux contraintes réglementaires imposées aux grands barrages « intéressant la sécurité publique » car le plus souvent, ils sont de petite taille et offrent une capacité de retenue qui reste modérée (de l'ordre de 10^4 – $10^5\,m^3$) (Bischof *et al.*, 2002a). L'ordonnance a permis de corriger cette situation en confiant aux cantons le soin d'exercer une surveillance des petits ouvrages. En France, il n'existe pas de réglementation précise pour



Figure 5.6 : avalanche du 9 mars 2006 détruisant la retenue de la station de Pelvoux (Hautes-Alpes, France) situé dans le bassin-versant de la Bouisse.

les petites retenues. Un récent rapport parlementaire – faisant suite à un rapport confidentiel d'EDF éventé par la presse – a pointé la situation jugée préoccupante du parc des barrages en France (Kert, 2008).

Les ouvrages d'accumulation sont pourtant placés dans un milieu naturel hostile et donc exposés à des contraintes sévères (cycle gel/dégel, vieillissement des bétons, géomembranes, etc.) ainsi qu'à des dangers naturels (mouvement de terrain, avalanche, chute de blocs, etc.). Comme ils sont assez souvent construits à l'amont d'enjeux significatifs (typiquement une station de ski), leur rupture peut éventuellement causer des dommages sévères.

Pourtant, la prise en compte de la sécurité de ces ouvrages n'a été que partiellement prise en compte. Ainsi, une enquête menée dans le canton du Valais a révélé que 41 petites retenues avaient déjà construites et que parmi elles, 11 présentaient une menace sérieuse en cas de rupture. En France, une enquête diligentée par les services du Ministère française en charge de l'agriculture sur la Haute-Savoie en 2005 a mis en évidence des carences graves sur les 16 ouvrages de ce département (Mériaux *et al.*, 2005; Evette *et al.*, 2009) :

- absence d'étude d'impact en cas de rupture du barrage pour la majorité des ouvrages ;
- absence de qualification du bureau de maîtrise d'œuvre pour ce type d'ouvrage ;
- étude hydrologique sommaire ;
- évacuateur de crue sous-dimensionné dans 75 % des cas ;
- défaut d'étanchéité des géo-membranes dans 30 % des cas ;
- absence de dispositif d'auscultation et de procédure de suivi dans 80 % des cas.

La responsabilité de la maîtrise d'œuvre, maîtrise d'ouvrage, et des chargés d'étude était soulignée dans cette étude ; on pourrait également dresser la liste des erreurs lourdes dans l'instruction des dossiers d'autorisation de travaux par les services en charge de ces dossiers. Ce qu'il convient donc de pointer ici, c'est l'insuffisance de la sécurité des petits barrages de montagne (Peyras & Mériaux, 2009).

L'effet de la rupture d'un petit barrage est l'un des points les plus importants pour estimer la sécurité d'un barrage et c'est assurément l'un des moins bien traités, ce qui peut s'expliquer par plusieurs éléments :

- forte pente des exutoires (typiquement plus de 10 %) alors que les codes de calcul à disposition des bureaux d'étude ne permettent pas de faire de l'hydraulique au-delà de quelques pour-cent ;

- faible connaissance de la dynamique des ondes de rupture sur forte pente (la solution de Ritter est établie sur fond horizontal) ;
- fort transport solide potentiellement associé à l’onde de rupture ;
- lit mobile composé de blocs de toute taille, dont certains restent en général en place et influent sur le transport solide (notamment dans les lits avec une structuration alternée en seuils et mouilles) ;
- volume engagé relativement faible (quelques dizaines de milliers de m³), pour lequel les effets de frottement jouent un rôle essentiel dans la propagation ;
- absence de connaissances précises sur les conditions initiales : ouverture d’une brèche dans le cas d’une petite retenue ? Effet de surverse en cas d’avalanche ou de mouvement de terrain (comme pour le Vajont en 1963) ?
- rôle de la rugosité du lit torrentiel (souvent de gros blocs) et des ouvrages de génie civil (ponts, seuils).

En pratique, ni les méthodes analytiques, ni les codes de calcul établis pour la rupture de barrage dans le cas des grandes retenues ne sont applicables pour de petites retenues en montagne. À défaut, les chargés d’étude emploient des méthodes très approximatives, voire fantaisistes comme l’utilisation de formules établies pour des laves torrentielles en régime permanent. Une étude récente menée au Canada sur l’emploi des méthodes dites simplifiées de calcul de l’onde de rupture a ainsi mis en évidence de graves problèmes de dimensionnement ([Marche & Oriac, 2005](#)).

5.1.3 Rupture de lac morainique et glaciaire

Aux risques qualifiés d’anthropiques mentionnés plus haut, il faut également ajouter les risques liés aux lacs naturels :

- notamment ceux qui sont en train de se former à la suite du retrait glaciaire. Durant le « petit âge glaciaire » (de la fin du XVI^e siècle au milieu du XIX^e siècle), les glaciers des Alpes avaient fortement avancé. Leur retrait a laissé des moraines, qui ont piégé une partie des eaux de fonte des glaciers. Ces moraines sont en général constituées de matériaux très grossiers, sans réel liant si ce n’est une gangue de glace qui peut assurer une certaine cohésion ; elles sont en général assez hautes (avec un rapport hauteur/largeur assez faible) et raides ;
- outre ces lacs périglaciaires, les glaciers peuvent former des lacs glaciaires ou des poches d’eau en leur sein. La rupture des glaces emprisonnant le volume d’eau conduit à des crues importantes ;
- certains lacs peuvent se former lorsqu’une vallée drainée par un cours d’eau est soudainement obstruée. En effet, à la suite d’un écroulement rocheux, d’un déplacement du sol à la suite d’un tremblement de terre, d’un dépôt d’avalanche ou de lave torrentielle, le cours d’eau peut être barré, ce qui forme un lac naturel.

Les lacs morainiques peuvent céder pour plusieurs raisons ([Clague & Evans, 2000](#); [Korup & Tweed, 2006](#)) :

- les lacs étant souvent entourés de pentes abruptes, des glissements de neige, de sol, ou de glace sont possibles. Une avalanche ou un mouvement de terrain peut provoquer une intumescence qui submerge la moraine. Le flot déversé sur la paroi raide de la moraine entraîne en général une incision rapide, qui forme une brèche dans le talus morainique, puis la rupture d’une partie de la moraine. En août 1985, une avalanche de glace dans le lac Dig Tsho au Népal provoqua l’une des plus grosses crues d’origine glaciaire connues à

- ce jour (8 million m^3 d'eau libérés). En juillet 1983, une rupture du glacier Cumberland dans le lac Nostetuko (Canada) a généré une vague qui a incisé la moraine. Cette érosion s'est poursuivie pendant 4 h, formant une brèche entaillant sur une profondeur de 40 m, libérant $6,5 \times 10^6 \text{ m}^3$ d'eau et entraînant un volume d'environ 10^6 m^3 de sédiment ;
- le lac collectant les eaux de pluie, de fonte des neiges et des glaces, il peut déborder si les eaux drainées arrivent en quantité excessive. Le débordement entraîne en général la rupture de la moraine par érosion. En juillet 1996, le lac Ha! Ha! (Québec, Canada) déborda à la suite de précipitations très importantes (200 mm de pluie sur 5000 km^2), ce qui entraîna la rupture de la digue morainique et une crue exceptionnelle (débit de l'ordre de $1100 \text{ m}^3/\text{s}$, soit 8 fois la crue centennale). Le débordement de la rivière Ha! Ha! amena à la création d'un nouveau lit et mobilisa plusieurs millions de m^3 de sédiment ([Lapointe et al., 1998](#)) ;
 - comme une partie de la stabilité de la moraine est assurée par la glace contenue dans le matériau grossier, la fonte de cette glace peut amener à une perte de cohésion et à une perméabilité accrue, et finalement à la rupture (géotechnique) de la moraine sous l'effet de la poussée des eaux ;
 - une instabilité (résonance) de vagues sur la surface du lac peut entraîner la formation d'ondes déferlantes qui submerge le moraine. Les oscillations de masses d'eau (phénomène appelé seiche) sont impliquées dans quelques ruptures de barrage dans le monde ([Balmforth et al., 2008](#)) ;
 - la perméabilité d'une moraine est très hétérogène. Le matériau présente en général une granulométrie bimodale avec, d'une part, de gros blocs et, d'autre part, des éléments plus fins (arène granitique, sable) qui colmate les vides entre blocs. L'eau peut néanmoins s'infiltrer et créer des « renards », c'est-à-dire des circulations d'eau au sein de la moraine. Si la conduite naturelle creusée par les eaux d'infiltration croît en taille, cela peut entraîner une forte érosion interne, puis la rupture de la moraine ;
 - les tremblements de terre peuvent également déstabiliser une moraine et entraîner la rupture. Le tremblement de terre de mai 1970 au Pérou entraîna la vidange partielle du lac Safuna Alta, qui mobilisa environ 25 m d'eau dans le lac, soit $5 \times 10^6 \text{ m}^3$ d'eau ; en avril 2002, un écoulement rocheux affecta de nouveau ce lac ([Hubbard et al., 2005](#)).



Figure 5.7 : le village de Täsch après la crue du Töschbach en juin 2001. Source : Crealp.

Les crues provoquées par la rupture d'un lac glaciaire ou morainique sont généralement dévastatrices. On emploie parfois le mot d'origine islandaise « jökulhlaup » pour désigner une crue liée à un glacier (en fait, le mot recouvre plusieurs phénomènes, certains liés à des éruptions volcaniques en zone glaciaire). Quelques exemples de rupture de lac :

- les ruptures de poche glaciaire peuvent provoquer des dommages importants en zone de montagne à cause des fortes vitesses, mais également des nombreux débris et sédiments charriés par l'onde de crue. En Suisse, le glacier Giétro¹, dominant aujourd'hui le barrage de Mauvoisin dans le val de Bagnes (Valais), a connu plusieurs débâcles meurtrières (1595 et 1818). En France, en 1898, la débâcle du glacier de Tête-Rousse a entraîné un mélange d'environ 300 000 m³ d'eau, de glace ainsi que 800 000 m³ de matériaux sur son parcours ; 175 personnes furent tuées à Saint-Gervais-les-Bains. Plus récemment, en juin 2001, le petit lac du Weingarten a rompu sa digue morainique et s'est déversé dans un torrent dominant le village de Täsch (Valais), remobilisant les laisses de crues (dépôts de lave de l'automne 2000) et causant d'importants dommages au village.
- les ruptures de barrage naturel sont aussi des causes de crue torrentielle dévastatrice. En 563, un écoulement du Grammont² dans le Chablais (Valais) aurait obstrué le Rhône à hauteur de Noville. Après quelques mois, le barrage aurait cédé, causant une crue gigantesque du Rhône et un tsunami sur le Lac Léman, dont les effets dévastateurs se firent sentir jusqu'à Genève. En 1191, un écoulement rocheux dans le défilé de la Vaudaine (France) barra la Romanche entre Bourg-d'Oisans et Grenoble ; un lac se forma, mais la digue naturelle se rompit en 1219 et la vidange du lac entraîna une crue torrentielle d'ampleur exceptionnelle, qui détruisit en partie Grenoble (à l'époque une petite bourgade).

5.1.4 Rupture de digue

En août 2002, l'Elbe et ses affluents entrèrent en crue, entraînant de graves inondations en Tchéquie et en Allemagne (environ 100 morts et 20 millions € de dommages). Plusieurs digues cédèrent entre Dresde et Magdebourg en Allemagne ; notamment, le bassin de rétention près de la bourgade de Glasshütte rompit et libéra 60 000 m³ d'eau qui causa des dommages aux bâtiments de la ville.

1. La catastrophe de Giétro en 1818 a endeuillé le Valais : en plein petit âge glaciaire, des blocs de glace se détachent continuellement du glacier du Giétro et s'accumulent dans le lit de la Dranse de Bagnes jusqu'à faire obstacle à l'écoulement de la Dranse (au niveau actuel occupé par le barrage de Mauvoisin). C'est ainsi qu'entre 1806 et 1818, un lac de 3,5 km de long se forme à l'amont de ce cône. Malgré le percement d'une galerie pour drainer le lac, le barrage naturel cède sous la pression de l'eau, provoquant la vidange rapide du lac et causant la mort d'environ 40 personnes.

2. Pour expliquer le même phénomène, certains auteurs indiquent que l'éboulement serait parti des Dents du Midi et non du Grammont ([Montandon, 1925](#)), ce qui semblerait plus logique compte tenu de la configuration de la vallée du Rhône entre Martigny et Noville.

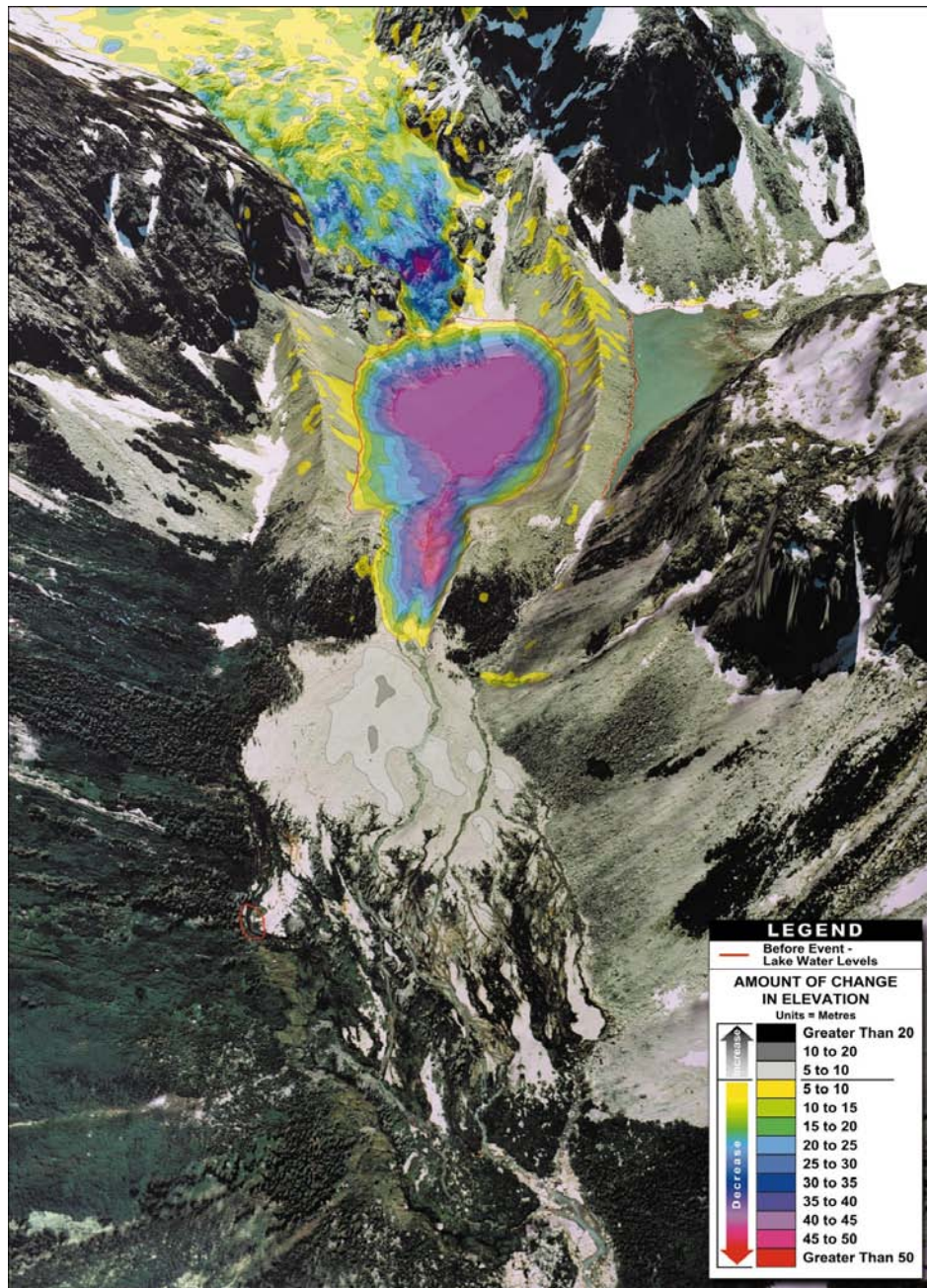


Figure 5.8 : rupture du lac morainique Nostetuko (Colombie britannique, Canada) en juillet 1983. La chute du front du glacier Cumberland dans le lac a entraîné une onde de submersion, qui a incisé la moraine et formé une brèche. La photographie reporte les changements de topographie sur le site entre 1981 et 1994. D'après (Clague & Evans, 2000).



Figure 5.9 : inondation de Glasshütte à la suite de la rupture de la digue du bassin de rétention.
Source : der Spiegel.

5.2 Rupture de barrage en régime laminaire

Nous allons commencer par étudier la rupture de barrage pour des fluides newtoniens en régime laminaire. Cela ne concerne donc pas directement les écoulements d'eau claire (qui sont en régime turbulent). Cette étude représente deux intérêts :

- mieux comprendre les processus d'écoulements dans une géométrie de rupture de barrage en l'absence d'inertie ;
- développer des modèles théoriques pour décrire des écoulements naturels qui peuvent, en première approximation être considérés comme des écoulements newtoniens laminaires.

En effet, quoique les matériaux naturels ne soient pas newtoniens, le modèle newtonien peut néanmoins offrir une première approximation du comportement. C'est ainsi que des modèles d'écoulement newtonien ont été employés pour décrire le mouvement d'avalanches (Dent & Lang, 1983) ou des laves torrentielles (Hunt, 1994).

5.2.1 Notation et équations du mouvement

On considère un plan infiniment long, incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale. On utilise un système de coordonnées cartésiennes, où $\tilde{x}$ est l'abscisse le long du plan et $\tilde{y}$ désigne l'ordonnée comptée selon la normale à la pente (voir Fig. 5.10). Les variables avec des tildes sont les variables physiques (les variables correspondantes sans tilde sont sans dimension). Un réservoir rectangulaire de longueur $\tilde{\ell}$, muni d'une vanne et placé à l'amont du plan, contient un volume $\tilde{V}$ d'un fluide newtonien de viscosité μ , de tension de surface γ , et de masse volumique ρ . L'origine de l'axe x est prise à l'extrémité gauche de ce réservoir. Au temps $\tilde{t} = 0$, la porte est ouverte et le fluide est lâché sur le plan. Initialement la hauteur de fluide est notée

$$\tilde{h}_i(\tilde{x}) = \tilde{h}_g + (\tilde{x} - \tilde{\ell}) \tan \theta, \quad (5.3)$$

où $\tilde{h}_g$ est la hauteur de la vanne guillotine.

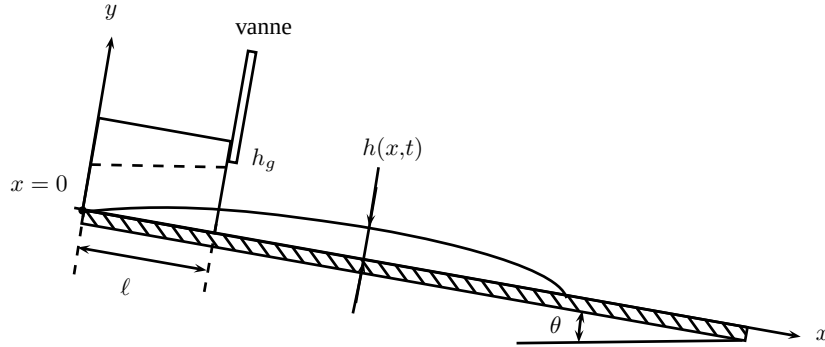


Figure 5.10 : configuration de l'écoulement.

On cherche à déterminer la position x_f du front et profil de hauteur $h(x,t)$ au cours du temps t ; h est la hauteur de l'écoulement (mesurée selon la normale à la pente). On s'intéresse ici exclusivement à des écoulements gravitaires peu épais de fluide très visqueux sur des pentes c'est-à-dire dans la limite des grands nombres capillaires, des petits nombres de Reynolds, et des petits nombres d'aspect : $\text{Ca} = \mu U_*/\gamma \gg 1$, $\epsilon = H_*/L_* \ll 1$, et $\text{Re} = \rho U_* H_*/\mu \ll 1$, où H_* est l'échelle de hauteur, U_* et L_* sont les échelles de vitesse et de longueur, respectivement. On définit également le temps caractéristique $T_* = L_*/U_*$ et l'échelle de pression $P_* = \rho g H_* \cos \theta$. Pour être cohérent avec la conservation de la masse, on choisit les échelles L_* et H_* de telle sorte que $L_* H_* = \tilde{V}$, c'est-à-dire $L_* = \sqrt{\tilde{V}/\epsilon}$ et $H_* = \sqrt{\epsilon \tilde{V}}$.

On introduit les composantes de vitesse $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (U_* u, \epsilon U_* v)$, pression $\tilde{p} = P_* p$, et coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (L_* x, H_* y)$. Les équations du mouvement sont données par les équations de Navier-Stokes équations sont une forme adimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.4)$$

$$\epsilon \text{Re} \frac{du}{dt} = \phi \cos \theta \left(\tan \theta - \epsilon \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.5)$$

$$\epsilon^2 \text{Re} \frac{dv}{dt} = -\phi \cos \theta \left(1 + \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \epsilon^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (5.6)$$

où $\phi = \rho g H_*^2 / (\mu U_*)$ est un groupe sans dimension. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont soumises aux conditions aux limites suivantes :

$$u = v = 0 \text{ pour } y = 0 \quad (5.7)$$

au fond, tandis qu'à la surface libre on a

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \text{ pour } y = h. \quad (5.8)$$

En outre, la condition dynamique à la surface libre implique

$$(-p \phi \cos \theta \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} + \frac{\epsilon^2}{\text{Ca}} \frac{\mathbf{n}}{R} = 0 \text{ pour } y = h, \quad (5.9)$$

avec $\mathbf{n} = (-\epsilon \partial_x h, 1)$ un vecteur normal à la surface libre, $R = (1 + \epsilon^2 (\partial_x h)^2)^{3/2} / \partial_{xx} h$ le rayon de courbure, et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des extra-contraintes. La conservation de la masse implique également que

$$V = \int_0^{x_f} h(x, t) dx = \frac{1}{2} \ell (2h_g - \kappa \ell) = 1, \quad (5.10)$$

avec $\kappa = L_* \tan \theta / H_* = \tan \theta / \epsilon$. La hauteur d'écoulement devient nulle au front :

$$h(x_f, t) = 0. \quad (5.11)$$

La condition initiale pour h est

$$h(x, 0) = h_g + \kappa(x - \ell). \quad (5.12)$$

On va examiner trois régimes limites :

- Le *régime purement diffusif* se rencontre exclusivement pour des fonds horizontaux ($\theta = 0$) ; le mouvement est caractérisé par l'équilibre entre le gradient (longitudinal) de pression et le gradient de contrainte visqueuse, ce qui implique que l'échelle de vitesse est $U_* = \rho g H_*^3 / (3\mu L_*)$, donc que $\phi = 3/\epsilon$. Ce régime a été longuement étudié (Mei, 1966; Nakaya, 1974; Huppert, 1982b; Grundy & McLaughlin, 1982; Didden & Maxworthy, 1982; Gratton & Minotti, 1990).
- Pour des pentes faibles, mais non nulles, l'équilibre entre pression et contraintes est perturbé par la force de gravité. Le régime est appelé ici le *régime diffusif-convectif*. Comme le nombre d'aspect ϵ n'apparaît plus dans les équations sans dimension, nous avons une certaine latitude pour choisir sa valeur. ici nous posons $\epsilon = \tan \theta$ et $\phi = 3/\sin \theta$ de telle sorte que la composante motrice de la gravité, le gradient de pression, et le gradient de contrainte soient du même ordre de grandeur ; l'échelle de vitesse correspondante est donc $U_* = \rho g H_*^2 \sin \theta / (3\mu)$, c'est-à-dire la vitesse moyenne d'un écoulement newtonien sur un plan incliné en régime permanent uniforme.

- À plus forte pente, cette loi d'échelle n'est plus valable car le mouvement résulte principalement de l'équilibre entre force motrice (gravité) et gradient de contrainte, excepté dans la tête de l'écoulement où la forte courbure donne naissance à un gradient importante de pression. Ici, nous appelons ce régime le *régime gravitaire*. Nous allons montrer plus loin que la bonne expression pour ϵ est $\tan^2 \theta$. L'échelle de vitesse et le groupe ϕ sont les mêmes que pour le régime diffusif-convectif; nous verrons que les régimes gravitaire et diffusif-convectif sont physiquement très similaires en dépit de la différence d'expression pour ϵ .

5.2.2 Régimes purement diffusif et diffusif-convectif

En gardant Re à l'ordre 1, en prenant la limite $Ca \rightarrow \infty$, et en supprimant les termes d'ordre 1 en ϵ (ou d'ordre supérieur) dans les équations (5.4–5.6), nous transformons les équations de Navier-Stokes pour obtenir le jeu d'équations suivant où inertie et tension de surface ne jouent aucun rôle :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.13)$$

$$3 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5.14)$$

$$1 + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (5.15)$$

avec les conditions suivantes à la surface libre : $\partial_y u = 0$, $v = \partial_t h + u \partial_x h$, et $p = 0$. Au fond, la condition de non-glissement donne : $u = 0$. Intégrant l'équation de continuité (5.13) fournit une équation pour h

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0,$$

avec $\bar{u}$ la vitesse moyenne obtenue en intégrant (5.14) deux fois : $\bar{u} = h^2(\partial_x p - 1)$. La pression est obtenue en intégrant (5.15) : $p = h - y$. On aboutit à une équation de diffusion-convection non linéaire qui spécifie l'évolution de h

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h^3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (5.16)$$

Dans cette équation, le second terme à gauche représente la convection de h à la vitesse $3h^2$, tandis que le troisième terme représente la diffusion de la hauteur, avec un coefficient de diffusion égal à h^3 . Quand la pente du plan est nulle, le terme de convection $\partial_x h^3$ disparaît de l'équation (5.16) et l'équation du mouvement est alors une équation de diffusion non linéaire :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (5.17)$$

Il n'existe aucune solution auto-similaire à l'équation (5.16), mais de telles solutions existent aux tout petits temps ou bien aux très grands temps lorsque soit la diffusion, soit la convection est le processus prédominant, respectivement. Sans perte de généralité, on peut chercher des solutions sous la forme :

$$h(x, t) = t^{-n} H(\xi, t), \quad (5.18)$$

avec $\xi = x/t^n$ and $n > 0$. En substituant (5.18) dans (5.10), on obtient

$$-3H^2 \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)^2 t^{1-5n} - H^3 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} t^{1-5n} + 3H^2 \frac{\partial H}{\partial \xi} t^{1-3n} = Hn + n\xi \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial H}{\partial t} t. \quad (5.19)$$

Les deux premiers termes à gauche représente la diffusion tandis que le troisième terme est dû à la convection. Les termes de droite représente l'évolution de h au cours du temps. Aux temps très grands, on a $t^{1-3n} \gg t^{1-5n}$, ce qui implique que la convection prédomine tandis qu'à court terme, on a : $t^{1-3n} \ll t^{1-5n}$, ce qui montre la prédominance de la diffusion. Pour que ces contributions respectives soit finies, on pose :

- $n = 1/5$ quand on cherche des solutions pour des temps courts ;
- $n = 1/3$ aux temps longs.

Solutions auto-similaire pour le court terme

Pour trouver des solutions autosimilaires, on pose $n = 1/5$ et $H(\xi, t) = \Psi_0 + t^{\lambda_1} \Psi_1(\xi) + \dots t^{\lambda_i} \Psi_i(\xi) + \dots$, avec $\lambda_i > 0$ et Ψ_i fonctions de ξ . Dans la limite $t \rightarrow 0$ et avec $\xi = O(1)$, l'équation (5.19) se réduit à

$$\Psi_0 + \xi \Psi_0' + 15(\Psi_0 \Psi_0')^2 + 5\Psi_0^3 \Psi_0'' = 0,$$

dont l'intégration fournit

$$\xi \Psi_0 + 5\Psi_0^3 \Psi_0' = c,$$

avec c une constant d'intégration. Comme au front ξ_f , la hauteur devient nulle, on doit avoir $c = 0$. Une nouvelle intégration conduit à la solution

$$h(x, t) = t^{-1/5} \left(\frac{3}{10} (\xi_f^2 - \xi^2) \right)^{1/3}. \quad (5.20)$$

L'équation de conservation de la masse (5.10) nous permet de déterminer ξ_f :

$$\xi_f = V^{3/5} \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{10}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \right)^{-3/5} \approx 1,411 V^{3/5}, \quad (5.21)$$

où Γ désigne la fonction gamma. On retrouve la solution établie notamment par [Nakaya \(1974\)](#) et [Huppert \(1982b\)](#). L'équation (5.20) apparaît dans un certain nombre de processus de diffusion non linéaire, où elle est connue sous le nom de solution de Barrenblatt-Pattle.

Solutions auto-similaires pour le long terme

On pose maintenant $n = 1/3$, $H(\xi, t) = H_0 + t^{\nu_1} H_1(\xi) + \dots t^{\nu_i} H_i(\xi) + \dots$ avec $\nu_i > 0$ et H_i fonctions de ξ . Comme $t \rightarrow \infty$ tandis que $\xi = O(1)$, l'équation (5.19) devient

$$3H_0^2 \frac{\partial H_0}{\partial \xi} - H_0 n - n\xi \frac{\partial H_0}{\partial \xi} = 0.$$

dont l'intégration fournit

$$H_0^3 = \frac{1}{3} \xi H_0 + c,$$

avec c une constante d'intégration. Ici il nous est impossible d'appliquer la condition aux limites $H_0(\xi_f) = 0$, ce qui peut signifier qu'il existe une couche limite dans le proche voisinage du front. H_0 ne serait alors que la solution externe (si on emploie la terminologie des méthodes aux perturbations). On pose $H_0 = 0$ en $\xi = 0$, ce qui impose $c = 0$. Finalement on déduit

$$H_0(\xi) = \sqrt{\frac{\xi}{3}}. \quad (5.22)$$

La position du front ξ_f est encore à déterminer en se servant de la conservation de la masse (5.10):

$$\xi_f = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} V \right)^{2/3}. \quad (5.23)$$

Une couche limite prend place au front car il n'est plus possible de négliger la courbure de la surface libre et les termes diffusifs dans l'équation (5.19). Afin de mettre en relief ce qui se passe dans la couche limite frontale, on procède au changement de variable suivant :

$$\xi = \xi_f - \eta t^\sigma,$$

avec $\sigma < 0$ une constant à déterminer et qui est telle que $\eta = t^{-\sigma}(\xi_f - \xi) = O(1)$. Avec ce changement de variable, l'équation (5.19) devient

$$\left(-3H^2 + \frac{1}{3}\xi_f \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} t^{-\sigma} + \frac{\partial H}{\partial t} t - \frac{H}{3} - \frac{\eta}{3} \frac{\partial H}{\partial \eta} - \eta^\sigma \frac{\partial H}{\partial \eta} = \left[3H^2 \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^2 + H^3 \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right] t^{-\frac{2}{3}-2\sigma}.$$

Comme $\sigma < 0$, les termes de droite doivent contrebalancer les deux premiers terms sur la gauche, ce qui impose $\sigma = -2/3$. On emploie ensuite le développement suivant pour la solution interne :

$$H(\xi, t) = K_0 + t^{\chi_1} K_1(\xi) + \dots,$$

avec $\chi_i < 0$ et K_i fonctions de ξ seul. L'équation régissant K_0 est

$$-3K_0^2 \frac{dK_0}{d\eta} + \frac{1}{3}\xi_f \frac{dK_0}{d\eta} - 3K_0^2 \left(\frac{dK_0}{d\eta} \right)^2 - K_0^3 \frac{d^2 K_0}{d\eta^2} = 0, \quad (5.24)$$

avec les conditions

$$K_0(\eta_f) = 0, \quad (5.25)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} K_0 = \lim_{\xi \rightarrow \xi_f} H_0(\xi) = \sqrt{\frac{\xi_f}{3}} = K_\infty, \quad (5.26)$$

η_f étant la valeur prise par η au front. Intégrant (5.24) conduit à

$$\eta - \eta_f = \eta_s(K_0) = \int_0^{K_0} \frac{dk}{\frac{1}{3} \frac{\xi_f}{k^2} - 1} = K_\infty \tanh^{-1} \left(\frac{K_0}{K_\infty} \right) - K_0. \quad (5.27)$$

L'équation (5.27) est une équation implicite pour la hauteur $K_0(\eta)$ au sein de la couche limite. Pour déterminer η_f , on suppose que dans la couche limite, la masse est simplement redistribuée (sans perte ni création) :

$$|\eta_f| K_e - K_\infty \int_0^{K_e} \eta_s(K) dK = K_\infty \int_{K_e}^{K_\infty} \eta_s(K) dK - (K_\infty - K_e) |\eta_f|,$$

où K_e est la valeur K pour laquelle $\eta_s(K_e) = 0$. Après réarrangement, on trouve

$$K_\infty |\eta_f| = K_\infty^2 \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right),$$

ce qui donne

$$\eta_f = - \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) K_\infty \approx -0.193 K_\infty < 0.$$

L'épaisseur de la couche limite représente environ 20 % de l'épaisseur de la zone frontale (solution externe).

Résumé

Pour résumer les calculs, nous avons trouvé que la position du front est donnée par

$$x_f = \xi_f t^{1/3} + \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\xi_f}{3}} t^{-1/3}, \quad (5.28)$$

avec ξ_f donné par l'équation (5.23). La hauteur d'écoulement est la composée de la solution interne et externe :

$$h(x, t) = t^{-1/3} \left(\sqrt{\frac{1}{3} \frac{x}{t^{1/3}}} + K_0 \left((\xi_f - x t^{1/3}) t^{2/3} \right) - \sqrt{\frac{\xi_f}{3}} \right). \quad (5.29)$$

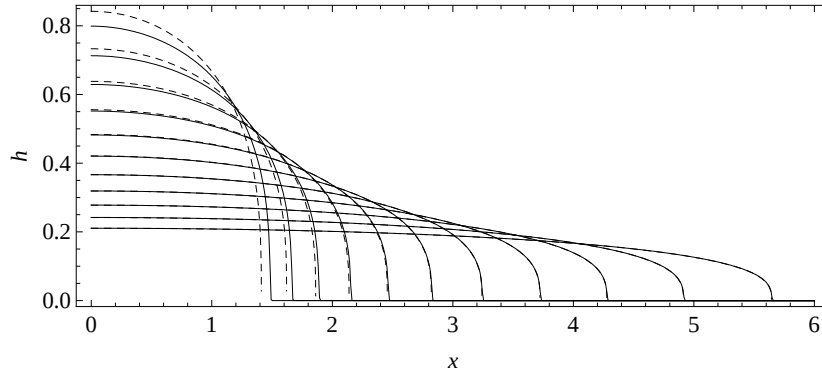


Figure 5.11 : profils de hauteur calculés numériquement (courbe continue) pour l'équation de diffusion non linéaire (5.17) et pour $\theta = 0^\circ$. Calculs effectués aux temps $t = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$, et 1024 . Les solutions auto-similaires (5.20) sont également reportées (courbe à tirets).

Il n'existe pas de solutions analytiques au problème (5.4)–(5.12), mais ce système peut se résoudre numériquement, par exemple en servant de la routine *pdepe* de Matlab, qui est très utile pour résoudre des problèmes différentiels paraboliques avec une seule variable spatiale. La figure 5.11 montre les profils de hauteur à différents temps allant de 1 à 1024 lorsque le plan est horizontal. Nous avons également reporté les solutions auto-similaires (5.20) correspondant à la diffusion pure. La solution numérique au problème (5.4)–(5.12) tend assez rapidement vers les solutions auto-similaires et même aux petits temps, l'approximation par des solutions auto-similaires est raisonnablement bonne pour ce qui concerne la position du front (5.21).

Pour des pentes non nulles, la convergence vers la solution auto-similaire est bien plus lente. Comme cela est visible sur la figure 5.12 pour une inclinaison de $\theta = 6^\circ$, il nous faut attendre $t = 256$ pour observer un écart faible entre solutions numérique et composée. Notons que pour $t \geq 32$, la position du front donnée par la solution composée (5.29) ne diffère que légèrement de celle calculée numériquement et la forme des profils est similaire.

La figure 5.14(a) reporte quelques profils de hauteur mesurés en laboratoire aux temps physiques $\tilde{t} = 2^k$ s avec $k = 0, 1, \dots, 8$, c'est-à-dire pour des temps sans dimension $t = 0,0076 \times 2^k$. Nous avons également tracé les solutions auto-similaires (5.20). La forme de la masse en écoulement est correctement prédite. Toutefois, comme le montre la figure 5.14(b), où l'on a tracé $(h/t^{-1/5})^3$ en fonction de $\xi = x/t^{1/5}$, on note que si les données expérimentales tombent bien sur une courbe maîtresse, celle-ci diffère de la tendance théorique : le profil de hauteur normalisée $(h/t^{-1/5})^3$ tend plutôt vers un profil de la forme $\frac{9}{10}(1,3 - \xi)$ que vers le profil théorique $\frac{3}{10}(\xi_f^2 - \xi^2)$.

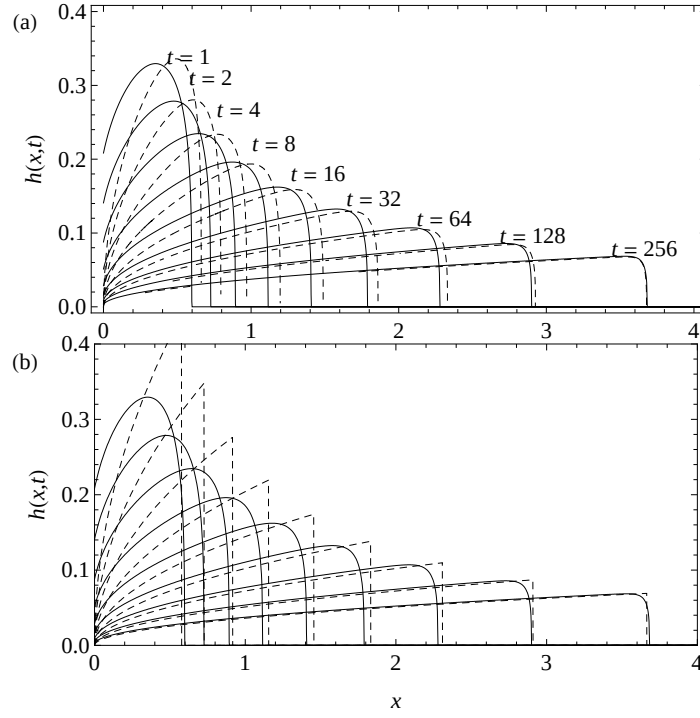


Figure 5.12 : profils de hauteur calculés numériquement (courbe continue) pour $\theta = 6^\circ$. Calculs effectués aux temps $t = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$, et 256 . Dans le graphe (a), l'approximation analytique (5.29) obtenue en composant les solutions interne et externe a été reportée (courbe à tirets). Dans le graphe (b), la solution analytique (5.36) correspondant à de la pure convection est reportée. Calculs réalisés pour $\kappa = 0,186$.

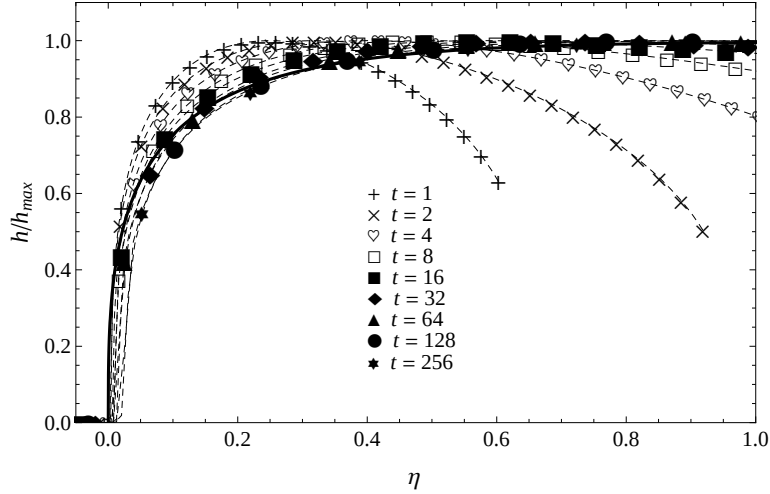


Figure 5.13 : profils de hauteur $h(\eta,t)/t^{-1/5}$ normalisés par $h_{max} = \sqrt{\xi_f/3}$: nous avons tracé les simulations numériques (en trait fin, avec des symboles) et les solutions composées (5.29) pour $\theta = 6^\circ$ et aux temps $t = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$, et 256 . Calculs réalisés pour $\kappa = 0,186$.

Comme cela est visible sur la figure 5.15 y a également un décalage systématique entre la position du front observée et celle calculée. Cela est vraisemblablement dû à l'effet de la porte lors que la « rupture de barrage », qui tend à lever une partie du fluide vers le haut et à retarder ainsi l'écoulement.

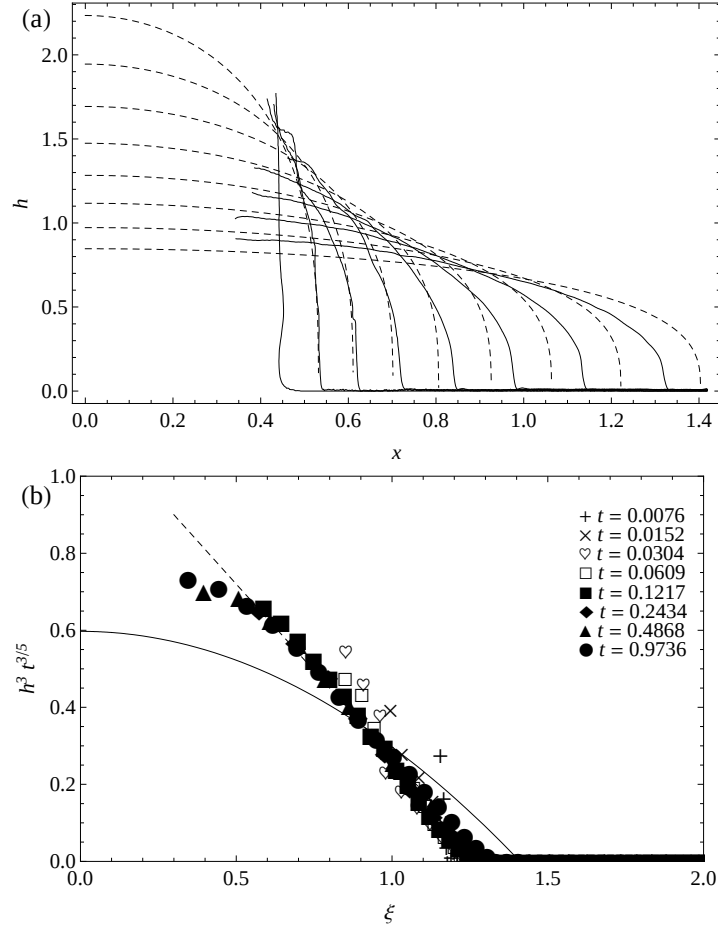


Figure 5.14 : (a) profils de hauteur $h(x,t)$: données expérimentales (courbes continues) et solutions auto-similaires (courbes discontinues) aux temps $t = 7,6 \times 10^{-3}$, $15,2 \times 10^{-3}$, $30,4 \times 10^{-3}$, $60,8 \times 10^{-3}$, $0,122$, $0,243$, $0,486$, et $0,973$. (b) profil de hauteur $(h/t^{-1/5})^3$ en fonction de $\xi = x/t^{1/5}$: données expérimentales et solutions auto-similaires (courbes continues) données par (5.20) sont reportées ; la courbe discontinue $(h/t^{-1/5})^3 = \frac{9}{10}(1,3 - \xi)$ est un calage. Expériences réalisées avec du glycérol $\mu = 345 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. D'après (Ancey & Cochard, 2009).

5.2.3 Régime gravitaire

Nous allons maintenant utiliser la méthode aux perturbations pour étudier l'écoulement dans le régime gravitaire lorsque la pente du plan est forte. Comme la figure figure 5.10 l'illustre, l'écoulement peut être scindé en deux régions distinctes : le front et le corps. Pour le corps, une équation du mouvement à l'ordre 0 est obtenue en supprimant les termes devant lesquels apparaît ϵ dans les équations (5.5)–(5.6) tout en considérant que Re est fini. Comme cela se voit quasiment instantanément dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, l'essentiel de l'écoulement a atteint un régime permanent uniforme, où la force motrice (gravité) est contrebalancée par le gradient de contrainte (viscosité). Comme ce comportement ne permet pas de satisfaire la conditions aux limites (5.11), une couche limite doit prendre place au front. En effet, une solution de régime permanent ne peut pas être valable dans la tête de l'écoulement parce que la hauteur d'écoulement tend vers 0 et que le gradient de pression $\epsilon \partial_x p$ devient très important. La dynamique du front est alors régie par l'équilibre entre gradients de pression et de contrainte,, $\epsilon \partial_x p \sim \epsilon h/\xi$ et $\partial_y \sigma_{xy} \sim (u/h)/h$,

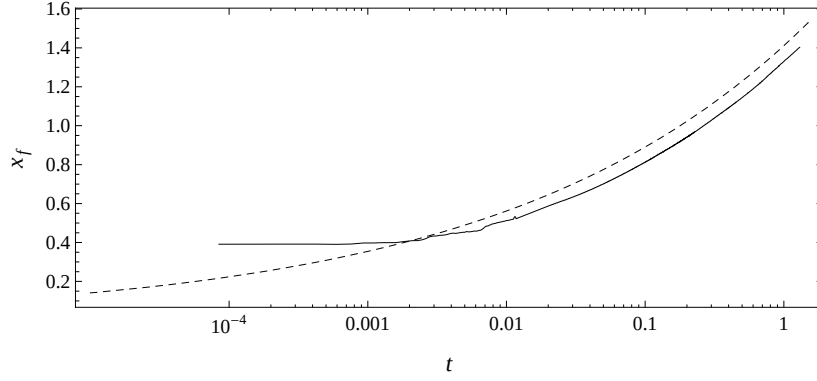


Figure 5.15 : position du front au cours du temps pour $\theta = 0^\circ$ dans un diagramme log-linéaire : données expérimentales data (courbe continue) et prédiction théorique (courbe discontinue) $x_f = \xi_f t^{1/5}$ avec ξ_f donné par (5.21). Expériences réalisées avec du glycérol de viscosité $\mu = 345 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. D'après (Ancey & Cochard, 2009).

respectivement :

$$\epsilon \frac{h}{\xi} \sim \frac{(u/h)}{h}, \quad (5.30)$$

avec $\xi = x - x_f$ et $u \propto h^2$. On peut estimer la longueur de la zone frontale comme étant $\xi = O(\epsilon h)$. Nous allons commencer par décrire le comportement du corps de l'écoulement (solution dite externe), puis nous allons voir comment une correction de couche limite nous permet de satisfaire aux conditions aux limites au front (solution dite interne). En ce qui concerne la hauteur d'écoulement, la solution interne doit rejoindre en $x = x_f$ la solution externe. Pour la vitesse, une procédure un peu plus complexe doit être mise en œuvre pour faire correspondre solutions interne et externe.

Comportement du corps

On pose les développements asymptotiques suivants pour la vitesse, la pression, et la hauteur : $u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots$, $p = p_0 + \epsilon p_1 + \dots$, et $v = v_0 + \epsilon v_1 + \dots$. En considérant que $\text{Re} = O(1)$ et $\text{Ca} \gg 1$, puis en ne conservant que les termes d'ordre 0 dans les équations (5.4-5.6), nous modifions les équations de Navier-Stokes équations :

$$3 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad (5.31)$$

$$1 + \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0, \quad (5.32)$$

avec les mêmes conditions aux limites que celles employées précédemment pour le régime diffusif-convectif. La pression est encore hydrostatique au premier ordre : $p_0 = h_0 - x$. Intégrant (5.14) deux fois nous fournit la vitesse moyenne : $\bar{u}_0 = h_0^2$. On forme finalement une équation de convection non linéaire qui régit l'évolution de h

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0^3}{\partial x} = 0. \quad (5.33)$$

Cette équation est similaire à l'équation de h pour le corps d'un écoulement visqueux peu épais dans un régime diffusif-convectif aux grands temps. Comme précédemment, nous pourrions

résoudre l'équation du mouvement en recherchant des solutions auto-similaires. Nous allons toutefois utiliser ici la méthode des caractéristiques. L'équation (5.33) peut être mise sous forme caractéristique

$$\frac{dh}{d\tau} = 0 \text{ le long de } \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1 \text{ et } \frac{\partial x}{\partial \tau} = 3h^2, \quad (5.34)$$

où τ est une variable muette. L'équation de convection étant hyperbolique, des discontinuités peuvent se développer et se propager à la vitesse $\dot{s}$ donnée par

$$\dot{s}[[h]] = [[h^3]] \quad (5.35)$$

où $[[h]]$ est le saut subi par h à travers le choc situé en $x = s(t)$. En prenant comme conditions initiales $t(0) = 0$, $x(0) = x_0$, et $h(0) = h_i(x_0)$ donné par (5.12), puis en éliminant τ , on obtient

$$h(x,t) = \frac{\sqrt{12\kappa t(\kappa(x-\ell) + h_g) + 1} - 1}{6\kappa t}. \quad (5.36)$$

Initialement, en $x = 0$ et $x = \kappa$, la hauteur devient nulle de façon discontinue. À droite, cette discontinuité initiale donne naissance à un choc, qui se propage à la vitesse $\dot{s}$ prescrite par (5.35) : $\dot{s} = h_f^2$, où h_f est la hauteur d'écoulement au niveau du front, qui peut être calculée à partir de (5.36) en $x = s$. À gauche, une onde de détente centrée se propage dans la queue de la masse en écoulement (voir figure 5.16). Ses caractéristiques se déduisent en recherchant des solutions d'onde de la forme $\mathcal{H}(\zeta)$ pour l'équation (5.33), avec $\zeta = x/t$ (Courant & Friedrich, 1948). On trouve que

$$\mathcal{H}(\zeta) = \sqrt{\frac{1}{3}\zeta}. \quad (5.37)$$

Les caractéristiques associées avec cette onde de détente forment un éventail de droites émanant du point origine $(x,t) = (0,0)$: $x = mt$, avec m un paramètre tel que $0 \leq m \leq m_0$ et $m_0 = 3(h_g - \kappa\ell)^2$, comme l'illustre la figure 5.16(a). Au temps t_A , la caractéristique la plus raide venant de O coupe la courbe de choc (front) $x = s(t)$ au point A. Pour les temps $t \leq t_A$, le profil de hauteur est continu par morceaux avec $h(x,t)$ donné par (5.36) pour $m_0 t \leq x \leq s(t)$ et par (5.37) pour $0 \leq x \leq m_0 t$. Le temps t_A est le temps à partir duquel l'écoulement devient indépendant des détails des conditions initiales ; l'écoulement épouse alors une forme parabolique donnée par (5.37), comme le montre la figure 5.16(b).

Comportement du front

Une couche limite d'épaisseur ϵ se développe au front. Pour mieux comprendre ce qui se passe dans le front, on procède au changement de variables suivant

$$x' = \frac{x - x_f(t)}{\epsilon}.$$

Dans le repère mobile attaché au front, l'équilibre dominant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.5) est réalisé entre le gradient de pression et celui de contrainte de cisaillement, ce qui suggère que la bonne échelle de vitesse serait maintenant $U_{diff} = \epsilon^{3/2}U_*$ (comme dans un régime purement diffusif, avec un terme correctif pour prendre en compte l'effet de la pente). La hauteur d'écoulement doit alors être d'ordre $h = O(\epsilon)$ de telle sorte que le gradient de pression compense bien celui de la contrainte de cisaillement, sous réserve que l'on ait également $S = \cot \theta \epsilon^{1/2} = O(1)$; nous posons donc

$$\epsilon = \tan^2 \theta. \quad (5.38)$$

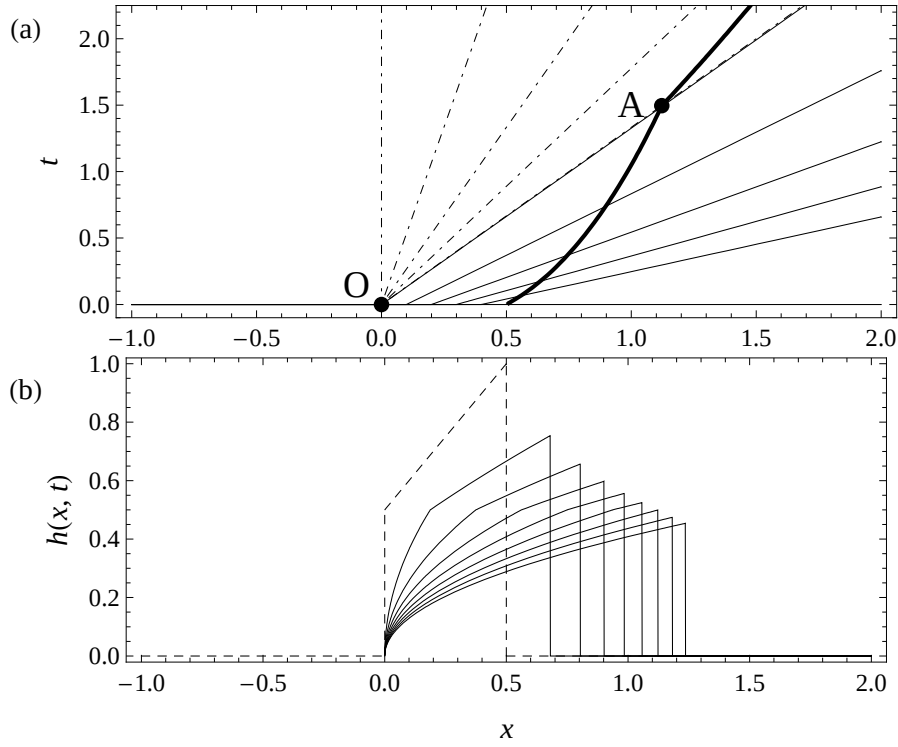


Figure 5.16 : (a) caractéristiques de l'équation de convection (5.33) dans le plan $x - t$. Les courbes à trait fin représentent les caractéristiques émanant de $x = 0$ avec une pente imposée par le profil initial de hauteur. Les courbes pointillées sont les caractéristiques issues de O et représentant l'onde de détente dans la queue de l'écoulement. La courbe épaisse est le lieu des positions du front au cours du temps $x = s(t)$; au point A , la caractéristique la plus raide $x = m_0 t$ venant de O coupe la courbe de choc, ce qui produit une inflexion de la courbe $x_f(t)$. (b) Évolution de $h(x,t)$ à partir $t = 0$ (ligne tiretée) jusqu'à $t = 2$ par pas de temps de 0,25 (trait continu); pour $t > t_A = 1,49$, les profils deviennent paraboliques. Calculs réalisés pour $\kappa = 1/2$.

On peut imposer $S = 1$ de façon arbitraire sans que la généralité du résultat ne soit remise en cause. Nous nous servons maintenant de cette analyse d'échelle pour poser les développements asymptotiques suivants dans les équations du mouvement (5.5)–(5.6): $x = x_f + \epsilon x'$, $y = \epsilon y'$, $t = \epsilon t'$, $u = \epsilon^{3/2} u' = \epsilon^{3/2} u'_0 + \dots$, $v = \epsilon^{3/2} v' = \epsilon^{3/2} v'_0 + \dots$, $h = \epsilon h'_0 + \dots$, et $p = \epsilon p'_0 + \dots$.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement avec le nouveau jeu de variables deviennent :

$$\epsilon^{1/2} \text{Re} \left(\frac{du}{dt'} - \dot{x}_f \frac{\partial u}{\partial x'} \right) = 3\epsilon^{1/2} - 3S \frac{\partial p}{\partial x'} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad (5.39)$$

$$\epsilon^{3/2} \text{Re} \left(\frac{dv}{dt'} - \dot{x}_f \frac{\partial v}{\partial x'} \right) = -3 \cot \theta \left(1 + \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \epsilon^{5/2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \epsilon^{1/2} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}. \quad (5.40)$$

Les conditions dynamiques à la surface libre $y = h(x,t)$ entraînent que $p' = 0$ et $\partial y' u' = 0$. Les conditions de correspondance entre solutions interne et externe impliquent également que les champs de vitesse et la hauteur d'écoulement se rejoignent de façon continue avec la solution externe située en $x' \rightarrow -\infty$; entre autres, cela veut dire que

$$\lim_{x' \rightarrow -\infty} h(x', t') = h_f, \quad (5.41)$$

avec h_f la hauteur du front en $x = x_f$ imposée par la solution externe. Considérant que Re est fini et en supprimant tous les termes ϵ d'ordre 1 ou supérieur, nous pouvons intégrer les

équations de quantité de mouvement (5.39)–(5.40) pour obtenir

$$p_0 = h_0 - y \text{ and } u'_0 = -\frac{3}{2}S\partial_{x'}h'_0(2h'_0 - y')y'. \quad (5.42)$$

Notons que la vitesse ci-dessus ne se raccorde pas à celle de la solution externe, qui impose $u' \propto 3\left(h' - \frac{1}{2}y'\right)y'$ pour $x' \rightarrow -\infty$. Pour remédier à cela, il nous faut introduire une zone tampon entre la solution interne et la solution externe; on définit à cet effet une variable intermédiaire $x = \epsilon^{1/2}x''$ ainsi que $y = \epsilon^{1/4}y''$, $u = \epsilon^{1/2}u''$, $h = \epsilon^{1/4}h''$, et $p = \epsilon^{1/4}p''$. Cela permet d'aboutir à un profil de vitesse $u'' = 3(1 - \cot\theta\partial_{x''}h_0)(2h''_0 - y'')y''/2$, qui relie continûment les champs des vitesses à la fois pour $x'' \rightarrow 0$ et pour $x'' \rightarrow -\infty$ limits. Cette zone tampon est d'épaisseur très faible et peut être négligée par la suite pour le profil de hauteur.

Intégrant le profil de vitesse (5.42) conduit à la vitesse moyenne $\bar{u}' = -S\partial_{x'}hh'^2$ ou de façon équivalente à $\bar{u} = -S\epsilon^{-1/2}\partial_{x'}hh^2 = -\cot\theta\partial_{x'}hh^2$, une expression valable au premier ordre. L'équation d'évolution pour h est donc :

$$\frac{\partial h}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'}G(h) = 0, \text{ avec } G(h) = -h^3 \cot\theta \frac{\partial h}{\partial x'} \quad (5.43)$$

avec la condition aux limites (5.41). Puisque le volume de fluide contenu dans la région interne est d'ordre ϵ , la masse est simplement redistribuée au sein de la zone frontale. La condition initiale pour l'équation d'évolution (5.43) est

$$\begin{cases} h(x', 0) = h_f \text{ pour } x' \leq 0, \\ h(x', 0) = 0 \text{ pour } x' > 0. \end{cases} \quad (5.44)$$

Le problème différentiel (5.43)–(5.44) ne se résout que numériquement, par exemple à l'aide de la routine *pdepe* de Matlab. Notons que l'équation (5.43) admet aussi des solutions asymptotiques comme on l'a vu plus haut pour le régime diffusif (voir § 5.2.2).

Après avoir substitué les variables (x', t') avec les variables originelles $(x = x_f + \epsilon x', t = \epsilon t')$ dans la solution à l'équation (5.43), nous obtenons une solution composée d'une solution externe h_{outer} et d'une solution interne h_{inner}

$$h_{comp.} = h_{outer} + h_{inner} - h_{front}, \quad (5.45)$$

où $h_{front} = h_f$ est la valeur commune où les deux solutions se raccordent, h_{outer} est la solution à (5.33), et h_{inner} la solution à (5.43). La solution composée fournit une approximation uniforme de la solution au premier ordre.

Résumé

Si ce n'est une différence dans l'expression usitée pour ϵ , les solutions interne et externe pour le régime gravitaire ont le même comportement que celles relatives au régime diffusif-convectif: peu de temps après l'affaissement du volume initialement contenu dans le réservoir, le corps de l'écoulement (solution externe) entre dans un régime convectif très proche du régime permanent uniforme alors que la tête de l'écoulement possède une dynamique propre caractérisée par l'équilibre entre gradient de pression (courbure de la surface libre) et dissipation visqueuse. Physiquement, il y a peu de différences entre les régimes diffusif-convectif et gravitaire et de ce fait, il n'y a pas de transition de l'un vers l'autre. En particulier, l'approximation sur le long terme du profil de hauteur dans le corps de l'écoulement est strictement identique pour les deux régimes [comparer les équations (5.22) et (5.37)] tandis que la tête a à peu près la même forme.

5.3 Rupture de barrage d'un fluide non visqueux

Nous allons nous intéresser à la rupture d'un barrage contenant un volume de fluide non visqueux. Contrairement au cas précédent (§ 5.2), nous négligeons ici tout effet dissipatif lié à la viscosité du fluide. On va tout d'abord étudier le cas d'un barrage contenant un volume infini de fluide sur un fond horizontal ; la solution est connue sous le nom de *solution de Ritter* car c'est Ritter (1892)³ qui l'a établie à la fin du XIX^e siècle. On va obtenir la solution de Ritter à l'aide différentes techniques, ce qui permettra de se familiariser avec ces techniques. Puis nous verrons comment prendre en compte l'effet d'un volume fini de fluide et l'effet de la pente. L'effet du frottement visqueux sera examiné ultérieurement.

5.3.1 Rupture de barrage d'un volume infini (solution de Ritter)

On considère un mur vertical qui retient un lac de retenue, dont le volume est supposé infini. La hauteur d'eau initiale est h_i . À l'instant $t = 0$, on suppose que le mur du barrage s'efface totalement et laisse s'écouler le volume d'eau sur un lit horizontal. C'est la géométrie la plus simple qu'on puisse imaginer. Le problème correspondant est appelé problème de rupture de barrage. La première solution analytique connue est due à Ritter. La méthode classique de résolution est fondée sur la *méthode des caractéristiques*. Nous allons voir cette méthode ainsi qu'une autre approche dite « méthode des formes autosimilaires » qui exploite les propriétés d'invariance des équations différentielles.

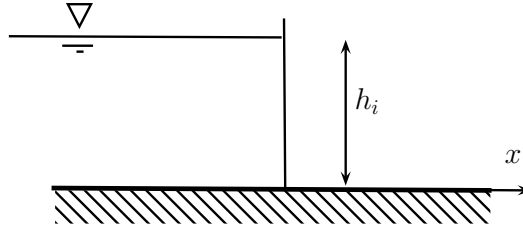


Figure 5.17 : géométrie du problème dit de « rupture de barrage ».

Rappelons que lorsqu'on néglige le frottement sur le fond et qu'on considère un fond horizontal, les équations de Saint-Venant s'écrivent sous forme adimensionnelle

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (5.47)$$

Dans le cas d'une rupture de barrage, les conditions initiales et aux limites sont les suivantes

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty, u(x,0) &= 0, \\ x < 0, h(x,0) &= h_i, \\ x > 0, h(x,0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

3. August Ritter (1826–1908) était un ingénieur (génie mécanique) allemand. Il commença sa carrière dans des usines fabriquant des machines, puis en 1859 il obtient un poste à l'université d'Hannovre. Il fut nommé professeur de mécanique à Aix-la-Chapelle en 1870, où il finit sa carrière. Ses recherches l'ont amené à s'intéresser à différents problèmes pratiques de la mécanique et de la thermique. En particulier, il proposa en 1892 la première solution analytique du problème de rupture de barrage. En fait, la première solution mathématique de ce type de problème est vraisemblablement dû au mathématicien allemand Georg Friedrich Bernhard Riemann, qui proposa en 1859 une méthode générale de résolution des équations hyperboliques comme celles de Saint-Venant.

Méthode des formes auto-similaires

On recherche une solution sous la forme d'une solution auto-similaire

$$\bar{u} = t^{\beta/\alpha} U(\zeta) \text{ et } h = t^{\gamma/\alpha} H(\zeta),$$

avec $\zeta = x/t^\alpha$ la variable de similarité, H et U deux fonctions à déterminer. En remplaçant $\bar{u}$ et h par leur forme auto-similaire dans les équations (5.46–5.47), on trouve : $\beta + \alpha = 1$ et $\gamma + 2\alpha = 2$. Pour que cette solution satisfasse les conditions initiales et aux limites, on doit poser $\beta = \gamma = 0$, d'où $\alpha = 1$. Le système d'équations (5.46–5.47) devient alors

$$\begin{aligned} H \frac{dU}{d\zeta} + (U - \zeta) \frac{dH}{d\zeta} &= 0, \\ (U - \zeta) \frac{dU}{d\zeta} + g \frac{dH}{d\zeta} &= 0 \end{aligned}$$

On aboutit alors à un système d'équations, qui mis sous forme matricielle s'écrit

$$\begin{pmatrix} H & U - \zeta \\ U - \zeta & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U' \\ H' \end{pmatrix} = 0,$$

où le prime symbolise la dérivée selon ζ . Pour que ce système admette une solution non triviale, il faut que son déterminant s'annule, ce qui conduit à $gH = (U - \zeta)^2$. On substitue cette relation dans le système d'équations ci-dessus et on tire $U' = 2\zeta/3$, d'où $U = 2(\zeta + c)/3$, où c est une constante d'intégration, $H = 4(c - \frac{1}{2}\zeta)^2/(9g)$. La constante c_0 est trouvée en se servant des conditions aux limites : $c_0 = \sqrt{gh_i}$. Retournant aux variables originales, on déduit finalement la solution dite de Ritter des équations de Saint-Venant

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \quad (5.49)$$

$$h(x, t) = \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2. \quad (5.50)$$

La justification du terme de forme auto-similaire apparaît clairement quand on examine la solution tracée sur la figure 5.18 : les solutions se ressemblent toutes et semblent être des formes « étirées » à partir d'une seule courbe. Quelques autres remarques :

- le front est le point où $h = 0$, donc ici c'est le point tel que $x = 2c_0 t$, ce qui indique que la vitesse du front est $u_f = 2c_0$. C'est une valeur qui ne dépend que de la hauteur initiale et d'aucun autre paramètre (comme le volume de fluide). Cette valeur est aussi le double de la célérité des ondes en eau peu profonde $c_0 = \sqrt{gh_i}$;
- la forme du front est parabolique : le fluide se présente comme une lame de plus en plus fine au fur et à mesure que l'on s'approche du front. Cela n'est pas cohérent avec les observations puisqu'en général le front se présente plutôt comme un mur d'eau. On verra comment on peut expliquer cela en faisant intervenir localement la rugosité du lit (voir § 5.5.1) ;
- toutes les courbes $h(x, t)$ passent par le point $x = 0$ et $h = 4c_0^2/(9g) = 4h_i/9$. De même, toutes les courbes $u(x, t)$ passent par le point $x = 0$ et $u = 2c_0/3$. Cela montre que la rupture de barrage est équivalent à injecter un débit constant et égal à $uh = 8\sqrt{gh_i^3}/27$.

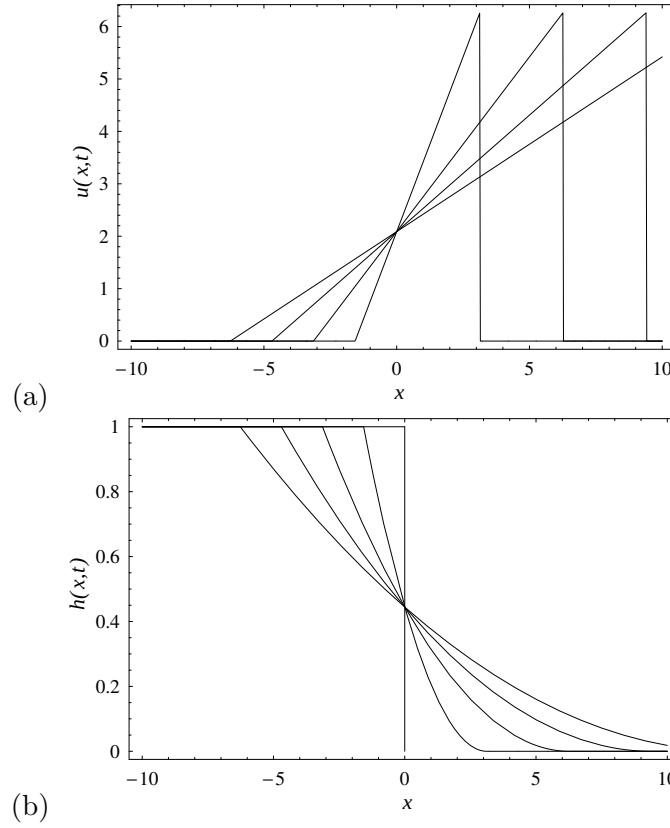


Figure 5.18 : solution du problème de rupture de barrage aux temps : $t = 0 ; 0,5 \text{ s} ; 1 \text{ s} ; 1,5 \text{ s} ; 2 \text{ s}$. (a) Variation de la vitesse moyenne u en fonction de x pour les différents temps ; notons que la variation verticale au niveau du front n'est pas la solution physique et ne sert ici qu'à positionner le front. (b) variation de la hauteur en fonction de x pour différents temps.

Méthode des caractéristiques

On transforme les équations de Saint Venant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0, \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (5.52)$$

en un système d'équations différentielles ordinaires en soustrayant ou additionnant membre à membre chaque équation

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh}, \quad (5.53)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh}. \quad (5.54)$$

Cela fait apparaître deux nouvelles inconnues : $r = u + 2\sqrt{gh}$ et $s = u - 2\sqrt{gh}$, dites *variables de Riemann*. Dans le cas présent, les variables r et s sont constantes le long des courbes caractéristiques d'équation $dx/dt = \lambda_{\pm}$. Pour cette raison elles sont appelées *invariants de Riemann*.

Les équations de Saint-Venant sont équivalentes au système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d}{dt}(u \pm 2\sqrt{gh}) = 0,$$

le long des courbes caractéristiques $C_{\pm}$: $dx/dt = u \pm \sqrt{gh}$.

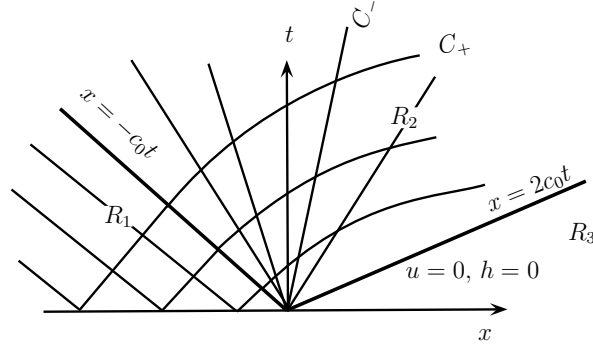


Figure 5.19 : éventail des caractéristiques émanant du point origine.

Si on considère une rupture de barrage, on doit avoir comme conditions initiales :

– pour la vitesse	$-\infty < x < \infty$	$u(x,0) = 0$
– pour la hauteur	$x < 0$	$h(x,0) = h_i$
	$x > 0$	$h(x,0) = 0$

La perturbation engendrée à $t = 0$ et $x = 0$ par la rupture va se propager à l'amont et à l'aval.

Initialement, comme u et h sont constants, les variables r et s le sont aussi. Après la rupture, toute la partie du volume d'eau qui n'est pas encore mise en mouvement est également caractérisée par des valeurs de r et s constantes. Mathématiquement, on montre que lorsqu'on a un domaine d'écoulement « constant » (R_1 sur la figure 5.19), c'est-à-dire où u et h sont constants, il existe nécessairement un domaine dit « onde simple » (R_2) avec une dépendance $u(h)$ et une famille de caractéristiques qui sont des droites. Il existe un troisième domaine « vide » (R_3) où l'écoulement n'est pas encore parvenu. On ne connaît pour l'instant pas les limites de ces différents domaines dans le plan $x - t$.

Examinons tout d'abord les caractéristiques C_+ émanant de l'axe $t = 0$ et $x < 0$. Le long de ces caractéristiques, les invariants sont

$$r = u + 2\sqrt{gh} = 2c_0, \quad (5.55)$$

avec $c_0 = \sqrt{gh_i}$ la vitesse initiale de l'onde de rupture. Ces caractéristiques ont pour équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh},$$

qui sont des courbes (que l'on ne connaît pas encore) dans le domaine R_2 , mais des droites dans le domaine R_1 puisque u et h sont constants. L'information est transmise le long de ces caractéristiques du domaine R_1 vers le domaine R_2 .

La caractéristique marquant les limites de cette zone non perturbée, que l'on appellera domaine R_1 (voir figure 5.19), est la droite $x = -c_0t$ reportée en gras sur la figure 5.19. Cette caractéristique émanant de 0 représente tout simplement la propagation de la discontinuité initiale de h en $x = 0$ (à $t = 0$). Elle appartient à la famille C_- d'équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh},$$

qui avec les valeurs initiale à gauche de 0 donne ici $dx/dt = -c_0$. Dans le domaine R_2 , la famille de caractéristiques C_- forme un réseau en éventail (onde simple centrée) d'équation

$$\frac{x}{t} = \lambda_- = u - \sqrt{gh}, \quad (5.56)$$

En résolvant le système d'équation (5.55–5.56), on trouve alors :

$$u = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \quad (5.57)$$

$$h = \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2, \quad (5.58)$$

À noter qu'en $x = 2c_0t$, la hauteur devient nulle. Le domaine R_3 représentant le domaine non encore concerné par la rupture de barrage est délimité par la caractéristiques $x = 2c_0t$ qui est à la fois une caractéristique C_- et C_+ . L'avancée du front se fait à la vitesse $2c_0$.

À noter qu'on a ici : $u = 2(c_0 - \sqrt{gh})$ dans tout le domaine d'écoulement (c'est l'invariant r de Riemann qui se conserve). En reportant cette expression dans l'équation de conservation de la masse, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (2c_0 - 3\sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

qui est l'équation de l'onde cinématique, avec une vitesse de propagation $2c_0 - 3\sqrt{gh}$.

Remarque sur les invariants de Riemann

Le passage du système (5.51–5.52) au système (5.53–5.54) peut ressembler à un tour de passe-passe puisqu'on a additionné et retranché des équations pour obtenir le résultat souhaité. En fait, cette transformation repose sur un mécanisme assez général de transformation des équations différentielles hyperboliques que l'on a explicité au chapitre 3 (voir § 3.2.1).

5.3.2 Rupture de barrage de volume fini sur un fond horizontal

Problème à résoudre

On considère une rupture de barrage d'un volume fini de fluide le long d'un plan horizontal. Le mouvement est décrit par les équations de Saint-Venant sous forme adimensionnelle

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0, \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial x} h = 0. \quad (5.60)$$

Les conditions initiales et aux limites sont

- pour $-1 \leq x \leq 0$, on a $h = 1$; en dehors de ce domaine, on a $h = 0$;
- en $x = -1$, il y a un mur, donc $u = 0$;
- à l'instant $t = 0$, on supprime le mur du barrage.

On a vu que cette équation admet une solution auto-similaire dans le cas d'un volume infini (voir § 5.3.1) :

$$u = \frac{2}{3}(\zeta + 1),$$

$$h = \frac{1}{9}(-\zeta + 2)^2,$$

avec $\zeta = x/t$. Ce système peut se mettre sous la forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u \\ \sqrt{h} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & 2\sqrt{h} \\ \frac{1}{2}\sqrt{h} & u \end{bmatrix}.$$

Équations caractéristiques

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont $\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{h}$. Ce système peut donc se mettre sous la forme caractéristique

$$\frac{du \pm 2\sqrt{h}}{dt} = 0 \text{ le long des caractéristiques } \frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{h}. \quad (5.61)$$

Les invariants de Riemann sont $r = u + 2\sqrt{h}$ et $s = u - \sqrt{h}$. On peut écrire les valeurs propres en termes de r et s :

$$\lambda_+ = u + \sqrt{h} = \frac{3r + s}{4} \text{ et } \lambda_- = u - \sqrt{h} = \frac{3s + r}{4}.$$

Avec les variables r et s , les équations (5.61) deviennent

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ le long des caractéristiques } \frac{dx}{dt} = \lambda_+ = \frac{3r + s}{4}. \quad (5.62)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \text{ le long des caractéristiques } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = \frac{3s + r}{4}. \quad (5.63)$$

Si au lieu de travailler dans le plan physique $x - t$, on travaille dans le plan $r - s$, les caractéristiques sont les droites $r = cste$ et $s = cste$ le long desquelles on a

– pour la r -caractéristique,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_+ \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{3r + s}{4} \frac{\partial t}{\partial s} \text{ le long de } r = cste, \quad (5.64)$$

car $r = cste$;

– pour la s -caractéristique,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_- \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{3s + r}{4} \frac{\partial t}{\partial r} \text{ le long de } s = cste, \quad (5.65)$$

car $s = cste$.

On peut obtenir une seule équation gouvernant t ou x dans le plan $r - s$. On différencie l'équation (5.64) par r et l'équation (5.65) par s

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} &= \frac{3r + s}{4} \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} + \frac{3}{4} \frac{\partial t}{\partial s}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} &= \frac{3s + r}{4} \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} + \frac{3}{4} \frac{\partial t}{\partial r}. \end{aligned}$$

En retranchant on obtient une équation pour t

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} = \frac{3}{2(r - s)} \left(\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial t}{\partial s} \right). \quad (5.66)$$

Pour x , on déduit

$$\frac{2}{3}(s - r) \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} = \frac{3r + s}{3s + r} \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{3s + r}{3r + s} \frac{\partial x}{\partial s}. \quad (5.67)$$

Notons que l'équation (5.66) est une forme particulière de l'équation (A.18) avec $\lambda = 3$, $x = r$ et $y = -s$. Il existe donc une solution au problème adjoint, ce qui est fort utile pour résoudre des problèmes avec les équations de Saint-Venant. En pratique, on ne résout pas directement l'équation (5.67), mais on résout d'abord l'équation (5.66), puis on se sert de l'une des équations (5.64) ou (5.65) pour déterminer x .

Onde simple et détermination des caractéristiques

On s'intéresse tout à ce qui passe aux premiers instants ; la solution est alors similaire à celle trouvée pour un volume infini. Dans le plan physique $x-t$, le demi-plan $t \geq 0$ correspond à l'état constant $h = 1$ et $u = 0$. On sait que l'on va avoir deux frontières mobiles qui délimitent le volume de fluide dans un régime d'« onde simple » et qui émanent du point origine :

- une première frontière correspondant au front $h = 0$ et $u = u_f$ (qui sera la même que pour le problème infini) ;
- une seconde frontière correspondant à l'onde régressive qui se propage dans le réservoir jusqu'à venir buter contre le mur arrière : $h = 1$ et $u = 0$.

Ce régime d'onde simple est caractérisé par la constance d'un des invariants de Riemann, ici c'est nécessairement celui rattaché aux ondes progressives, donc $r = cste$. La valeur de r est fixée par les conditions initiales, ici $r = u + 2\sqrt{h} = 2$. Dans le plan $x-t$, le domaine d'onde simple D_1 se présente comme un cône avec son sommet à l'origine, alors que dans le plan $r-s$, il s'agit d'un segment de droite le long de la verticale $r = 2$. Comme $r = 2$ partout dans D_1 , les s -caractéristiques sont des droites dans le plan $x-t$:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{h} = 2 - 3\sqrt{h} = cste,$$

ce qui donne $x = (2 - 3\sqrt{h})t$ et en inversant, on trouve bien $h = (-x/t + 2)^2/9$. En se servant de la valeur de r , on retrouve ensuite $u = 2(x/t - 1)/3$. Les deux frontières correspondent donc aux droites $x = -t$ (onde régressive) et $x = 2t$ (onde progressive). L'éventail de s -caractéristiques correspond à des valeurs de s compris entre $s = u - 2\sqrt{h} = -2$ (onde régressive) à $s = 2$ (front). On peut se servir de s pour paramétrer les s -caractéristiques : en effet, partant de la relation $s = u - 2\sqrt{h}$ où l'on remplace u et h par leur expression respective en fonction de x/t , on tire

$$x = \frac{1}{4}(3s + 2)t. \quad (5.68)$$

Les r -caractéristiques sont des droites dans le domaine D_2 (à gauche de D_1 dans le plan $x-t$), qui représente le domaine d'écoulement non encore concerné par l'onde régressive. Dans le domaine D_1 , les r -caractéristiques sont des courbes d'équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{h} = 2 - \sqrt{h} = 2 - \frac{1}{3} \left(2 - \frac{x}{t} \right),$$

dont la solution est $x(t) = 2t + at^{1/3}$, avec a une constante. Notons que cette équation peut également se déterminer comme suit. Dans le plan $r-s$, on a le long de $r = 2$ la relation (5.64) et en même temps la relation (5.68), on tire l'équation suivante

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{3t}{4 - 2s},$$

dont les solutions sont de la forme $t = (b(2-s))^{-3/2}$, avec b une constante d'intégration ; cela implique donc que $s = 2 - (bt)^{-2/3}/2$. En substituant s dans l'équation (5.68), on trouve

$$x = \frac{1}{4} \left(8 - \frac{3}{2} \frac{1}{(bt)^{2/3}} \right) t = 2t - \frac{3}{2} \frac{t^{1/3}}{b^{2/3}} = 2t + at^{1/3}, \quad (5.69)$$

qui est bien comparable à la forme trouvée plus haut. En résumé, les r -caractéristiques

- sont des droites d'équation $x = c + 2t$ dans le domaine non perturbé D_2 , avec c une constante ;
- sont des courbes d'équation $x = 2t - 3c^{2/3}t^{1/3}/8$ dans le domaine « onde simple » D_1 .

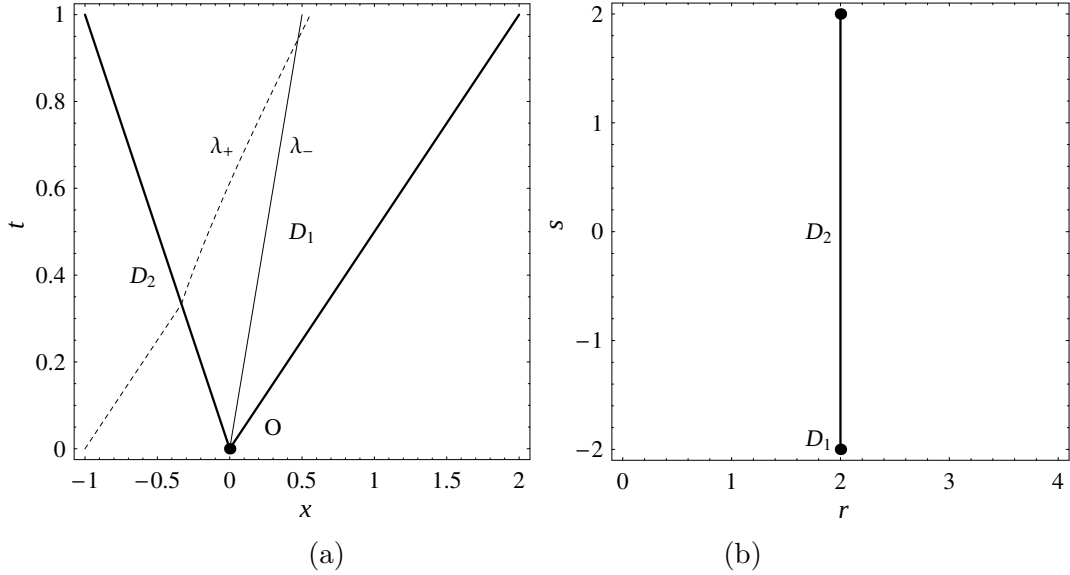


Figure 5.20 : caractéristiques dans le problème de rupture de barrage. (a) Dans le plan physique $x-t$: D_2 représente un état stationnaire ($r = 2$ et $s = -2$) où la retenue n'est pas encore affectée par l'onde régressive ; D_1 est le domaine où r reste constant (onde simple), mais s augmente de -2 à 2 . Ce domaine est encadré par deux s -caractéristiques reportées en gras. La courbe à tiret représente une r -caractéristique, ici émanant du point $x_0 = -1$. (b) Dans le plan de Riemann $r-s$.

Effet de volume fini

Examinons ce qui se passe dans le plan $x-t$ lorsque l'effet de volume fini se fait sentir. Les deux s -caractéristiques délimitant le domaine d'onde simple ont pour équation : $x = 2t$ (front) et $x = -t$ (queue). Dans le système de coordonnées adimensionnelles, l'abscisse marquant la fin de la retenue est $x_b = -1$; ce point est atteint à l'instant $t = 1$ par l'onde régressive émanant de O . Il part alors une r -caractéristique dont l'équation est donnée par la relation (5.69) ; son équation est : $x = 2t - 3t^{1/3}$. Cette courbe BC délimite un domaine D_3 , au-dessus de laquelle l'onde n'est plus simple. Pour calculer l'écoulement dans ce domaine « complexe », on va se servir de la fonction de Riemann et résoudre l'équation (5.66), mais pour cela il faudrait les conditions aux limites sur le domaine d'intégration D_3 , ce qui n'est pas très facile pour la courbe $x = 0$.

Pour contourner cette difficulté, on va utiliser un principe de symétrie : on considère que le problème est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$ où la seule condition aux limites est $u = 0$. Pour cela, on suppose qu'il existe un barrage situé en $O'(-2, 0)$. La rupture de barrage entraîne une onde progressive dans le demi-plan $x < 0$ alors qu'une onde régressive se propage vers 0. Le problème se ramène donc à trouver l'intersection de deux ondes simples (Courant & Friedrich, 1948, voir § 8.2, pp. 191–197). Dans le plan $x < 0$, le domaine D_4 représentant l'onde simple est caractérisé par $s = cste = -2$. Dans ce domaine, la solution s'écrit :

$$u = \frac{2}{3}(\zeta - 1),$$

$$h = \frac{1}{9}(\zeta + 2)^2,$$

avec $\zeta = (x + 2)/t$. Les r -caractéristiques ont pour équation : $x + 2 = (3r - 2)t/4$. Le domaine D_4 est délimité en partie supérieure par la courbe BE qui est une s -caractéristique (avec

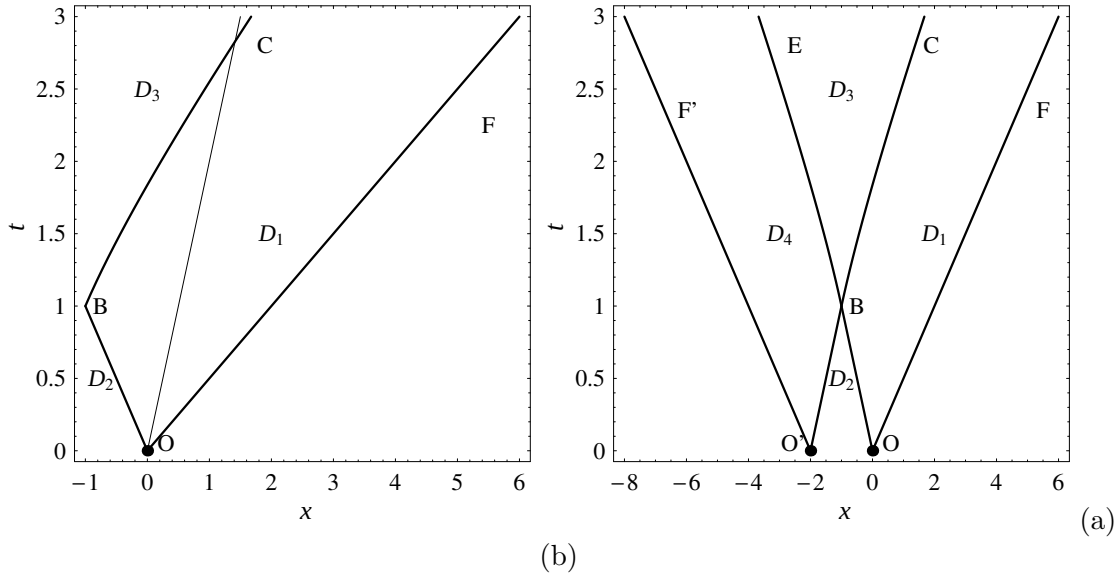


Figure 5.21 : réflexion de l'onde simple contre le mur. (a) Comportement des caractéristiques dans le plan physique. (b) Traitement du problème en considérant une rupture dans le demi-plan $x < 0$. Le domaine D_2 est délimité par la courbe frontale OF d'équation $x = 2t$ (s -caractéristique avec $s = 2$), la courbe « onde régressive » OB d'équation $x = -t$ (s -caractéristique avec $s = -2$), et la réflexion de cette onde contre le mur BC d'équation $x = -3t^{1/3} + 2t$ (r -caractéristique avec $r = 2$). Le domaine D_4 est délimité par la courbe frontale OF' d'équation $x = -2 - 2t$ (r -caractéristique avec $r = -2$), la courbe « onde régressive » $O'E$ d'équation $x = -2 - t$ (r -caractéristique avec $r = 2$), et la réflexion de cette onde contre le mur BD d'équation $y = 3t^{1/3} - 2t - 2$ (s -caractéristique avec $s = -2$).

toujours $s = -2$); son équation est

$$x = 3t^{1/3} - 2t - 2.$$

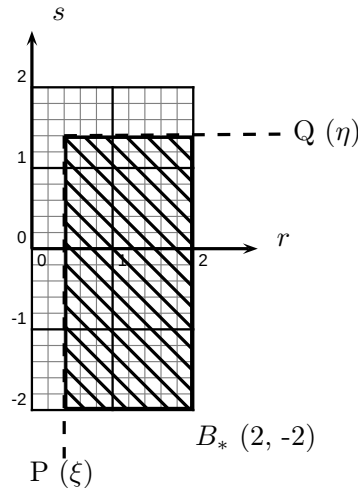


Figure 5.22 : domaine d'intégration dans le plan de l'hodographe. Le contour est orienté dans le sens positif $P \rightarrow B_* \rightarrow Q$.

On va intégrer l'équation (5.66) dans le domaine D_3 , avec pour conditions aux limites

- $t = 8(2 - s)^{-3/2}$ le long de la courbe BC dans le plan $x - t$ (segment B_*P le long de $r = 2$ dans le plan de l'hodographe);

– $t = 8(2 + r)^{-3/2}$ le long de la courbe BE dans le plan $x - t$ (segment B_*Q le long de $s = 2$ dans le plan de l'hodographe).

D'après la méthode de Riemann [voir équation (A.17)], la solution s'écrit pour un point $M(\xi, \eta)$

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{2}t(P)B[P; M] + \frac{1}{2}t(Q)B[Q; M] + \int_P^Q (Uds - Vdr),$$

où B est la fonction de Riemann trouvée précédemment [voir équation (A.18) avec $\lambda = 3$, $x = r$ et $y = -s$]. On a

$$B(r, s; \xi, \eta) = \frac{(r - s)^3}{(r - \eta)^{3/2}(s - \xi)^{3/2}} F\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{(r - \xi)(s - \eta)}{(r - \eta)(s - \xi)}\right].$$

Cette fonction vérifie $B(r, s; r, s) = 1$ et

$$\frac{\partial B}{\partial s} = -\frac{3}{2} \frac{B}{r - s} \text{ sur } r = \xi \text{ et } \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{3}{2} \frac{B}{r - s} \text{ sur } s = \eta.$$

Par ailleurs, les fonctions U et V intervenant dans l'équation (A.17) sont données par

$$\begin{aligned} U &= -\frac{3}{2} \frac{1}{r - s} tB + \frac{B}{2} \frac{\partial t}{\partial s} - \frac{t}{2} \frac{\partial B}{\partial s}, \\ V &= \frac{3}{2} \frac{1}{r - s} tB + \frac{B}{2} \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{t}{2} \frac{\partial B}{\partial r}. \end{aligned}$$

La solution est assez simple à trouver une fois qu'on a bien ordonné les termes

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{2}t(P)B[P; M] + \frac{1}{2}t(Q)B[Q; M] - \int_P^{B_*} Vdr + \int_Q^{B_*} Uds,$$

or

$$\begin{aligned} \int_P^{B_*} Vdr &= -\frac{1}{2}[tB]_P^{B_*} + \int_P^{B_*} B \left(\frac{3}{2} \frac{t}{r - s} + \frac{\partial t}{\partial r} \right) dr, \\ \int_Q^{B_*} Uds &= -\frac{1}{2}[tB]_Q^{B_*} + \int_P^{B_*} B \left(-\frac{3}{2} \frac{t}{r - s} + \frac{\partial t}{\partial s} \right) ds. \end{aligned}$$

En remarquant que sur les frontières $P \rightarrow B_*$ et $B_* \rightarrow Q$, on a $t_r = -3t/2/(r - s)$ et $t_s = 3t/2/(r - s)$, on aboutit à la solution suivante (Courant & Friedrich, 1948; Hogg, 2006)

$$t(\xi, \eta) = B(2, -2; \xi, \eta).$$

On peut trouver ensuite x par intégration le long d'une caractéristique; par exemple le long d'une r caractéristique, on a

$$x(s|r = \text{cste}) = \frac{1}{4}(3s + 2)t(2, s) + \frac{1}{4} \int_{-2}^s (3r + s') \frac{\partial t}{\partial s} ds'.$$

Les figures 5.24 et 5.23 montrent le diagramme des caractéristiques et les profils de h et u en fonction de x . Pour ces profils, on a réalisé des calculs de t et x pour un domaine de calcul $2 \leq r < 0$ et $2 \leq s < -2$; on a considéré une grille de points (r_i, s_j) dans ce domaine et calcul les x_{ij} et t_{ij} correspondants. Il faut ensuite interpoler les valeurs $x_{ij}(r, s)$ et $t_{ij}(r, s)$; pour calculer $u(x, t)$ à un temps donné $t = t_0$, il suffit alors de se donner une valeur r_k , calculer s_k tel que $t(s_k|r_k) = t_0$; on stocke ensuite $\{x(s_k|r_k), r_k, s_k\}$. Les valeurs h_k et u_k correspondantes sont $h_k = (r_k - s_k)/4$ et $u_k = (r_k + s_k)/2$.

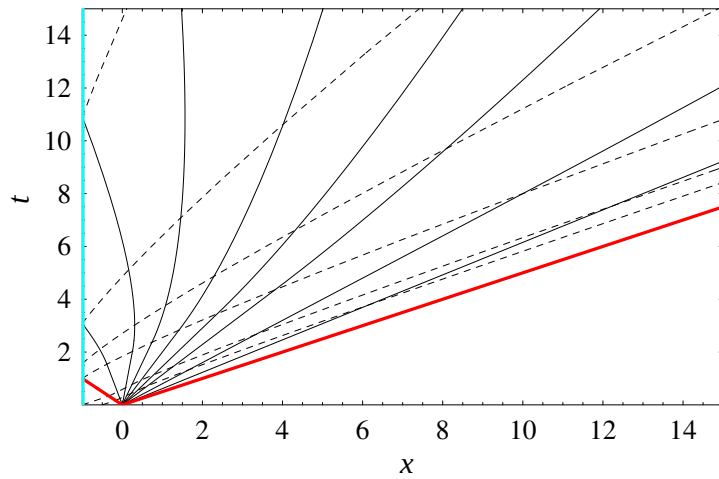


Figure 5.23 : diagramme des caractéristiques. Les s -caractéristiques sont reportées en trait continu ($s = 1,5; 1; 0,5; 0,25; 0; -0,5; -1$). Les r -caractéristiques sont en trait discontinu ($r = 2; 1,5; 0,5$). Les caractéristiques correspondant au front et à la queue de l'écoulement sont reportées en rouge et gras ($s = 2$ et $s = -2$).

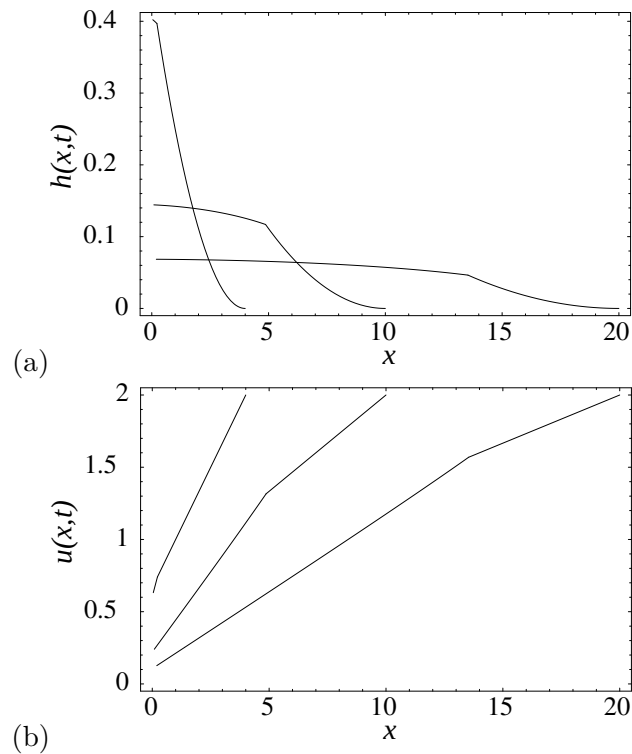


Figure 5.24 : profils de $u(x,t)$ et $h(x,t)$ à $t = 2$, $t = 5$ et $t = 10$. D'après (Hogg, 2006).

5.3.3 Rupture de barrage de volume fini sur un plan incliné

Considérons un volume fini de fluide. Le mouvement est décrit par les équations de Saint-Venant

$$\frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0, \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u \frac{\partial}{\partial x}u + g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x}h = g \sin \theta, \quad (5.71)$$

qui peuvent être rendues sous une forme sans dimension à l'aide du changement de variable

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{x}{L_0}, \\ \hat{h} &= \frac{h}{H_0}, \\ \hat{t} &= \sqrt{\frac{g \cos \theta}{H_0}} t, \\ \hat{u} &= \frac{u}{\sqrt{g H_0 \cos \theta}}, \end{aligned}$$

avec H_0 une hauteur caractéristique et $L_0 = H_0$.

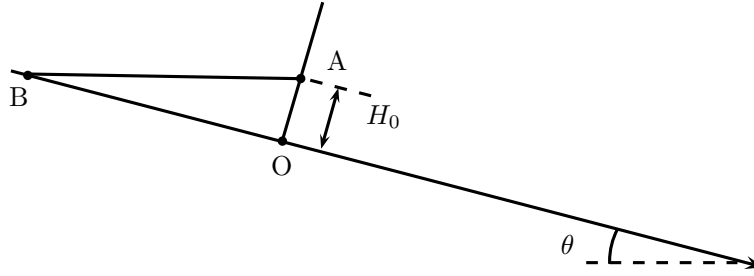


Figure 5.25 : géométrie initiale du barrage.

On a alors

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} + \hat{h} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} = 1. \quad (5.73)$$

Ce système peut se mettre sous la forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \mathbf{U} = \mathbf{B},$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u \\ c \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & h \\ 1 & u \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tan \theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont $\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{h}$. Ce système peut donc se mettre sous la forme caractéristique

$$\frac{du \pm 2c}{dt} = \tan \theta \text{ le long des caractéristiques } \frac{dx}{dt} = u \pm c,$$

avec $c = \sqrt{h}$. Dans le plan physique $x - t$, le demi-plan $t < 0$ correspond à l'état constant $h = h_0(x) = 1 - x/x_b$ et $u = 0$, avec $x_b = -1/\tan \theta$. On sait que l'on va avoir deux frontières mobiles qui délimitent le volume de fluide et qui émanent du point origine :

- une première correspondant au front $h = 0$ et $u = u_f$ (que l'on ne connaît pas encore) ;
- une seconde correspondant à l'onde régressive qui se propage dans le réservoir jusqu'à venir buter contre la fin de celui-ci : $h = h(t)$ (car la profondeur est variable ici) et $u = 0$.

Les deux caractéristiques associées ont donc pour équation : $dx/dt = u$ (front) et $dx/dt = -c$ (queue). Pour le front, on a de plus $du/dt = \tan \theta$, donc $u = t \tan \theta + 2$ car $t = 0$, on a $u = 2$ comme condition initiale⁴ ; on déduit que $x = t^2 \tan \theta / 2 + 2t$ est la caractéristique C_+ recherchée.

Pour la queue, on a $d(-2c)/dt = \tan \theta$, ce qui donne $c = -\frac{\tan \theta}{2}t + 1$ car à $t = 0$, on a $c = 1$, donc en reportant dans l'équation caractéristique on déduit que $x = \frac{\tan \theta}{4}t^2 - t$. Dans le système de coordonnées adimensionnelles, l'abscisse marquant la fin de la retenue est $x_b = -\cot \theta$; ce point est atteint par l'onde régressive émanant de O à l'instant $t = 2\cot \theta$.

Une fois que la fin du réservoir est atteinte, une nouvelle onde (BC) émane du point B avec $h = 0$ ($c = 0$). Au point B, on a $x = x_b$, $t = t_b = 2\cot \theta$, et $u = 0$. Donc l'intégration de $du/dt = \tan \theta$ donne $u = \tan \theta(t - t_b) = t \tan \theta - 2$, puis une nouvelle intégration donne

$$x = \tan \theta \left(\frac{1}{2}t^2 - tt_b + \frac{t_b^2}{2} \right) + x_b.$$

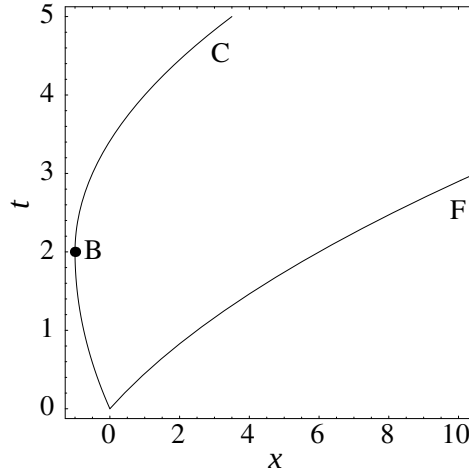


Figure 5.26 : caractéristiques de la queue et du front de l'écoulement.

Afin de faire disparaître l'accélération de la gravité, qui rend les équations non homogènes, on procède à un nouveau changement de variables

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \hat{x} - \frac{\tan \theta}{2} \hat{t}^2 \text{ et } \tilde{t} = \hat{t}, \\ \tilde{w} &= u - t \tan \theta \text{ et } \tilde{h} = \hat{h}, \end{aligned}$$

4. C'est la vitesse initiale dans le cas $\theta = 0$. La rupture de barrage induit en effet une accélération infinie à $t = 0$ et donc on a $u = 2$. Voir la résolution du cas $\theta = 0$ au § 5.3.1 ainsi que l'exemple précédent pour le volume fini.

et comme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \hat{x}} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \hat{x}}, \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial \hat{t}} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \hat{t}}, \\ &= -t \tan \theta \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t},\end{aligned}$$

on tire le jeu d'équations

$$\begin{aligned}\partial_t h + w \partial_\xi h + h \partial_\xi w &= 0, \\ \partial_t w + w \partial_\xi w + h \partial_\xi h &= 0,\end{aligned}$$

où l'on a enlevé les tildes sur les variables.

Tableau 5.6 : caractéristiques des frontières du domaine d'écoulement.

	c	u	w	ξ	r	s
OF	0	$t \tan \theta + 2$	2	$2t$	2	2
OB	$1 - t \tan \theta / 2$	0	$-t \tan \theta$	$-t^2 \tan \theta / 4 - t$	$2(1 - t \tan \theta)$	-2
BC	0	$\tan \theta (t - t_b)$	-2	$-2t + \cotan \theta$	-2	-2

Tableau 5.7 : caractéristiques des frontières du domaine d'écoulement.

	x	domaine de de t
OF	$t^2 \tan \theta / 2 + 2t$	$t \geq 0$
OB	$t^2 \tan \theta / 4 - t$	$0 \leq t \leq 2 \cotan \theta$
BC	$\tan \theta (\frac{1}{2}t^2 - tt_b) + \cotan \theta$	$t \geq 2 \cotan \theta$

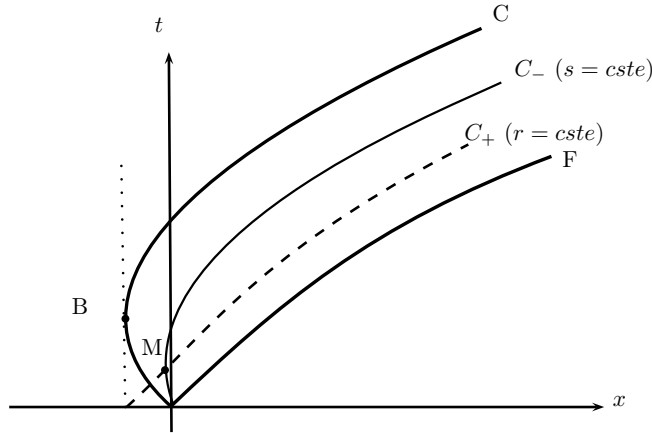


Figure 5.27 : caractéristiques de la queue et du front de l'écoulement.

D'après la méthode de Riemann [voir équation (A.17) et la figure 5.28], la solution s'écrit pour un point M (ξ, η)

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{2}t(P)B[P; M] + \frac{1}{2}t(Q)B[Q; M] + \int_P^Q (Uds - Vdr),$$

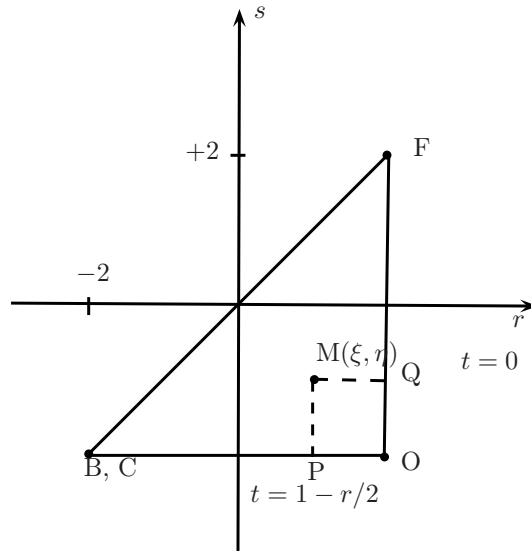


Figure 5.28 : domaine de calcul dans le plan $r - s$ pour $\theta = \pi/4$.

où B est la fonction de Riemann trouvée précédemment [voir équation (A.18) avec $\lambda = 3$, $x = r$ et $y = -s$]. On a

$$B(r, s; \xi, \eta) = \frac{(r-s)^3}{(r-\eta)^{3/2}(s-\xi)^{3/2}} F\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{(r-\xi)(s-\eta)}{(r-\eta)(s-\xi)}\right].$$

Par ailleurs, les fonctions U et V intervenant dans l'équation (A.17) sont données par

$$U = -\frac{3}{2} \frac{1}{r-s} tB + \frac{B}{2} \frac{\partial t}{\partial s} - \frac{t}{2} \frac{\partial B}{\partial s},$$

$$V = \frac{3}{2} \frac{1}{r-s} tB + \frac{B}{2} \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{t}{2} \frac{\partial B}{\partial r}.$$

La solution peut s'arranger de la façon suivante

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{2} t(P) B[P; M] + \frac{1}{2} t(Q) B[Q; M] + \int_P^O V dr + \int_Q^O U ds,$$

or

$$\int_P^O V dr = -\frac{1}{2} [tB]_P^O + \int_P^O B \left(\frac{3}{2} \frac{t}{r+2} + \frac{\partial t}{\partial r} \right) dr,$$

$$\int_Q^O U ds = -\frac{1}{2} [tB]_Q^O + \int_P^O B \left(-\frac{3}{2} \frac{t}{2-s} + \frac{\partial t}{\partial s} \right) ds = 0.$$

En remarquant que sur les frontières $P \rightarrow O$ et $O \rightarrow Q$, on a respectivement $t_r = -\cotan\theta/2$ et $t_s = 0$, on aboutit à la solution suivante

$$t(\xi, \eta) = \cotan\theta \int_2^\xi B(r, -2; \xi, \eta) \frac{2-5r}{4(r+2)} dr.$$

On peut trouver ensuite x par intégration le long d'une caractéristique; par exemple le long d'une s -caractéristique, on a

$$x(r|s = cste) = \frac{1}{4} (3s+r)t(r, s) + \frac{1}{4} \int_r^2 t(r', s) dr',$$

qui s'obtient par intégration par partie de l'équation (5.65) et en tenant compte que $x = 0$ à $t = 0$.

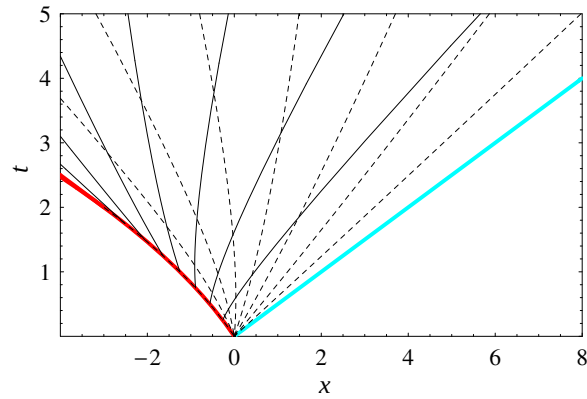


Figure 5.29 : caractéristiques dans le plan $\xi - t$. Les r -caractéristiques sont reportées en trait continu et pour les valeurs $r = 2$ à $r = -2$ avec un pas de 0,5; Les s -caractéristiques sont reportées en trait discontinu et pour les valeurs $s = 2$ à $s = -2$ avec un pas de 0,5. Le trait rouge représente la queue de l'écoulement; le trait bleu représente le front. D'après (Ancey et al., 2008).

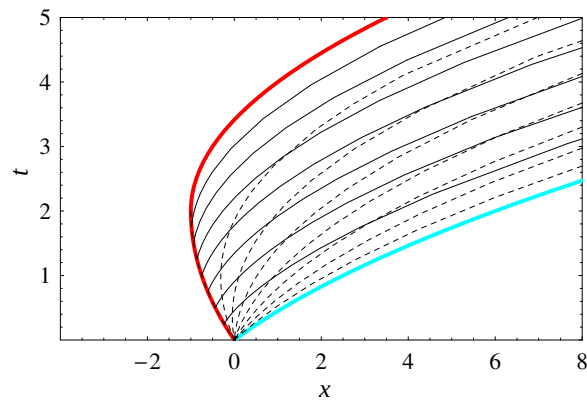


Figure 5.30 : caractéristiques dans le plan $x - t$. D'après (Ancey et al., 2008).

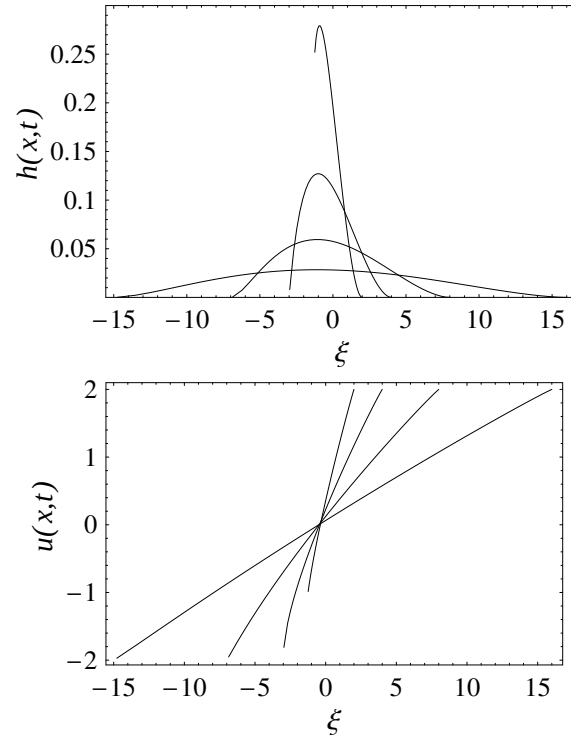


Figure 5.31 : profil de vitesse et de hauteur dans le plan $\xi - t$. D'après (Ancy et al., 2008).

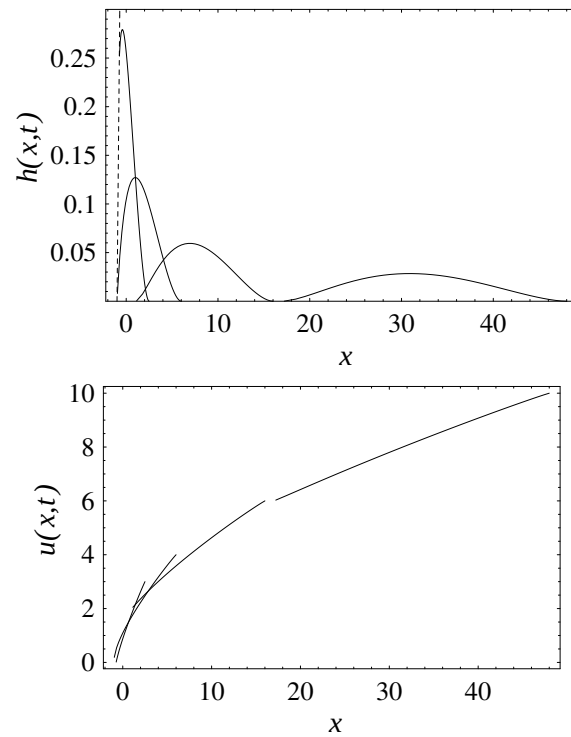


Figure 5.32 : profil de vitesse et de hauteur dans le plan $x - t$. D'après (Ancy et al., 2008).

5.4 Rupture de barrage dans un lit mouillé

On considère un mur vertical qui sépare deux lacs de retenue, dont le volume est supposé infini. La hauteur d'eau initiale à droite est h_0 , celle à gauche est $h_1 < h_0$ (voir figure 5.33). À l'instant $t = 0$, on suppose que le mur du barrage s'efface totalement et laisse s'écouler le volume d'eau de la gauche vers la droite.

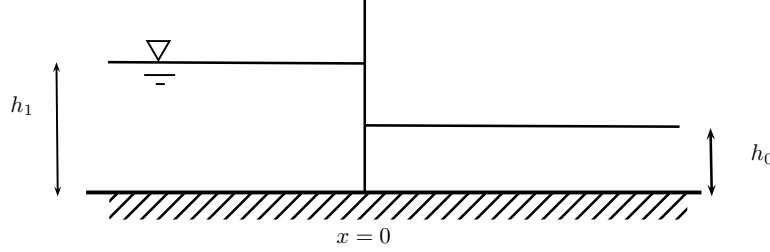


Figure 5.33 : géométrie du problème dit de « rupture de barrage » avec un lit mouillé.

Rappelons que lorsqu'on néglige le frottement sur le fond et qu'on considère un fond horizontal, les équations de Saint-Venant s'écrivent sous forme adimensionnelle

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (5.74)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (5.75)$$

Dans le cas d'une rupture de barrage sur lit mouillé, les conditions initiales et aux limites sont les suivantes

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty, u(x,0) &= 0, \\ x < 0, h(x,0) &= h_1, \\ x > 0, h(x,0) &= h_0. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Le problème a été résolu par [Stoker \(1957\)](#). Le problème à résoudre entre dans la classe des problèmes de Riemann, dont nous avons vu au § 3.2.4 une méthode générale de résolution. Comme le schématise la figure 3.13, l'idée de base est de rechercher le chemin qui permet de l'état à gauche $\mathbf{u}_\ell = (h_1, 0)$ à l'état à droite $\mathbf{u}_r = (h_0, 0)$ en suivant un réseau de courbes de détente ou de choc. Pour passer de $\mathbf{u}_\ell$ à $\mathbf{u}_r$, on passe par un état transitoire $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$ en passant par une 1-onde de détente (3.63)

$$u_* = S_1(h_* | h_1, 0) = 2\sqrt{gh_1} - 2\sqrt{gh_*}, \quad (5.77)$$

puis par une 2-onde de choc (3.64)

$$u_* = R_2(h_* | h_0, 0) = (h_* - h_0) \sqrt{g \frac{h_* + h_0}{2h_*h_0}}. \quad (5.78)$$

On a ici un système de deux équations avec deux inconnues (h_*, u_*) . Comme l'illustre la figure 5.34, la solution au temps t comporte quatre régions :

- aux deux extrémités, les états initiaux non perturbés $\mathbf{u}_\ell = (h_1, 0)$ et $\mathbf{u}_r = (h_0, 0)$;
- une onde de détente qui permet de passer de $\mathbf{u}_\ell = (h_1, 0)$ à $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$. Dans le plan caractéristique $x - t$, les 1-caractéristiques sont des droites en éventail (centrées sur O), limitées à gauche par la caractéristique $x = -c_1 t$ (avec $c_1 = \sqrt{gh_1}$ la vitesse de l'onde progressive) et à droite par la caractéristique $x = \lambda_-^* t$ avec $\lambda_-^* = u_* - \sqrt{gh_*}$;

- une onde de choc qui permet de passer de $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$ à $\mathbf{u}_r = (h_0, 0)$. La vitesse du choc est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot (3.64) :

$$\dot{s} = \frac{[[hu]]}{[[h]]} = \frac{h_* u_*}{h_* - h_0}. \quad (5.79)$$

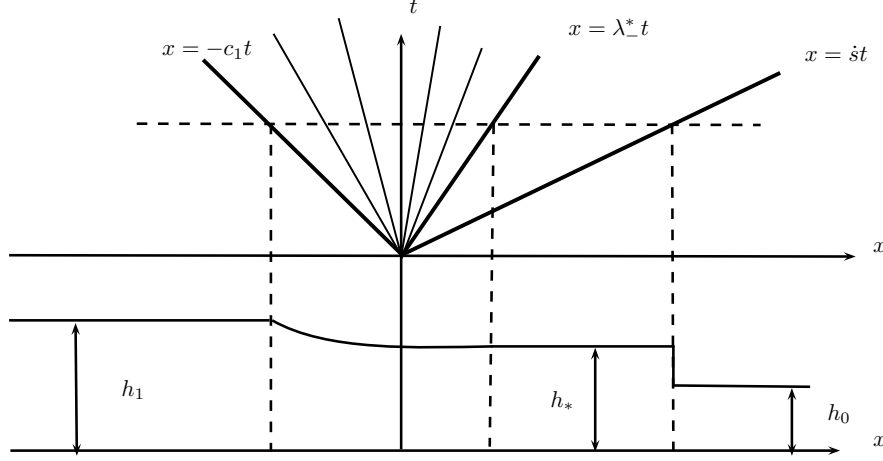


Figure 5.34 : schéma de la solution.

Pour déterminer la solution du problème de Riemann (5.74)–(5.76), il suffit de déterminer l'état intermédiaire $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$ et la vitesse du ressaut $\dot{s}$ en résolvant le système d'équations algébriques (5.77)–(5.79). Comme le montre la figure 5.35, la solution comporte :

- une onde de détente pour $-c_1 t \leq x \leq \lambda_*^- t$ où la hauteur varie progressivement de h_1 à h_* (la vitesse croît de 0 à u_*) ;
- une onde de choc pour $\lambda_*^- t \leq x \leq s(t)$ où la hauteur est constante et vaut h_* (la vitesse reste également égale u_*).

La figure 5.35 montre comment varie h_*/h_1 , $\dot{s}/c_1$, et u_*/c_1 en fonction du rapport initial $\xi = h_0/h_1$ (on a $0 \leq \xi \leq 1$). On note que lorsque $\xi \rightarrow 0$ (le lit aval devient alors sec), on trouve que $h_* \rightarrow 0$, $\dot{s} \rightarrow 0$, et $u_* \rightarrow 2c_1$ comme cela est prédit par la solution de Ritter.

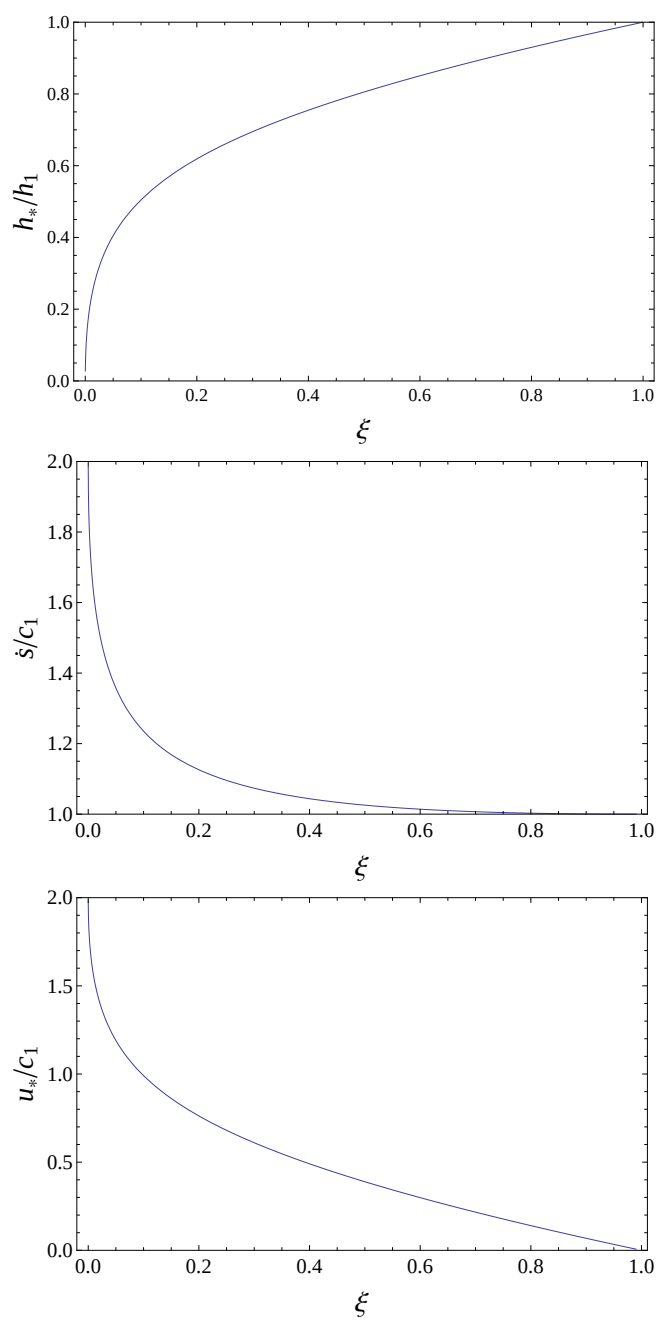


Figure 5.35 : variation de h_*/h_1 , $\dot{s}/c_1$, et u_*/c_1 en fonction du rapport initial $\xi = h_0/h_1$ dans le cas d'un lit aval mouillé.

5.5 Effet du frottement

Nous considérons le cas plus réaliste d'un fond horizontal résistant. La résistance provoque :

- l'apparition d'une contrainte pariétale de la forme :

$$\tau_b = c_d u^2$$

pour un régime turbulent, avec c_d un coefficient de Chézy, ou bien

$$\mu c \left(\frac{u}{h} \right)^n,$$

pour un régime laminaire, avec c un facteur de proportionnalité, μ la viscosité, n un paramètre pris le plus souvent à $n = 1$ pour un fluide newtonien.

- un cisaillement au sein de l'écoulement. On introduit donc un facteur γ dit *facteur de Boussinesq* tel que

$$\overline{u^2} = \gamma \bar{u}^2.$$

Les équations du mouvement sont écrites sous la forme (Hogg & Pritchard, 2004) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\tau_b}{\rho h}. \quad (5.81)$$

5.5.1 Méthode de Whitham : rupture de barrage sur fond plat

Whitham (1954) a proposé une méthode approchée pour calculer l'effet du frottement sur le front. Loin du front, la solution de Ritter est valable. Les champs de vitesse et de hauteur donnés par

$$u = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \sqrt{gh_0} \right) \text{ et } h = \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2\sqrt{gh_0} \right)^2$$

sont donc valables jusqu'au point B, d'abscisse $x = x_b(t)$. Pour la région frontale située entre x_b et x_a (position du front), Whitham suggère de ne pas résoudre les équations mais d'intégrer les équations pour obtenir des équations globales du front (méthode de Pohlhausen). Il considère notamment que dans la région frontale, la variation de vitesse selon x est faible de telle sorte que l'on peut écrire $u(x, t) = u(t)$.

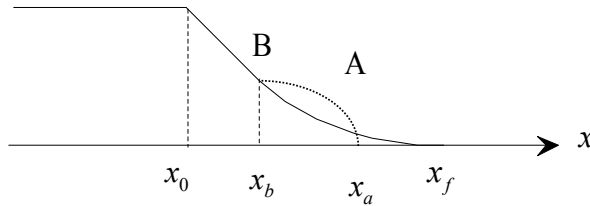


Figure 5.36 : modification de la forme du front.

Notons que cette méthode intégrale ne permet pas de déterminer exactement la forme de la surface libre, mais il est possible d'en avoir une idée en faisant un simple bilan de quantité mouvement près du front. En effet, en négligeant l'inertie du fluide au niveau du front, on tire que le gradient de pression doit contrebalancer le frottement

$$gh \frac{\partial h}{\partial x} = -c_d u^2(t),$$

or $u(t) \approx dx_a/dt$ et $c_d = 1/C^2$ un coefficient relié au coefficient de Chézy C . D'où l'on déduit l'approximation :

$$h(x) = \frac{dx_a}{dt} \sqrt{\frac{2c_d}{g}} \sqrt{x_a(t) - x}.$$

Pour obtenir les équations globales du fluide au niveau du front, on note que :

- la vitesse du fluide au point de transition x_b est $u_b - dx_b/dt$, où (u_b, h_b) sont les solutions de Ritter à gauche du point de transition B ;
- le flux de masse M s'écrit $\rho h_b(u_b - dx_b/dt)$;
- le flux de quantité de mouvement est $\rho h_b u_b(u_b - dx_b/dt)$.

L'équation globale du mouvement s'écrit donc

$$\frac{dP}{dt} = \rho h_b u_b \left(u_b - \frac{dx_b}{dt} \right) + F + \frac{1}{2} \rho g h_b^2,$$

où P est la quantité de mouvement et F la force de frottement :

$$F = \int_{x_0}^{x_a} \rho c_d u^2 dx \approx \rho c_d u^2 (x_a - x_b).$$

Par ailleurs, puisque la vitesse est supposée constante dans la zone frontale, on a $P = M u_b$, or

$$\frac{dM}{dt} = \rho h_b \left(u_b - \frac{dx_b}{dt} \right),$$

avec $x_b = c_0(3u_b/(2c_0) - 1)t$ et $h_b = h_0(1 - u_b/(2c_0))^2$ d'après la solution de Ritter. L'intégration donne

$$M = \rho h_0 c_0 \left(1 - \frac{u_b}{2c_0} \right)^3 t.$$

Notons que l'on peut trouver ce résultat directement en faisant remarquer que, dans la solution de Ritter $M = \int_{x_b}^{x_f} \rho h dx$ (il n'y a pas de variation de masse, juste un changement de la surface libre et une vitesse front moins grande). On déduit la vitesse :

$$M \frac{du_b}{dt} = \frac{1}{2} \rho g h_b^2 - \rho c_d u_b^2 (x_a - x_b).$$

Introduisant les variables sans dimension $\eta = c_d/h_0(x_f - x_a)$ et $\tau = \sqrt{g/c_0} c_d t$, on tire :

$$4\tau \dot{\eta} \ddot{\eta} + \dot{\eta}^4 = 16(2 - \dot{\eta})^2 (3\dot{\eta}\tau - 2\eta).$$

On s'est servi du fait que dans le front la vitesse est constante et égale à $\dot{x}_a$: $u_b = \dot{x}_a$; de plus on peut aussi interpréter la vitesse du front en termes de vitesse relative $\dot{\eta}$ en posant : $\dot{x}_a = c_0(2 - \dot{\eta})$. On ne peut pas résoudre directement cette équation numériquement car en $\tau = 0$ le terme $\ddot{\eta}$ tend vers une limite impropre. Il faut déterminer cette limite. Pour cela on va considérer ce qui se passe au premier ordre en $\tau = 0$. On pose $\eta = K(\tau) = A\tau^n$ et on cherche n et A . En reportant cela dans l'équation on trouve au premier ordre $n = 4/3$ et $A = 3 \times 3^{2/3}/14^{1/3} \approx 2.58916$. On trouve donc que $\ddot{\eta} \rightarrow \infty$ quand $\tau \rightarrow 0$. On peut de là résoudre numériquement l'équation avec comme condition initiale $\eta(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ et $\dot{\eta}(\varepsilon) = K'(\varepsilon)$ où l'on choisit ε très proche de 0 (typiquement $\varepsilon = 10^{-6}$). On obtient la courbe reportée sur la figure 5.37.

On pourrait chercher le développement asymptotique plus loin en écrivant $\eta = A\tau^n + Bx^m + \dots$, mais cela ne marche pas. On ne peut pas faire de développement de Taylor en

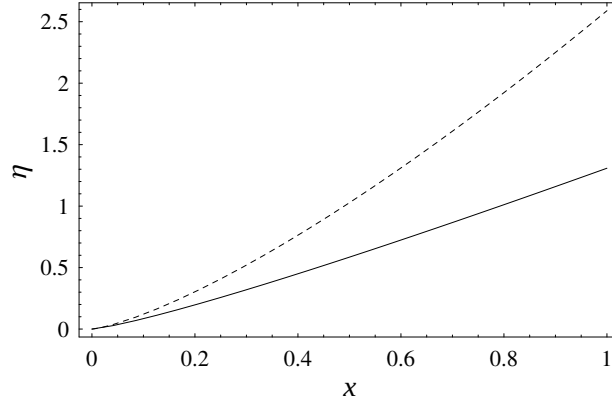


Figure 5.37 : comparaison de la solution numérique (courbe continue) et de l'approximation asymptotique en $\tau = 0$.

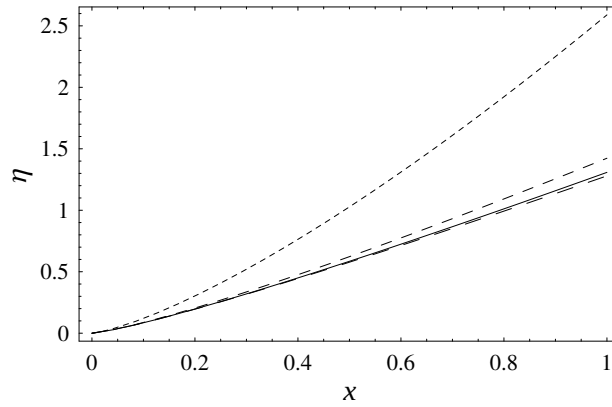


Figure 5.38 : approximations successives de la solution.

0 car les dérivées d'ordre 2 ou supérieures divergent. En fait, comme le montre la solution numérique, très rapidement η devient linéaire ; il ne sert donc à rien de chercher un développement polynômial vu que l'ordre 1 ($x^{4/3}$) a une pente plus forte que 1.

Il faut plutôt rechercher la solution sous la forme d'une fonction rationnelle (approximation de Padé). Recherchons donc une solution sous la forme :

$$\eta = \frac{Ax^{4/3}}{1 + Bx^n}.$$

$B = 4 \times 42^{2/3}/59 \approx 0.81917$ et $n = 1/3$. On obtient la courbe à tiret mi-long de la figure 5.38. Si on pousse à un ordre supérieur, on obtient :

$$\eta = \frac{Ax^{4/3}}{1 + Bx^{1/3} + Cx^{2/3}},$$

avec $C \approx 0.204158$. On obtient la courbe à tiret long de la figure 5.38, donnant un accord encore meilleur avec la courbe numérique.

On obtient ainsi l'approximation au premier ordre quand t est petit :

$$u_a = \frac{dx_a}{dt} = \sqrt{gh_0} \left(2 - 3.452 \sqrt[3]{c_d t \sqrt{\frac{g}{h_0}}} \right).$$

Aux temps très longs, on peut recherche un nouveau développement asymptotique. La solution numérique nous pousse à rechercher une solution sous la forme $\eta = \alpha\tau + \beta$. Injectant cette forme dans l'équation différentielle, puis prenant $\tau \rightarrow \infty$, on trouve que $\beta = 2$. Donc, on aboutit à l'expression asymptotique :

$$u_a = \frac{dx_a}{dt} = \sqrt{gh_0} \sqrt{\frac{h_0}{2c_d t}}.$$

5.5.2 Solution de Hogg

Une méthode de développement asymptotique a été proposée par [Hunt \(1983, 1987\)](#), mais il a fallu attendre [Hogg & Pritchard \(2004\)](#) pour avoir une démonstration rigoureuse (le calcul proposé par Hunt reposait sur une analyse simplifiée du front assimilé à un choc).

Le principe de la méthode consiste à rechercher une solution *externe* (outer solution) valable loin du front et une *solution interne* (inner solution) décrivant ce qui se passe au sein du front assimilé à une couche limite. Il faut donc tout d'abord évaluer l'épaisseur de cette couche limite ou zone frontale. La solution de Ritter constitue la solution externe et elle est valable dans que les force de frottement sont faibles devant le gradient de pression : $c_d u^2/h \ll g \partial_x h$. Introduisant η la distance par rapport au front $\eta = x_f - x$. Loin du front, dans le domaine où la solution de Ritter est valable, on a $u \sim c_0 = \sqrt{gh_0}$ et $h \sim (\eta/t)^2/g$ (où le symbole $\sim$ signifie « de l'ordre de grandeur de »). Il s'ensuit que la zone frontale a pour extension :

$$c_d \frac{u^2}{h} \sim g \frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow \eta \sim (c_d g^2 t^4 h_0)^{1/3}.$$

Notons que c'est un résultat consistant avec l'épaisseur obtenue par [Whitham \(1954\)](#).

Le principe du développement asymptotique est de développer les fonctions sous la forme d'une série infinie de termes avec un paramètre ϵ qui doit être petit. Pour la solution interne, on introduit par ailleurs $X = (x_f - x)/\epsilon$. Le petit paramètre est nécessairement lié à c_d (le plus souvent, ce dernier se trouvant en effet dans la gamme 0,01–0,001, c'est donc le « petit » paramètre du problème). L'expression de l'épaisseur de la zone frontale incite à poser $\epsilon = c_d^{1/3}$ de telle sorte que l'extension de la zone frontale soit $X = O(1)$. À noter aussi que l'épaisseur de la zone frontale est fonction de $t^{4/3}$; on retrouve plus loin cette dépendance de la solution en $t^{4/3}$.

On effectue donc le changement de variable :

$$x = -\epsilon X + x_f(t) \text{ et } \tau = t.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial()}{\partial x} &= \frac{\partial()}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial()}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial()}{\partial X}, \\ \frac{\partial()}{\partial t} &= \frac{\partial()}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial()}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\dot{x}_f}{\epsilon} \frac{\partial()}{\partial X} + \frac{\partial()}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Comme on a $\tau = t$, on va prendre utiliser t au lieu de τ sans que cela n'affecte le résultat. On transforme donc les équations du mouvement (5.80–5.81) en prenant $\gamma = 1$ et en adimensionalisant les hauteurs par h_0 et le temps par $\sqrt{h_0/g}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\dot{x}_f}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial X} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial hu}{\partial X} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\dot{x}_f}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{u}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial X} &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial X} - \frac{\epsilon^3 u^2}{h}, \end{aligned}$$

avec pour conditions aux limites au front $X = 0$:

$$h = 0 \text{ et } u = \dot{x}_f,$$

et quand $X \rightarrow \infty$ les conditions sont (on suppose qu'au premier ordre on a bien $x_f = 2t$, cela sera à vérifier) :

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \frac{2}{3} \frac{2t + x}{t} = \frac{x_f}{t} - \epsilon \frac{2}{3} \frac{X}{t}, \\ h &\rightarrow \frac{1}{9} \frac{2t - x}{t} = \epsilon^2 \frac{1}{9} \frac{X^2}{t^2}, \end{aligned}$$

On écrit les fonctions u , h , et x_f sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_0(X, t) + \epsilon U_1(X, t) + \epsilon^2 U_2(X, t) + \dots, \\ h(x, t) &= H_0(X, t) + \epsilon H_1(X, t) + \epsilon^2 H_2(X, t) + \dots, \\ x_f(t) &= x_{f0}(t) + \epsilon x_{f1}(t) + \epsilon^2 x_{f2}(t) + \dots. \end{aligned}$$

Notons que dans l'équation de quantité de mouvement, le terme de frottement apparaît avec un coefficient de proportionnalité ϵ^3 très petit. De plus, les conditions aux limites en $+\infty$ impliqueraient qu'il faille écrire $h(x, t) = \epsilon^2 H_0(x, t) + \dots$; on pose donc⁵ :

$$h(x, t) = \epsilon^2 H_2(X, t) + \dots.$$

À l'ordre $O(1/\epsilon)$, on a

$$U_0 = \dot{x}_{f0}.$$

En faisant le raccord avec la solution externe, on a :

$$U_0 = \dot{x}_{f0} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{x_{f0}(t)}{t} \right).$$

Le champ de vitesse est constant en X près du front (comme l'avait supposé [Whitham \(1954\)](#)). La résolution de l'équation différentielle fournit : $x_{f0} = 2t$ ($U_0 = 2$) conformément à ce que l'on peut attendre de la solution de Ritter.

À l'ordre $O(1)$, on a :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\partial H_2}{\partial X} + (\dot{x}_{f1} - U_1) \frac{\partial U_1}{\partial X} = -\frac{U_0^2}{H_2}. \quad (5.82)$$

5. On peut montrer par le calcul qu'il faut écrire $h(X, t) = \epsilon^2 H_0(X, t) + \dots$. Montrons-le par le calcul en gardant le développement initial $h(X, t) = H_0(X, t) + \epsilon H_1(X, t) + \epsilon^2 H_2(X, t) + \dots$. Les termes d'ordre $O(1/\epsilon)$ des équations du mouvement donnent :

$$(U_0 - \dot{x}_{f0}) \partial_X H_0 - H_0 \partial_X U_0 = 0,$$

$$-U_0 \partial_X U_0 - \partial_X H_2 + \dot{x}_{f0} \partial_X U_0 = 0.$$

Le déterminant doit être nul, donc $H_0 = (U_0 - \dot{x}_{f0})^2$; en reportant dans l'une ou l'autre des équations, nous tirons $(U_0 - \dot{x}_{f0})(U_0 - \dot{x}_{f0} + 2)$. La seule expression compatible avec les équations aux limites est $(U_0 - \dot{x}_{f0}) = 0$, d'où $H_0 = 0$.

À l'ordre $O(1)$, on a

$$\partial_t U_0 - \partial_X H_1 = 0.$$

La solution est : $H_1 = \partial_t U_0 X + a$. Les conditions aux limites entraînent $a = 0$ ($H_1 = 0$ en $X = 0$) et $\partial_t U_0$ (limite en $X \rightarrow \infty$), d'où :

$$H_1 = 0,$$

$$\partial_t U_0 = 0.$$

À l'ordre $O(\epsilon)$, on a :

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} - \frac{\partial H_2 U_1}{\partial X} + \dot{x}_{f1} \frac{\partial H_2}{\partial X} = 0. \quad (5.83)$$

Le système d'équations (5.82–5.83) admet des solutions auto-similaires de la forme :

$$\eta = X/(at^{4/3}), \dot{x}_{f1} = \frac{4}{3}at^{1/3}, U_1 = \frac{4}{3}at^{1/3}\mathcal{U}(\eta), \text{ et } H_2 = \frac{16}{9}a^2t^{2/3}\mathcal{H}(\eta).$$

Les conditions aux limites sont :

- en $\eta = 0$, $\mathcal{U} = 1$ et $\mathcal{H} = 0$;
- pour $\eta \rightarrow -\infty$, $\mathcal{U} = -\frac{1}{2}(\eta - 1)$ et $\mathcal{H} = \frac{1}{16}(\eta - 1)^2$. Ces formes sont obtenues en faisant un développement limité de la solution de Ritter et en ne conservant que les premiers termes (en ϵ et ϵ^2 respectivement pour $\mathcal{U}$ et $\mathcal{H}$).

Nous avons inséré le paramètre $a < 0$, originellement provenant de la recherche de formes auto-similaires pour $\dot{x}_{f1}$ (qui doit être tel que $\dot{x}_{f1} \propto t$), de telle sorte que les équations soient simplifiées, notamment pour avoir la condition aux limites $\mathcal{U}(0) = 1$ plus simple à traiter que $\mathcal{U}(0) = a$. On aboutit à

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U} + \eta - 1 & \mathcal{H} \\ 1 & \mathcal{U} + \eta - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{H}' \\ \mathcal{U}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{H}}{2} \\ \frac{\mathcal{U}}{4} + \frac{81}{64a^3\mathcal{H}} \end{pmatrix}. \quad (5.84)$$

Le déterminant est nul quand $\mathcal{H} = (\mathcal{U} + \eta - 1)^2$. Il faut alors que le second membre vérifie une relation de compatibilité : en reportant $\mathcal{H} = (\mathcal{U} + \eta - 1)^2$ dans le système d'équations, les deux équations sont identiques si et seulement si :

$$\frac{81}{32a^3\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{U}}{2} + \eta - 1.$$

Le lieu des points tels que $\mathcal{H} = (\mathcal{U} + \eta - 1)^2$ et $81 = \left(\frac{\mathcal{U}}{2} + \eta - 1\right) 32a^3\mathcal{H}$ définit une courbe critique : quand la courbe solution coupe cette courbe, le gradient de $(\mathcal{H}, \mathcal{U})$ n'est pas nécessairement continu (car le déterminant s'annule). Pour trouver la solution numérique du système d'équations (5.84), il faut procéder par itération en se fixant une valeur de a , puis en intégrant numériquement la solution. Il y a deux conditions aux limites et on s'attend à ce qu'il faille calculer deux branches de courbe qui se recouperont en un point situé sur la courbe critique. Notons une première difficulté : le front constitue un point singulier puisque le déterminant est nul, mais il n'est pas sur la courbe critique. Pour procéder à l'intégration numérique il faut connaître le comportement de la solution près du front. Il y a plusieurs façons de procéder. On peut penser qu'au premier ordre on a :

$$\mathcal{H} = B|\eta|^n + \dots,$$

$$\mathcal{U} = 1 - Ax\eta + \dots.$$

En reportant ces expressions dans les équations du mouvement et en faisant tendre η vers 0, on tire que l'on doit avoir $n = 1/2$ et $B^2 = 81a^{-3}/32$. On peut également procéder par un développement de Taylor. Le système d'équations (5.84) peut se mettre sous la forme suivante quand le déterminant n'est pas nul :

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\eta} = \frac{81 - 16a^3\mathcal{H}(-2 + \mathcal{U} + 2\eta)}{64a^3(\mathcal{H} - (-1 + \mathcal{U} + \eta)^2)},$$

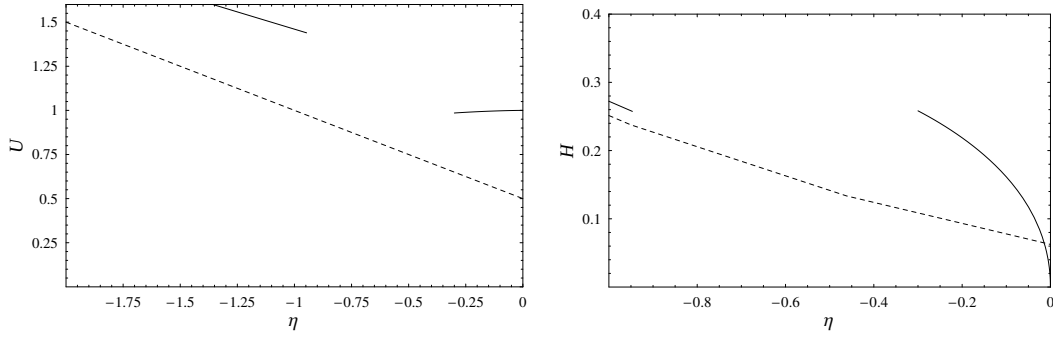


Figure 5.39 : Solution numérique au système 5.84 pour $a = -2$. Les courbes à tiret représentent les courbes asymptotiques $\mathcal{U} = -\frac{1}{2}(\eta_0 - 1)$ et $\mathcal{H} = \frac{1}{16}(\eta_0 - 1)^2$.

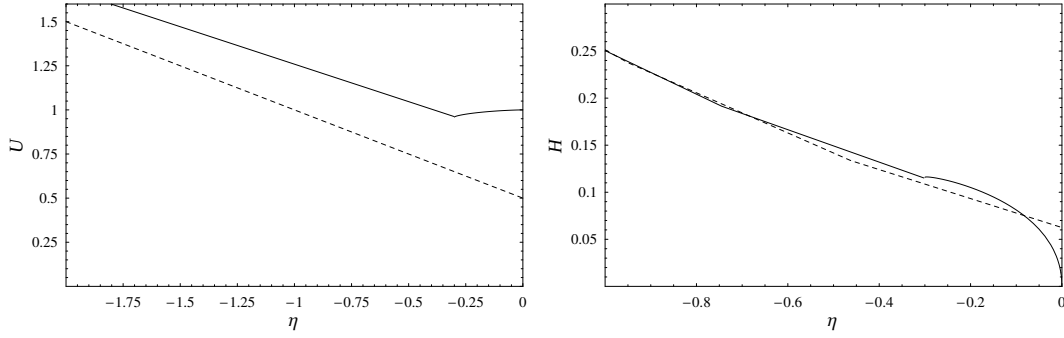


Figure 5.40 : Solution numérique au système 5.84 pour $a = -2,99$. Les courbes à tiret représentent les courbes asymptotiques $\mathcal{U} = -\frac{1}{2}(\eta_0 - 1)$ et $\mathcal{H} = \frac{1}{16}(\eta_0 - 1)^2$.

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\eta} = \frac{-81(-1 + \mathcal{U} + \eta) + 16a^3\mathcal{H}(2\mathcal{H} - \mathcal{U}(-1 + \mathcal{U} + \eta))}{64a^3\mathcal{H}(\mathcal{H} - (-1 + \mathcal{U} + \eta)^2)}.$$

Quand on fait un développement limité à un ordre permettant d'avoir des termes non nuls, on tire :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{d\eta} &\approx \frac{81}{64a^3\mathcal{H}}, \\ \frac{d\mathcal{U}}{d\eta} &\approx \frac{-81(-1 + \mathcal{U}) - 81\eta}{64a^3\mathcal{H}^2}. \end{aligned}$$

On tire alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= \frac{81}{32a^3}(-\eta), \\ \mathcal{U} &= 1 + \eta. \end{aligned}$$

Pour la solution à l'infini, il suffit de prendre une valeur de η arbitrairement grande (disons $\eta_0 = -100$). La condition initiale est alors donnée par les expressions asymptotiques $\mathcal{U} = -\frac{1}{2}(\eta_0 - 1)$ et $\mathcal{H} = \frac{1}{16}(\eta_0 - 1)^2$.

Un exemple de résolution numérique est reporté à la figure 5.39 pour $a = -2$. Par tâtonnement, on trouve que $a = -2,99$ pour que les deux solutions se raccordent. Le point de discontinuité est situé en $\eta = -0,30$. La figure 5.40 montre le raccord des deux branches solutions près du front. On a également reporté la solution asymptotique.

5.6 Méthodes numériques de résolution

Les solutions analytiques et les approximations se révèlent insuffisantes pour résoudre des problèmes concrets. Il faut passer par des méthodes numériques. Les ingénieurs disposent de nos jours d'une multitude d'outils permettant la résolution numérique de problèmes pratiques. Des codes industriels comme Fluent en mécanique des fluides industriels ou Mike en hydraulique sont devenus d'un usage courant. Ces codes de calcul permettent de résoudre des équations complexes pour une large gamme de conditions d'écoulement. Leur utilisation n'est toutefois pas sans danger. Si on ne demande pas à l'ingénieur d'être un expert en numérique, on attend de lui qu'il ait une connaissance suffisante de la problématique et qu'il puisse vérifier la pertinence et la robustesse des outils employés. Bien des erreurs sont commises par un excès de confiance dans les modèles numériques, leur mauvaise utilisation, un emploi hors du contexte pour lequel le modèle a été développé, des erreurs dans les paramètres entrés, etc. Une prise en main de l'outil numérique est donc indispensable. Considérer le modèle comme une boîte noire, où il n'y aurait qu'à appuyer sur des boutons pour obtenir des résultats, est une attitude inacceptable, mais pas si rare en pratique. Pour l'ingénieur, maîtriser l'outil veut dire ;

- savoir quelles équations sont utilisées par le modèle pour décrire le phénomène physique ;
- comprendre quel schéma numérique est employé, quel maillage est généré ?
- se renseigner sur les stratégies alternatives de calcul et vérifier si celle sélectionnée répond bien au problème posé ;
- déterminer les paramètres à entrer : aussi bien les paramètres physiques du problème considéré, mais également les paramètres numériques (par exemple, le pas de temps) ;
- tester le modèle sur des cas simples, par exemple des cas pour lesquels on dispose de solutions analytiques : tester la stabilité des solutions numériques dans le temps et par rapport aux données entrées dans le code, tester la convergence du modèle ;
- déterminer la précision du modèle (sur des cas concrets) et estimer sa sensibilité par rapport aux paramètres numériques sélectionnés (par exemple, le type de maillage).

En hydraulique à surface libre, l'une des principales difficultés à résoudre est la gestion des discontinuités éventuelles de la solution. Plusieurs stratégies de calcul ont été proposées, dont les différences portent sur :

- la méthode de discrétisation des équations : méthode des éléments finis, méthode des volumes finis, etc. ;
- la méthode de maillage du domaine : maillage régulier ou régulier en espace et temps, maillage adaptatif (le pas de la maille s'adapte à la précision désirée), mais également nœuds du maillage advectés ou non par l'écoulement
 - résolution des équations lagrangiennes : les nœuds de la grille de calcul suivent l'écoulement,
 - résolution des équations eulériennes : les nœuds de la grille de calcul sont indépendantes de l'écoulement ;
- la gestion des discontinuités : différentes méthodes (*front tracking*, *shock-capturing*, etc.) ont été développées pour détecter et/ou suivre une discontinuité de la solution.

La plupart des méthodes modernes se fondent sur l'utilisation de la méthode des caractéristiques, que nous avons exposée brièvement.

5.6.1 Résolution par une méthode lagrangienne

On cherche à résoudre les équations de Saint-Venant dans leur forme générale (1.21–1.22)

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.\end{aligned}$$

Cette forme est la forme *eulérienne* des équations. Un point délicat dans la résolution numérique est dû au terme non linéaire d'advection $u \partial u / \partial x$. Cette difficulté peut être contournée en mettant les équations sous une forme *lagrangienne* : au lieu de se placer à un endroit x au temps t et regarder ce qui se passe, on va suivre une parcelle de fluide (ici une tranche) au cours du temps.

Mise sous forme lagrangienne

Appelons a la position de cette parcelle de fluide à l'instant initial et on appelle $X(a, t)$ la trajectoire suivie par la particule a au cours du temps. Dans un système lagrangien, la vitesse de cette parcelle est simple $u_L = \partial X(a, t) / \partial t$; l'indice L rappelle qu'il s'agit d'une vitesse lagrangienne. Vitesses eulérienne et lagrangienne sont reliées à l'instant t par $u_L = u(X(a, t), t)$. De même, la hauteur lagrangienne est définie par rapport à la hauteur eulérienne évaluée le long de la trajectoire $h_L = h(X(a, t), t)$. On va transformer la forme eulérienne des équations de Saint-Venant – où les variables indépendantes sont x et t en une forme lagrangienne – où les variables indépendantes sont a et t . Pour cela, quelques manipulations différentielles sont utiles ; la règle de composition des différentielles nous donne ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_L}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} u(X(a, t), t) = \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(X(a, t), t)} \frac{\partial X}{\partial a}, \\ \frac{\partial U_L}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} u(X(a, t), t) = \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(X(a, t), t)} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{(X(a, t), t)}, \\ &= U_L \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}$$

Le symbole $\big|_{(X(a, t), t)}$ rappelle que les dérivées sont évaluées au point $X(a, t)$ et à l'instant t . On fait de même pour la hauteur

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_L}{\partial a} &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial a}, \\ \frac{\partial h_L}{\partial t} &= U_L \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}.\end{aligned}$$

Quand substitue ces différentes relations dans l'équation de conservation de la masse (1.21), on obtient :

$$\frac{\partial X}{\partial a} \left(\frac{\partial h_L}{\partial t} - u_L \frac{\partial h}{\partial x} \right) + u_L \frac{\partial h_L}{\partial a} + h_L \frac{\partial u_L}{\partial a} = 0.$$

En regroupant les termes, on obtient

$$\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial h_L}{\partial t} + h_L \frac{\partial u_L}{\partial a} = 0,$$

soit encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h_L \frac{\partial X}{\partial a} \right) = 0. \quad (5.85)$$

La quantité

$$m(a) = h_L \frac{\partial X}{\partial a}$$

est indépendante du temps. Notons que ce résultat aurait également pu être obtenu en faisant remarquer que le volume de fluide contenu dans une tranche entre $X(a_1, t)$ et $X(a_2, t)$ est constante

$$\int_{X(a_1, t)}^{X(a_2, t)} h(x, t) dx = \text{cste},$$

or avec un changement de variable, cela implique

$$\int_{a_1}^{a_2} h_L(a, t) \frac{\partial X}{\partial a} da = \text{cste}.$$

On trouve bien que $\int_{a_1}^{a_2} m(a) da$ est constant.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement sous forme lagrangienne s'obtient de la même façon

$$\frac{\partial X}{\partial a} \left(\frac{\partial u_L}{\partial t} - g \sin \theta + \frac{\tau_p}{\rho h} \right) = -g \cos \theta \frac{\partial h_L}{\partial a}. \quad (5.86)$$

Comme on le voit, le terme convectif non linéaire a disparu, ce qui simplifie quelque peu le problème (même si l'équation a l'air plus compliqué). Par la suite, on va résoudre numériquement les équations (5.85–5.86) ; notons que l'on ne mettra plus l'indice L derrière u et h pour alléger les notations (étant entendu que ces variables sont bien lagrangiennes).



Schéma numérique

L'idée est de diviser un écoulement en N tranches comme le montre la figure 5.41. On introduit donc $N + 1$ nœuds x_i qui sont advectés avec l'écoulement. La tranche i est délimitée à gauche par le nœud x_i et à droite par le nœud x_{i+1} . Sa hauteur est supposée constante et égale h_i ; cela revient à dire que l'on remplace la surface libre par une courbe en marches d'escalier. Le centre de gravité de chaque tranche se situe à l'abscisse $\xi_i = (x_i + x_{i+1})/2$. Chaque nœud est susceptible de bouger au cours du temps et on écrit x_i^n la position du nœud x_i au temps $t = n\delta t$, où δt est un incrément de temps.

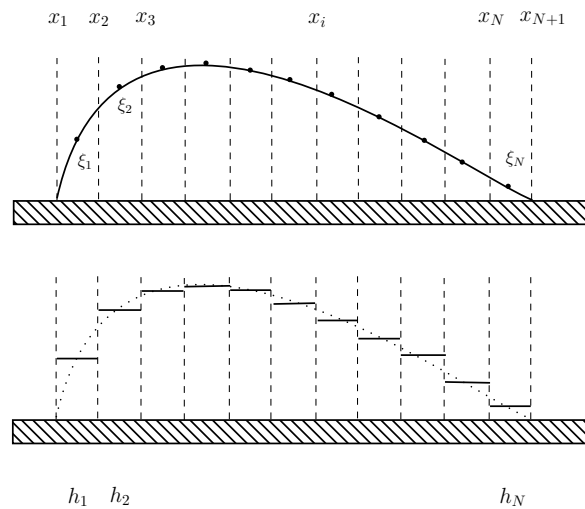


Figure 5.41 : découpage en tranches et approximation de la solution.

Puisque les nœuds sont advectés, la masse de fluide de la tranche i se conserve au cours du temps. On a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} h(x) dx = cste,$$

or ici on suppose que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} h(x) dx \approx h_i(x_{i+1} - x_i).$$

Supposons que l'on connaisse $u_i^{n-\frac{1}{2}}$, x_i^{n-1} , et h_i^{n-1} ; au temps $t = 0$, ces valeurs correspondent aux valeurs initiales. Notons aussi que l'on va considérer un léger décalage en temps ($\delta t/2$) entre la hauteur et la vitesse. La conservation de la masse et la définition de la vitesse (lagrangienne) impliquent que l'on puisse mettre à jour la position des nœuds de la façon suivante

$$x_i^n = x_i^{n-1} + u_i^{n-\frac{1}{2}} \delta t, \quad (5.87)$$

$$h_i^n = h_i^{n-1} \frac{x_{i+1}^{n-1} - x_i^{n-1}}{x_{i+1}^n - x_i^n}. \quad (5.88)$$

La vitesse est déterminée en se servant de la conservation de la quantité de mouvement (1.22)

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = u_i^{n-\frac{1}{2}} + \delta t \left(g \sin \theta - g \cos \theta \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\xi_i^n - \xi_{i-1}^n} - \frac{\tau_p(u_i^{n-\frac{1}{2}}, h_i^n)}{\rho h_i^n} \right). \quad (5.89)$$

On itère ainsi de suite.

Il faut faire une remarque importante sur la manière dont nous avons discrétisé les termes différentiels. Pour discrétiser un terme différentiel, la règle de base est de se servir du développement limité d'une fonction régulière

$$f(x + \delta x) = f(x) + \delta x f'(x) + \frac{1}{2} \delta x^2 f''(x) + \dots$$

Cela permet d'obtenir différentes évaluations de f' au premier ordre et au second ordre (ou à d'autres ordres encore) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} + O(\delta x) : \text{schéma aval,} \\ f'(x) &= \frac{f(x) - f(x - \delta x)}{\delta x} + O(\delta x) : \text{schéma amont,} \\ f'(x) &= \frac{f(x + \delta x) - f(x - \delta x)}{2\delta x} + O(\delta x^2) : \text{schéma centré.} \end{aligned}$$

Dans le schéma numérique présenté, on emploie un schéma amont en temps et en espace pour la vitesse, mais aval pour la hauteur. D'autres schémas de discrétisation sont possibles, mais tous ne convergent pas ou ne sont pas stables. La figure 5.42 montre la grille de calcul et les nœuds employés pour le calcul de la vitesse. On dit que la discrétisation est explicite car dans le terme source, on a écrit que la contrainte à la paroi τ_p était évaluée au nœud x_i et au temps n (ou $n - \frac{1}{2}$ pour la vitesse); on aurait pu choisir un schéma implicite, où τ_p est évaluée au temps $n + 1$ ($n + \frac{1}{2}$ pour la vitesse) et comme τ_p dépend à la fois de h et u , il aurait fallu résoudre une équation non linéaire en $u_i^{n+\frac{1}{2}}$, ce qui complique le schéma numérique (mais le rend plus stable).

La notion de stabilité peut être en partie étudiée à l'aide de la notion de nombre de Courant qui fixe l'incrément de temps maximal de temps δt à ne pas dépasser pour que le calcul soit

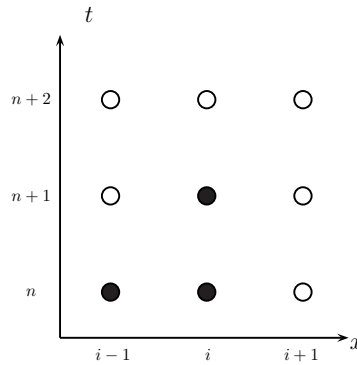


Figure 5.42 : grille de calcul dans le plan $x - t$: lorsqu'on veut calculer ce qui se passe au nœud $(i, n + 1)$, on se sert de l'information aux nœuds (i, n) et $(i - 1, n)$.

stable. La figure 5.43 montre ce qui se passe quand on choisit un incrément de temps δt trop grand [fig. 5.42(b)] : comme la vitesse de propagation de l'information est $c = \sqrt{gh}$, on ne peut pas prendre d'incrément de temps trop grand car sinon le schéma choisi n'est pas suffisant pour transmettre toute l'information au temps $n + 1$. Pour que le schéma soit stable, une condition nécessaire est de choisir un incrément de temps vérifiant la condition de Courant⁶

$$\delta t < c\delta x, \quad (5.90)$$

avec δx la taille des cellules dans la direction x (ici l'espacement du maillage varie au cours du temps et dans l'espace, donc il faut vérifier la condition de Courant).

Pour fermer les équations de discrétisation, il faut des conditions aux limites. S'agissant d'un schéma amont pour la vitesse, on a besoin de fixer la vitesse au nœud x_1 . Par exemple, pour une rupture de barrage d'un volume fini sur fond horizontal, on suppose que le niveau du fluide descend le long de la paroi verticale, mais il reste toujours du fluide collé à cette paroi. On a donc : u_1^n pour $n \geq 0$. Pour la hauteur, on n'a pas de problème car ici on ne fait qu'exprimer la conservation de la masse, donc le problème principal qui va se poser est de trouver la position du point frontal x_N . Un problème qui se pose lorsqu'on veut calculer numériquement la rupture de barrage sur un fond horizontal lisse ($\theta = 0$ et $\tau_p = 0$) est l'imprécision de la discrétisation pour calculer la position du front. On a en effet vu précédemment que la position du front est donnée à l'avance par

$$x_f = 2c_0 t,$$

avec $c_0 = \sqrt{gh_i}$ et h_i la hauteur d'eau initiale. On peut donc imposer : $x_N^n = 2c_0 n\delta t$ pour tout n . La difficulté est qu'on injecte une partie de la solution analytique pour trouver la solution numérique... mais si on ne le fait pas, le modèle n'est pas très précis pour le calcul du front. Malheureusement, dans la plupart des cas pratiques, on ne sait pas calculer par avance la position du front et il faut donc recourir à des approximations.



Un autre problème que nous ne mentionnons pas ici est que les équations de Saint-Venant peuvent générer des chocs (ressaut hydraulique), mais les méthodes lagrangiennes sont mal

6. Richard Courant (1888–1972) était un mathématicien allemand. Après ses études en Allemagne, puis à l'ETH de Zürich, il devint professeur de mathématiques à l'Université de Münster (Rhénanie). Juif, il fut contraint à l'exil en 1933. Après un passage à Cambridge, il s'installa à New York, où il fonda un institut de mathématiques mondialement reconnu, appelé aujourd'hui l'Institut Courant. Courant a une influence considérable en mathématiques appliquées (fondement des méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles et en mathématiques physiques (onde de choc, aérodynamique)).

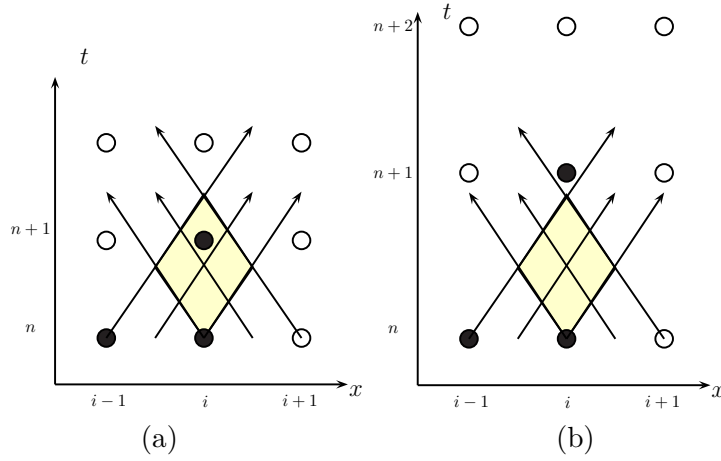


Figure 5.43 : grille de calcul dans le plan $x-t$ et report des caractéristiques C_- et C_+ . Pour chaque cellule i et $i+1$ autour du nœud x_i^n , on trace les réseaux de caractéristiques; ces caractéristiques se croisent dans un domaine coloré en jaune. Lorsque le nœud x_i^{n+1} se trouve dans ce domaine, cela veut dire qu'il est influencé uniquement par ce qui se passe dans les i et $i+1$ au temps n (cas a). Sinon, cela veut dire qu'il faudrait connaître ce qui se passe dans les cellules voisines, par exemple $i-1$ et $i+2$, pour mener à bien le calcul par la méthode des caractéristiques (cas b). Dans ce dernier cas le calcul a peu de chances d'être stable.

adaptées pour calculer ces discontinuités; il existe des astuces numériques pour s'en sortir, mais c'est toujours au prix d'une perte d'informations et de précision. Dans le cas de rupture de barrage sur fond lisse et sec, le problème ne se pose pas car aucun choc ne se forme.

Exemple d'application

Considérons un exemple où l'on lâche à $t = 0$ un volume fini de fluide contenu dans un réservoir de hauteur h_i et de longueur L (voir figure 5.44). Cette géométrie est très proche du problème étudié par Ritter si ce n'est que le volume est fini.

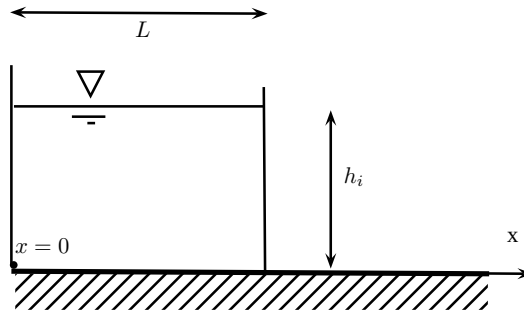


Figure 5.44 : géométrie étudiée. Paramètres du calcul: $L = 1$ m, $N = 50$ mailles, $\delta = 10^{-3}$ s.

On considère N mailles. Le pas initial entre chaque nœud est donc $\delta x = L/N$ et on a à $t = 0$ la position de chaque nœud donnée par la relation

$$x_i^0 = (i-1)\delta x \text{ pour } 1 \leq i \leq N+1,$$

alors que la hauteur initiale est donnée par

$$h_i^0 = h_i \text{ pour } 1 \leq i \leq N,$$

et la vitesse initiale est

$$u_i^0 = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq N,$$

et au niveau du barrage au moment de son effacement (en $x = L$)

$$u_{N+1}^0 = 2c_i = 2\sqrt{gh_i}.$$

On se sert des relations (5.87–5.89) pour trouver la position des nœuds, leur vitesse, et leur hauteur au temps $n \geq 1$. On reporte sur la figure 5.45 le résultat d'un calcul avec $N = 50$ mailles pour le temps $t = 0,2$ s et $t = 1$ s. On compare aussi la solution numérique avec la solution de Ritter valable pour un volume infini, donnée par les équations (5.49–5.50). On note le très bon accord à $t = 0,2$ s, mais il y a une différence notable pour le temps $t = 1$ s, qui illustre en fait l'effet de taille finie du réservoir. On note aussi sur cette figure que le point frontal est situé très loin des autres points, ce qui montre à quel point il est crucial de fournir au modèle numérique la bonne solution au niveau du front pour que la solution soit précise.

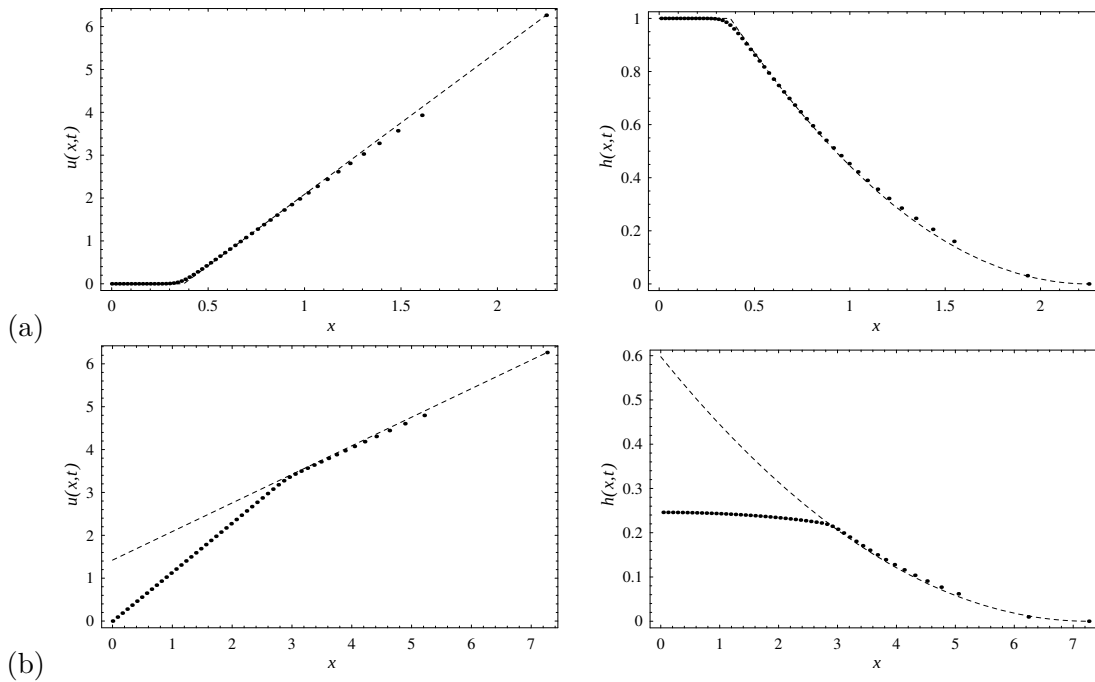


Figure 5.45 : comparaison entre la solution de Ritter (trait discontinu) et la solution numérique (chaque point noir représente un nœud du calcul). (a) Calcul au temps $t = 0,2$ s. (b) Calcul au temps $t = 1$ s. Paramètres du calcul: $L = 1$ m, $N = 50$ mailles, $\delta t = 10^{-3}$ s. Se reporter au site web du laboratoire <http://lhe.epfl.ch/MFprogramme.html> pour voir le code écrit avec Mathematica.

5.6.2 Méthode des caractéristiques

Parmi les méthodes de résolution des équations de Saint-Venant sous forme eulérienne, la méthode des caractéristiques est sans doute l'une des plus intéressante pour comprendre la physique du phénomène, mais elle reste d'un intérêt numérique plus limité.

Mise sous forme caractéristique

L'exposition complète de cette méthode nécessiterait de traiter de façon plus complète les invariants de Riemann, les ondes de choc et de détente, etc., ce qui est bien au-delà de

l'objectif du présent cours ; on se contentera d'un exposé général. Les équations de Saint-Venant peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{B}, \quad (5.91)$$

où l'on a introduit le vecteur $\mathbf{U} = (h, \bar{u})$, la matrice $\mathbf{A}$, et le vecteur $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{u} & h \\ g \cos \theta & \bar{u} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_p}{\rho} + gh \sin \theta \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ possède deux valeurs propres $\lambda_i(\mathbf{U}) = \bar{u} \pm c$, avec $c = \sqrt{gh \cos \theta}$ (rappelons que c est la célérité et représente la vitesse caractéristique de propagation des ondes à la surface libre), associées aux vecteurs propres à gauche $\mathbf{v}_i = (\pm c/h, 1)$: $\mathbf{v}_i \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i$. Si on multiplie l'équation (5.91) par $\mathbf{v}_i$, on tire :

$$\mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}.$$

Soit Γ_i la courbe dite *caractéristique* dont l'équation dans un plan $x-t$ vérifie $dx_i(t)/dt = \lambda_i$; pour toute fonction f prenant ses valeurs sur cette courbe, on a

$$\frac{df(x_i(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x}.$$

On déduit que l'équation précédente peut se mettre sous la forme simplifiée :

$$\mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} \Big|_{x=x_i(t)} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}.$$

Ce qui nous intéresserait à ce niveau, c'est de pouvoir faire entrer le vecteur $\mathbf{v}_i$ dans le terme différentiel ; il faut pour cela que le produit scalaire $\mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{U}$ forme une différentielle totale. Autrement dit, on cherche s'il existe une fonction φ_i telle que $d\varphi_i = \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{U} = c/h dh \pm d\bar{u}$. On voit facilement qu'effectivement une telle fonction existe ; elle vaut : $\varphi_i = \bar{u} \pm 2c$. On aboutit alors à la forme simplifiée :

$$\frac{d\varphi_i}{dt} \Big|_{x=x_i(t)} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}.$$

L'interprétation en est simple : le long des courbes caractéristiques Γ_i , la variation de $\varphi_i = \bar{u} \pm 2c$ est $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}$; si cette dernière quantité est nulle (pas de frottement et fond horizontal), alors φ_i se conserve le long des courbes caractéristiques. Le principe de résolution numérique s'en déduit aisément. Admettons qu'au temps t on connaisse la solution $\mathbf{U}(x, t)$; on veut maintenant la calculer à l'instant $t + \Delta t$ (point M sur la figure 5.46). Plutôt que de travailler avec les variables u et h , on travaille avec les variables φ_i . On peut tracer deux caractéristiques Γ_1 et Γ_2 issues du point M ; ces caractéristiques coupent l'axe x au temps t aux points P et Q.

Au premier ordre (les sections de courbes PM et PQ sont alors des segments de droite), on $\Delta\varphi_i = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B})\Delta t$. La valeur de φ_i en M est alors incrémentée $\varphi_i(\text{P ou Q}) + \Delta\varphi_i$. Connaissant φ_i en M, on fait le changement de variable inverse pour retrouver u et h .

C'est le principe général pour résoudre des équations différentielles de la forme (5.91). En pratique, il faut tenir compte de problèmes de stabilité numérique pour discrétiser correctement les équations et de la possibilité d'apparition de chocs. En effet, si deux caractéristiques de

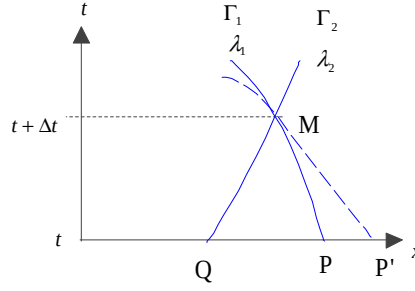


Figure 5.46 : principe de résolution numérique par la méthode des caractéristiques.

la même famille (Γ_1 partant de P et P' par exemple, voir figure 5.46) se croisent au point M, alors on a affaire à un système qui aurait plusieurs valeurs possibles de u et h , ce qui n'est pas admissible pour une solution continue d'un point de vue physique. La seule autre possibilité est que la solution soit localement discontinue : on dit qu'une *onde de choc* se forme. Cette formation d'un choc peut se comprendre à l'aide de la figure 5.47 : quand une onde se déplace et se déforme non linéairement, il peut arriver qu'une partie de l'onde ait tendance à vouloir aller plus vite que l'autre partie. Sur la figure 5.47(c), on note que plusieurs valeurs de hauteur seraient possibles, mais une telle solution n'est pas possible car elle correspondrait à une vague déferlante ; on remplace alors la solution continue par une solution discontinue (ressaut).

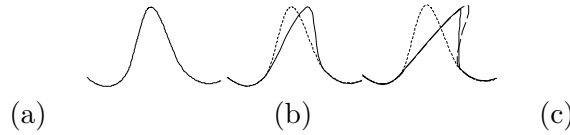


Figure 5.47 : déformation d'une onde non linéaire jusqu'à la formation d'une discontinuité (choc).
(a) État initial. (b) Déformation de l'onde (trait continu) par rapport à l'état initial (trait discontinu).
(c) Déformation non admissible (tiret large) conduisant à la formation d'un choc (trait continu).

Mise sous forme caractéristique

Pour comprendre ce qui se passe considérons le cas simple d'un écoulement sur un fond horizontal et sans résistance ($\theta = 0$ et $\tau_p = 0$). On a vu que la formation caractéristique des équations de Saint-Venant est

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= 0 \text{ le long de } C_+ : \frac{dx}{dt} = \lambda_+, \\ \frac{ds}{dt} &= 0 \text{ le long de } C_- : \frac{dx}{dt} = \lambda_-, \end{aligned}$$

avec $r = \bar{u} + 2c$, $s = \bar{u} - 2c$, $\lambda_+ = \bar{u} + c$, $\lambda_- = \bar{u} - c$, $c = \sqrt{gh}$. On considère qu'à $t = 0$ on connaît ce qui se passe en nombre fini de points espacés de δx (points 1 à 4 sur la figure 5.48). Les pentes des caractéristiques passant par ces points sont connues et égales à $\lambda_{\pm}$. Ces caractéristiques se coupent aux points 5 à 7. Si on remplace localement les courbes par des segments de droite, nous pouvons calculer les coordonnées de ces points. Une fois ces coordonnées calculées, on peut se servir de l'invariance de r et s le long des courbes caractéristiques. Par exemple, pour le point 5, on a :

$$u_5 + 2c_5 = u_1 + 2c_1(C_+) \text{ et } u_5 - 2c_5 = u_2 - 2c_2(C_-).$$

De même pour le point 6 on a

$$u_6 + 2c_6 = u_2 + 2c_2(C_+) \text{ et } u_6 - 2c_6 = u_3 - 2c_3(C_-).$$

On fait ainsi de suite pour déterminer les autres points. On comprend mieux la notion de domaine d'influence : on voit ainsi que le domaine triangulaire compris entre les points 1, 4, et 10 est entièrement influencé par la condition initiale à $t = 0$ au niveau des points 1 à 4. On voit aussi que si l'on se place à gauche du point de 5, on peut bien faire partir une caractéristique C_- , mais il manque l'information transmise par C_+ ; il faut alors des conditions aux limites (par exemple, fournies le long de $x = 0$) ou bien d'autres conditions initiales à gauche du point 1.

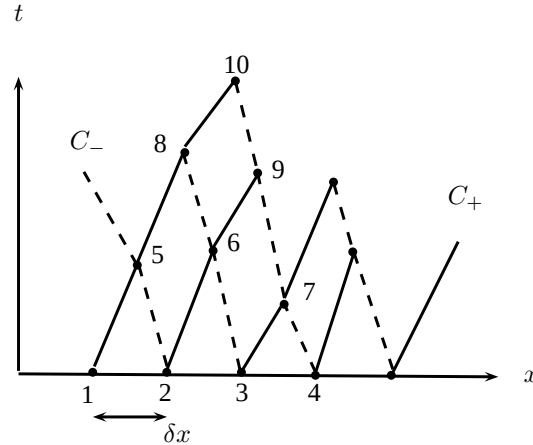


Figure 5.48 : réseau de caractéristiques.

La principale difficulté de cette méthode est que les points d'intersection sont irrégulièrement répartis dans le plan $x - t$, ce qui impose d'interpoler les résultats pour calculer par exemple un profil de hauteur à un instant t . De plus, lorsque de des chocs se produisent (intersection de deux caractéristiques C_+ par exemple) En pratique, cette méthode n'est plus tellement utilisée de nos jours, mais elle est très utile pour comprendre ce qui se passe physiquement. Dans la plupart des algorithmes modernes de résolution des équations du mouvement (5.91), le traitement numérique est prise en compte à l'aide de techniques spécifiques (solveurs de Riemann, de Roe, etc.).

5.6.3 Méthode des différences finies

Principe

On discrétise les termes différentiels selon un schéma de discrétisation diffusif explicite dit de Lax⁷

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &\approx \frac{1}{\delta t} \left(f_i^{n+1} - \left[\alpha f_i^n + (1 - \alpha) \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n}{2} \right] \right), \\ \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\delta x},\end{aligned}$$

avec $0 \leq \alpha < 1$ un coefficient (constant) qui contrôle la stabilité de l'algorithme : plus α est choisi proche de 0, plus le schéma est diffusif, c'est-à-dire il a tendance à lisser toutes les irrégularités. Plus α est proche de 1, moins il est diffusif, mais il devient instable pour $\alpha = 1$ et a tendance à générer d'importantes fluctuations pour α proche de 1.

7. Peter Lax est un mathématicien américain d'origine hongroise, né en 1926 à Budapest. Il a travaillé sur le projet Manhattan à Los Alamos en 1945–1946. Professeur à New York University, il est à l'origine de nombreuses contributions en mathématiques appliquées pour résoudre numériquement des équations différentielles.

Les équations de Saint-Venant (sous forme non conservative) deviennent

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= \alpha h_i^n + (1 - \alpha) \frac{h_{i+1}^n + h_{i-1}^n}{2} - u_i^n \frac{\delta t}{2\delta x} (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) - h_i^n \frac{\delta t}{2\delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \\ u_i^{n+1} &= \alpha u_i^n + (1 - \alpha) \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - u_i^n \frac{\delta t}{2\delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - g \cos \theta \frac{\delta t}{2\delta x} (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) \\ &\quad + g \sin \theta - \frac{\tau_p(u_i^n, h_i^n)}{\rho}. \end{aligned}$$

On peut ainsi mettre à jour au temps $n+1$ les valeurs de u et h en tout point de la grille sauf à ses extrémités : (u_1^{n+1}, h_1^{n+1}) et $(u_{N+1}^{n+1}, h_{N+1}^{n+1})$ doivent être fixés indépendamment par des conditions aux limites. Le schéma est stable dès lors que la condition de Courant est vérifiée

$$\frac{\delta t}{\delta x} (u + c) < 1, \text{ avec } c = \sqrt{gh \cos \theta}.$$

Comme tous les schémas diffusifs, cet algorithme introduit de la diffusion numérique, qui peut fausser les résultats. Le schéma ne peut être employé en présence de choc (ressaut). C'est pour ces raisons que l'on préfère des schémas plus performants. Parmi les méthodes aux différences finies, le schéma implicite de Preissmann développé par la société Sogreah ainsi que le schéma implicite d'Abbott-Ionescu sont parmi les plus populaires.

Exemple d'application

On a considéré la rupture d'un barrage sur fond lisse, horizontal et sec. La figure 5.49 montre la géométrie étudiée. La grille de calcul est composée d'un découpage en $N = 100$ mailles d'espace régulièrement distribuées entre $x = 0$ et L . Le barrage occupe une longueur L_0 . On a choisi un coefficient $\alpha = 0,9$. Comme le montre la figure 5.50, la solution numérique s'écarte très rapidement de la solution théorique de Ritter.

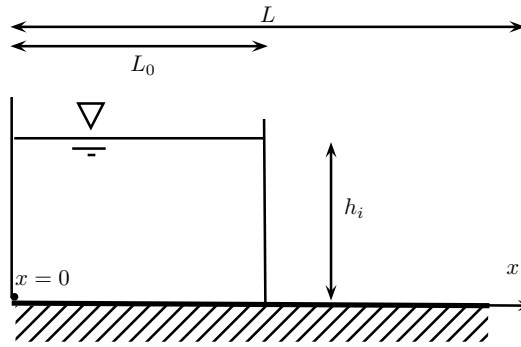


Figure 5.49 : géométrie étudiée. Paramètres du calcul : $L = 2$ m, $N = 100$ mailles, $\delta = 5 \times 10^{-4}$ s.

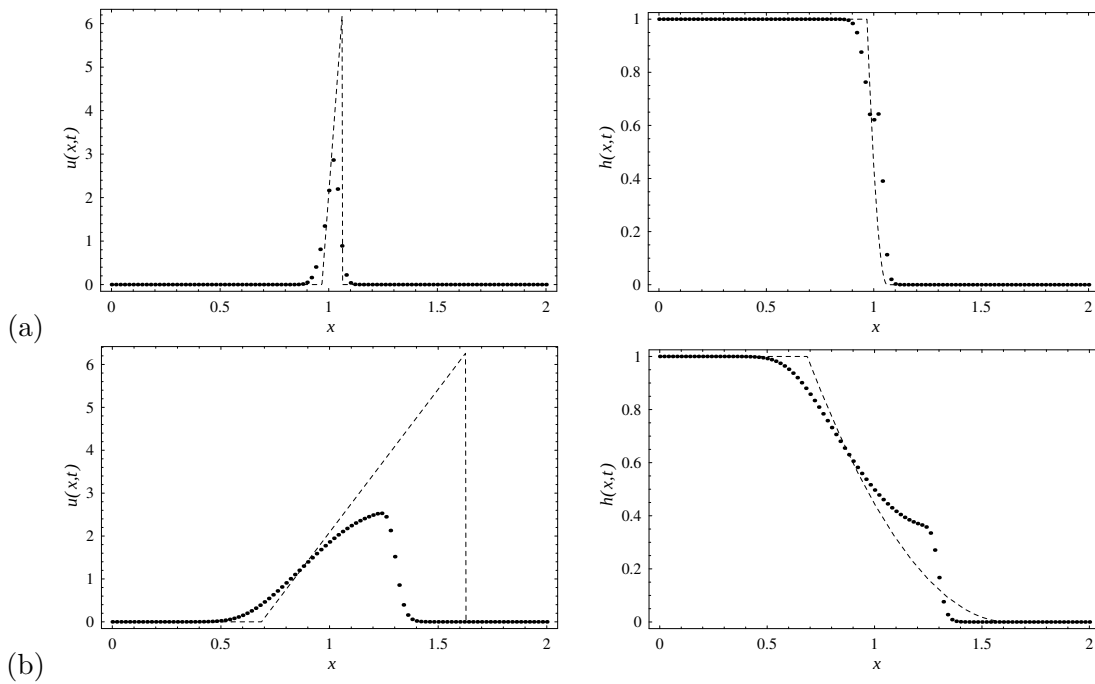


Figure 5.50 : comparaison entre la solution de Ritter (trait discontinu) et la solution numérique (chaque point noir représente un nœud du calcul). (a) Calcul au temps $t = 0,01$ s. (b) Calcul au temps $t = 0,1$ s. Paramètres du calcul: $L = 2$ m, $h_i = 1$ m, $L_0 = 1$ m, $N = 100$ mailles, $\delta t = 5 \times 10^{-4}$ s, $\alpha = 0,9$. Se reporter au site web du laboratoire <http://lhe.epfl.ch/MFprogramme.html> pour voir le code écrit avec Mathematica.

Exercices



Exercice 5.1 Un entrepreneur dépose un tas de bitume sur un sol horizontal. Le volume par unité de largeur de ce tas est $W = 1 \text{ m}^3/\text{m}$ et la hauteur initiale est $h_0 = 50 \text{ cm}$. Ce bitume a une viscosité de $10^4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et une masse volumique de $2200 \text{ kg}/\text{m}^3$. Calculer la distance ℓ parcourue en une semaine par le front du dépôt de bitume. Quelle est l'épaisseur au centre du tas ?

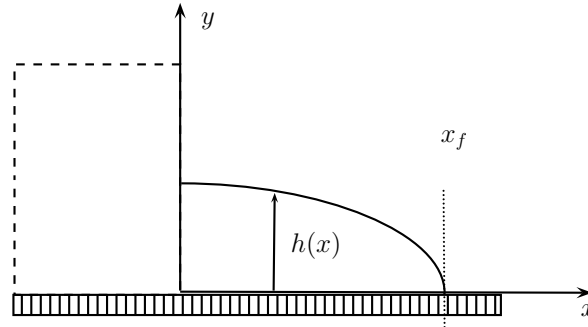


Figure 5.51 : étalement d'une couche de bitume.

Pour répondre à la question, on procédera ainsi :

- en s'aidant de l'analyse dimensionnelle menée au § 5.2.2, déterminer les processus dominants et proposer des échelles de vitesse et de pression représentatives du problème ;
- adimensionnaliser les équations de Navier-Stokes en conséquence ;
- intégrer l'équation de continuité selon la hauteur ;
- rechercher une solution auto-similaire sous la forme $H = bT^n(\xi)$ avec H la hauteur et $\xi = X/(at^m)$ la variable de similitude choisie de telle que $\xi = 1$ correspond au front de l'écoulement ;
- montrer que l'équation de continuité intégrée se transforme en équation différentielle ordinaire du second ordre ;
- intégrer successivement cette équation pour en déduire $H(\xi)$;
- en déduire le profil de hauteur $h(x, t)$ et la position du front au cours du temps ;
- faire l'application numérique.

↪ Réponse :

Processus dominants On considère qu'on place dans un récipient rectangulaire de l'huile très visqueuse. À un instant $t = 0$, on soulève le récipient et l'huile commence à s'écouler sur un plan horizontal sous la forme d'une couche peu épaisse. On cherche à calculer le mouvement de ce volume fini d'huile qui s'étale lentement le long du plan, notamment le profil de hauteur $h(x, t)$. On reprend les équations de Navier-Stokes vues précédemment au § 5.2. Si le fluide est suffisamment visqueux, on va retrouver que les termes inertiels sont négligeables. L'écoulement est donc contrôlé par l'équilibre entre le gradient de pression et la contrainte de frottement visqueux. Pour un écoulement à surface libre lent, la pression doit être proche de la pression hydrostatique, donc l'échelle de pression est cette fois $P_* = \rho g H_*$, avec H_* une échelle de hauteur fixée par les conditions initiales (par exemple $H_* = 50 \text{ cm}$). L'équilibre entre gradient de pression et contrainte visqueuse implique que l'échelle de vitesse U_* est fixée

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow U_* = \frac{\rho g H_*^3}{\mu L_*}.$$

Adimensionnalisation des équations En employant un changement de variables similaires à ce qui a été fait au § 5.2.2, on obtient le jeu suivant d'équations pour la conservation de la quantité

de mouvement :

$$\epsilon \text{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (5.92)$$

$$\epsilon^3 \text{Re} \left(\frac{\partial V}{\partial T} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -1 - \frac{\partial P}{\partial Y} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}, \quad (5.93)$$

où T est un temps sans dimension ; on pose en effet $t = TT_*$, avec $T_* = L_*/U_*$. L'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (5.94)$$

Considérons le cas d'un écoulement peu épais, c'est-à-dire $\epsilon \ll 1$, et très lent, c'est-à-dire $Re \ll 1$. Dans ce cas, on obtient l'approximation suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = \frac{\partial P}{\partial X},$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = -1.$$

On déduit : $P = H - Y$ et $U_{YY} = H_X$. L'intégration donne : $U = H_X Y^2/2 + aY + b$. Comme $U(0) = 0$, on a $b = 0$. La contrainte est nulle à la surface libre, donc $U_Y(H) = H_X H + a = 0$, soit $a = -HH_X$. La vitesse locale est donc :

$$U(X, Y, T) = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial X} Y(Y - 2H).$$

La vitesse moyenne est :

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \int_0^H U dY = -\frac{1}{3} \frac{\partial H}{\partial X} H^2.$$

Intégration de l'équation de continuité Intégrons maintenant l'équation de continuité selon la hauteur

$$\int_0^H \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) dY = 0,$$

soit encore

$$\int_0^H \frac{\partial U}{\partial X} dY + V(H) - V(0) = 0,$$

or d'après la condition à la limite à la surface libre et la condition de non-pénétration, on a

$$V(H) = \frac{dH}{dT} = \frac{\partial H}{\partial T} + U(H) \frac{\partial H}{\partial X},$$

$$V(0) = 0,$$

De plus, en se servant de la règle de Leibniz, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^H \frac{\partial U}{\partial X} dY &= \frac{\partial}{\partial X} \int_0^H U dY - U(H) \frac{\partial H}{\partial X}, \\ &= \frac{\partial}{\partial X} (\bar{U} H) dY - U(H) \frac{\partial H}{\partial X}, \end{aligned}$$

ce qui permet finalement d'arriver à la forme intégrée de l'équation de continuité

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (\bar{U} H) = 0. \quad (5.95)$$

On tire l'équation fondamentale du mouvement pour ce problème :

$$\frac{\partial H}{\partial T} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial X} \left(H^3 \frac{\partial H}{\partial X} \right) = 0. \quad (5.96)$$

Cette équation peut encore se mettre sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{H^3}{3} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + H^2 \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)^2},$$

La première partie de l'équation est de la forme $y_t = \kappa y_{xx}$, typique des ondes pour des phénomènes de diffusion (équation différentielle quasi-linéaire) tandis que le dernier terme à droite introduit un terme de convection non linéaire.

Comme conditions aux limites, on a : $H(X_f) = 0$ (hauteur nulle au front) et on suppose que le volume initial est constant et vaut A . La conservation du volume implique qu'au cours du temps, on ait :

$$\int_0^{X_f} H(X, t) dX = A = cste. \quad (5.97)$$

Recherche d'une solution auto-similaire Pour résoudre ce type d'équations, on emploie une technique spécifique (qu'on ne développera pas ici), qui s'appelle la méthode des solutions auto-similaires et qui consiste à l'aide d'un changement de variables de passer d'une équation aux dérivées partielles (à deux variables) à une équation différentielle ordinaire, plus simple à résoudre. On recherche une solution sous la forme

$$H = bT^n \mathcal{H}(\xi), \text{ avec } \xi = \frac{X}{at^m}.$$

On va rechercher si de telles solutions existent en identifiant les coefficients a , b , n , et m . On choisit a de telle sorte que $\xi = 1$ donne la position du front. On suppose donc que la position du front vérifie une loi de la forme $x_f = at^m$. La conservation de la masse entraîne que l'on doit avoir

$$\int_0^{X_f} bT^n \mathcal{H}(\xi) dX = abT^{n+m} \int_0^1 \mathcal{H}(\xi) d\xi = A.$$

Cela impose donc $n + m = 0$ car le volume ne dépend pas du temps. Examinons individuellement tous les termes apparaissant dans l'équation fondamentale (5.96) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} &= nbT^{n-1} \mathcal{H} - mbT^{n-1} \xi \mathcal{H}', \\ \frac{\partial H}{\partial X} &= \frac{b}{a} T^{n-m} \mathcal{H}', \\ \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} &= \frac{b}{a^2} T^{n-2m} \mathcal{H}'', \\ H^3 \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} &= \frac{b^4}{a^2} T^{4n-2m} \mathcal{H}'' \mathcal{H}^3, \\ H^2 \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)^2 &= \frac{b^4}{a^2} T^{4n-2m} \mathcal{H}'^2 \mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

Pour que dans l'équation finale, le temps n'apparaisse pas, il faut que $4n - 2m = n - 1$. La résolution des équations $4n - 2m = n - 1$ et $n + m = 0$ donne

$$n = -\frac{1}{5} \text{ et } m = \frac{1}{5}.$$

On substitue chacune des expressions ci-dessus dans l'équation (5.96) et on trouve

$$-\frac{1}{5} b \mathcal{H} - \frac{1}{5} b \xi \mathcal{H}' = \frac{1}{3} \frac{b^4}{a^2} \mathcal{H}'' \mathcal{H}^3 + \frac{b^4}{a^2} \mathcal{H}'^2 \mathcal{H}^2.$$

Pour que b et a n'apparaissent plus, il faut poser $b^3 = a^2$, soit $b = a^{2/3}$. On aboutit alors à :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5} \mathcal{H} - \frac{1}{5} \xi \mathcal{H}' &= \frac{1}{3} \mathcal{H}'' \mathcal{H}^3 + \mathcal{H}'^2 \mathcal{H}^2, \text{ soit encore} \\ (\mathcal{H} \xi)' + \frac{5}{3} (\mathcal{H}^3 \mathcal{H}')' &= 0. \end{aligned}$$

Résolution de l'équation En $\xi = 1$, on a $H = 0$, donc par intégration on tire que

$$\mathcal{H}\xi + \frac{5}{3}\mathcal{H}^3\mathcal{H}' = 0.$$

Soit encore :

$$\frac{5}{9}\mathcal{H}^3 + \frac{\xi^2}{2} = c.$$

En $\xi = 1$, on a $H = 0$, donc $c = 1/2$. On aboutit alors à :

$$\mathcal{H} = \left[\frac{9}{10}(1 - \xi^2) \right]^{1/3}. \quad (5.98)$$

On en déduit que le paramètre a vaut :

$$a = \frac{A^{3/5}}{(\int_0^1 \mathcal{H} d\xi)^{3/5}} = \frac{A^{3/5}}{\left(\frac{1}{5} \left(\frac{9}{10} \right)^{1/3} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} \right)^{3/5}} \approx \left(\frac{A}{0,812} \right)^{3/5} = 1,133 A^{3/5},$$

où Γ représente la fonction gamma. Enfin, puisque $\bar{U} = -\frac{1}{3}H_x H^2$, on déduit que l'on peut écrire $\bar{U} = \frac{a}{5}T^{-4/5}\mathcal{U}(\xi)$ avec $\mathcal{U} = \xi$. Le profil en long de l'écoulement $\mathcal{H}(\xi)$ ainsi que la variation de $\mathcal{U}$ avec ξ sont reportés à la figure 5.52.

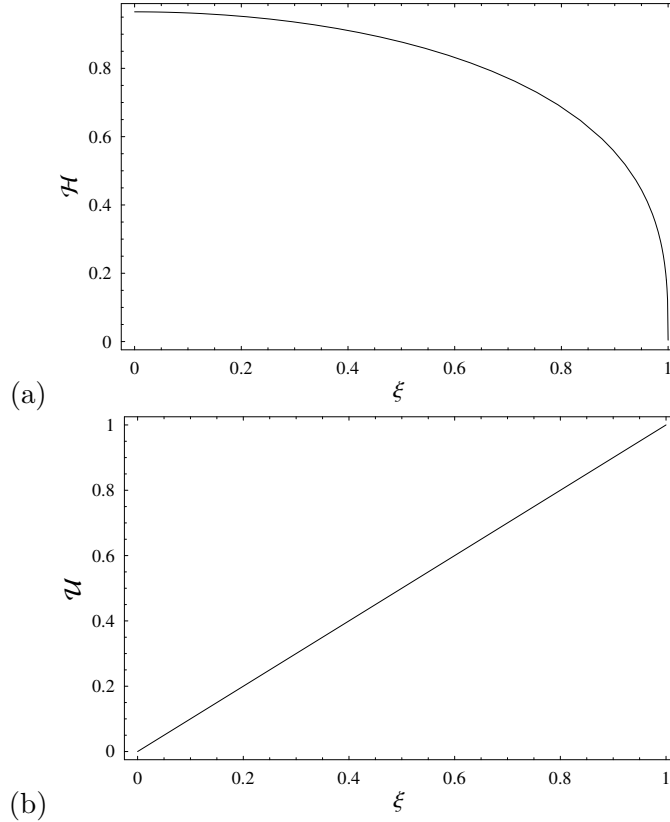


Figure 5.52 : variation de $\mathcal{H}$ (a) et $\mathcal{U}$

Profil de hauteur et position du front On peut ensuite repasser aux variables dimensionnelles. Une difficulté est qu'on a fait appel à plusieurs échelles sans les spécifier pleinement (L_* et H_* , par exemple), ce qui rend le retour aux variables dimensionnelles plus délicat. Une façon de procéder sans refaire tous les calculs est la suivante. On sait maintenant que la solution doit s'écrire sous la forme

$$h(x, t) = \kappa a^{2/3} t^{-1/5} \mathcal{H}(\xi),$$

avec $\mathcal{H}$ donné par l'équation (5.98), $\xi = x/a/t^{1/5}$, et κ un facteur dimensionnel qui ne sert ici qu'à s'assurer que h est bien homogène à une longueur, ce que l'on note ici $[h] \equiv \text{m}$. Ce facteur ne peut dépendre que des caractéristiques du fluide et de la géométrie de l'écoulement, soit ici g , μ , et ϱ , sous la forme d'une loi puissance (voir le chapitre 2 sur l'analyse dimensionnelle) : $\kappa = g^\alpha \mu^\beta \varrho^\gamma$. Pour que ξ soit sans dimension, il faut choisir a tel que

$$[a] \equiv \text{ms}^{-1/5},$$

donc

$$[\kappa] \equiv [h/a^{2/3}/t^{-1/5}] \equiv \text{m}^{1/3} \text{s}^{1/3}.$$

Comme $[h] \equiv$, $[\varrho] \equiv \text{kg/m}^3$, $[\mu] \equiv \text{kg/m/s}$, on a $\kappa = (\mu/\varrho g)^{1/3}$. La conservation de la masse entraîne

$$\int_0^{x_f} h(x, t) dx = W \Rightarrow a^{5/3} = \frac{W}{0,812\kappa},$$

avec W le volume initial de fluide. D'où finalement

$$h(x, t) = \left(\frac{\mu}{\varrho g} \frac{W^2}{0,659} \right)^{1/5} t^{-1/5} \mathcal{H}(\xi) = 1,181 \left(\frac{\mu}{\varrho g} \frac{W}{\sqrt{t}} \right)^{2/5} \mathcal{H} \left[0,883 \frac{x}{t^{1/5}} \left(\frac{\mu}{\varrho g W^3} \right)^{1/5} \right],$$

alors que la position du front est donnée par

$$x_f = \xi_f a t^{1/5} = 1,133 \left(\frac{\mu}{\varrho g W^3} \right)^{-1/5} t^{1/5}.$$

Application numérique.

La distance parcourue est

$$\ell = \xi_f a t^{1/5} = 1,133 \left(\frac{10^4}{2200 \times 9,81 \times 1} \right)^{-1/5} (7 \times 24 \times 3600)^{1/5} = 18,9 \text{ m}.$$

Le bitume se sera étalé d'environ 18,9 m. L'épaisseur au centre du tas est

$$h(0, t) = \left(\frac{\mu}{\varrho g} \frac{W^2}{0,659} \right)^{1/5} t^{-1/5} \mathcal{H}(0) = \left(\frac{\mu}{\varrho g} \frac{W^2}{0,659} \right)^{1/5} t^{-1/5} \left(\frac{9}{10} \right)^{1/3} = 0,899 t^{-1/5},$$

donc après 7 jours, on a $h(x=0, t=7) = 6,3 \text{ cm}$.

6 Ondes de crue et vagues

CE CHAPITRE traite des crues lentes ou rapides. On va s'intéresser à une multitude de phénomènes tels que :

- crues lentes des grands fleuves conduisant souvent à des inondations ;
- crues torrentielles sous forme de crues liquides (avec transport solide) ou bien de laves torrentielles ;
- vagues à la surface d'un plan d'eau (mer, lac) ;
- vagues d'impulsion consécutives à l'entrée d'un écoulement (écroulement rocheux, avalanche, etc.) dans une retenue d'eau ;
- vagues géantes telles que les tsunamis ;
- vagues dues à l'instabilité de la surface libre.

Tous ces phénomènes peuvent être calculés, à des degrés divers de précision, par les équations de Saint-Venant ou des équations approchées tirées des équations de Saint-Venant. Nous commençons par décrire les phénomènes physiques de façon qualitative avant d'aborder chacun d'eux à travers des équations.

6.1 Phénomènes physiques

6.1.1 Inondation et crue

Une inondation peut être définie selon les auteurs comme une « irruption d'eau sur un terrain normalement sec » comme une « submersion par l'eau débordant du lit normal d'un cours d'eau », ou comme « une accumulation d'eau provenant de drainages, sur des zones qui ne sont pas normalement submergées ». Il s'agit d'une situation temporaire qui peut être dommageable (destruction d'habitations, par exemple) ou bénéfique (apport d'alluvions fertilisants, par exemple). Les causes des inondations sont multiples et peuvent être classifiées comme on le montre ci-après.

Inondation fluviales et crues

On fait la distinction entre crue et inondation :

- les *inondations fluviales* sont les plus fréquentes et également les plus dommageables. Elles surviennent à la suite de longues périodes de pluie ou de la combinaison de pluies avec la fonte des neiges et glaces. Elles peuvent concerner des surfaces très importantes (plusieurs centaines à milliers de km²). La crue de l'Elbe en Tchéquie et en Allemagne en août 2002 est un exemple récent d'inondation sur une vaste échelle ;

- les *crues* sont des phénomènes brutaux qui surviennent à la suite de violentes précipitations sur un périmètre limité et souvent dans un contexte montagneux, de piémont, ou de collines. Elles sont soudaines, de courte durée et ont un débit de pointe relativement élevé. En zone de montagne, elles peuvent être extrêmement dévastatrices, d'autant plus qu'elles ont une capacité de charriage très importante, pouvant conduire aux laves torrentielles. Les crues de l'automne 2000 sur le Val d'Aoste, la haute Maurienne, et le Valais (Gondo, Fully pour le Valais) sont des exemples de crues quasi concomitantes sur une période de temps courte. Les crues du sud-est de la France offrent des exemples dramatiques de crues éclair sur de grands bassins-versants dans un contexte de colline : pour la crue historique du Tarn de mars 1930, on estima le débit à $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ contre $160 \text{ m}^3/\text{s}$ pour le débit de pointe annuel. Ces crues font souvent des victimes compte tenu de leur soudaineté et de la force du courant (la crue d'octobre 1988 à Nîmes fit 10 morts à Nîmes, la crue de l'Ouvèze à Vaison-la-Romaine fit 41 morts).



Figure 6.1 : crue du Rhône (région d'Arles, France) en décembre 2003.

Pour en savoir plus <http://geoconfluences.ens-lsh.fr/doc/transv/Risque/RisqueDoc.htm>. Source : <http://euspaceimaging.com>.

On peut relier les inondations à des scénarios météorologiques, qui sur l'Europe sont bien établis :

- les inondations hivernales, causées par des dépressions d'ouest associées à un front chaud, qui apportent des précipitations pouvant être longues, continues et intenses. Le sol se sature et de grands volumes d'eau ruissellent ;
- les inondations dues à la fonte des neiges se produisent lorsque le stock neigeux est encore important au printemps et lorsque du vent chaud provenant du sud traverse les Alpes. Si des précipitations accompagnent ce vent, les volumes d'eau ruisselée sont également importants ;
- les inondations dues aux précipitations convectives d'été peuvent avoir des effets catastrophiques sur des régions fortement urbanisées. Elles sont de type « crue éclair » (Nîmes, octobre

1988) ;

- les inondations dues aux grandes marées, qui affectent principalement les Pays-Bas (tempête de janvier 1953).

Remontées de nappe

Les remontées de nappe surviennent à la suite de la saturation du sol en eau et, par conséquent, lorsqu'il n'est plus en mesure d'absorber de nouvelles quantités d'eau, soit par un apport direct (pluie), soit par un apport indirect (écoulement souterrain, ruissellement à partir des versants). Dans les zones urbanisées (l'Oise en France) ou certaines régions géologiquement favorables (avec des terrains aquifères calcaires ou crayeux comme dans la Somme), ces remontées de nappe causent des inondations assez fréquentes. Au printemps 2001, après un hiver très humide, plus de 3000 personnes sont sinistrées dans la région d'Abbeville (Somme), leur maison restant inondée pendant deux à trois mois.

Débordement de lac

Les lacs, lorsque leur exutoire a une capacité d'évacuation (naturelle ou artificielle) limitée, peuvent voir leur niveau d'eau augmenter de plusieurs mètres, comme ce fut le cas au Tessin en 1993 avec le lac Majeur.

Rupture de barrage

On se reportera au chapitre 5 pour plus de renseignements.

Autres phénomènes

D'autres types d'inondations, plus anecdotiques pour nos contrées, sont également possibles. Parmi ceux-ci, mentionnons le phénomène de seiche, due à des phénomènes oscillatoires dans les grandes étendues d'eau fermées (par exemple les grands lacs aux États-Unis), les tsunamis affectant principalement les côtes japonaises, les marées de tempêtes associées aux cyclones tropicaux, les mouvements d'affaissement du terrain ou encore l'écroulement d'un barrage naturel. Les inondations des cotes de l'Océan Indien en Asie du Sud-Est à Noël 2004 ou les inondations à la Nouvelle-Orléans après le passage de l'ouragan Katrina sont des exemples d'inondations dues à des tsunamis ou des cyclones.

Dommages causés par les inondations

Les inondations représentent chaque année un pourcentage important des pertes économiques dues aux catastrophes naturelles (49 % du total mondial en 1999). Pour la période 1985–1999, le nombre d'événements ayant provoqué des dommages s'élevait à 2410 pour l'ensemble de la planète (430 pour l'Europe), représentant 30 % (respectivement 25 %) de l'ensemble des catastrophes naturelles. Durant la même période, elles ont provoqué la mort de plus de 250 000 personnes (1 800 pour l'Europe), soit environ la moitié du nombre total de victimes imputées aux catastrophes naturelles (MunichRe, 1999). Parmi l'ensemble des continents, l'Asie est celui qui paie le plus lourd tribut aux inondations : le pourcentage d'événements dommageables est de 37 %, celui des pertes en vies humaines est de 88 %, et celui des pertes économiques est de 68 % des totaux respectifs mondiaux. Cette situation est évidemment à mettre en

Tableau 6.1 : statistiques des inondations catastrophiques par continent sur la période 1985–1999 d’après les données de MünchenRe.

	<i>Inondation</i>	<i>Pertes économiques</i>	<i>Pertes en vie humaine</i>
	nombre (part en %)	millions US\$ (part en %)	nombre (part en %)
Europe	430 (18 %)	41 230 (15 %)	1 800 (1 %)
Asie	900 (37 %)	192 690 (69 %)	222 780 (88 %)
Amérique du Nord	420 (17 %)	37 540 (13 %)	3 670 (2 %)
Amérique du Sud	210 (9 %)	4 130 (1 %)	4 480 (2 %)
Afrique	330 (14 %)	1 950 (1 %)	15 810 (6 %)
Océanie	130 (5 %)	2 280 (1 %)	3 290 (1%)
Totaux	2410 (100 %)	279 810 (100 %)	251 820 (100 %)

relation avec les grands fleuves chinois et la situation particulière du Bangladesh. Dans ce dernier pays, 85 % du territoire national est exposé à d’importants risques d’inondations. La situation chinoise n’est pas en reste, bien que les plaines inondables ne représentent qu’une partie infime du territoire. Par exemple, pour le Yangtse, elle représente 1,5 % de la surface du pays, mais elle concentre 250 millions d’habitants et 45 % de la production du riz et des autres céréales y est produite.

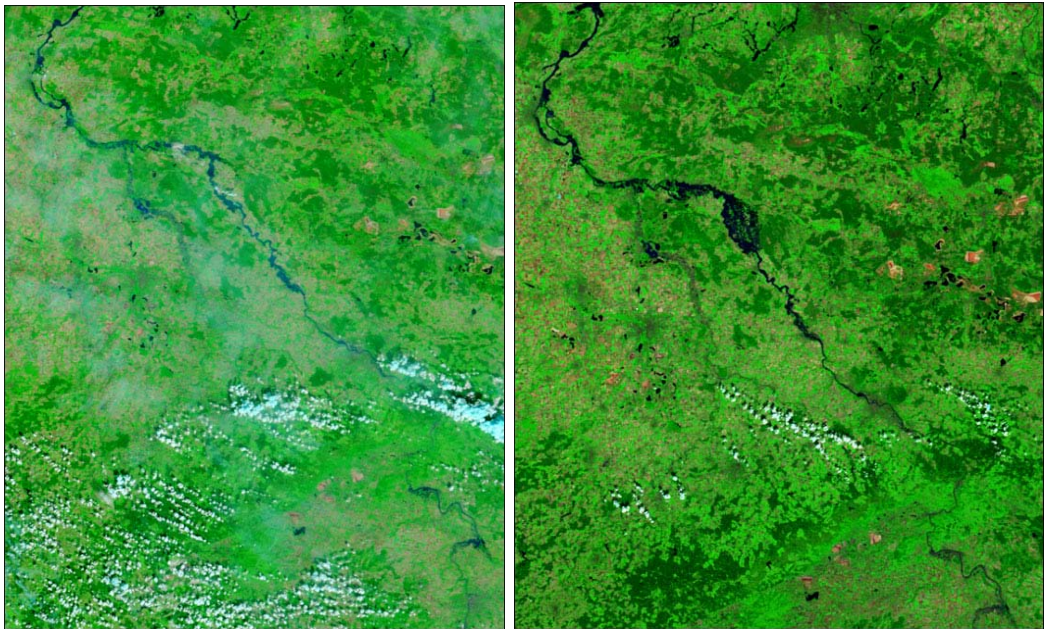


Figure 6.2 : l’Elbe en crue le 19 août 2002: situation en temps normal (à gauche) et situation le 19 août 2002. Source : Agence Spatiale Européenne.

6.1.2 Crues torrentielles

Les crues torrentielles sont des écoulements d’eau avec un fort transport solide, qui se produisent dans les torrents et les rivières de montagne ou de piémont. On distingue :

- les crues avec charriage : le cours d’eau transporte du sédiment grossier par roulement, glissement, saltation le long du lit (processus appelé charriage). Ce type de crue se produit dans les cours d’eau dès que le débit est suffisamment fort pour mettre en mouvement les matériaux composant le lit de la rivière. Contrairement aux rivières de plaine, où le sédiment est relativement fin et transporté en suspension dans l’eau,

les rivières torrentielles et les torrents peuvent transporter des volumes importants de matériaux, avec une échelle granulométrique étendue (du micromètre à plusieurs décimètres). Des crues comme celle de Brigue en septembre 1993 (Valais) peuvent provoquer des dommages importants en provoquant l'obstruction des ponts, l'exhaussement du lit, l'inondation des berges, et un important dépôt solide ;

- les laves torrentielles : lorsque la pente est forte, le transport par charriage est instable. La gravité est en effet suffisante à maintenir les particules en mouvement une fois qu'elles ont été érodées. Une lave torrentielle est donc un transport en masse d'un mélange de blocs, de terre, et d'eau ; la concentration solide est très importante (de l'ordre de 70–80 %). Le mélange prend alors souvent l'apparence d'une boue ou d'un béton. Les laves torrentielles ont donc un comportement mécanique très différent des crues liquides et, d'une certaine façon, elles sont plus proches d'une avalanche que d'une crue. La plupart des torrents peuvent produire avec une fréquence plus ou moins importante des laves torrentielles. Certains torrents comme le Nant du Pissot au-dessus de Villeneuve (Vaud) ne fournissent des laves qu'en moyenne une fois par siècle ; ce sont souvent des torrents à clappiers : le matériau mobilisé par les laves torrentielles provient de l'éboulement de falaises (les éboulis sont les « clappiers » ou clappes) et il faut plusieurs années à décennies pour former un stock suffisant de matériau mobilisable. D'autres torrents sont plus actifs car le terrain présente souvent une instabilité à un niveau local (berges) ou étendu (mouvement de terrain affectant une grande partie du bassin-versant). C'est le cas par exemple de l'Ilgraben, qui peut produire plusieurs laves torrentielles chaque année.

Signalons que certains écoulements naturels sont très proches des laves torrentielles que nous rencontrons dans les Alpes :

- les *lahars* sont des écoulements d'un mélange d'eau et de cendres, que l'on rencontre dans les régions volcaniques. Les éruptions volcaniques peuvent en effet déposer des quantités colossales de cendres, qui sont ensuite très facilement érodables. Des catastrophes récentes en Indonésie, Philippines (volcan Pinatubo en octobre 1991) sont consécutives à de fortes pluies. En Europe, la catastrophe de Sarno et Quindici (Italie) en mai 1998 est due à un mouvement de terrain affectant des sols volcaniques (dépôt de cendres du Vésuve) ; elle fit 137 morts et environ 300 M€ de dommages ;
- au cours des éruptions volcaniques, le mélange de cendres et d'eau (par exemple résultant de la fusion d'un manteau neigeux ou d'un glacier) peut provoquer des coulées froides de cendres, semblables aux lahars. En novembre 1985, le volcan Nevado del Ruiz en Colombie entra en éruption ; la fusion de la glace forma une coulée de cendres, qui engloutit la ville d'Armero et d'autres villages (23 000 morts environ). En mai 1980, l'éruption du volcan Mount Saint Helens aux États-Unis provoqua un affaissement complet du versant nord du volcan et causa la formation de lahars dévastateurs ; la vallée de la rivière North Fork Toutle fut comblée de sédiments sur une longueur d'environ 22 km et sur une épaisseur moyenne de 45 m (épaisseur pouvant localement atteindre les 200 m) ;
- certains mouvements de terrain ou écroulements peuvent se mettre à accélérer brutalement et causer des écoulements proches des laves torrentielles lorsque la teneur en eau est suffisante. En juillet 1965, le glissement de terrain de la Ravoir de Pontamafrey (France) accéléra soudainement après un printemps humide et forma une lave torrentielle de plusieurs centaines de milliers de m³, qui coupa la route nationale et la ligne de chemin de fer, isolant toute la vallée de Maurienne.



Figure 6.3 : (a) Brigue en septembre 1993 (cliché J.-P. Jordan, OFEG); (b) la plaine autour du Nevado del Ruiz couverte par les dépôts de lahars (source: J. Marso); (c) la vallée creusée par la rivière North Fork Toutle après le passage des lahars de mai 1980 causés par l'éruption du Mount Saint Helens (source: USGS).

6.1.3 Vagues

Le mot « vague » (*wave* en anglais, *Welle* en allemand) désigne une multitude de phénomènes, où une onde se propage à la surface d'une étendue d'eau (océan, lac, cours d'eau).

Les vagues sont souvent associées au milieu marin. En haute mer, l'amplitude des vagues reste à peu près constante même si elles fluctuent considérablement autour d'une hauteur moyenne, dite *hauteur significative* (on est en pratique assez loin du schéma d'Airy où les vagues sont des oscillations sinusoïdales de la surface). À l'approche des côtes, la conservation de l'énergie entraîne un accroissement de l'amplitude des vagues selon un schéma qui est décrit plus loin pour décrire les tsunamis (voir § 6.8). Il existe également des cas où des vagues peuvent atteindre de très grande amplitude en haute mer de façon quasi-surnaturelle. Appelées « vagues scélérates » en française, ces vagues ont longtemps été considérées comme des inventions de marins, mais les observations fiables se sont multipliées au ^{XX}^e siècle : en janvier 1995, la plate-forme pétrolière Draupner en Mer du Nord fut impactée par une vague scélérate dont la hauteur a été évaluée à environ 27 m lors d'une tempête (alors que la hauteur significative était de 10 m), soit un rapport de 2,7 ! En février de la même année, le paquebot Queen Elisabeth II essuya une violente tempête dans l'Atlantique nord et l'équipage a mentionné avoir observé fondre sur eux un mur d'eau de 30 m de haut ; le bateau quoiqu'endommagé put regagner le rivage. Ces vagues ont été immortalisées par une estampe japonaise (voir fig. 6.4). Bien qu'il soit toujours difficile d'expliquer la physique du phénomène, il est apparu que plusieurs processus ondulatoires bruités et non linéaires peuvent donner naissance à des oscillations d'amplitude exceptionnelle. La théorie des ondes de Korteweg et de Vries (description à l'ordre 3 des ondes à la surface d'une étendue d'eau) permet de justifier, au moins dans le cas unidimensionnel, l'existence de ces vagues exceptionnelles ; des expériences en laboratoire ont également montré que l'on pouvait générer artificiellement de tels phénomènes dans des canaux.



Figure 6.4 : la « grande vague de Kanagawa », estampe peinte dans les années 1820 et extraite des 36 Vues du Mont Fuji par l'artiste japonais Katsushika Hokusai (Metropolitan Museum of Art, New York).

Des vagues peuvent également s'observer dans les rivières et les lacs. Ce sont le plus souvent de petites intumescences :

- liées à un obstacle (ou un objet mobile) ;
- induites par une variation du niveau de l'eau ;

– provoquées par le vent.

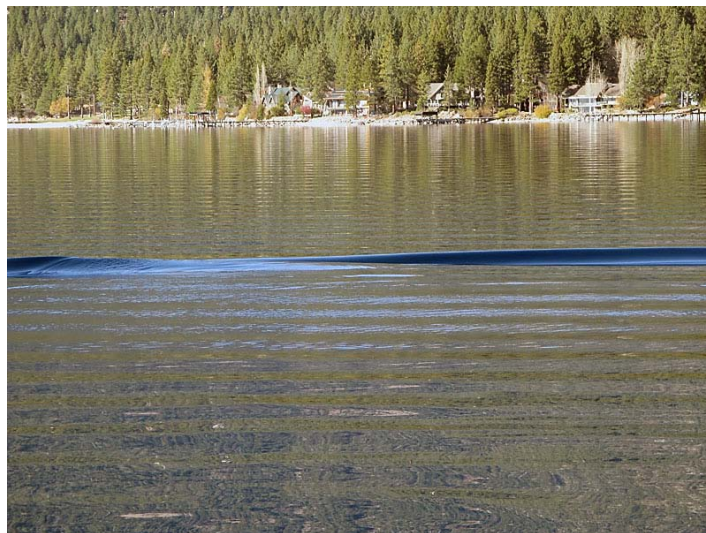


Figure 6.5 : vague le lac de Tahoe (Nevada) [C. Ancey].



(a)

(b)

Figure 6.6 : (a) déferlement d'une vague (la vitesse en crête étant supérieure à la vitesse en pied de vague, la vague finit par se recroqueviller sur elle-même, provoquant un « déferlement »). (b) Impact d'une vague sur une culée de pont (détruit lors de la crue) sur la rivière Whanguehu en Nouvelle-Zélande [DR].

Plus exceptionnellement, des vagues plus importantes peuvent se former dans les lacs et les rivières. Notamment, les ondes d'impulsion (*impulse wave* en anglais, *Impulswelle* en allemand) sont des vagues créées par l'entrée d'une masse solide (comme un glissement de terrain) dans un volume d'eau. Le transfert de quantité de mouvement entre la masse glissante et l'eau provoque la formation d'une vague qui peut être dévastatrice. Les effets sont assimilables à ceux d'un tsunami. Ainsi, en 1958, un mouvement de terrain se produisit à la suite d'un tremblement de terre en Alaska ; la masse de rocher pénétra dans l'eau d'une vaste baie bordant l'océan Pacifique et provoqua la formation d'une vague gigantesque. Celle-ci ravage tout le pourtour de la baie ; elle a notamment remonté le versant d'une colline sur 524 m de hauteur (par rapport au niveau) de la mer (voir fig. 6.8) (Weiss *et al.*, 2009). Les grands lacs suisses ont subi au cours des derniers siècles des dommages conséquents dus à des ondes d'impulsion comme le récapitule le tableau 6.2.

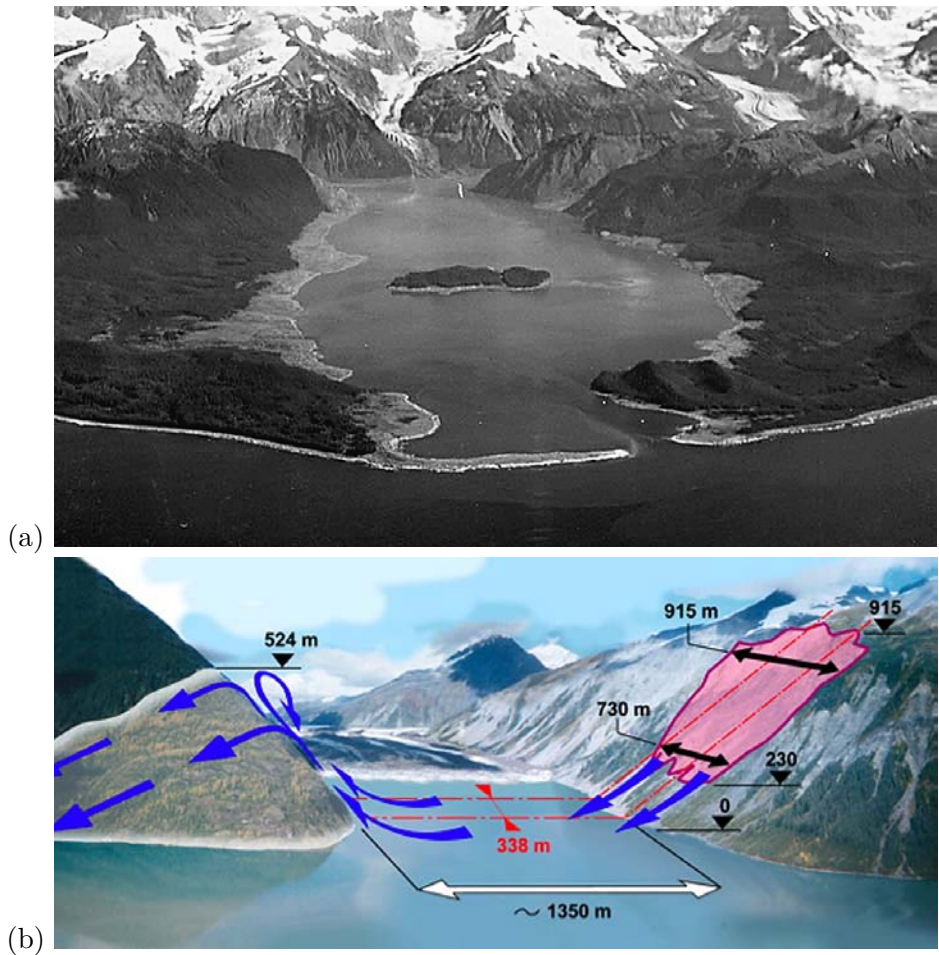


Figure 6.7 : (a) vue aérienne de Lituya Bay en 1958 après la vague catastrophique ; le passage de la vague dans la forêt permet d'évaluer la remontée de la vague sur les berges [D.J. Miller, USGS] ; source : geology.com. (b) Schéma du glissement avec représentation des grandeurs géométriques ; source : (Weiss et al., 2009) et www.drgeorgepc.com.

Tableau 6.2 : formation de vagues d'impulsion sur les grands lacs suisses. D'après (Huber, 1982).			
Date	Lieu	Cause	Dommages
563	lac Léman	rupture d'une embâcle sur le Rhône	tsunami sur le lac Léman
1435	lac de Zoug	rupture d'une berge	60 morts, 26 maisons détruites
1795	lac des 4 Cantons (Weggis)	glissement de terrain	400 sans-abris, 33 bâtiments détruits
1801	lac des 4 Cantons (Sisikon)	éboulement rocheux	10 morts, plusieurs bâtiments détruits
1806	lac de Lauerz (Goldau)	éboulement rocheux	457 morts
1862	lac de Lugano (Morcotte)	glissement de terrain	1 mort
1887	lac de Zoug (Zoug)	rupture des quais	650 sans-abris, 20 habitations détruites
1891	lac Léman (Montreux)	rupture des quais	72 m de quai détruits
1923	lac de Davos	rupture d'une berge entraînant la vidange partielle du lac	1 mort
1946	lac de Walenstadt	éboulement rocheux	1 mort
1963	lac des 4 Cantons (Obermatt)	éboulement rocheux	2 morts



Figure 6.8 : vague d'impulsion créée par un éboulement rocheux de $300\,000\text{ m}^3$ dans un lac morainique sous le glacier de Grindelwald (BE) le 22 mai 2009 ; source : [Tages Anzeiger](#).

Tableau 6.3 : liste des principales catastrophes dues à des vagues d'impulsion dans le monde. On indique la date de l'événement, le lieu et le pays, le volume du mouvement de terrain responsable de la vague, la hauteur de runup, et le nombre de victimes. D'après ([Heller, 2007](#)).

<i>Date</i>	<i>Lieu</i>	<i>Pays</i>	<i>Volume [Mm³]</i>	<i>Runup [m]</i>	<i>Victimes</i>
22/02/1756	Tjelle	Norvège	15	46	38
21/05/1792	Shimabara	Japon	500	10	~ 15000
27/08/1883	Krakatau	Indonésie		35	~ 36000
13/03/1888	Ritter Island	Papouasie	5000	20	~ 100
04/07/1905	Disenchantment Bay	EUA	29	35	0
07/04/1934	Tajford	Norvège	2	62	41
13/09/1936	Ravnefjell	Norvège	1	74	73
09/07/1958	Lituya Bay	EUA	31	524	2
22/03/1959	Pontesei	Italie	5		1
09/10/1963	Vajont	Italie	240	270	~ 2000
18/03/1971	lac Yanahuin	Pérou	0,1	30	~ 500
18/05/1980	Mount St. Helens	EUA	430	200	0

6.2 Équations de Saint-Venant et ondes

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel, les équations de Saint-Venant s'écrivent dans leur formulation non conservative :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (6.1)$$

$$\underbrace{\varrho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varrho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{\text{inertie}} = \underbrace{\varrho g \sin \theta}_{\text{force motrice}} - \underbrace{\varrho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{pression}} - \underbrace{\frac{\tau_p}{h}}_{\text{frottement}}. \quad (6.2)$$

Comme on l'a vu au chapitre 1, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (6.2) traduit l'équilibre entre plusieurs processus : termes inertiels, force motrice due à la gravité, gradient de pression hydrostatique, et frottement aux parois. Il est assez fréquent que seuls deux de ces processus soient prédominants par rapport aux autres même dans un régime qui n'est pas permanent uniforme. Le mouvement résulte alors de l'équilibre de deux processus :

- équilibre frottement $\leftrightarrow$ force motrice. Si l'écoulement est uniforme, on ne traduit là que la condition (exacte) d'équilibre. Cet équilibre peut se maintenir lorsque l'on n'est pas trop éloigné du régime permanent uniforme. La hauteur varie au cours du temps, mais cette variation est tellement lente et de si petite amplitude qu'à tout instant, l'écoulement local se comporte comme s'il était dans un régime permanent uniforme (gradient de pression nul, inertie négligeable). On parle d'approximation d'*onde cinématique* (voir § 6.3). À noter également que si l'amplitude de l'onde est trop importante, il n'est rapidement plus possible de négliger le gradient de pression. Il se produit alors un équilibre entre trois processus : gradient de pression, frottement, force motrice. On parle d'*onde diffusive* (voir § 6.4) ;
- équilibre gradient de pression $\leftrightarrow$ inertie. De l'eau au repos ou bien en écoulement permanent (sur une faible pente) présente une surface libre, qui peut être parcourue d'ondes. On parle assez souvent de vagues dans le langage courant pour désigner ces ondes. Si l'onde peut être considérée comme une petite perturbation de la surface libre, les deux processus dominants sont les termes inertiels et le gradient de pression. On parle d'approximation d'*onde dynamique* (voir § 6.5).

Notons que toutes les combinaisons de processus ne sont pas physiquement possibles ou intéressantes. Signalons enfin qu'il s'agit là d'ondes continues (c'est-à-dire dont les variables $\bar{u}(x, t)$ et $h(x, t)$ sont des fonctions continues). Les équations de Saint-Venant peuvent également générer des ondes discontinues, appelées *ondes de choc* en physique et *mascaret* ou *ressaut* en hydraulique (voir § 6.10).

Si les équations de Saint-Venant s'avèrent très utiles pour étudier les ondes, toutes les phénomènes ondulatoires ne peuvent être étudiés à l'aide de ces équations. Il faut rappeler que les équations de Saint-Venant sont fondées sur l'approximation d'écoulement peu épais ou d'onde longue (voir chap. 1). Pour des ondes de petite longueur d'onde, il faut en général utiliser des jeux d'équations plus performants telles que les équations d'Airy ou de Korteweg-de-Vries (voir § 6.7).

6.3 Onde cinématique

6.3.1 Définition

Même pour des écoulements non permanents et non uniformes, les variations dans l'espace et dans le temps sont tellement faibles que localement tout se passe comme si l'écoulement était permanent uniforme. C'est par exemple ce qui se passe sur de grandes fleuves lors de crue : le niveau d'eau monte tellement lentement que la vitesse de l'écoulement s'adapte à la hauteur en suivant une loi de régime permanent.



Figure 6.9 : la crue de la Seine de 1910 à Paris [DR].

Fixons quelques ordres de grandeur pour comprendre ce qui se passe et pour cela mettons de nouveau les équations sous forme adimensionnelle en introduisant des échelles :

$$\hat{u} = \frac{\bar{u}}{U_*}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L_*}, \quad \hat{t} = \frac{tU_*}{L_*}, \quad \hat{\tau}_p = \frac{\tau_p}{\varrho g H_* \sin \theta}, \quad \text{et} \quad \hat{h} = \frac{h}{H_*},$$

avec U_* , L_* , et H_* des échelles de vitesse, de longueur, de profondeur. Les équations de Saint-Venant (6.1)–(6.2) s'écrivent donc :

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{h} \hat{u}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{U_*^2}{L_*} \left(\varrho \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \varrho \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) = \varrho g \sin \theta - \varrho g \cos \theta \frac{H_*}{L_*} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\tau_p}{\hat{h} H_*}. \quad (6.4)$$

En introduisant le nombre d'aspect $\varepsilon = H_*/L_*$ et le nombre de Froude $\text{Fr} = U_*/\sqrt{gH_*}$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit également :

$$\text{Fr}^2 \varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) = \sin \theta - \cos \theta \varepsilon \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\tau_p}{\varrho g H_*} \frac{1}{\hat{h}}. \quad (6.5)$$

Les valeurs typiques que l'on a au cours d'une crue lente sont : $\text{Fr} \sim 0,1$ et $\varepsilon \sim 10^{-3}$ (si l'on s'intéresse à de longs linéaires de rivière). On voit dans le bilan de quantité de mouvement que

tous les termes sont petits sauf le terme moteur $\sin \theta$ et le terme de frottement. On conclut que l'équation de conservation de la quantité de mouvement, qui est à l'origine une équation aux dérivées partielles, se réduit à l'équation scalaire

$$\frac{\hat{\tau}_p}{\hat{h}} = 1, \quad (6.6)$$

ou sous forme dimensionnelle

$$\frac{\hat{\tau}_p}{\rho g h} = \sin \theta, \quad (6.7)$$

qui n'est rien d'autre que la condition d'équilibre pour le régime permanent uniforme.

6.3.2 Équation d'onde cinématique

On vient de voir que le cas d'une crue lente (typiquement ce qui se passe pour de grands bassins-versants), les termes inertiels jouent un rôle faible dans la propagation des ondes. On peut, en première approximation, considérer qu'en toute section la vitesse d'écoulement s'adapte immédiatement à tout changement de profondeur. Autrement dit, en résolvant l'équation (6.7) – en considérant une loi de type Chézy ou Manning-Strickler par exemple –, on obtient la relation $\bar{u} = \bar{u}(h)$, c'est-à-dire la relation obtenue en régime permanent.

Dans ce cas-là, la vitesse est la variable « esclave » ; la hauteur d'eau varie en fonction des apports amont (c'est la variable « maître ») et la vitesse s'ajuste en fonction de h . On peut calculer les caractéristiques de l'onde de crue à l'aide de l'équation de continuité (6.1). Prenant l'exemple d'une courbe de tarage fondée sur la loi de Chézy, c'est-à-dire $\bar{u}(h) = C\sqrt{i}\sqrt{h}$, avec C le coefficient de Chézy et $i = \tan \theta$ la pente, on tire de (6.1) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0,$$

la relation

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

avec $c = \bar{u} + h\bar{u}' = \frac{3}{2}C\sqrt{i}\sqrt{h}$ la vitesse de propagation de l'onde (vitesse d'advection) et $\bar{u}'$ est la dérivée de $\bar{u}(h)$ par rapport à h . On note que l'onde de crue se déplace plus rapidement que l'écoulement moyen (50 % plus vite) et elle se déplace d'autant plus vite que la hauteur est grande. Si on prend une loi de Manning-Strickler, on obtient une vitesse d'advection égale à $c = 5\bar{u}/3$, soit une valeur légèrement supérieure à celle obtenue avec la formule de Chézy.

Pour un canal de section quelconque, on peut montrer en suivant la même procédure que la célérité des ondes est donnée par :

$$c = \frac{\partial Q}{\partial S},$$

avec Q le débit total et S la section mouillée (formule de Kleitz¹-Seddon).

Notons qu'il s'agit d'une équation de type convectif (ou équation d'advection). La solution générale est donc de forme $f(x - ct)$: il s'agit d'une onde progressive (« travelling wave » en anglais) qui ne se propage que dans un seul sens contrairement aux équations dynamiques.

1. Charles Kleitz (1808–1886) était un hydraulicien français, diplômé de l'École des Ponts et Chaussées. Il travailla principalement sur l'aménagement du Rhône et son travail d'ingénieur l'amena à publier des travaux en hydraulique. En particulier, il s'intéressa à la propagation des crues et aux hydrogrammes de crue. Il montra notamment comment on pouvait estimer la vitesse de propagation d'une crue en fonction de la hauteur d'eau et du débit. Sa formule fut, semble-t-il, découverte indépendamment une trentaine d'années après par Seddon dans son étude de la rivière Missouri.

L'approximation d'onde cinématique offre une bonne description des ondes de crue en particulier lorsque l'écoulement est suffisamment rapide ($Fr = O(1)$). Dans la limite des petits nombres de Froude ($Fr \rightarrow 0$), un amortissement important de l'onde se produit et l'approximation d'onde diffusive est alors en général plus précise. Les ondes cinématiques ne sont en fait que des approximations des ondes dynamiques lorsque les propriétés dynamiques de la transmission d'onde sont négligeables. Leur avantage par rapport aux ondes dynamiques réside principalement dans un traitement mathématique allégé. Les ondes de crue dans les gros cours d'eau peuvent souvent être traitées dans le cadre des ondes cinématiques.

6.4 Onde diffusive

Un problème apparaît assez rapidement dans la dérivation de l'équation de l'onde cinématique : en général, la pente du lit est très très faible et il n'est pas rare que $\sin \theta \sim \varepsilon$ ou $\sin \theta \ll \varepsilon$ dans l'équation (6.5). Cela implique que pour les rivières à faible pente, on ne peut pas négliger le gradient de pression puisqu'il est du même ordre de grandeur, voire supérieur, que la force motrice.

Un autre problème majeur rencontré avec l'approximation d'onde cinématique est que ce modèle conduit à la formation d'onde de choc (ressaut hydraulique) compte tenu du caractère hyperbolique de l'équation du mouvement sans que cela corresponde à ce qui est observé.

Un modèle un peu plus fin est l'approximation d'onde *diffusive*, où l'on considère que la vitesse n'est pas reliée univoque à la hauteur d'écoulement, mais peut varier relativement lentement. De la sorte, les termes inertiels dans les équations de Saint-Venant (1.21)–(1.22) disparaissent. On se retrouve alors avec l'équation de continuité (1.21)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (6.8)$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.22) amputée des termes inertiels

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \tan \theta - \frac{\tau_p}{\varrho g h \cos \theta}, \quad (6.9)$$

avec $\tau_p(q, h)$ donnée par une loi de type Chézy ou Manning-Strickler. En différentiant (6.8) par rapport à x et (6.9) par rapport à t , puis en les soustrayant membre à membre, on obtient une équation du second ordre de la forme

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tau_p}{\varrho g h \cos \theta} \right),$$

soit encore en se servant de l'équation de continuité (6.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\tau_p}{\varrho g h \cos \theta} \right) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\tau_p}{\varrho g h \cos \theta} \right) \frac{\partial q}{\partial t}, \\ &= - \left(\frac{1}{\varrho g h \cos \theta} \frac{\partial \tau_p}{\partial h} - \frac{\tau_p}{\varrho g h^2 \cos \theta} \right) \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \tau_p}{\partial q} \frac{1}{\varrho g h \cos \theta} \frac{\partial q}{\partial t}. \end{aligned}$$

Après réarrangement des termes, on aboutit à l'équation d'évolution de q

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \varrho g h \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial q} \right)^{-1} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial h} - \frac{\tau_p}{h} \right) \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial q} \right)^{-1} \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (6.10)$$

Il s'agit d'une équation d'advection-diffusion non linéaire, dont la résolution est rendue ici peu aisée car les coefficients d'advection et de diffusion dépendent non seulement de q , mais aussi de h . Cette équation peut être simplifiée si on la linéarise, c'est-à-dire on décompose les variables

$$q = q_0 + q' \text{ et } h = h_0 + h',$$

où (q_0, h_0) désigne l'état de l'écoulement en régime permanent uniforme et (q', h') représente la perturbation de l'état d'équilibre. L'approximation de l'équation (6.10) au premier ordre est alors

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = \varrho g h_0 \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q_0} \right)^{-1} \frac{\partial^2 q'}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial h_0} - \frac{\tau_p(q_0, h_0)}{h_0} \right) \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q} \right)^{-1} \frac{\partial q'}{\partial x}. \quad (6.11)$$

Cette équation peut sembler de prime abord compliquée, mais il s'agit en fait d'une équation d'advection-diffusion linéaire, dont le coefficient est :

$$D = \varrho g h_0 \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q_0} \right)^{-1},$$

et le coefficient d'advection est

$$C = - \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial h_0} - \frac{\tau_p(q_0, h_0)}{h_0} \right).$$

Dans le cas d'une loi de Manning-Strickler, on a

$$\tau_p = \frac{\varrho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{h^{1/3}} = \frac{\varrho g}{K^2} \frac{q^2}{h^{7/3}},$$

d'où l'on déduit

$$D = \frac{1}{2} q_0 \cot \theta \text{ et } C = \frac{5}{3} \bar{u}_0 = \frac{dq_0}{dh_0}.$$

On vérifie que le coefficient d'advection dans le modèle d'onde diffusive est le même que le coefficient déterminé dans l'approximation d'onde cinématique. Cela montre que dans le cadre de l'approximation linéaire (petite perturbation autour du régime d'équilibre) l'onde de débit est advectée à une vitesse $C = \frac{5}{3} u_0$, mais diffuse également avec un coefficient D proportionnel au débit initial q_0 . Contrairement à l'onde cinématique qui se raidit au cours de sa propagation, l'onde diffusive tend à s'étaler au cours du mouvement.

6.5 Onde dynamique

Les ondes dues à la gravité (gradient de pression) provoquent des ondes dynamiques à la surface des écoulements. On parle d'*onde de gravité* ou *onde de surface*. Leurs caractéristiques générales peuvent se déduire en considérant en première approximation que les effets visqueux sont d'influence négligeable sur la propagation de ces ondes.

6.5.1 Calcul approximatif

Une des caractéristiques souvent rencontrées pour les ondes est qu'elles transmettent une information, une énergie, etc., mais ne sont pas associées à un mouvement des particules. Ce phénomène est bien visible à la surface d'un lac ou d'une mer : les vagues ne sont pas associées à un transport de particule. Ainsi, une bouée à la surface de l'eau est soulevée, puis abaissée, mais reste *grosso modo* à la même place.

Considérons donc une intumescence d'épaisseur η se déplaçant à la surface d'une nappe d'eau peu épaisse (profondeur h_0) et au repos. Si on suppose que cette onde n'induit pas de transport de fluide durant son mouvement, alors le débit doit être nul $d(\eta u) = 0$. Considérons l'équation (1.21) de continuité des équations de Saint Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0,$$

avec $h = h_0 + \eta$, soit encore

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0,$$

(compte tenu de $d(\eta u) = 0$). L'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.22) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.$$

En linéarisant l'équation (c'est-à-dire en supprimant le terme convectif $u \partial u / \partial x$ en supposant que la vitesse induite par la vague est faible) et en considérant un fluide non visqueux ($\tau_p = 0$), on tire :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

En combinant équation de la masse et équation linéarisée de quantité de mouvement, on tire que :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

ce qui montre que la vitesse de l'intumescence satisfait l'équation typique des ondes dynamiques vue (2.22) avec $c = \sqrt{g h_0}$.

On peut aboutir au même résultat sans passer par l'approximation de Saint Venant, ce qui permet de calculer la vitesse des ondes lorsque la profondeur d'eau est quelconque. C'est ce que l'on va voir maintenant en considérant les équations locales du fluide parfait au lieu des équations moyennées.

6.5.2 Calcul plus complet

Une des premières assez complètes pour décrire le mouvement d'une onde de gravité est due à Airy². Si l'on considère un mouvement d'une onde provoquant une variation de la

2. Sir George Biddell Airy était un mathématicien et physicien britannique (1801–1892). Il s'est illustré dans ses jeunes années pour ses travaux d'observation en astronomie, ce qui lui a valu d'être nommé

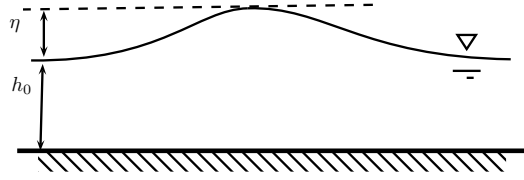


Figure 6.10 : déplacement d'une intumescence à la surface de l'eau (au repos).

surface libre d'un fluide parfait initialement au repos (pas de mouvement hormis celui induit par l'onde), les équations du mouvement sont les équations d'Euler :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

On introduit le potentiel des vitesses ϕ : $\mathbf{u} = \nabla \phi$; en termes de composantes des vitesses on a donc :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ et } v = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

On suppose également l'écoulement irrotationnel. Mathématiquement cela implique que le rotationnel du champ de vitesse est nul, soit $\nabla \times \mathbf{u} = 0$; physiquement cela veut dire qu'il n'y a pas de vorticité dans l'écoulement (déplacement de tourbillon dans l'écoulement). L'équation de conservation de la masse devient alors :

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (6.12)$$

(appelée équation de Laplace) tandis que l'équation de quantité de mouvement³

$$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

soit encore en intervertissant les opérations de différentiation spatiales et temporelle :

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) = \nabla \left(-\psi - \frac{1}{\rho} p \right),$$

avec ψ le potentiel gravitaire ($\mathbf{g} = -\nabla \psi$) ; on reconnaît une variante de l'équation de Bernoulli, où la vitesse est remplacée par le potentiel $\nabla \phi$. Cette équation peut encore s'écrire (après intégration)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\psi - \frac{1}{\rho} p. \quad (6.13)$$

Il faut tenir compte des conditions aux limites. Au fond, on a non-pénétration, donc

$$v = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ en } y=0. \quad (6.14)$$

Pour trouver une solution à (6.12), on va employer la méthode de séparation des variables. Physiquement, cette méthode est utile lorsqu'on considère que ce qui se passe dans une

« astronome royal », poste qu'il continuera d'exercer jusqu'à ses 80 ans. Il s'est également beaucoup intéressé aux phénomènes ondulatoires, notamment les arcs-en-ciel, le mouvement pendulaire, les ondes de gravité. Il a aussi contribué à la géodésie, en particulier en développant la notion d'isostasie (en bref, les variations du champ de gravitation terrestre dues au relief).

3. On s'est servi de $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Or comme $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, on obtient l'égalité $\nabla(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$.

direction est découplé (ou indépendant) de ce qui se passe dans l'autre direction. Recherchons des solutions sous forme d'onde progressive :

$$\phi(x, y, t) = F(x - ct)G(y).$$

Le report dans l'équation $\nabla^2 \phi = 0$ donne :

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = -k^2,$$

avec k une constante (k est interprétée par la suite comme le nombre d'onde). La solution générale est :

$$F = A \cos[k(x - ct)] + B \sin(x - ct) \text{ et } G = Ce^{ky} + De^{-ky}.$$

Pour déterminer la relation de dispersion et les constantes d'intégration A , B , C , et D , il faut prendre en compte les conditions aux limites.

Une condition est donnée par (6.14). Une autre est donnée par l'équation de Bernoulli (6.13), qui va être considérée à la surface libre $y = h(x, t)$ de telle sorte que le terme de pression ($p = 0$) puisse être omis. De plus, si on ne retient que les termes de premier ordre (c'est-à-dire on néglige $\nabla \phi \cdot \nabla \phi$, ce qui est possible lorsque l'amplitude de la vague est petite devant sa longueur d'onde), on tire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -gh \text{ en } y=h. \quad (6.15)$$

De plus, à la surface libre, on a la condition cinématique :

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt}$$

or $v = \partial \phi / \partial y$ et $u = \partial \phi / \partial x$, d'où l'on tire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{\partial h}{\partial t}.$$

En différentiant (6.15) par rapport à t , puis en reportant l'expression de $\partial h / \partial t$ déterminée dans la condition sur v à la surface libre, on tire qu'à la surface libre (pour $y = h$) on a :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y}}.$$

C'est l'équation des ondes de surface d'un courant d'eau. La relation de dispersion est obtenue en reportant les expressions de F et G dans chacune des conditions aux limites pour éliminer les constantes d'intégration. Après calcul, on obtient :

$$\boxed{c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{g}{k} \tanh kh.} \quad (6.16)$$

On peut faire les remarques suivantes :

- la vitesse apparaît au carré, donc on peut déterminer deux vitesses (une négative, l'autre positive) avec des sens de propagation opposés ;
- en eau peu profonde (c'est-à-dire $h \ll \lambda$), on $\tanh kh \approx kh$, d'où l'on tire : $c = \pm \sqrt{gh}$. C'est la vitesse critique (correspondant à $Fr = 1$). Toutes les ondes de surface ont la même vitesse de propagation quelle que soit leur longueur d'onde λ ;

- en eau profonde (c'est-à-dire $h \gg \lambda$), on $\tanh kh \approx 1$, d'où l'on tire : $c = \pm \sqrt{g\lambda/(2\pi)}$. La vitesse des ondes de surface dépend de la longueur d'onde λ . Ces ondes sont désignées sous le terme général de *houle*.

Dans le cas des cours d'eau, on est dans le premier cas de figure (eaux peu profondes). Si on réitère le raisonnement précédent pour un fluide en écoulement à la vitesse moyenne $\bar{u}$, la célérité des ondes est calculée par rapport à la vitesse moyenne $\bar{u}$: les ondes de gravité se propagent donc à la vitesse $c = \bar{u} \pm \sqrt{gh}$, soit encore :

$$c = \sqrt{gh}(\text{Fr} \pm 1),$$

avec $\text{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh}$ le nombre de Froude. On tire le résultat important :

- en régime fluvial $\text{Fr} < 1$, les ondes se propagent d'amont vers l'aval et d'aval vers l'amont. L'information se propage dans les deux sens. Une modification de l'écoulement se produit à l'amont est répercutée à l'aval et, de même, la modification des conditions d'écoulement entraîne une modification de ce qui se passe à l'amont une fois que l'onde a remonté l'information ;
- en régime torrentiel $\text{Fr} > 1$, les ondes se propagent d'amont vers l'aval uniquement. L'information ne se propage que dans le sens de l'écoulement. Il n'y a pas de « contrôle » aval, c'est l'amont qui dicte ce qui se passe dans le bief.

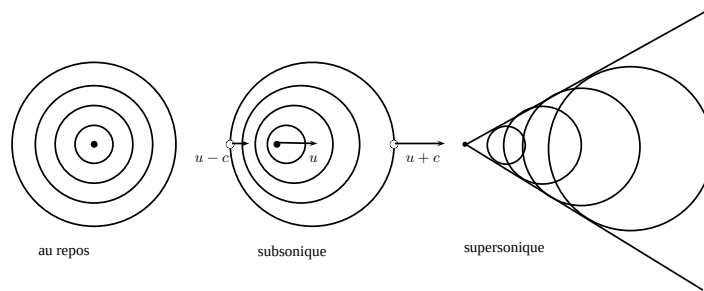


Figure 6.11 : propagation d'une onde circulaire se déplaçant à la vitesse $c = \sqrt{gh}$ dans de l'eau au repos (au centre), dans un écoulement lent d'eau (au centre) tel que $v < \sqrt{gh}$, et dans un écoulement rapide d'eau.

La figure 6.13 montre le schéma typique d'une vague considérée comme un train de déformation sinusoïdale de la surface libre d'une étendue d'eau : les particules de fluide décrivent des ellipses fixes, dont la taille décroît avec la profondeur ; en eau profonde (lorsque la profondeur dépasse la moitié de la longueur d'onde), ces ellipses sont des cercles. La théorie d'Airy (voir § 6.5.2) permet de caractériser le mouvement d'ondes de gravité sinusoïdales, avec notamment la relation de dispersion (6.16) :

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{g}{k} \tanh kh,$$

où c est la célérité de l'onde, k le nombre d'onde ($k = 2\pi/\lambda$ avec λ la longueur d'onde), h la profondeur d'eau, et ω la fréquence angulaire.

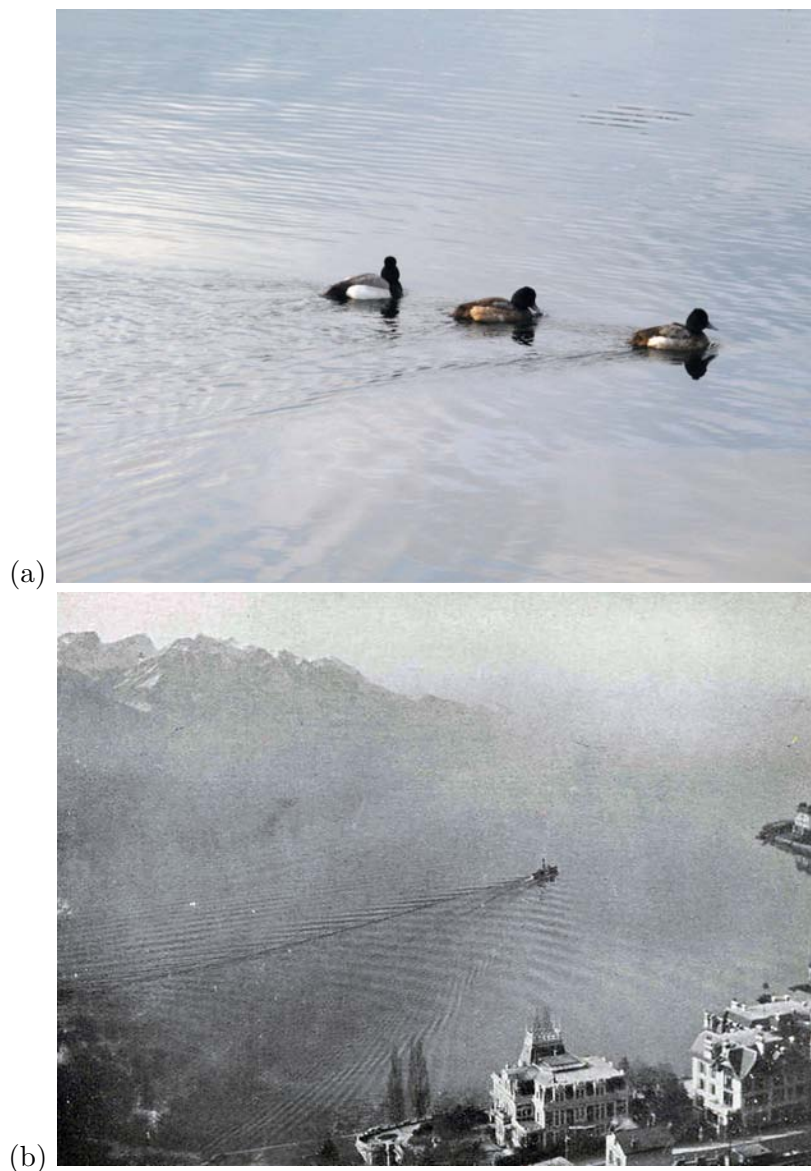


Figure 6.12 : (a) le canard crée un sillage et il n'y a pas d'intumescence. Le canal est-il en nage supersonique? (b) sillage d'un bateau sur le lac Léman. Source : Vaughan Cornish (1910), fonds [Digital collection, University of Washington](#). Quel que soit l'objet en mouvement, l'angle du sillage est à peu près le même (angle de Kelvin).

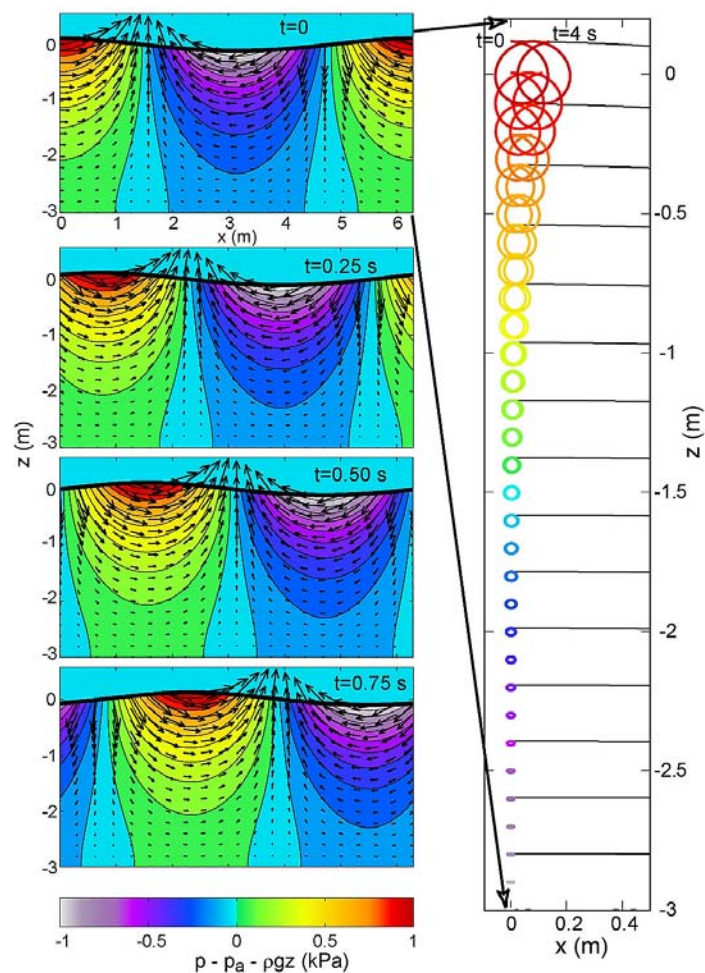


Figure 6.13 : mouvement d'oscillation [Fabrice Ardhuin, SHOM]. Le diagramme à droite montre la trajectoire presque circulaire de particules fluides selon leur profondeur. À gauche, les champs de vitesse et de pression sont reportés. Le calcul a été réalisé pour une vague d'Airy de période $T = 2$ s de période.

6.6 Trains d'onde

6.6.1 Problématique

Un écoulement à surface libre devient instable lorsque sa vitesse augmente. Cette instabilité se manifeste par l'apparition d'ondulations de la surface libre. En français on désigne ces ondulations sous le terme générique de train d'ondes (car il s'agit d'une succession d'ondes balayant la surface libre); en anglais, on parle de vagues de roulement (*roll waves*) car ces ondulations sont en fait de petites vagues déferlantes.



Figure 6.14 : train d'ondes dans un évacuateur de crue et sur la chaussée après une chute de pluie.
Source <http://people.seas.harvard.edu/~shreyas/Research.html>

Ces instabilités se manifestent fréquemment, notamment sur les coursiers raides tels que des évacuateurs de crue ou bien sur des chaussées et trottoirs en pente lorsque l'eau de pluie ruisselle jusqu'à former une lame d'eau. Ces ondulations sont des perturbations de l'écoulement. Elles ne sont en général pas considérées dans les calculs en hydraulique car elles ne modifient pas le comportement général de l'écoulement tant que leur amplitude est modérée. Elles peuvent néanmoins poser problème pour certains problèmes en ingénierie lorsqu'on doit connaître la hauteur maximale de l'écoulement et/ou imposer une certaine continuité à cet écoulement. Par exemple, un écoulement à surface libre peut emprunter des passages busés, pour lesquels il est essentiel de s'assurer qu'il n'y a pas de mise en pression de l'écoulement; un écoulement en charge exerce en effet des contraintes bien plus importantes sur les parois. L'apparition de train d'ondes sur un écoulement à surface libre dans une conduite peut générer un écoulement pulsé, avec une mise en charge locale de l'écoulement, suivie d'un retour à la pression hydrostatique. Un autre problème lié à l'apparition de ces instabilités est la formation d'eau blanche similaire à l'écume des vagues: en déferlant, les vagues emprisonnent de l'air et il se forme alors de petites bulles; le mélange eau + air forme une émulsion qui peut être dangereuse pour des installations à cause de la cavitation (explosion des bulles contre les parois, avec usure prématurée des parements en béton) et



Figure 6.15 : train d'ondes dans la rivière (canalisée) Grünnbach (près du village de Merlingen, lac de Thoune, BE, Suisse); à gauche, vue vers l'aval et à droite, vue vers l'amont. Cliché de Vaughan Cornish (1910). Source [Digital collection of the university of Washington](#)

de l'accentuation du caractère pulsé. Pour ces raisons, il convient en général de limiter voire d'empêcher de telles instabilités de se produire.

6.6.2 Stabilité linéaire des équations de Saint-Venant

Nous suivons la méthode employée par [Trowbridge \(1987\)](#) pour calculer le domaine de stabilité des équations de Saint-Venant. Les équations de Saint-Venant (1.21–1.22) s'écrivent sous la forme condensée

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = \mathbf{S}, \quad (6.17)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{u} & h \\ g \cos \theta & \bar{u} \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \theta - \frac{\tau_p}{\rho h} \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant que l'on a une solution $\mathbf{U}_0 = (H, U)$ à ces équations et qu'on perturbe cette solution pour savoir si elle stable

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}', \quad (6.18)$$

où le vecteur $\mathbf{U}' = (\eta, \kappa)$ est la perturbation, avec κ et η la perturbation de la hauteur et celle de la vitesse, respectivement. En substituant cette décomposition dans l'équation (6.17) et en gardant uniquement les termes du premier ordre, on obtient une équation linéarisée gouvernant les perturbations $\mathbf{U}'$

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}'). \quad (6.19)$$

Nous supposons que la solution peut s'écrire sous la forme

$$\eta = \text{Re}(\Delta e^{i(nx-ct)}), \kappa = \text{Re}(X e^{i(nx-ct)}), \quad (6.20)$$

où Δ et X sont les amplitudes complexes respectivement de la hauteur et de la vitesse, n est le nombre d'onde (qui est un réel positif), et c une constante complexe qui reste à déterminer. Le symbol i est le nombre imaginaire. La partie réelle de c peut être interprétée comme la vitesse de propagation des perturbations tandis que sa partie imaginaire reflète le taux de croissance (ou de décroissance) de l'amplitude. Dans le cadre de la théorie de la stabilité linéaire, l'écoulement est supposé devenir instable dès qu'une solution au système (6.19) est caractérisée par une partie imaginaire de c positive. En substituant la forme complexe (6.20) dans (6.19) fournit le système suivant

$$\begin{bmatrix} nA_{11} - c & nA_{12} \\ nA_{21} - i\frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial H} & nA_{22} - c - i\frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ X \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (6.21)$$

où A_{ij} est la composante (i, j) de la matrice $\mathbf{A}$. Ce système admet aucune solution triviale pourvu que son déterminant soit nul. L'équation de dispersion est obtenue en calculant le déterminant du système et en l'exprimant en fonction de c

$$c^2 - 2\alpha c - \beta = 0, \quad (6.22)$$

with

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_r + i\alpha_i = n \frac{A_{22} + A_{11}}{2} - i \frac{1}{2} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial U}, \\ \beta &= \beta_r + i\beta_i = n \left[n(A_{12}A_{21} - A_{22}A_{11}) + i \left(A_{11} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial U} - A_{12} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial H} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution à l'équation (6.22) mise sous la forme

$$(c - \alpha)^2 = r e^{i\Theta}. \quad (6.23)$$

La partie imaginaire de la solution à l'équation (6.23) peut être écrite

$$c = \alpha \pm \sqrt{r} e^{i\Theta/2} \Rightarrow c_i = \text{Im}(c) = \alpha_i \pm \sqrt{r} \sin \frac{\Theta}{2}. \quad (6.24)$$

La plus grande partie imaginaire est

$$c_i = \alpha_i + \sqrt{r} \left| \sin \frac{\Theta}{2} \right|. \quad (6.25)$$

Nous cherchons maintenant quel domaine cette expression est positive : $c_i > 0$. En prenant la racine carrée de chaque des membres de cette équation, puis considérant que $2\alpha_i^2 + r \cos \Theta$ est toujours positive, on obtient après réarrangement :

$$r > 2\alpha_i^2 + r \cos \Theta \Leftrightarrow \beta_i^2 > 4\alpha_i(\beta_r\alpha_i - \beta_i\alpha_r). \quad (6.26)$$

Le critère d'instabilité est le suivant :

$$\left(H \frac{\partial \tau_p}{\partial H} - \tau_p \right) \left(H \frac{\partial \tau_p}{\partial H} - \tau_p \right) > gH \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial U} \right)^2 \quad (6.27)$$

On peut montrer que la source d'énergie pour que l'instabilité se développe est fournie par le travail de la gravité ; l'écoulement est linéairement instable si la puissance des forces gravitaires excède l'énergie dissipée aux frontières par τ_p . En prenant par exemple une contrainte de frottement à la Chézy ($\tau_p = \varrho g \bar{u}^2 / C^2$), on trouve que le critère d'instabilité est

$$\boxed{\text{Fr} > 2}, \quad (6.28)$$

avec $\text{Fr} = \bar{u} / \sqrt{gh \cos \theta}$ le nombre de Froude.

6.7 Vague

6.7.1 Classification

Les vagues sont des ondes à la surface de l'eau. Il en existe plusieurs classifications selon le ou les critère(s) considéré(s). Si on prend l'origine des ondes, on distingue

- vague causée par le vent (forçage météorologique) : houle ;
- vague causée par les mouvements de la lune (forçage astronomique) : marées ;
- vague causée par les tremblements de terre : tsunamis.

Selon le mécanisme physique qui est impliqué dans la propagation des ondes, on distingue :

- force motrice due à la gravité : onde gravitaire ;
- vague due aux forces de tension à la surface de l'eau : onde capillaire.

Si on prend le rapport λ/h (avec λ la longueur d'onde et h la hauteur d'eau), on a :

- $\lambda/h \leq 2$, les ondes en eau profonde ou bien des ondes courtes ;
- $2 < \lambda/h \leq 20$, les ondes intermédiaires (ou ondes de transition) ;
- $\lambda/h > 20$, les ondes en eau peu profonde ou bien des ondes longues ;

La notion d'eau profonde se fait toujours à travers le rapport λ/h ; elle n'est pas liée à la profondeur totale d'eau.

Une dernière classification propose en fait des tableaux des théories et des équations utilisées pour décrire le mouvement des ondes. La figure 6.17 dresse un tel tableau en fonction des valeurs adimensionnelles de la profondeur d'eau et de la hauteur de vague.

Quelques mots d'explication supplémentaires. On introduit le nombre d'Ursell

$$U = \frac{H\lambda^2}{h^3} \quad (6.29)$$

pour distinguer les ondes linéaires des ondes non linéaires. Ici, « onde linéaire » veut dire que l'équation du mouvement est une équation différentielle linéaire.

- La théorie des ondes linéaires s'applique pour des ondes longues ($\lambda/h > 20$) caractérisées par un petit nombre d'Ursell (typiquement $U \ll 100$). C'est la théorie d'Airy (vue au § 6.5.2 et 6.7.2) qui est utilisée pour décrire le mouvement des vagues. Rappelons que les vagues sont alors des combinaisons d'harmoniques, c'est-à-dire des fonctions périodiques sinusoïdales.
- La théorie des ondes non linéaires s'applique dès lors que le cadre d'approximation des ondes linéaires n'est plus valable. Parmi les ondes non linéaires, on distingue :
 - les *ondes cnoïdales* : ce sont des solutions de l'équation de Korteweg-de-Vries⁴ (KdV). À noter que l'équation date de 1895 ; cette équation décrit le mouvement unidimensionnel d'une onde disperse, incluant une dispersion à la fois en amplitude et en fréquence. Son domaine d'application est celui des ondes longues $\lambda > 5h$ et de période $\tau > 7\sqrt{h/g}$. L'équation de Benjamin-Bona-Mahony (1972) est maintenant préférée car elle est plus précise quand on tend vers le domaine des ondes courtes. Lorsque l'on doit étudier des propagations d'ondes dans les deux directions de la surface de l'eau, on emploie les équations de Boussinesq (1872) ou ses variantes.

4. Diederik Johannes Korteweg (1848–1941) est un mathématicien appliqué hollandais. Son nom est principalement associé à ses travaux sur les ondes solitaires (solitons) avec son doctorant Gustav de Vries (1866–1934).

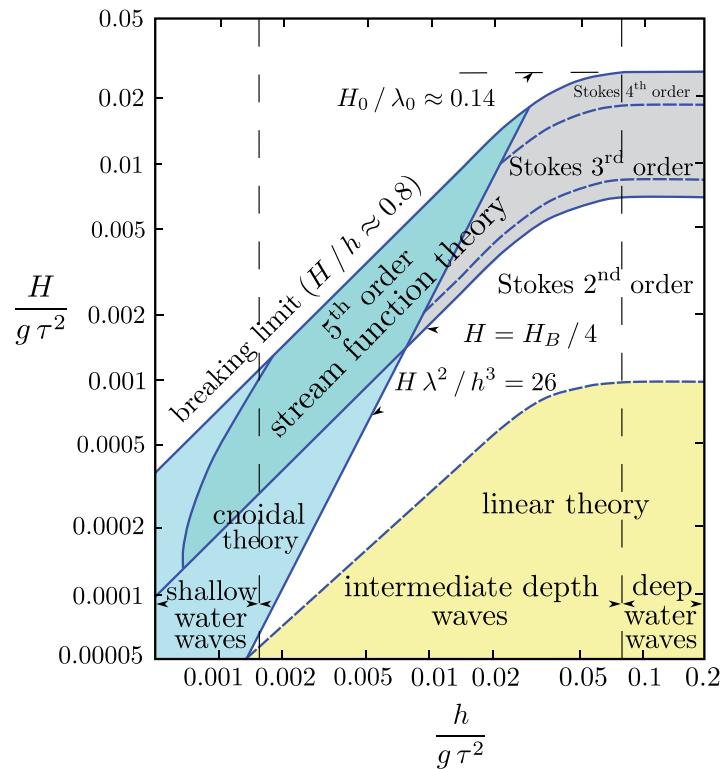


Figure 6.16 : domaine de validité des différentes théories en fonction de la hauteur de la vague H , de la hauteur d'eau h , de la période $\tau = \lambda/c$. La zone bleu-clair est le domaine des ondes cnoïdales. La zone jaune correspond à la théorie d'Airy wave theory. La zone bleue correspond à la théorie des ondes de Stokes. D'après une [classification proposée par Le Méhauté \(1976\)](#).

Ces ondes servent souvent à décrire des vagues formées par le vent sur des eaux peu profondes.

- les *ondes courtes* sont généralement étudiées à l'aide de la théorie de Stokes, qui consiste à rechercher des solutions sous la forme de série tronquée. Plus l'ordre du développement est important, meilleure est en principe la précision, mais il faut que la longueur d'onde soit relativement courte pour qu'une convergence rapide soit assurée.
- les *ondes solitaires* ou *solitons* : ce sont des cas particuliers d'ondes cnoïdales (forme asymptotique). Elles ont des propriétés remarquables qui les distinguent des autres ondes :
 - la forme est stable (pas de dispersion) et ne présente qu'une seule crête ;
 - l'onde peut se propager sur de très grandes distances sans atténuation apparente (pas de dispersion, pas de déferlement) ;
 - la vitesse dépend de la taille de la vague et sa largeur dépend de la profondeur d'eau ;
 - deux solitons qui se croisent ou se dépassent ne coalescent pas ;
 - si la profondeur d'eau vient à diminuer, le soliton peut se scinder en deux solitons, de taille différente.

Les ondes solitaires ont été décrites pour la première fois par John Scott Russell⁵ dans un canal reliant Édimbourg à Forth-Clyde en Écosse en 1834.

5. John Scott Russell (1808–1882) était un ingénieur naval et un mathématicien britannique. Il est principalement connu pour sa découverte de l'onde solitaire et l'étude qu'il en a faite en laboratoire. En

Tableau 6.4 : classification et principales caractéristiques des ondes.					
Onde :	linéaire	Stokes	cnoïdale	solitaire	mascaret
Valeurs de U	$U \rightarrow 0$	$U < 10$	$U > 25$	$U \sim 1$	$U \gg 1$
Périodicité	périodique	périodique	périodique	période infinie	période infinie
Creux	creux et crêtes identiques	creux plats, crêtes pointues	creux plats, crêtes pointues	pas de creux	pas de creux
Transport de masse	nul	faible	faible	fort	fort
Incorporation d'air	nulle	faible	faible	fort	fort
Rapport λ/H	$\lambda/H > 150$	$2 < \frac{\lambda}{H} < 20$	$\lambda/H > 10$	infini	infini



Figure 6.17 : reproduction en 1995 de l’observation d’une onde solitaire faite par Russell dans le canal de l’Union. D’après un document du [Département de mathématiques de l’université de Heriot-Watt](#).

6.7.2 Ondes linéaires

On appelle *ondes linéaires* des ondes de faible amplitude telles que le nombre d’Ursell $U \ll 100$. Ces ondes sont décrites dans le cadre de la théorie d’Airy (voir § 6.5.2) ; on les appelle donc également ondes d’Airy. Rappelons que les ondes linéaires sont composées

1834, Russell observa la formation d’une onde de forte amplitude générée par l’arrêt brusque d’une barge qu’il venait d’emprunter. Il suivit à cheval cette vague sur plusieurs kilomètres. Il observa que la forme et la vitesse de la vague restaient inchangées tout le long de son parcours : « Je ne puis donner une idée plus nette du phénomène qu’en décrivant les circonstances dans lesquelles il m’apparut pour la première fois. J’observais le mouvement d’un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroite, lorsque ce bateau vint à s’arrêter tout à coup : mais il n’en fut pas de même de la masse d’eau qu’il avait mise en mouvement dans le canal ; elle s’accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis, laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d’une seule grande ondulation, dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s’altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 milles à l’heure et conservant sa figure initiale (environ 30 pieds de longueur sur 1 pied à 1,5 pieds de hauteur). La hauteur de l’onde diminuait graduellement, et après l’avoir suivie pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal » (traduction par M. H. Darcy et M. H. Bazin). Il faudra attendre les travaux du français Boussinesq (1871), de l’anglais Rayleigh (1876), et des hollandais Korteweg et de Vries (1895), pour disposer d’un modèle théorique décrivant le mouvement d’une telle onde.

d'harmoniques de la forme

$$\eta = A \cos[k(x - ct)], \quad (6.30)$$

avec A l'amplitude de l'onde, $k = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde (λ la longueur d'onde), et c la célérité, dont l'expression est fournie par la relation de dispersion

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) = c_0^2 \frac{\tanh(kh)}{kh} = c_0^2 \frac{\lambda}{2\pi h} \tanh(2\pi h/\lambda) \quad (6.31)$$

avec $c_0 = \sqrt{gh}$ la vitesse de propagation des ondes en eau peu profonde.

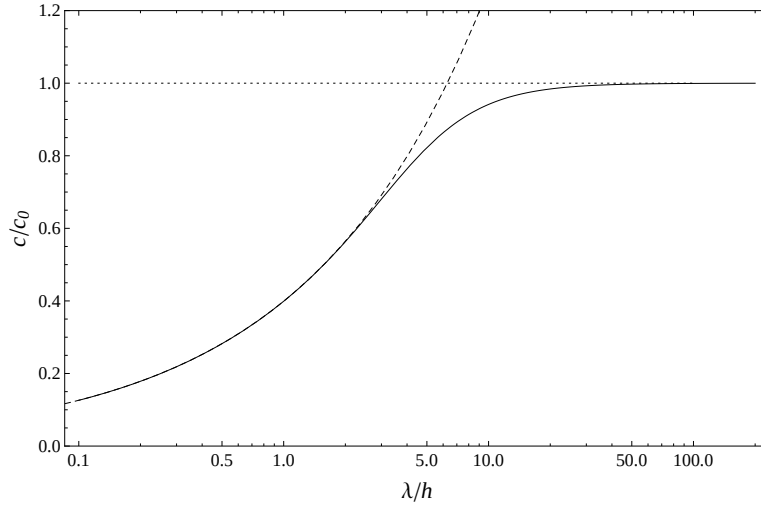


Figure 6.18 : variation de la célérité c/c_0 (courbe continue) en fonction du rapport λ/h pour des ondes d'Airy. La courbe pointillée correspond à l'approximation des ondes en eau peu profonde : $c \rightarrow c_0$. La courbe tiretée représente la propagation de la houle, c'est-à-dire une onde linéaire en eau profonde : $c/c_0 \rightarrow \sqrt{\lambda/(2\pi h)}$.

6.7.3 Ondes de Stokes

Les ondes de Stokes sont des ondes assez proches des ondes linéaires : ce sont des ondes périodiques, dont le profil de hauteur comporte une harmonique (partie linéaire) et une contribution nonlinéaire représentant les effets d'ordre supérieur quand λ/h

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \cos(t\omega - kx) + \frac{1}{16} k H^2 \frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} (\cosh(2hk) + 2) \cos(2(kx - t\omega)), \quad (6.32)$$

avec H la hauteur de la vague. Comme le montre la figure 6.19, une onde de Stokes présente des crêtes plus pointues et des creux plus plats qu'une onde linéaire (sinusoïdale).

6.7.4 Ondes cnoïdales

Les *ondes cnoïdales* sont des solutions périodiques de l'équation de Korteweg-de-Vries (KdV), une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre 3 :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} h^3 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (6.33)$$

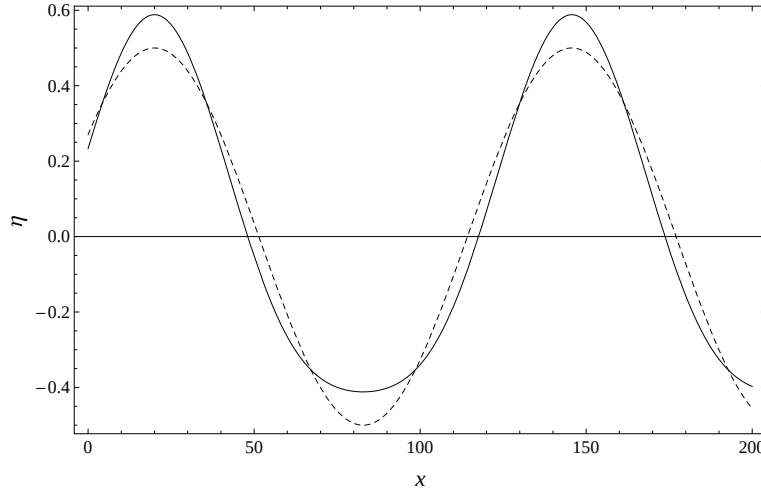


Figure 6.19 : profil de hauteur d'une onde de Stokes (trait continu) comparé au profil de hauteur d'une onde linéaire (courbe tiretée). Calcul avec $H = 1$ m, $\omega = 1$ s⁻¹, $t = 1$ s, et $h = 10$ m.

Une solution de cette équation est

$$\eta(x, t) = \eta_2 + H \operatorname{cn} \left(\frac{x - ct}{\Delta} \right),$$

avec pour altitude des creux :

$$\eta_2(m) = \frac{H}{m} \left(1 - m - \frac{E(m)}{K(m)} \right) \text{ et } \Delta = \frac{\lambda}{2K(m)} = h \sqrt{\frac{4}{3} \frac{mh}{H}},$$

où H est la hauteur de la vague, m est un paramètre dit paramètre elliptique, $K(m)$ l'intégrale elliptique complète du premier type, cn ⁶ de Jacobi et $E(m)$ l'intégrale elliptique complète du second type (Abramowitz & Stegun, 1964). Les longueur d'onde λ et célérité c sont données par :

$$\lambda = h \sqrt{\frac{16}{3} \frac{mh}{H}} K(m) \text{ et } c = \sqrt{gh} \left[1 + \frac{H}{mh} \left(1 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2} \frac{E(m)}{K(m)} \right) \right],$$

On a report sur la figure 6.20 trois profils de vagues cnoïdales pour trois valeurs différentes de m . Pour $m = 0,05$, on a un profil proche d'une onde linéaire (sinusoïdale). Pour $m = 0,5$, la déformation est relativement faible par rapport au cas précédent. Pour $m = 0,95$, on observe que les crêtes de la vague sont séparées par des creux de plus en plus aplatis. La figure 6.21 montre la vitesse relative d'une onde cnoïdale, définie comme $(c/c_0 - 1)h/H$, en fonction du paramètre elliptique m . Pour $m \rightarrow 0$, cette vitesse tend vers $-\infty$ alors que pour $m \rightarrow 1$, on a :

$$\left(\frac{c}{c_0} - 1 \right) \frac{h}{H} \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (6.34)$$

6.7.5 Ondes solitaires

Une *onde solitaire* est un cas particulier d'onde cnoïdale qui correspond au cas asymptotique $m \rightarrow 1$ (c'est-à-dire une longueur d'onde infiniment grande). On l'appelle également *soliton*

6. C'est de là d'où vient le nom d'onde cnoïdale.

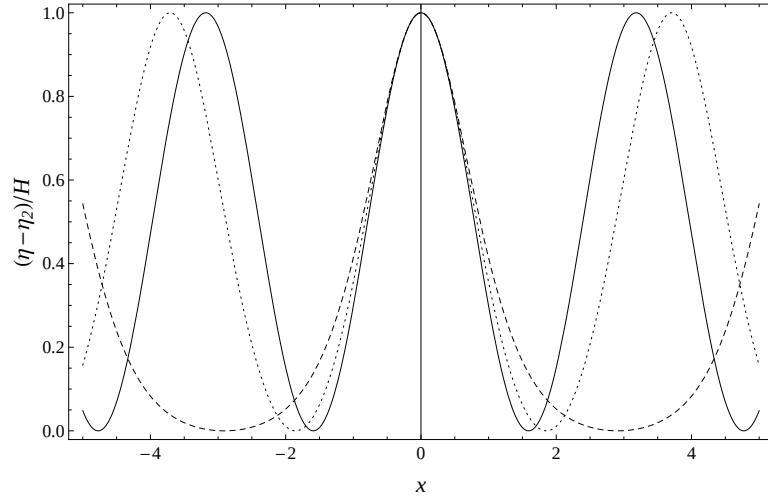


Figure 6.20 : profil d'une onde cnoïdale pour différentes valeurs du paramètre elliptique m : $m = 0,05$ (courbe continue), $m = 0,5$ (courbe pointillée), $m = 0,95$ (courbe tiretée).

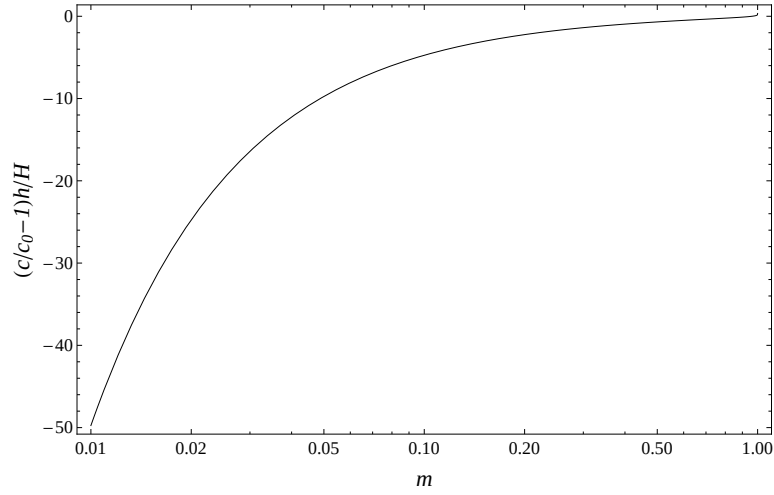


Figure 6.21 : célérité relative d'une onde cnoïdale en fonction de m .

car contrairement aux autres ondes non linéaires qui se dispersent et s'amortissent, elle garde une certaine individualité (comme on note en physique « photon », « proton », etc., des entités qui se comportent comme des particules élémentaires). Sa vitesse est obtenue à partir de l'équation (6.34), dont le plus souvent on prend un développement limité à l'ordre 1 en H/h :

$$c^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} \right)^2 \approx g(h + H).$$

C'est donc une vitesse peu différente de la vitesse en eau peu profonde. Le profil d'un soliton est

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)),$$

avec $\beta^{-2} = 4h^2(h+H)/3a \approx 4h^3/(3a)$ (Drazin & Johnson, 1996) et sech la sécante hyperbolique ($\operatorname{sech} = 1/\cosh$). La figure 6.22 montre un profil type d'une solitaire. On note que contrairement aux cas précédents

- l'onde n'est pas périodique (période de retour infiniment longue) ;

- il n'y a pas de creux ($\eta_2 = 0$) ;
- le profil est constant au cours du temps (pas de dispersion).

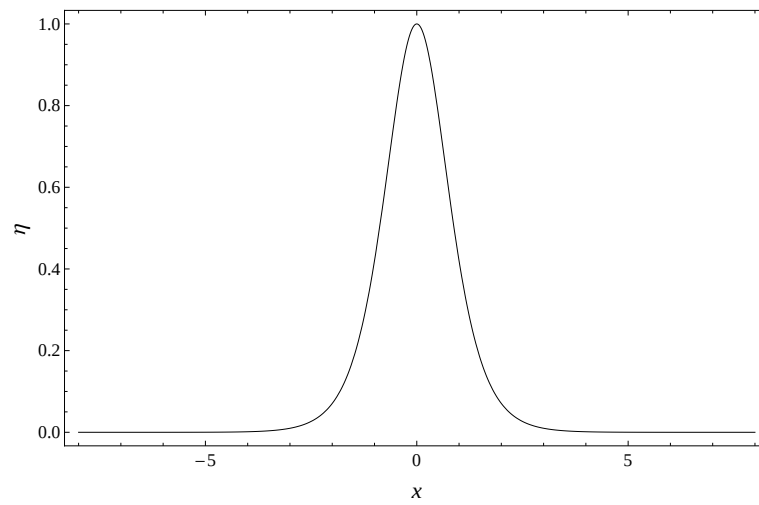


Figure 6.22 : profil de hauteur d'une onde solitaire avec $H = 1$.

6.8 Tsunami

6.8.1 Introduction

Un tsunami est une onde liée au mouvement rapide d'un grand volume d'eau en haute mer à d'un séisme (destruction de Lisbonne en 1755, tsunami de décembre 2004 en Asie), d'une éruption volcanique sous-marine (éruption du Krakatoa en 1883), d'un glissement de terrain sous-marin de grande ampleur (baie de Lituya, Alaska en 1958). Les tsunamis se déplacent à très grande vitesse (plusieurs centaines de km/h), mais tant qu'ils se propagent en haute mer (en eau profonde), la hauteur de l'intumescence est faible, voire imperceptible. C'est à l'approche des côtes que l'onde gagne en amplitude et déferler sur le littoral, en provoquant d'énormes dommages.



Figure 6.23 : tsunami arrivant sur les cotes du Srilanka à Kalutara en décembre 2004. Source : DigitalGlobe.

Contrairement à la houle (vagues formées par le vent à la surface des océans), qui ne met en mouvement qu'une faible épaisseur d'eau près de la surface, le tsunami provoque un déplacement d'eau sur une grande épaisseur. La longueur d'onde est généralement très grande (quelques dizaines à centaines de km). L'énergie associée au mouvement de l'eau est donc considérable.

6.8.2 Modèle approximatif de tsunami arrivant de haute mer

Les équations de Saint-Venant (1.21–1.22) s'écrivent pour un écoulement non frottant le long d'un fond horizontal

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (6.36)$$

avec $\bar{u}(x, t)$ la vitesse moyenne de l'eau, $h(x, t)$ la profondeur d'eau, g la gravité. On part d'un état à l'équilibre ou $h = h_0(x)$ et $u = u_0(x) = 0$. L'eau initialement au repos est perturbée par une secousse en haute mer. Il se produit un train d'ondes dans l'océan ($x \rightarrow \infty$), c'est-à-dire une succession de vagues, dont la hauteur par rapport au niveau de la mer est $\eta(x, t) = A \cos(\omega t + \phi)$, avec A et ϕ deux constantes.

On cherche la solution sous la forme d'un développement asymptotique

$$\begin{aligned} h(x, t) &= h_0(x) + \epsilon h_1(x, t) + \dots, \\ u(x, t) &= u_0(x) + \epsilon u_1(x, t) + \dots, \end{aligned}$$

où ϵ est petit (on prendra $\epsilon = \beta$; voir figure 6.24) et $u_0(x) = 0$. Les équations de Saint-Venant (6.35–6.36) à l'ordre ϵ^0 s'écrivent donc

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 \bar{u}_0}{\partial x} = 0, \quad (6.37)$$

$$0 = -g \frac{\partial h_0}{\partial x}, \quad (6.38)$$

qui sont trivialement vérifiées. À l'ordre ϵ^0 , ces équations deviennent

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_0 \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1 \bar{u}_0}{\partial x} = 0, \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -g \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (6.40)$$

où l'on note que le terme convectif, qui est non linéaire, disparaît dans (6.40) et le troisième terme dans (6.39) est en fait nul car $u_0 = 0$. Il s'ensuit que les équations (6.40) et (6.39) peuvent se combiner pour donner une seule équation régissant h_1

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = \frac{\partial h_1}{\partial x} \left(g h_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right), \quad (6.41)$$

où l'on reconnaît les équations des ondes (2.22) dans le cas où h_0 est constant (indépendant de x), avec ici la célérité des ondes égale à $c = \sqrt{g h_0}$. Considérons le cas où le fond marin est constituée d'un haut fond et d'une plage faiblement inclinée (voir figure 6.24)

$$h_0(x) = \begin{cases} \beta x & \text{pour } 0 \leq x \leq L, \\ h_\infty & \text{pour } x \geq L. \end{cases}$$

On suppose que $h_\infty \ll L$ de telle sorte que β soit petit. Dans ce cas, l'équation (6.41) devient

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = g \beta x \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + g \beta \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (6.42)$$

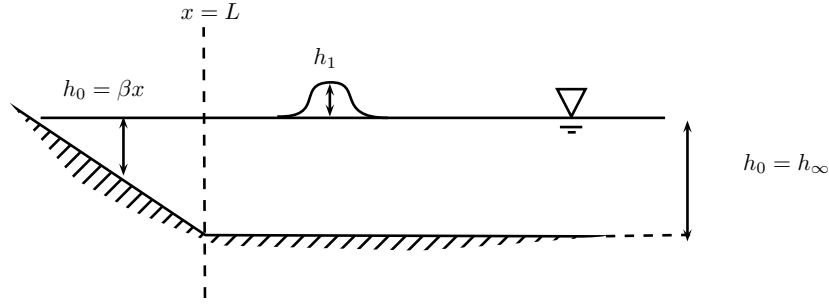


Figure 6.24 : modèle simplifié de tsunami.

On recherche une solution avec des variables séparables, c'est-à-dire sous la forme

$$h_1(x, t) = \cos(\omega t + \phi)H(x).$$

L'équation différentielle régissant H est

$$x \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{dH}{dx} + \frac{\omega^2}{g\beta} = 0,$$

avec $H(L) = A$. Cette équation peut être résolue en faisant le changement de variable : $x = 2\alpha s^2$ avec $\alpha = \sqrt{g\beta}/(8\omega^2)$ de telle sorte que

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{4\alpha s} \frac{dH}{ds}, \quad (6.43)$$

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = \frac{1}{16\alpha^2 s^2} \frac{d^2 H}{ds^2} - \frac{1}{16\alpha^2 s^3} \frac{dH}{ds}. \quad (6.44)$$

On aboutit alors à l'équation de Bessel d'ordre 0 : $y'' + y'/x + y = 0$, dont les solutions sont de la forme $y = aJ_0(x) + bY_0(x)$ avec a et b deux constantes d'intégration et J_0 la fonction de Bessel d'ordre 0 du premier type, Y_0 la fonction de Bessel d'ordre 0 du second type qui n'est pas bornée en $x = 0$; on a donc nécessairement $b = 0$. La solution s'écrit donc $H(s) = aJ_0(s)$, ce qui donne compte tenu de la condition aux limites

$$H(x) = A \frac{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}}\sqrt{x}\right)}{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}}\sqrt{L}\right)}.$$

Comme le montre la figure 6.25, l'amplitude de l'onde augmente tandis que sa longueur d'onde diminue quand elle approche la plage située en $x = 0$. Quoique très simplifié (notamment on ignore les effets non linéaires, qui deviennent de plus en plus importants à l'approche de la plage), ce modèle permet de démontrer l'amplification d'une vague venant de haute mer à l'approche d'une cote.

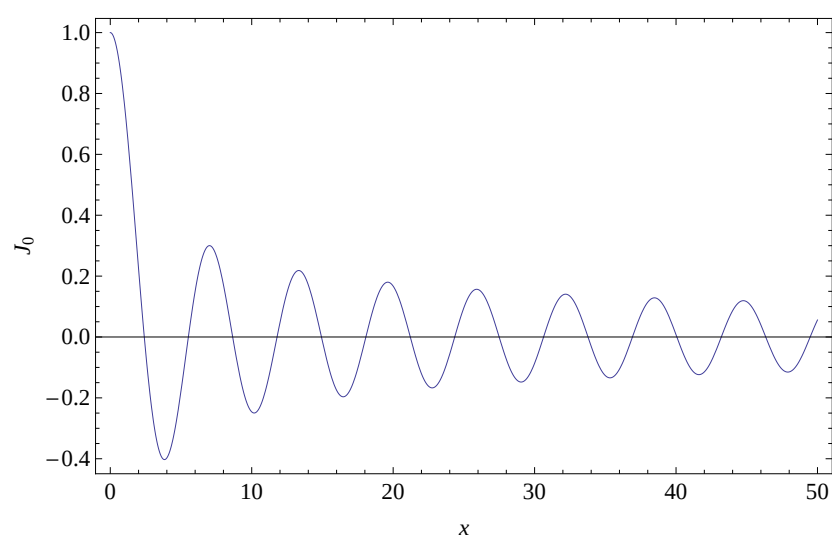


Figure 6.25 : fonction de Bessel J_0 .

6.9 Vague d'impulsion

L'entrée d'un écoulement gravitaire (tel qu'une avalanche ou un écroulement rocheux) produit une *onde d'impulsion*. Ces ondes ont principalement été étudiées en laboratoire à l'aide de modèles réduits. En général, l'expérience consiste à lâcher une masse dans une retenue d'eau. La masse était constituée

- soit d'un bloc solide. C'est le type d'expériences le plus commun (Noda, 1970; Heinrich, 1992; Watts, 2000; Walder *et al.*, 2003; Panizzo *et al.*, 2005b);
- soit d'une masse granulaire (Huber, 1980; Fritz *et al.*, 2003a,b; Zweifel *et al.*, 2006; Heller *et al.*, 2008b).

La consistance de la masse entrant dans la retenue a un rôle assez important car elle conditionne l'amplitude des vagues générées. Sur la base d'essais en laboratoire, Heller *et al.* (2008a) montrent ainsi que le rapport entre l'amplitude maximale a_{mg} d'une vague générée par l'entrée d'une masse granulaire et l'amplitude maximale a_{bs} d'une vague induite par un bloc solide varie à peu près linéairement avec le nombre de Froude

$$\frac{a_{mg} - a_{bs}}{a_{mg}} = 1 - 0,25Fr, \quad (6.45)$$

avec $Fr = u_s/\sqrt{gh}$ et u_s la vitesse d'impact à l'entrée dans le lac d'une profondeur h . À petit nombre de Froude, un écoulement granulaire produit une vague dont l'amplitude est double par rapport à celle générée par un bloc solide. Cette différence s'estompe avec le nombre de Froude

En général, en ingénierie on a besoin d'étudier la possibilité qu'une onde d'impulsion soit générée (par une avalanche ou un mouvement de terrain) et se propage jusqu'à la digue; le principal problème est alors d'évaluer la force d'impact de la vague, la hauteur de remontée (*run-up*), et les effets de l'onde de submersion sur la digue 6.26.

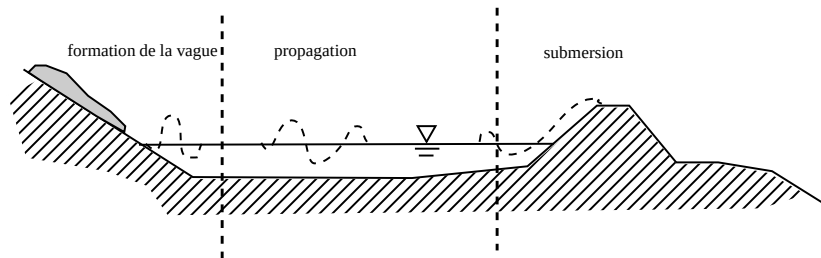


Figure 6.26 : l'étude d'une vague d'impulsion nécessite de s'intéresser à la formation de la vague, sa propagation, et les effets sur un obstacle.

Un paramètre important du problème est la géométrie de propagation de l'onde: dans la plupart des cas, en particulier, dans les expériences en laboratoire, on considère la propagation d'ondes planes (voir fig. 6.27). Ce scénario peut se justifier soit par la topographie des lieux et les caractéristiques de l'écoulement entrant dans le lac, soit par le pouvoir directeur de l'onde. Dans la réalité, des formes plus complexes peuvent être observées, avec des front d'onde à symétrie circulaire ou présentant des motifs plus complexes (notamment en cas de diffraction de l'onde).

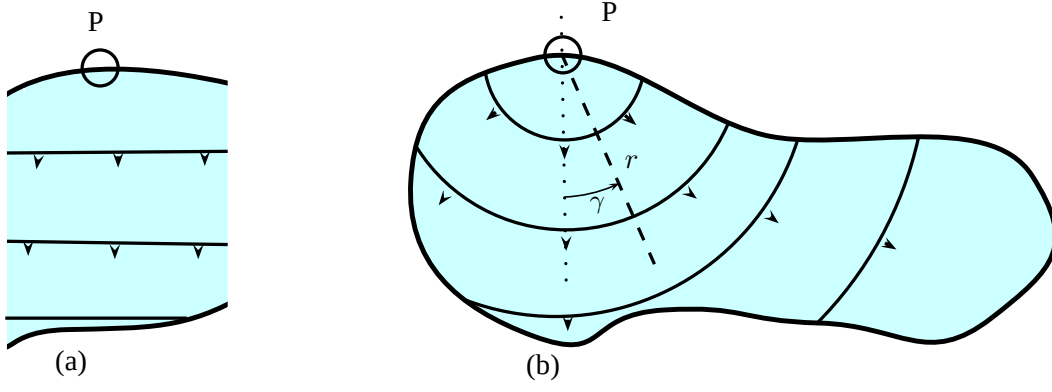


Figure 6.27 : géométrie de propagation d'une onde d'impulsion. (a) Onde plane. (b) Onde circulaire. *P* Désigne le point d'impact. D'après (Vischer & Hager, 1998).

6.9.1 Similitude du problème

Les équations d'ondes s'écrivent (Stoker, 1957)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g, \quad (6.48)$$

avec $h(x, t)$ la hauteur d'eau totale ($h = h_0 + \eta$), (u, v) les composantes de la vitesse dans un repère cartésien (x, y) rattaché à la retenue (x : horizontale, y : verticale), p la pression.

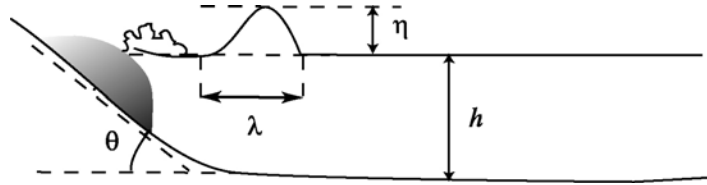


Figure 6.28 : vague générée par une avalanche ou un mouvement de terrain dans une retenue d'eau.

On introduit les échelles suivantes : t_s temps caractéristique de submersion de l'avalanche, V_ℓ le volume par unité de largeur, u_0 la vitesse de l'avalanche à l'impact, et h_0 la hauteur d'eau initiale dans la retenue. Suivant Hammack (1973) et Walder (2003), on peut montrer que la propagation de l'intumescence peut s'écrire en fonction de trois variables sans dimension :

$$\eta = \eta^* f(V_\ell^*, t^*, \text{Fr} \sin \theta),$$

avec

$$\eta^* = \frac{2V_\ell}{t_s^* \sqrt{gh_0}}, \quad V_\ell^* = \frac{V_\ell}{h_0^2}, \quad t_s^* = t_s \sqrt{\frac{g}{h_0}}, \quad \text{et} \quad \text{Fr} = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}},$$

respectivement sous forme adimensionnelle : l'amplitude de l'intumescence, le volume par unité de largeur, le temps, et le nombre de Froude. Par analyse dimensionnelle, le problème à résoudre se réduit à déterminer la fonction $f(V_\ell^*, t^*, \text{Fr} \sin \theta)$ donnant l'amplitude sous forme adimensionnelle en fonction du temps, du nombre de Froude, et du volume par unité

de largeur. Cette fonction peut être déterminée numériquement ou bien à l'aide d'expériences à échelle réduite. Dans ce cas-là, on peut utiliser les données obtenues par Bowering, Huber (1980), ou bien Walder & Watts (2003).

6.9.2 Résultat des expériences pour des blocs solides

Les expériences ont été réalisées en plaçant un bloc solide sur une rampe inclinée, puis en le laissant glisser gravitairement jusqu'à ce qu'il impacte la retenue. Les blocs ont le plus souvent un front pointu pour simuler l'effet d'un front progressif (peu raide). La masse du bloc, la hauteur d'eau, l'inclinaison de la rampe, la longueur de la zone de glissement étaient autant de paramètres qui permettaient d'explorer un assez large spectre de conditions initiales ou d'écoulement. La plupart des expériences ont été réalisées avec des nombres de Froude à l'impact de l'ordre de 1 à 4.

Nous reportons les données de Huber (1980) et Walder *et al.* (2003). On note une certaine correspondance entre données même si elle n'est pas parfaite. Notamment, Huber conclut à un effet du nombre de Froude à l'impact alors que les expériences plus récentes (et à nombre de Froude moins élevé) ne permettent pas de mettre en évidence une telle dépendance.

Ces données permettent d'arriver à calculer de façon empirique l'amplitude de l'onde comme suit

$$\frac{\eta}{h_0} = 1,32 \left(\frac{t_s^*}{V_\ell^*} \right)^{-0.68},$$

si l'on cherche une dépendance en fonction de t_s^* et V_ℓ^* , ou bien sous la forme

$$\frac{\eta}{h_0} = AV_\ell^{*m} (\text{Fr} \sin \theta)^n,$$

si on cherche plutôt à exprimer cette dépendance en fonction du nombre de Froude et de la largeur, avec $A \sim 0,4$ (0,35 – 0,5), $n \sim 0,35$ (0,25 – 0,5), et $m \sim 0,35$ (0,3 – 0,4).

Concernant la demie-longueur d'onde, on a $\lambda \approx 0,27 t_s \sqrt{gh}$.

6.9.3 Résultat des expériences pour des écoulements granulaires

Ondes planes

Heller (2007) a mené une étude détaillée des vagues d'impulsion générées par l'entrée d'une masse granulaire dans un canal. Selon lui, la plupart des résultats peuvent être commodément synthétisés à travers des relations les liant à un nombre sans dimension P, qu'il a appelé « paramètre d'impulsion »

$$P = \text{Fr} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} \left(\frac{\varrho_s V_s}{\varrho_f h^2} \right)^{1/4} \cos^{1/2} \alpha, \quad (6.49)$$

avec s l'épaisseur de l'écoulement, h la hauteur d'eau, ϱ_s la masse volumique solide, ϱ_f la masse volumique du fluide (eau), V_s le volume de l'écoulement granulaire par unité de largeur (de canal), $\text{Fr} = u_s / \sqrt{gh}$ le nombre de Froude avec u_s la vitesse de l'écoulement solide à l'entrée dans la retenue (voir fig. 6.31).

Heller (2007) a montré que les paramètres suivants se calculaient à l'aide de P :

- l'amplitude maximale de la plus grosse vague d'impulsion est donnée par

$$a_{max} = \frac{4}{9} h P^{4/5}, \quad (6.50)$$

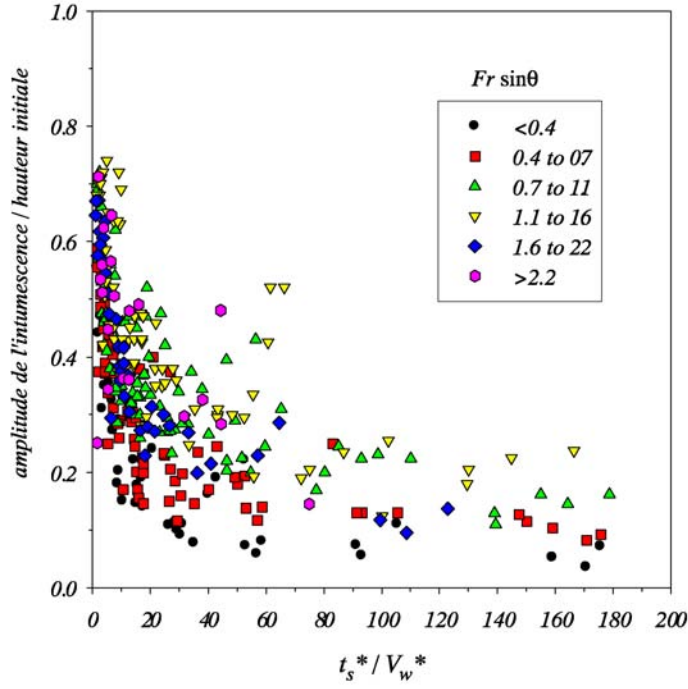


Figure 6.29 : données obtenues par Huber (1980).

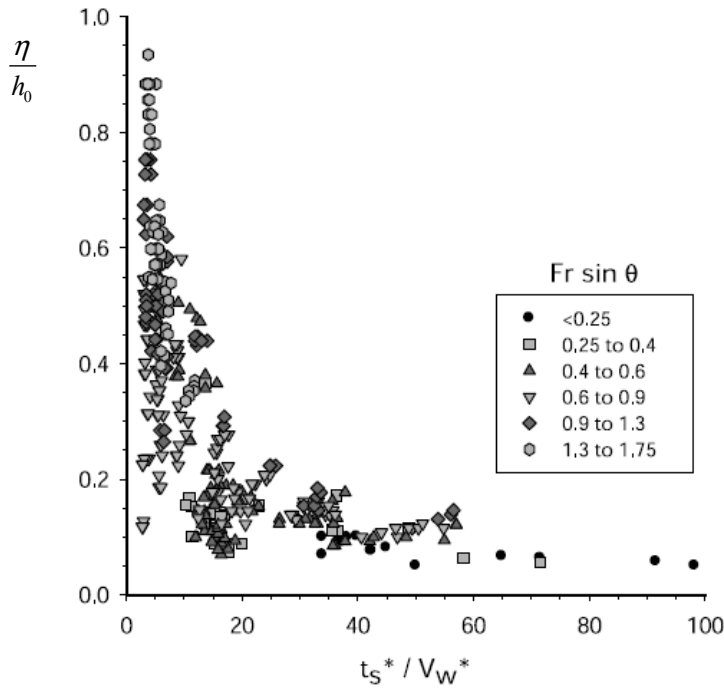


Figure 6.30 : données obtenues par (Walder et al., 2003).

avec un écart relatif maximum de $\pm 30\%$. La position à laquelle ce maximum est atteint est estimée par la formule: $x_{max} = \frac{11}{2} h P^{1/2}$ avec une incertitude de l'ordre de $\pm 50\%$. Huber & Hager (1997) avaient obtenu une relation un peu différente

$$a_{max}(x) = 0,88h \sin \alpha \left(\frac{\varrho_s}{\varrho_f} \right)^{1/4} \left(\frac{V_s}{h^2} \right)^{1/2} \left(\frac{h}{x} \right)^{1/4}. \quad (6.51)$$

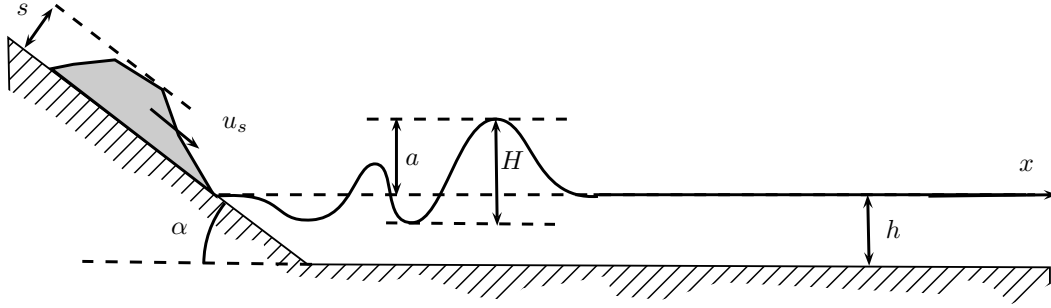


Figure 6.31 : vague générée par une avalanche ou un mouvement de terrain dans une retenue d'eau. D'après (Heller, 2007).

La hauteur maximale est proportionnelle à l'amplitude de la vague :

$$H_{max}(x) = \frac{5}{4}a_{max} = \frac{5}{9}hP^{4/5} ; \quad (6.52)$$

- le volume maximal de la plus grosse vague (par unité de largeur) est

$$V_{max} = h^2P^{6/5}, \quad (6.53)$$

avec un écart relatif maximum de ± 50 % ;

- l'amplitude des vagues décroît au cours de leur propagation selon une loi

$$a(x) = \frac{3}{5}hP^{4/5} \left(\frac{x}{h} \right)^{-4/15}, \quad (6.54)$$

avec un écart relatif maximum de ± 30 % ;

- les vagues se déplacent à une vitesse (en crête) proche de celle d'un soliton

$$c = c_0 \left(1 + 2 \frac{a^2}{h^2} \right)^{1/2}, \quad (6.55)$$

avec un écart relatif maximum de ± 15 % ;

- la période de la plus grande vague d'impulsion vérifie à peu près la relation

$$\tau = 9 \sqrt{\frac{h}{g}} P^{1/2}, \quad (6.56)$$

tandis que la longueur d'onde de cette vague est

$$\lambda = c\tau = 9hP^{1/2} \left(1 + 2 \frac{a^2}{h^2} \right)^{1/2} ; \quad (6.57)$$

- la nature de la vague d'impulsion générée dépend d'une multitude de paramètres. En première approximation, on peut différencier les cas possibles à l'aide du nombre de Froude et du nombre adimensionnel Q :

$$Q = \left(\frac{s}{h} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{V_s}{h^2} \right) \cos \alpha, \quad (6.58)$$

- une onde de Stokes quand $Q < \frac{4}{5}Fr^{-7/5}$,
- une onde cnoïdale quand $\frac{4}{5}Fr^{-7/5} \leq Q \leq 11Fr^{-5/2}$,
- un mascaret quand $Q > 11Fr^{-5/2}$.

Ondes circulaires

Sur la base d'essais en laboratoire, [Huber & Hager \(1997\)](#) ont proposé la formule suivante pour calculer l'amplitude maximale d'une onde d'impulsion en fonction de l'angle γ et de la distance r (voir fig. 6.27 pour la notation) :

$$a_{max}(r) = 1,66h \sin \alpha \cos^2 \left(\frac{2\delta}{3} \right) \left(\frac{\varrho_s}{\varrho_f} \right)^{1/4} \left(\frac{V_s}{h^2} \right)^{1/2} \left(\frac{h}{r} \right)^{2/3}, \quad (6.59)$$

avec h la hauteur d'eau, ϱ_s la masse volumique solide, ϱ_f la masse volumique du fluide (eau), et V_s le volume de l'écoulement granulaire par unité de largeur (de l'écoulement entrant dans le lac). L'amortissement de l'onde est plus marqué que pour une onde plane. Comme précédemment, la vitesse maximale (en crête) est proche de celle d'une onde solitaire :

$$c^2 = g(h + a_{max}).$$

L'incertitude sur les résultats est évaluée à ± 15 %. Ces résultats sont valables pour des distances dans la fourchette $5 < r/h < 30$.

6.9.4 Remontée

Sur la base de 200 expériences en laboratoire, Müller a calculé la hauteur de remontée (runup) R d'une onde d'impulsion le long d'un obstacle (tel que le parement d'un barrage) ([Vischer & Hager, 1998](#))

$$R = 1,25h \left(\frac{\pi}{2\delta} \right)^{1/5} \left(\frac{H}{h} \right)^{4/5} \left(\frac{H}{\lambda} \right)^{-3/20}, \quad (6.60)$$

avec δ l'angle du parement par rapport à l'horizontale ($18^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ dans les expériences de Müller), H la hauteur maximale de la vague donnée par (6.52), et λ la longueur d'onde, dont une estimation est fournie par (6.57).

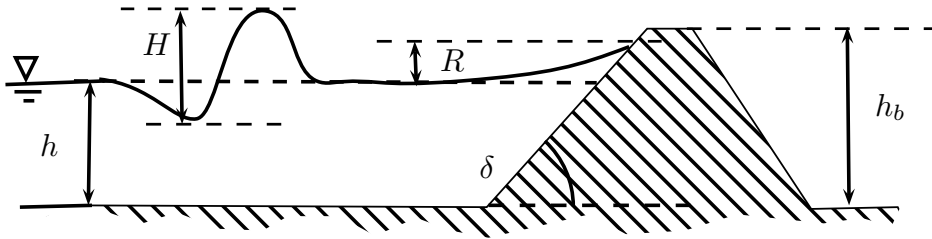


Figure 6.32 : remontée (runup) d'une vague contre un barrage.

6.10 Mascaret

6.10.1 Phénomène physique

Un *mascaret* désigne la vague créée par la marée montante dans un estuaire. À la suite de l'élévation du niveau d'eau dans l'océan, de l'eau remonte à contre courant dans le fleuve. La vague peut dépasser 1 m de hauteur et se déplacer à plus de 10 km/h lors des grandes marées d'équinoxe. Tous les fleuves ne connaissent pas des mascarets ; il faut en effet des conditions assez particulières pour que ces vagues se forment :

- amplitude suffisante de la marée ;
- estuaire en entonnoir pour amplifier l'effet de la marée ;
- faible hauteur d'eau dans le fleuve et pente douce du lit ;
- pas de vent contraire.

En France, c'est principalement l'estuaire de la Dordogne et celui de la Gironde dans la région bordelaise, où le phénomène est fréquent et attire les surfeurs en nombre. Jusqu'à la construction du canal de Rouen dans les années 1960, l'estuaire de la Seine était également réputé pour ses mascarets.



Figure 6.33 : mascaret sur la Dordogne près de Libourne (Vayres, Gironde, France) [<http://archaero.com/mascaret.htm>]. Les surfeurs donnent une échelle de la taille du phénomène.

Un mascaret est une forme particulière de ressaut hydraulique. De tels ressauts peuvent se former sur tout type de cours d'eau lorsqu'une grande quantité d'eau arrive brutalement, par exemple lors d'un lâcher de barrage ou bien lors d'une crue rapide sur un cours d'eau à pente suffisamment forte. La figure 6.35 montre un ressaut hydraulique dans la rivière Zavràgia au Tessin lors de la grosse crue de juillet 1987. Le débit instantané a été estimé à $600 \text{ m}^3/\text{s}$ et le front devait se propager à une vitesse d'environ 8 m/s.

Le mascaret est une onde avec un front raide qui se propage dans les cours d'eau : c'est typiquement ce qu'on appelle une discontinuité ou un choc ; c'est une caractéristique essentielle des équations non linéaires aux dérivées partielles hyperboliques. La forme de la surface libre près d'une discontinuité ne peut plus être étudiée par les équations de Saint-Venant à cause de la courbure de la surface libre et de la dissipation d'énergie libre ; toutefois, la dynamique des discontinuités reste entièrement dictée par ces équations. On montre ci-après qu'on peut



Figure 6.34 : mascaret sur la Seine (Caudebec-en-Caux, France) [R. Huon].



Figure 6.35 : arrivée du front d'une crue sur la rivière Zavràgia (Tessin); les deux clichés sont pris à 15 mn d'intervalle [T. Venzin].

dérivée un jeu d'équations, dites relations de Rankine⁷-Hugoniot⁸, qui décrivent la variation

7. William John Macquorn Rankine (1820–1872) était un physicien écossais. Avec le physicien allemand Rudolf Clausius et son compatriote William Thomson (lord Kelvin), il est à l'origine de la thermodynamique moderne. Rankine s'intéressa plus particulièrement aux applications de cette théorie pour concevoir des machines à vapeur. Homme curieux, il s'intéressa également à des domaines aussi variés que la botanique,

brutale de masse et de quantité de mouvement au passage de la discontinuité.

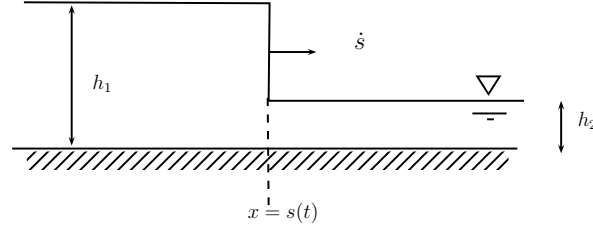


Figure 6.36 : déplacement d'un mascaret (« onde de choc »).

6.10.2 Ressaut mobile

Au § 3.2.2, on a étudié la formation d'un choc pour un problème hyperbolique. La même méthode s'applique aux équations de Saint-Venant (en prenant soin de les mettre sous une forme conservative). On intègre le système d'équations (1.21)–(1.22) le long d'un segment $[x_1, x_2]$ comprenant le point $x = s(t)$ où se produit un choc (ressaut hydraulique mobile). L'équation de conservation de la masse s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx + [uh]_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h u dx + [u^2 h + \frac{1}{2} g \cos \theta h^2]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \left(gh \sin \theta - \frac{\tau_p}{\rho} \right) dx.$$

Quand on fait la décomposition $[x_1, x_2] = [x_1, s] + [s, x_2]$, puis en faisant le passage à la limite $x_1 \rightarrow s$ et $x_2 \rightarrow s$, on obtient pour la conservation de la masse :

$$\dot{s} \llbracket h \rrbracket = \llbracket uh \rrbracket,$$

ainsi que pour la quantité de mouvement :

$$\dot{s} \llbracket hu \rrbracket = \llbracket u^2 h + \frac{1}{2} g \cos \theta h^2 \rrbracket.$$

Notons que le terme source $\rho g \sin \theta - \tau_p / \rho$ n'a aucune influence sur les conditions de Rankine-Hugnot. On trouve donc que la quantité (flux de masse) uh se conserve à travers le choc quand on exprime cette quantité dans un repère mobile rattaché au choc. La vitesse s'écrit alors de manière relative comme : $u' = u - \dot{s}$: $\llbracket u'h \rrbracket = 0$. De même, le flux de quantité de mouvement $u'^2 h + g \cos \theta h^2 / 2$ se conserve : $\llbracket u'^2 h + g \cos \theta h^2 / 2 \rrbracket = 0$ (pour montrer cette dernière relation, il faut également se servir de la conservation de la masse dans le référentiel mobile).

♣ **Exemple.** – Mascaret induit par une vanne en translation.

Considérons une vanne qui à l'instant $t = 0$ se met en mouvement de translation le long d'un canal plat où l'eau est initialement au repos. La vitesse de cette vanne est V . On peut calculer la vitesse de l'intumescence créée par le mouvement de l'eau. Si on se replace dans le repère fixe, on peut écrire :

$$\dot{s}(h_2 - h_1) = -Vh_1,$$

$$\dot{s}(-Vh_1) = gh_2^2/2 - (h_1V^2 + gh_1^2/2).$$

la théorie de la musique, les mathématiques, la fatigue des métaux, et la mécanique des sols. Sa publication scientifique a été extrêmement importante.

8. Pierre-Henri Hugoniot (1851–1887) était un autodidacte féru de mathématiques et de mécanique des fluides. Il s'est spécialement intéressé aux problèmes d'onde de choc dans les gaz.

En éliminant $\dot{s}$, on tire la relation :

$$(1 - \eta)^2(1 + \eta) = 2Fr^2\eta,$$

où $Fr = V/\sqrt{gh_2}$ est le nombre de Froude et $\eta = h_1/h_2$. Il y a deux solutions à cette équation mais une seule⁹ permet d'avoir $\eta > 1$ (dans le cas plus général, c'est une condition de dissipation d'énergie qui permet de choisir la bonne solution). On reporte sur la figure 6.37 les deux courbes $2Fr^2\eta$ et $(1 - \eta)^2(1 + \eta) = 2Fr^2\eta$, dont l'intersection nous fournit la valeur η voulue et donc nous permet de calculer la vitesse de propagation du mascaret. Notons sur ce même graphique que si l'on se place dans le cas $Fr > 1$, on trouverait une valeur de $\eta < 1$, donc une vitesse $\dot{s} < 0$, ce qui n'a pas de sens ; en fait, dans ce cas-là, la solution est plus complexe : elle comprend une onde simple de détente précédée d'un mascaret.

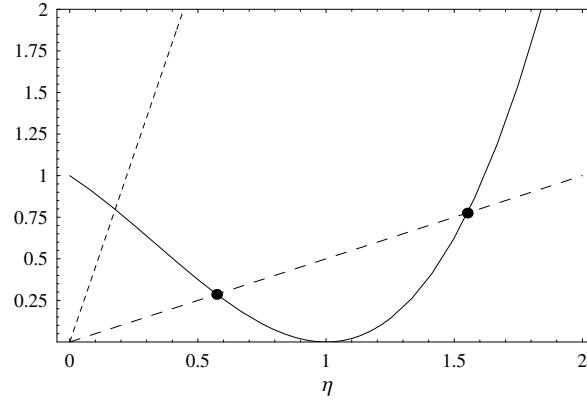


Figure 6.37 : tracé des courbes $2Fr^2\eta$ (trait discontinu) et $(1 - \eta)^2(1 + \eta) = 2Fr^2\eta$ (trait continu). On a tracé $2Fr^2\eta$ pour deux valeurs de Fr : $Fr = 0,5$ (tiret long) et $Fr = 1,5$ (tiret court).

9. En effet, il faut que $\dot{s} > 0$ or $\dot{s} = V\eta(\eta - 1)^{-1}$, d'où il faut que $\eta > 1$.

Annexe A : rappels de mathématiques

A.1 scalaire, vecteurs, et tenseurs

En mécanique, on se sert de variables appelées *tenseurs* (de différentes dimensions) pour décrire des phénomènes physiques :

- une grandeur *scalaire* est une quantité représentée par un réel. Sa dimension est 0 : on dit aussi qu'un scalaire est un tenseur d'ordre 0. La différence entre nombre réel et nombre scalaire est qu'un scalaire est indépendant de la base physique dans lequel on l'exprime. Par exemple, la vitesse a une valeur réelle, mais n'est pas un scalaire car elle varie selon le référentiel dans lequel on fait la mesure. La masse d'un objet est invariante (sa valeur ne dépend pas du repère dans lequel on fait la mesure) : c'est donc une grandeur scalaire ;
- une grandeur vectorielle ou *vecteur* est représentée dans l'espace par un segment orienté ayant pour extrémités un point de départ et un point d'arrivée. L'emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance car seuls comptent sa longueur, sa direction, et son sens. Un vecteur est un tenseur de dimension 1 ;
- un *tenseur* est une fonction multilinéaire. Un tenseur est défini par son ordre, c'est-à-dire le nombre d'indices nécessaire pour le définir. Parmi les tenseurs les plus utiles, il y a les tenseurs d'ordre 2, dont les composantes dans une base donnée forment une *matrice* ; par exemple, un tenseur $\mathbf{T}$ d'ordre 2 permet de relier deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de façon linéaire : $\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$. Dans une base particulière, si $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$, alors

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = m_{11}x_b + m_{12}y_b, \\ y_a = m_{21}x_b + m_{22}y_b, \end{cases}$$

avec m_{ij} la matrice $\mathbf{M}$ composantes de $\mathbf{T}$ dans la base choisie. Rappelons que la notation m_{ij} désigne la composante occupant la ligne i et la colonne j dans la matrice $\mathbf{M}$. La notion de tenseur se généralise à des formes n -linéaires pour former des tenseurs d'ordre n . Par exemple, un tenseur d'ordre 3 permet de décrire des relations multilinéaires entre des tenseurs d'ordre 2.

Un *champ tensoriel* est un tenseur, dont les composantes varient dans l'espace.

A.1.1 Coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques

Le plus souvent, on se sert de l'un des trois systèmes orthonormés suivants :

- coordonnées cartésiennes (x, y, z) : voir figure A.1 ;

- coordonnées cylindriques ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$, z) : voir figure A.2 ;
- coordonnées sphériques ($x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$) avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-\pi \leq \varphi \leq \pi$: voir figure A.3.

Pour des applications particulières, on peut être amené à utiliser des repères curvilignes plus complexes.

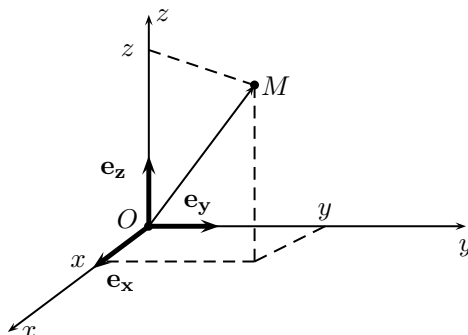


Figure A.1 : représentation d'un point dans un système de coordonnées cartésiennes.

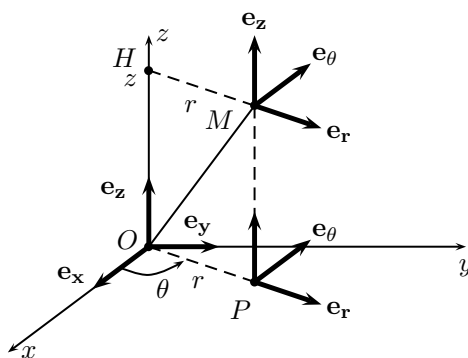


Figure A.2 : représentation d'un point dans un système de coordonnées cylindriques.

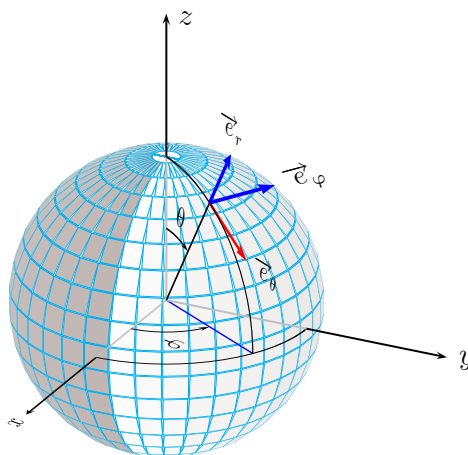


Figure A.3 : représentation d'un point dans un système de coordonnées sphériques.

A.1.2 Produits

À partir de deux tenseurs, on peut réaliser une multitude d'opérations. Les plus simples sont les opérations d'addition et multiplication par un scalaire. On dispose également de plusieurs produits entre grandeurs tensorielles. Si de façon générique, on note le produit entre des tenseurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, et $\mathbf{c}$ à l'aide du symbole $\star$, alors l'opération « produit » vérifie une ou plusieurs des règles suivantes :

- opération commutative : $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a}$;
- opération associative : $\mathbf{a} \star (\mathbf{b} \star \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \star \mathbf{c}$;
- opération distributive : $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \star \mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \star \mathbf{c} + \mu \mathbf{b} \star \mathbf{c}$ pour tous scalaires λ et μ .

Ainsi pour l'addition de tenseurs, les trois propriétés sont vérifiées.

Produit scalaire

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est noté $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. C'est une application linéaire d'un espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$) vers $\mathbb{R}$. Du point de vue algébrique, si $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ sont les composantes de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans une base orthonormée, alors

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b.$$

Le produit scalaire est commutatif et distributif, mais n'est pas associatif.

La norme d'un vecteur est ainsi : $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$. Du point de vue géométrique, le produit scalaire est relié à l'angle α entre les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de la façon suivante

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha.$$

On retiendra la propriété importante : deux vecteurs orthogonaux $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ont un produit scalaire nul $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Le produit scalaire peut s'appliquer à des tenseurs d'ordre quelconque ; on l'appelle alors parfois *produit simplement contracté* ou *produit contracté une fois*. Le produit scalaire de deux tenseurs est un tenseur d'ordre égal à la somme des ordres des termes moins 2. Par exemple, si on introduit un tenseur $\mathbf{T}$ d'ordre 2 reliant deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de façon linéaire : $\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$, l'opération s'apparente bien à un produit scalaire car on bien $\text{ord}(\mathbf{a}) = 1 = \text{ord}(\mathbf{T}) + \text{ord}(\mathbf{b}) - 2$.

En mécanique, le produit tensoriel est d'usage courant. Par exemple, la puissance P d'une masse ponctuelle m animée d'une vitesse $\mathbf{v}$ et soumise à une force $\mathbf{f}$ est : $P = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$; son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$.

Exercice A.1 Soit le vecteur $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$. Donnez une définition vectorielle du plan passant par le point origine et normal à $\mathbf{n}$. En déduire son équation cartésienne. 

Produit vectoriel

Le *produit vectoriel* est une opération vectorielle (dans des espaces euclidiens orientés) de dimension 3. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est noté de différentes façons selon les milieux : $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, ou bien $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Si $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b, z_b)$, alors

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, le produit vectoriel est également relié à l'angle orienté α entre les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de la façon suivante

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha.$$



Le vecteur $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est normal au plan formé par les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sous réserve que ceux-ci ne soient pas colinéaires sinon $\mathbf{c} = 0$. Le produit vectoriel est distributif, mais n'est ni commutatif, ni associatif. Ainsi, contrairement au produit scalaire, l'ordre des termes dans le produit vectoriel a son importance : $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. De même, on a

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$



Exercice A.2 L'application $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$, où $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$, est linéaire. On peut la représenter par une matrice. Écrire cette matrice. Quelle est sa caractéristique?

Produit tensoriel

On introduit le *produit tensoriel* (appelé encore produit dyadique) de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ comme la construction d'un tenseur d'ordre $n + m$ à partir de deux tenseurs d'ordre n et m . Le produit tensoriel est noté $\mathbf{ab}$ ou bien $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Lorsque $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs, c'est un opérateur linéaire qui a tout vecteur $\mathbf{n}$ lui associe un autre vecteur tel que :

$$(\mathbf{ab})\mathbf{n} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\mathbf{a}.$$

Cet opérateur peut donc être représenté par une matrice si l'on se place dans un repère cartésien (ou dans d'autres types de repère). Par exemple, en dimension 2, on a :

$$(\mathbf{ab}) = \begin{bmatrix} x_a x_b & x_a y_b \\ y_a x_b & y_a y_b \end{bmatrix},$$

avec $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$ et $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$.

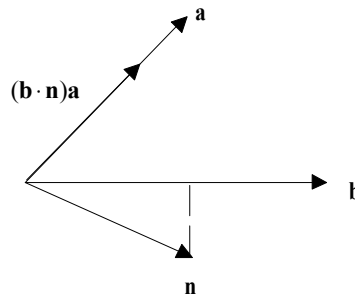


Figure A.4 : produit tensoriel.

Le produit tensoriel de deux vecteurs se rencontre fréquemment en mécanique ; par exemple, dans un fluide dont la vitesse locale est $\mathbf{v}$, on peut construire un tenseur d'inertie $\mathbf{vv}$, qui apparaît dans le terme de convection de l'équation de Navier-Stokes.



Exercice A.3 En mécanique, on définit le tenseur de Reynolds comme étant $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$. En régime laminaire stationnaire, en un point donné, la vitesse est constante ; en déduire que la matrice des

composantes du tenseur de Reynolds dans une base cartésienne est symétrique. En régime turbulent, la vitesse fluctue au cours du temps autour d'une valeur moyenne $\bar{\mathbf{u}}$: $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \bar{\mathbf{u}}$, avec $\mathbf{u}'$ la fluctuation instantanée de vitesse (sa moyenne dans le temps est nulle $\overline{\mathbf{u}'} = 0$). Calculer le tenseur moyenné $\overline{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}$; est-il égal à $\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$?

Produit tensoriel doublement contracté

Le produit tensoriel doublement contracté se rencontre essentiellement avec des tenseurs d'ordre 2: le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ se note $\mathbf{S} : \mathbf{T}$ et correspond à la trace du produit $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$:

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = S_{ij}T_{ji},$$

S_{ij} et T_{kl} les composantes de $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ dans une base orthonormée.

Cette opération peut se généraliser à des produits de tenseurs d'ordre n et m ; le résultat est un tenseur d'ordre $n + m - 4$.

Le produit doublement contracté est commutatif et distributif. On a les relations suivantes

$$\begin{aligned}\mathbf{S} : \mathbf{T} &= \mathbf{T} : \mathbf{S}, \\ (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{T} : (\mathbf{a}\mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{T}) &= \mathbf{T} : (\mathbf{a}\mathbf{b}), \\ \mathbf{a}\mathbf{b} : \mathbf{c}\mathbf{d} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{a}\mathbf{c} : \mathbf{b}\mathbf{d}\end{aligned}$$

Le produit doublement contracté se rencontre plus rarement en mécanique. On le trouve par exemple pour définir la puissance d'énergie P dissipée localement en un point donné d'un fluide déformé avec un tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ et où s'exerce un tenseur de contraintes $\mathbf{T}$: $P = \mathbf{D} : \mathbf{T}$; c'est une généralisation de la puissance d'une masse ponctuelle que l'on a vue plus haut.

Exercice A.4 Montrer que $\mathbf{S} : \mathbf{A} = 0$, avec $\mathbf{S}$ un tenseur symétrique et $\mathbf{A}$ un tenseur antisymétrique. ✱—

↔ *Réponse* : Une propriété de l'opérateur trace est son invariance quand il est composé avec l'opération de transposition: pour tout tenseur $\mathbf{M}$, on a $\text{tr}(\mathbf{M}^\dagger) = \text{tr}(\mathbf{M})$. Si on applique cette règle au produit $\mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$

$$\begin{aligned}\text{tr}[(\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{S})] &= \text{tr}[\mathbf{S}^\dagger \cdot \mathbf{A}^\dagger], \\ &= \text{tr}[\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{A})], \\ &= -\text{tr}[\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}],\end{aligned}$$

car $\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}$, mais $\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A}$. Comme par ailleurs l'opérateur trace ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait le produit $\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$ ($\mathbf{S} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{S}$), on a dans le même temps

$$\begin{aligned}\text{tr}[(\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{S})] &= \text{tr}[\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}], \\ &= \text{tr}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}].\end{aligned}$$

Si on compare les équations ci-dessus, on aboutit à $\text{tr}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}] = -\text{tr}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}]$, donc nécessairement $\text{tr}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}] = 0$. □

Produit mixte

En géométrie, le *produit mixte* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ des vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, et $\mathbf{c}$ est l'équivalent de l'opérateur déterminant dans un cadre euclidien: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \mathbf{M}$, où $\mathbf{M}$ est une matrice

dont les colonnes sont les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, et $\mathbf{c}$. Sa valeur absolue s'interprète comme le volume du parallépipède dont les côtés sont donnés par $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, et $\mathbf{c}$. On a aussi

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Le produit mixte n'est pas commutatif.

A.2 Opérations de différentiation

En mécanique, nous faisons un usage intensif des opérations de différentiation. Ces opérations peuvent porter sur des fonctions scalaires ou tensorielles avec des arguments eux-mêmes scalaires ou tensoriels ; les fonctions peuvent donc être à une ou plusieurs variables.

En langue française, on dit qu'on dérive une fonction lorsqu'on calcule la dérivée d'une fonction à une variable, mais on différentie une fonction à plusieurs variables par rapport à une ou plusieurs de ses variables ; en bref, pour des fonctions à variable multiple, on ne dérive pas¹, on *différentie* une fonction. Attention également à l'orthographe : « différencier » veut dire faire la différence.



A.2.1 Dérivée

Sur le plan mathématique, la définition de la dérivée est :

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x},$$

dont l'interprétation est donnée en termes de pente de la tangente : $f'(x)$ représente la pente de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse x .

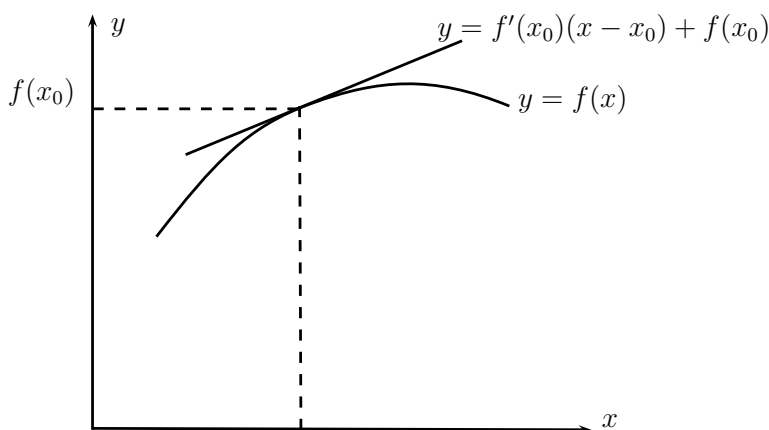


Figure A.5 : interprétation de la dérivée en termes de droite tangente.

Ainsi, une petite variation de f autour de $f(x_0)$ est donnée par :

$$df = f'(x_0)dx,$$

c'est-à-dire localement, quand x est très proche de x_0 , les variations de f sont voisines de celles de sa tangente : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots$. Ces notions se généralisent sans problème à des fonctions de plusieurs variables.

A.2.2 Différentielle

La notion de *dérivée partielle* est une généralisation de la dérivée d'une fonction scalaire à des fonctions de plusieurs variables. Ainsi, Par exemple, pour une fonction $f(x, y)$, la

1. Il en est de même en langue anglaise : on dit « differentiating a function with respect to one variable », mais surtout on ne dit pas « deriving a function », qui a sens totalement différent (proche de « déduction de la fonction » car *to derive* = *déduire*).

différentiation par rapport à la variable x se définit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi, y) - f(x, y)}{\xi - x},$$

cela veut dire que l'on différencie par rapport à x en gardant y constant (on est dans le même cas que dans le cas scalaire). On emploie les notations équivalentes plus ou moins compactes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x.$$

♣ **Exemple.** – Par exemple, prenons :

$$f(x, y) = 1 + y \ln x.$$

On tire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y}{x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \ln x. \end{aligned}$$

□

Comme précédemment, on peut définir la *différentielle totale* de f autour d'un point (x_0, y_0) :

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

On peut interpréter df en termes de plan tangent : en effet si on interprète $df \approx z - f(x_0, y_0)$, $dx \approx x - x_0$, et $dy \approx y - y_0$, alors l'équation précédente donne l'équation d'un plan :

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \times (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \times (y - y_0).$$

Cela peut se montrer de façon plus rigoureuse en considérant que toute surface $\mathcal{S}$ a au moins une équation implicite de la forme $\phi(x, y, z) = 0$. Puis $\phi = 0$, on a aussi $d\phi = 0$ pour tout point appartenant à la surface. Donc

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0.$$

Géométriquement, cela revient à dire qu'un vecteur incrément $d\ell = (dx, dy, dz)$ autour d'un point M_0 est perpendiculaire à $(\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$ (on verra plus loin que c'est le gradient de ϕ). Puisque $d\ell$ est un incrément (il est donc petit), il est à la fois sur la surface $\mathcal{S}$ et dans le plan tangent $\mathcal{P}$ (qui coïncide avec la surface au point M_0 considéré). Si on prend un vecteur colinéaire à cet incrément, il ne sera plus nécessairement sur la surface $\mathcal{S}$, mais il sera nécessairement sur le plan tangent $\mathcal{P}$. Soit donc un scalaire quelconque λ tel que $\mathbf{MM}_0 = \lambda d\ell$. Les coordonnées du vecteur $\mathbf{MM}_0$ sont $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(dx, dy, dz)$. L'équation $d\phi = 0$ nous donne

$$\lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial \phi}{\partial z} (z - z_0) \right) = 0.$$

En divisant par λ , on obtient finalement

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial \phi}{\partial z} (z - z_0) = 0. \quad (\text{A.1})$$

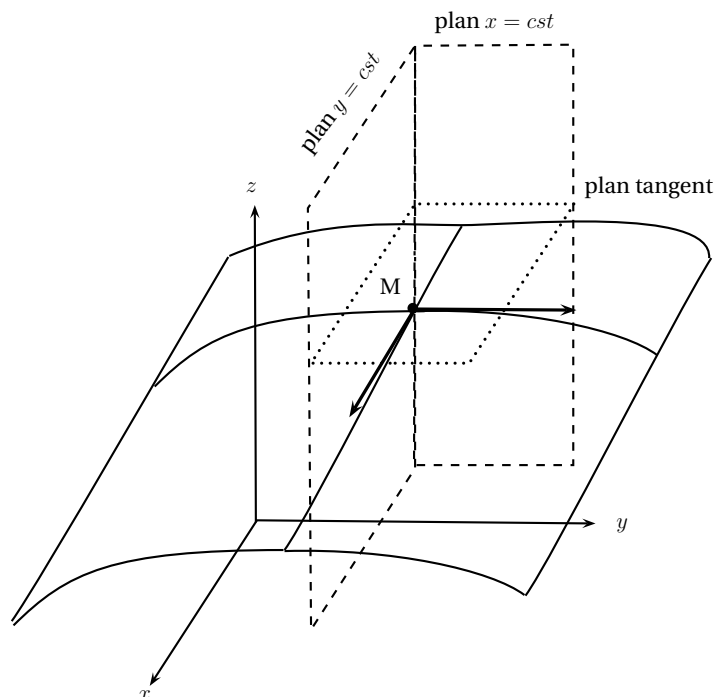


Figure A.6 : interprétation des dérivées partielles en termes de plan tangent.

C'est l'équation du plan tangent pour une surface d'équation implicite $\phi(x, y, z) = 0$.

En dimension 2 (cela se généralise à d'autres dimensions), une expression différentielle ψ prend la forme $\psi = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ avec A et B deux fonctions de x et y . On dit que cette expression est une *différentielle exacte* si elle correspond à la différentielle totale d'une fonction Ψ , autrement dit si on peut écrire que $\psi = d\Psi$. Par identification, on trouve que l'on doit avoir

$$\psi = A(x, y)dx + B(x, y)dy = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy \Rightarrow A = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ et } B = \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Comme l'ordre de différentiation n'est pas important, on en déduit le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

qui peut également être vu comme une condition que doivent vérifier A et B pour que ψ soit une différentielle exacte.

Notons que souvent lorsqu'on a des expressions différentielles telles que $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ on ne peut pas immédiatement trouver la primitive telle $d\Psi = A dx + B dy$. Toutefois en multipliant par une fonction $C(x, y)$, on peut obtenir une différentielle exacte. La fonction C est appelée un *facteur intégrant*. Par exemple, l'expression $2dx + \frac{x}{y}dy$ n'est pas une différentielle exacte, mais si on multiplie par $C = xy$, on obtient $2xydx + x^2dy$, dont une primitive est $\Phi = x^2y$.

Exercice A.5 Calculer la différentielle totale de $f(x, y) = y \ln x$.

✱

↪ Réponse :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{y}{x}dx + \ln x dy.$$

□

Ex **Exercice A.6** Dans le plan $x - y$, une courbe a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 + y^3 \cos x = 1$; voir figure A.7. Calculer les coordonnées d'une normale $\mathbf{n}$ à cette courbe et donner l'expression d'un vecteur tangent normé.

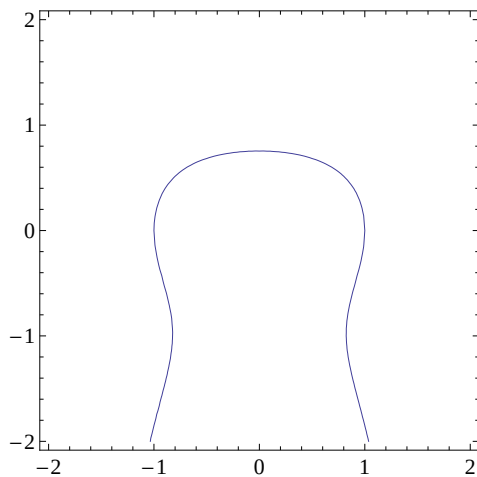


Figure A.7 : courbe d'équation $x^2 + y^2 + y^3 \cos x = 1$.

A.3 Quelques opérateurs

Pour se simplifier la vie, le physicien aime réduire la taille des équations. Il introduit pour cela des « opérateurs », c'est-à-dire des ensembles d'opérations différentielles groupés génériquement sous un seul terme. Ces opérateurs ont également des significations physiques.

A.3.1 Opérateur gradient

Le plus simple et le plus connu est l'opérateur *gradient* noté grad ou ∇ (appelé symbole *nabla*), qui à une fonction f lui associe le vecteur composé de toutes ses dérivées partielles. Par exemple si $f(x, y, z)$, alors :

$$\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

♣ **Exemple.** – Considérons $f(x, y; t) = xt + x^2 y/t$. On trouve que le gradient de $f = xt + \frac{x^2}{t}y$ est le vecteur :

$$\text{grad} f = \left(t + 2\frac{x}{t}y, \frac{x^2}{t} \right).$$

□

Notons que :

- **Attention** dans l'exemple ci-dessus le gradient a concerné les variables d'espace x, y et non de temps t car en mécanique, l'opérateur gradient ne s'applique le plus souvent qu'aux variables spatiales ; dans ce cas :



$$\nabla f(x, y; t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

On a mis un « ; » dans la liste des variables de la fonction pour séparer variables d'espace et de temps.

- Les expressions ci-dessus ne sont valables qu'en coordonnées cartésiennes. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , il faut employer :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- On a la relation :

$$\boxed{df(\mathbf{x}) = \text{grad} f \cdot d\mathbf{x}}$$

ce qui permet pour les plus téméraires d'introduire la dérivée selon un vecteur : $\text{grad} f = df(\mathbf{x})/d\mathbf{x}$.

- L'effet de l'opérateur gradient sur un objet de dimension n est d'obtenir un objet de dimension $n + 1$.
- On peut étendre la définition à un *champ vectoriel* ; par exemple si $\mathbf{u} = (a(x, y), b(x, y))$, alors

$$\text{grad} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Exercice A.7 Considérons une surface (resp. une courbe) dans un espace de dimension 3 (resp. de dimension 2) muni d'un repère cartésien (x, y, z) , dont l'équation implicite est $\phi(x, y, z) = 0$; par exemple, dans le cas d'une sphère de rayon a , on a $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$. Montrer qu'un vecteur normal à cette surface est $\mathbf{k} = \nabla\phi$. ✱

↪ Réponse : cela peut simplement se prouver en se rappelant que le plan tangent à la courbe $\phi(x, y, z) = 0$ au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation cartésienne

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial\phi}{\partial z}(z - z_0) = 0,$$

ce qui est équivalent à écrire que

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{MM}_0 = 0,$$

pour tout point $M(x, y, z)$ du plan tangent, ce qui montre bien que $\nabla\phi$ est normale à la surface $\phi = 0$. Géométriquement, il s'ensuit que l'opérateur gradient peut être interprété comme le vecteur normal à une surface (resp. une courbe); par exemple, dans le cas de la sphère, cela donne $\mathbf{k} = \nabla\phi = 2(x, y, z)$. $\square$

Physiquement, l'opérateur gradient sert dès lors qu'on a besoin de généraliser la notion de dérivée à des problèmes à plusieurs variables d'espace. Par exemple, dans un problème scalaire, le gradient de température T est noté $\partial T / \partial x$. Pour un problème dans l'espace, le gradient sera ∇T . C'est ainsi que la loi de Fourier qui lie le flux de chaleur au gradient s'écrit

$$j_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x},$$

pour un problème unidirectionnel (transmission de chaleur dans un tube par exemple), mais dans le cas général s'écrit

$$\mathbf{j}_Q = -\kappa \nabla T,$$

avec κ la conductibilité thermique. Notons au passage que le flux de chaleur dans un problème tridimensionnel est un vecteur.

Quelques développements avec l'opérateur gradient :

- gradient d'un produit de 2 fonctions (cela donne un vecteur)

$$\text{grad}(fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g.$$

- gradient d'un produit d'une fonction et d'un vecteur (cela donne une matrice)

$$\text{grad}(f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{ grad } f + f \text{ grad } \mathbf{u}.$$

- gradient d'un produit scalaire (cela donne un vecteur)

$$\text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{ grad } \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\text{rot } \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\text{rot } \mathbf{u}),$$

où $\times$ représente le produit vectoriel et rot l'opérateur rotationnel.



Exercice A.8 On définit l'opérateur suivant (en dimension 2) agissant sur des fonctions $f(x, y)$

$$\mathbf{u}\nabla : f \rightarrow (\mathbf{u}\nabla)f = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y},$$

où $\mathbf{u} = (u, v)$ est un vecteur. Montrer que l'on a $(\mathbf{u}\nabla)f = \mathbf{u} \cdot \nabla f$. Que se passe-t-il si on applique maintenant cet opérateur à un vecteur $\mathbf{a} = (a, b)$, c'est-à-dire peut-on écrire $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a}$?

A.3.2 Opérateur divergence

Un autre opérateur est la *divergence*, notée div ou $\nabla \cdot$ (faire bien attention au point en position centrale après le symbole), qui à un vecteur $\mathbf{u}$ lui associe la fonction résultant de la somme des dérivées partielles de ses composantes. Par exemple si on écrit

$$\mathbf{u} = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)),$$

alors :

$$\text{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

♣ **Exemple.** – Reprenant l'exemple précédent, on trouve que la divergence du gradient de $f(x, y; t) = xt + \frac{x^2}{t}y$ est la fonction :

$$\text{div}(\text{grad} f) = \frac{\partial}{\partial x} \left(t + 2\frac{x}{t}y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{t} \right) = \frac{2y}{t}.$$

□

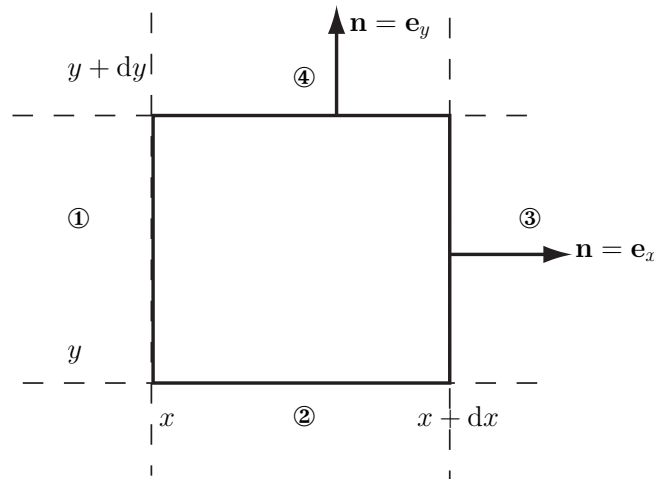


Figure A.8 : flux à travers une surface de contrôle.

Physiquement, l'opérateur divergence apparaît fréquemment dans les problèmes de flux d'une quantité à travers une surface ou un volume. Considérons en effet le flux d'une quantité $\mathbf{f}$ de composantes $(a(x, y), b(x, y))$ à travers la surface $\mathcal{S}$ entourant un petit volume infinitésimal $dxdy$ (voir figure A.8). Ce flux se définit comme

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS,$$

avec $\mathbf{n}$ la normale à la surface. Ici, cette définition peut donner lieu à une décomposition sur chacune des facettes ① à ④. On a ainsi

$$\Phi = - \int_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS + \int_3 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS - \int_2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y dS + \int_4 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y dS.$$

Prenons les deux premiers termes du membre de droite, on a

$$- \int_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS + \int_3 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS = \int_y^{y+dy} (a(x+dx, y) - a(x, y)) dy = \frac{\partial a}{\partial x} dxdy + o(dxdy).$$

On fait de même avec les deux derniers termes et on additionne les quatre termes pour obtenir l'approximation

$$\Phi = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) dx dy + o(dx dy) \approx \nabla \cdot \mathbf{f} dx dy.$$

On voit donc que le flux de $\mathbf{f}$ équivaut au terme de divergence multiplié par le volume (ici une surface) du volume de contrôle $dx dy$. Le résultat important à retenir est la relation entre flux et opérateur divergence. On peut démontrer un théorème dit de *Green-Ostrogradski* qui généralise ce résultat. Le théorème de Green-Ostrogradski (appelé encore théorème de la divergence) énonce le résultat suivant

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.}$$

Un corollaire du théorème de Green-Ostrogradski est le suivant

$$\int_V \operatorname{grad} f dV = \int_S f \mathbf{n} dS.$$

Quelques relations utiles de composition avec l'opérateur divergence :

- divergence du produit d'un champ scalaire et d'un champ vectoriel (cela donne un scalaire)

$$\operatorname{div} (f \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

- divergence du produit d'un champ vectoriel et d'un tenseur d'ordre 2 (matrice) (cela donne un scalaire)

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} : \operatorname{grad} \mathbf{u},$$

où le symbole ‘:’ représente le double produit contracté :

$$\mathbf{A} : \operatorname{grad} \mathbf{u} = \operatorname{trace}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}).$$



Exercice A.9 Considérons un solide indéformable dont la vitesse du centre de gravité est $\mathbf{u}_G$ et sa vitesse de rotation propre est $\boldsymbol{\Omega}$. La vitesse $\mathbf{u}(M)$ d'un point M dans ce solide est donnée par l'équation :

$$\mathbf{u}(M) = \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GM}.$$

Montrer que la divergence de ce champ vectoriel est nulle.

A.3.3 Opérateur laplacien

Le dernier opérateur est le *laplacien*, noté² Δ , soit encore

$$\Delta f(x, y, z) = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

en coordonnées cartésiennes.

Physiquement, cet opérateur se rencontre chaque fois que l'on fait un calcul de flux avec une quantité qui dérive d'une gradient. Par exemple, on a vu plus haut que le flux de température était relié au gradient *via* la loi de Fourier. Un simple bilan d'énergie permet d'écrire que l'accroissement de chaleur (énergie) par unité de temps doit correspondre à la

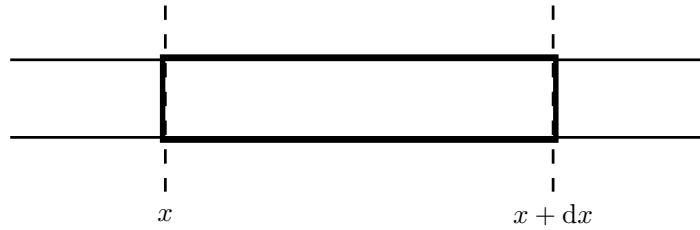


Figure A.9 : transmission de chaleur dans un barreau.

variation de ce qui entre et de ce qui sort d'un certain volume (c'est-à-dire le flux de chaleur) s'il n'y a pas de création de chaleur.

En dimension 1 (problème scalaire), cela s'énonce

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx,$$

accroissement de chaleur par unité de temps = flux de chaleur,

avec c la chaleur massique, ϱ la masse volumique ; le bilan est fait pour un barreau de largeur unitaire dans la direction x et de longueur infinitésimale dx . On aboutit finalement à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

avec $\alpha = \kappa/(\varrho c)$. La généralisation à un espace à deux ou trois dimensions ne pose pas de problème ; on a

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \Delta T.$$

A.3.4 Dérivée totale ou dérivée matérielle ou dérivée particulière

Jusqu'à présent, il n'y a pas eu de difficultés particulières puisque le calcul différentiel considère tour à tour chacune des variables en prenant toutes les autres constantes, puis on différencie par rapport à cette variable, ainsi de suite. Plus difficile est le cas où les variables ne sont plus indépendantes, mais dépendantes. C'est ce cas qui sera le plus fréquent en mécanique des fluides.

On appelle *dérivée matérielle* (appelée encore *dérivée particulière* ou *dérivée totale* par rapport au temps ou *dérivée de Lagrange*) d'une fonction $f(x, y, z, t)$ la quantité suivante (dans le cas de coordonnées cartésiennes)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla f}_{\text{terme d'advection}},$$

avec (u, v, w) les coordonnées de la vitesse locale. Notons que certains auteurs emploient parfois le signe $D()/Dt$ pour $d()/dt$ pour mettre l'accent sur le fait qu'il s'agit d'une dérivée matérielle, mais l'emploi de $d()/dt$ est tout aussi logique car, en fin de compte, si x et y sont des fonctions de t , alors f n'est qu'une fonction de t et cela a un sens de parler de df/dt .

2. noté également ∇^2 car $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$

♣ **Exemple.** – Considérons le cas :

$$f(x, y, z) = xz + \frac{x^2}{z}y$$

Si les variables sont indépendantes, on a :

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = z + 2\frac{x}{z}y,$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{x^2}{z},$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = x - \frac{x^2}{z^2}y,$$

et la différentielle totale s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \left(z + 2\frac{x}{z}y\right)dx + \frac{x^2}{z}dy + \left(x - \frac{x^2}{z^2}y\right)dz.$$

Admettons maintenant qu'il y ait une dépendance de x, y, z en fonction de t . On peut définir une nouvelle dérivée par rapport au temps sous la forme :

$$\frac{df}{dt},$$

qui n'est généralement pas égale à $\partial f/\partial t$. Pour preuve, divisons l'expression donnant df par dt :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \left(z + 2\frac{x}{z}y\right) \frac{dx}{dt} + \frac{x^2}{z} \frac{dy}{dt} + \left(x - \frac{x^2}{z^2}y\right) \frac{dz}{dt}.$$

Cette relation vaut $\partial f/\partial t$ uniquement lorsque $dx/dt = 0$, $dy/dt = 0$, et $dz/dt = 0$ c'est-à-dire lorsque les variables x, y , et z sont indépendantes de t . Considérons maintenant un exemple où il y a une dépendance de la forme :

$$x(t) = t, y(t) = t^2 \text{ et } z(t) = t.$$

On a donc :

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ et } \frac{dy}{dt} = 2t.$$

On tire :

$$\frac{df}{dt} = \left(t + 2\frac{t}{t}t^2\right) + \frac{t^2}{t}2t + \left(t - \frac{t^2}{t^2}t^2\right) = 2t + 3t^2.$$

Notons que si on remplace x, y , et z par leur expression dans $f(x, y, z) = xz + \frac{x^2}{z}y$, on a : $f(t) = t^2 + t^3$, dont la dérivée donne bien : $f'(t) = 2t + 3t^2$. $\square$

Physiquement, l'opérateur de dérivée matérielle joue un très grand rôle en mécanique des fluides puisqu'on ne suit pas individuellement toutes les particules du fluide, mais qu'on regarde ce qui se passe localement (description dite eulérienne du mouvement). Considérons ainsi la composante u du champ de vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$. On se place à un endroit repéré par le point $M(x, y, z)$. Dans un voisinage infinitésimal autour de ce point passent des particules. Ainsi une particule en M à l'instant t sera en M' ($x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t$) à l'instant $t + \delta t$

et elle aura la vitesse $(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w)$. L'accélération selon la direction x au point M est donc

$$a_x = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u.$$

On fait de même avec les autres composantes. L'accélération locale au point M est donc la somme de l'accélération locale des particules et d'un terme non linéaire $+\mathbf{u} \cdot \nabla u$ qui est le taux de convection de u , c'est-à-dire le taux de variation de u dans l'espace. On parle également d'advection pour qualifier ce terme. Transport par convection ou advection signifie ici la même chose.

La dérivée matérielle s'exprime différemment dans chaque système de coordonnées

– coordonnées cartésiennes (x, y, z) , on a

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

– coordonnées cylindriques (r, θ, z) , on a

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_\theta &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Exercice A.10 Soit un champ de vitesse $\mathbf{u} = (3r^2 \cos \theta, -2r \sin \theta)$ dans un plan $r - \theta$ (coordonnées cylindriques). Est-ce que ce champ dérive d'un potentiel? Calculer l'accélération radiale et l'accélération orthoradiale? Quelle est la dérivée totale de $\mathbf{u}$? Ex

Exercice A.11 Une particule de fluide a la trajectoire : Ex

$$x = \frac{3x_0 y_0 t^2}{z_0}, \quad y = \frac{5x_0 z_0 t}{y_0}, \quad \text{et} \quad z = \frac{2z_0 y_0 t^3}{x_0}.$$

Calculer la vitesse et l'accélération de cette particule.

A.3.5 Quelques relations sur les opérateurs

Les relations suivantes peuvent être utiles :

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= g \nabla f + f \nabla g, \\ \nabla \cdot (f\mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{a}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}), \\ \nabla \cdot \nabla \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}), \\ \nabla \cdot \mathbf{ab} &= \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \mathbf{b} \\ \mathbf{1} : \nabla \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a}, \\ \nabla \cdot (f\mathbf{1}) &= \nabla f, \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^\dagger, \\ \frac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}}{x} \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \\ \mathbf{a} \mathbf{b} : (\nabla \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{c},\end{aligned}$$

avec $x = |\mathbf{x}|$.

A.4 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre

Le problème de la classification des équations linéaires du second ordre a été traité de façon exhaustive dans plusieurs ouvrages (Garabedian, 1964; Zauderer, 1983; Kevorkian, 2000). On va ici s'intéresser principalement à des équations du second ordre à deux variables et à des systèmes de deux équations différentielles du premier ordre.

La forme générique de toute équation différentielle linéaire du second ordre à deux variables est la suivante

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (\text{A.2})$$

avec a, b, c, d, e, f , et g des fonctions réelles de x et y . On écrit également cette équation sous la forme d'un opérateur linéaire

$$L[u] + fu = g, \quad (\text{A.3})$$

avec

$$L = a\partial_{xx} + 2b\partial_{xy} + c\partial_{yy} + d\partial_x + e\partial_y.$$

Parmi les équations linéaires du second ordre, on recense

- l'équation de Laplace avec $a = c = 1$ et les autres fonctions nulles

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad (\text{A.4})$$

- l'équation de la chaleur (la variable y étant remplacée ici par la variable t) avec $k = -a/e = \text{cte}$ le coefficient de diffusion

$$u_t = ku_{xx}; \quad (\text{A.5})$$

- l'équation des ondes (la variable y étant remplacée ici par la variable t) avec $\gamma = \sqrt{-a/e} = \text{cte}$ la célérité des ondes

$$u_{tt} = \gamma^2 u_{xx}. \quad (\text{A.6})$$

En supposant que $a \neq 0$ (au moins localement), on transforme les opérateurs d'ordre 2 de la façon suivante

$$\partial_x^2 + \frac{2b}{a}\partial_x\partial_y + \frac{c}{a}\partial_y^2 = (\partial_x - \omega^+\partial_y)(\partial_x - \omega^-\partial_y) + (\partial_x\omega^- - \omega^+\partial_y\omega^-)\partial_y$$

où ω^- et ω^+ sont les racines de l'équation $a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$

$$\omega^\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Les racines sont donc réelles sous réserve que $\Delta = b^2 - ac > 0$. Une première application de cette transformation est le passage d'une équation différentielle d'ordre 2 à un système d'équations différentielles d'ordre 1. Pour cela, posons par exemple

$$v = (\partial_x - \omega^+\partial_y)u,$$

ce qui permet d'écrire l'équation (A.2) sous la forme

$$a(v_x - \omega^-v_y + (\partial_x\omega^- - \omega^+\partial_y\omega^-)u_y) + du_x + eu_y + fu = g.$$

L'intérêt de cette transformation est évident quand on peut transformer l'équation de départ en deux équations du premier ordre indépendantes ou faiblement dépendantes. Par exemple, l'équation des ondes (A.6) peut se transformer en

$$\begin{cases} u_t - \gamma u_x = v, \\ v_t + \gamma v_x = 0. \end{cases}$$

Quoique le système soit couplé, on peut résoudre la seconde équation indépendamment, puis résoudre la première équation. Dans le cas général, la transformation n'amène pas de résultat qui puisse être utilisé de façon systématique et on n'en parlera donc pas plus longtemps.

On classifie les équations linéaires selon le signe de Δ :

- si $\Delta = b^2 - ac > 0$, les deux racines ω^- et ω^+ sont positives, on dit que l'équation (A.2) est *hyperbolique*. L'équation des ondes (A.6) en est un exemple. En mécanique des fluides, les équations de transport sont souvent hyperboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0 \text{ ou bien } u_{xy} + \dots = 0,$$

où les points de suspension représentent ici des termes liés à u ou des dérivées d'ordre 1 ;

- si $\Delta = b^2 - ac < 0$, les deux racines ω^- et ω^+ sont complexes, on dit que l'équation (A.2) est *elliptique*. L'équation de Laplace (A.4) en donne un exemple. Les équations traduisant un équilibre sont le plus souvent de nature elliptique. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0$$

- si $\Delta = b^2 - ac = 0$, ω^- et ω^+ sont égales, on dit que l'équation (A.2) est *parabolique*. L'équation de la chaleur (A.5) en offre un exemple. Les équations de diffusion sont souvent paraboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{yy} + \dots = 0.$$

Les formes canoniques vues ci-dessus peuvent être déduites de l'équation (A.2) en faisant un changement de variables de la forme

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y), \end{aligned}$$

en supposant que le jacobien de la transformation est non nul

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} + u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x, \end{aligned}$$

et ainsi de suite avec les ordres supérieures des dérivées partielles. On peut alors transformer l'équation (A.2) en

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Bu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (\text{A.7})$$

avec

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + c\xi_y^2 + 2b\xi_x\xi_y, \\ B &= a\xi_x\eta_x + c\xi_y\eta_y + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x), \\ C &= a\eta_x^2 + c\eta_y^2 + 2b\eta_x\eta_y, \\ D &= L(\xi), \\ E &= L(\eta), \end{aligned}$$

alors que $F = f$ et $G = g$ restent inchangées. Notons que l'on a aussi $\Delta = b^2 - ac = (B^2 - AC)/J$, ce qui montre que la nature d'une équation différentielle (elliptique, parabolique, hyperbolique) ne peut pas être modifiée lors d'un changement de variables. Comme on est libre du changement de variable, on cherche des jeux de fonctions $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ telles que les fonctions A , B , ou C puissent devenir identiquement nulles. Par exemple, en choisissant ξ et η comme étant les solutions de $av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$, on impose que $A = C = 0$ et on se ramène alors à la forme générique $u_{\xi\eta} + \dots = 0$.

A.4.1 Équations hyperboliques

Nous commençons par rechercher $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ solutions de $av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$ de telle sorte que $A = C = 0$. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre, qui peut se résoudre à l'aide de l'équation caractéristique. L'équation $av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$ peut se mettre sous la forme

$$H(x, y, v, p, q) = ap^2 + 2bpq + cq^2 = 0, \quad (\text{A.8})$$

avec les notations usuelles $p = v_x$ et $q = v_y$. Une des équations caractéristiques est

$$ds = \frac{dv}{pH_p + H_q},$$

qui ici nous donne $dv/ds = 0$, avec s une abscisse curviligne le long d'une courbe $\mathcal{C}$ telle que $dx/ds = H_p$ et $dy/ds = H_q$. On a donc $v = \text{cte}$ le long de $\mathcal{C}$. On a donc

$$v_x dx + v_y dy = p dx + q dy = 0, \quad (\text{A.9})$$

le long de cette courbe. En éliminant p et q des équations (A.9) et (A.9), on tire que

$$ady^2 + 2bdxdy + cdx^2 = 0.$$

Cette équation quadratique a donc pour solution

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (\text{A.10})$$

Les intégrales premières de cette équation forment donc les fonctions $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ recherchées. Les courbes du plan $\xi(x, y) = \text{cte}$ et $\eta(x, y) = \text{cte}$ sont appelées les courbes *caractéristiques* de l'équation (A.2). Dans un plan $\xi - \eta$, ces courbes sont des lignes droites parallèles aux axes. Les variables ξ et η sont également appelées les *coordonnées caractéristiques*.

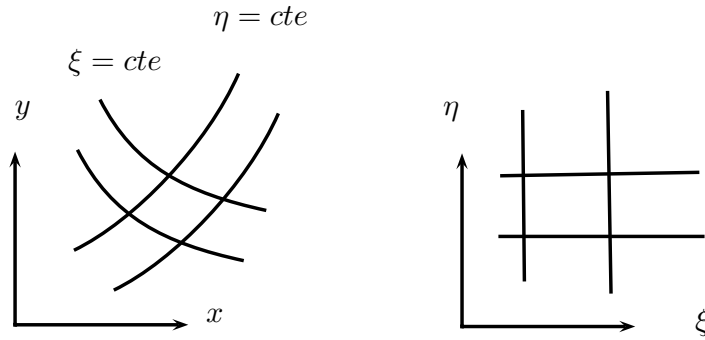


Figure A.10 : réseau de caractéristiques.

Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy pour une équation hyperbolique est constitué d'une équation, dont la forme canonique est

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (\text{A.11})$$

où f est une fonction qui dépend continûment de ses arguments x , y , u , $p = u_x$, et $q = u_y$. On adjoint une condition aux limites de la forme

$$u = u_0(s), p = p_0(s), q = q_0(s), \quad (\text{A.12})$$

le long d'une courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x = x(s)$ et $y = y(s)$, où s est une coordonnée curviligne. Notons que $u(s)$, $p(s)$, et $q(s)$ ne peuvent être choisies indépendamment, mais doivent vérifier une condition de compatibilité

$$\frac{du}{ds} = p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds}, \quad (\text{A.13})$$

le long de $\mathcal{C}$. Cette courbe $\mathcal{C}$ est quelconque, mais ne peut pas coïncider avec l'une des courbes caractéristiques sous peine de perdre l'unicité de la solution ([Garabedian, 1964](#), voir pp. 102–103); notons ici que puisque l'équation est sous sa forme canonique, les courbes caractéristiques sont les droites $x = cste$ et $y = cste$. $\mathcal{C}$ ne doit pas non plus être tangente à ces courbes. Autrement dit, $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $y = y_0(x)$, avec y_0 une fonction strictement monotone de x .

Considérons tout d'abord la solution spéciale à l'équation (A.11) lorsque $f = 0$. Trivialement, on a

$$u = \phi(x) + \psi(y).$$

Les conditions aux limites imposent

$$\phi(x) + \psi(y) = u_0(x, y), \phi'(x) = p_0(x), \text{ et } \psi'(y) = q_0(y),$$

quand (x, y) décrivent la courbe $\mathcal{C}$, ce qui donne

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (u_0(x) + u_0(y)) + \frac{1}{2} \int_{x_0(y)}^y p(x') dx' + \frac{1}{2} \int_{y_0(x)}^x p(y') dy'.$$

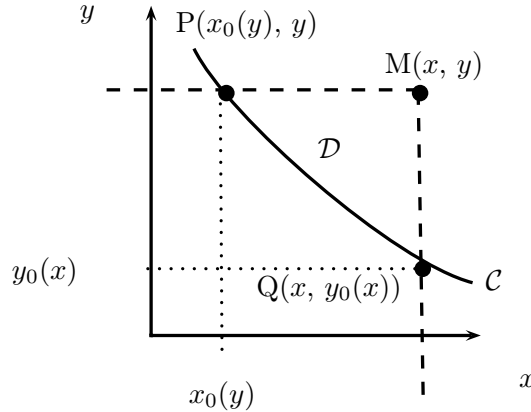


Figure A.11 : problème de Cauchy.

L'expression se généralise aisément dans le cas d'équation non homogène de la forme

$$u_{xy} = g(x, y).$$

La linéarité de l'équation permet d'écrire la solution comme la somme d'une solution générale et d'une solution particulière, cette dernière étant obtenue par une double intégration de g

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (u_0(x) + u_0(y)) + \frac{1}{2} \int_{x_0(y)}^y p(x') dx' + \frac{1}{2} \int_{y_0(x)}^x p(y') dy' + \int_{x_0(y)}^y \int_{x_0(y)}^x g(x', y') dy' dx',$$

que l'on peut écrire sous une forme générale

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (u_0(P) + u_0(Q)) - \frac{1}{2} \int_P^Q (q(y') dy' - p(x') dx') + \int_{\mathcal{D}} g(x', y') dy' dx'.$$

Fonction de Riemann

Nous examinons maintenant le problème suivant

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (\text{A.14})$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$u = u_0(s), \quad p = p_0(s), \quad q = q_0(s), \quad (\text{A.15})$$

sur une courbe $\mathcal{C}$.

L'idée est d'interpréter l'opérateur

$$L = \partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c,$$

en termes de divergence, ce qui permet d'appliquer le théorème de Green (??). À cet effet, on introduit un nouvel opérateur $M[v]$, que l'on appellera *opérateur adjoint*, opérant sur une nouvelle fonction v , qui reste à préciser. Cet opérateur est défini de telle sorte que

$$vL[u] - uM[v] = \nabla \cdot \mathbf{U} = U_x + V_y,$$

avec $\mathbf{U} = (U, V)$ un champ vectoriel qui reste à définir. Pour déterminer M , examinons les termes de $vL[u]$ que l'on intègre par partie

$$\begin{aligned} vu_{xy} &= (vu_x)_y - v_y u_x = (vu_x)_y + v_{xy}u - (v_y u)_x, \\ vau_x &= (uav)_x - u(av)_x, \\ vbu_y &= (vbu)_y - u(bv)_y, \end{aligned}$$

dont la somme est

$$\begin{aligned} vL[u] &= (vu_x)_y + v_{xy}u - (v_y u)_x + (uav)_x - u(av)_x + (vbu)_y - u(bv)_y + cuv \\ &= (vu_x)_y + (vbu)_y - (v_y u)_x + (uav)_x + cvu + u(v_{xy} - (av)_x - (bv)_y). \end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$M[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv,$$

et

$$U = -v_y u + uav \text{ et } V = vu_x + vbu.$$

Afin de rendre symétriques les expressions de U et V , on les transforme légèrement en notant par exemple que pour U

$$\frac{1}{2}(-v_y u)_x = \frac{1}{2}(-(vu)_y + u_y v)_x,$$

et de même pour V

$$\frac{1}{2}(u_x v)_y = \frac{1}{2}((vu)_x - v_x u)_y,$$

et en sommant les deux expressions, on peut faire disparaître les termes en $(vu)_x$ et $(vu)_y$. On aboutit alors à

$$U = auv + \frac{1}{2}vu_y - \frac{1}{2}v_yu \text{ et } V = buv + \frac{1}{2}vu_x - \frac{1}{2}v_xu. \quad (\text{A.16})$$

L'application du théorème de Green amène à

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (vL[u] - uM[v]) dx dy &= \int_{\mathcal{C}} \left(auv + \frac{1}{2}vu_y - \frac{1}{2}v_yu \right) dy - \left(buv + \frac{1}{2}vu_x - \frac{1}{2}v_xu \right) dx \\ &= v(M)u(M) - \frac{1}{2}v(P)u(P) - \frac{1}{2}v(Q)u(Q) \\ &\quad + \int_Q^M (av - v_y)u dy - \int_P^M (bv - v_x)u dx + \int_P^Q B[u, v], \end{aligned}$$

avec

$$B[u, v] = \left(auv + \frac{1}{2}vu_y - \frac{1}{2}v_yu \right) dy - \left(buv + \frac{1}{2}vu_x - \frac{1}{2}v_xu \right) dx.$$

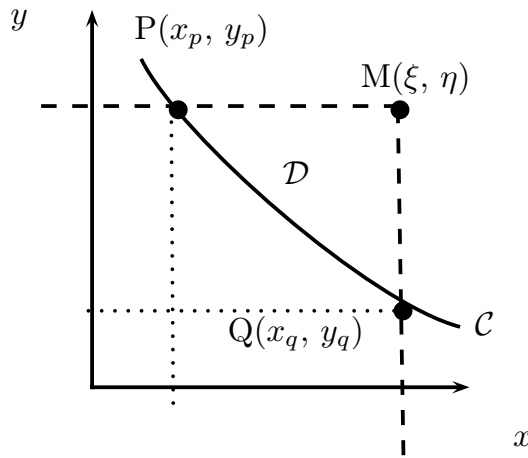


Figure A.12 : problème de Cauchy.

Comme on peut choisir librement la fonction v , on peut considérer une fonction v telle que

$$M[v] = 0, v(M) = 1, v_y = av, \text{ sur } QM \text{ et } v_x = bv \text{ sur } PM.$$

L'intégration de ces équations donne

$$\begin{aligned} v(\xi, y) &= \exp \left(\int_{\eta}^y a(\xi, s) ds \right), \\ v(x, \eta) &= \exp \left(\int_{\xi}^x b(s, \eta) ds \right), \end{aligned}$$

où (ξ, η) désigne les coordonnées de M . La fonction v ainsi formée est appelée *fonction de Riemann*. On écrit

$$R(x, y; \xi, \eta) = v(x, y),$$

pour montrer que la fonction de Riemann dépend tout à la fois du couple (x, y) et (ξ, η) . Avec cette fonction en main, on peut maintenant écrire la solution $v(M)$ en fonction de données aux frontières et de la fonction de Riemann

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}R(P; \xi, \eta)u(p) + \frac{1}{2}R(Q; \xi, \eta)u(Q) \\ &\quad - \int_P^Q B[u, R(x, y; \xi, \eta)] + \int_{\mathcal{D}} f(x, y)R(x, y; \xi, \eta) dx dy. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

♣ **Exemple.** – La fonction de Riemann v peut être déterminée pour quelques problèmes ([Garabedian, 1964](#), voir problème 9, § 5.1, p 150). Par exemple, pour une équation différentielle de la forme

$$u_{xy} + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{x+y} (u_x + u_y) = 0, \quad (\text{A.18})$$

le problème adjoint est donc

$$M[v] = 0, \text{ avec } M[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \text{ avec } a = b = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{x+y},$$

et où $c = 0$. En suivant [Garabedian \(1964\)](#), on pose

$$v = \frac{(x+y)^\lambda}{(x+\eta)^{\lambda/2}(x+\eta)^{\lambda/2}} W(\zeta), \text{ avec } \zeta = \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x+\eta)(y+\xi)}.$$

On trouve que W vérifie l'équation

$$-\lambda^2 W(\zeta) + 4(1 - (\lambda + 1)\zeta)W'(\zeta) + \zeta(1 - \zeta)W''(\zeta) = 0,$$

dont la solution est

$$W(\zeta) = F\left[\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 1, \zeta\right],$$

avec F la fonction hypergéométrique. On peut également se servir des propriétés de la fonction hypergéométrique pour mettre sous une forme un peu différente cette fonction. On a en effet ([Abramowitz & Stegun, 1964](#), voir p. 559)

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b, c, \frac{z}{z-1}\right),$$

ce qui ici nous donne

$$F\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, z\right] = (1-z)^{-\frac{3}{2}} F\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{z}{z-1}\right].$$

Une nouvelle transformation amène à interpréter cette fonction en termes de fonction de Legendre ([Abramowitz & Stegun, 1964](#), voir p. 562)

$$F\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, z\right] = P\left[\frac{1}{2}, 0, 1-2z\right].$$

où P désigne ici la fonction de Legendre de degré $1/2$ et d'ordre 0 . La solution finale est donc

$$u(x, y) = \frac{(x+y)^{3/2}}{(a+b)^{3/2}} P\left[\frac{1}{2}, 0, 1 - \frac{2(a-x)(b-y)}{(a+b)(x+y)}\right].$$

A.4.2 Solutions faibles des problèmes hyperboliques

Contrairement aux équations elliptiques et paraboliques, les équations différentielles hyperboliques ne lissent pas les discontinuités qui apparaissent dans les conditions aux limites, mais les propagent le long des caractéristiques. L'existence de discontinuité dans le domaine de calcul entre en conflit avec les hypothèses de continuité et de dérivabilité sous-jacentes au problème différentiel, ce qui amène à s'interroger sur la notion de solution.

Il faut tout d'abord se rappeler que les équations différentielles étudiées concernent des problèmes physiques et sont en général obtenues par application des lois de conservation

sur un volume de contrôle: l'équation différentielle est obtenue à partir d'une hypothèse de continuité sur tout le volume de contrôle. Si une telle hypothèse n'est pas valide, il nous reste toujours la formule macroscopique originelle. Cette formulation fournit en fait des conditions de correspondance entre solutions continues de deux domaines adjacents. Une solution au problème différentiel écrit sous sa forme intégrale est appelée *solution faible*; une solution continue est appelée en général solution régulière.

Considérons par exemple l'équation des ondes

$$L[u] = 0,$$

avec $L = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$. On considère un domaine de calcul $\mathcal{D}$ dans le plan $x - t$ et des fonctions tests v à support compact et régulières, telles que v soient nulles en dehors de $\mathcal{D}$ (cela implique notamment que v et ses dérivées sont nulles sur les frontières de $\mathcal{D}$). Calculons maintenant

$$\int_{\mathcal{D}} (vL[u] - uL[v]) dx dt.$$

En se servant de

$$\begin{aligned} \partial_t(v\partial_t u - u\partial_t v) &= v\partial_{tt} u - u\partial_{tt} v + \partial_t u \partial_t v - \partial_t u \partial_t v, \\ &= v\partial_{tt} u - u\partial_{tt} v, \end{aligned}$$

on tire

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (vL[u] - uL[v]) dx dt &= \int_{\mathcal{D}} \left[\partial_t(v\partial_t u - u\partial_t v) + \partial_x(-c^2 v\partial_x u + c^2 u\partial_x v) \right] dx dt, \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}} \begin{pmatrix} -c^2 v\partial_x u + c^2 u\partial_x v \\ v\partial_t u - u\partial_t v \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} ds, \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'après le théorème de la divergence et où $\partial \mathcal{D}$ représente le contour orienté de $\mathcal{D}$ et $\mathbf{n}$ une normale à ce contour. Comme v et sa dérivée s'annulent sur le contour de $\mathcal{D}$, on en déduit que l'intégrale est nulle. On arrive finalement à

$$\int_{\mathcal{D}} vL[u] dx dt = \int_{\mathcal{D}} uL[v] dx dt.$$

Si u est continûment différentiable et vérifie $L[u] = 0$, alors elle vérifie aussi

$$\int_{\mathcal{D}} uL[v] dx dt = 0. \quad (\text{A.19})$$

Inversement toute fonction continue et deux fois différentiable qui vérifie cette relation intégrale doit également vérifier $L[u] = 0$. On dit alors que u est une solution classique ou régulière du problème différentiel $L[f] = 0$. Si une fonction n'est pas deux fois différentiable, mais vérifie la relation intégrale (A.19), alors on dit qu'il s'agit d'une *solution faible*.

Annexe B : quelques rappels d'hydraulique

B.1 Introduction

B.1.1 Généralités

L'hydraulique à surface libre se distingue de l'hydraulique en charge par l'existence d'une *surface libre*, c'est-à-dire d'une surface où l'écoulement est en contact direct avec l'atmosphère¹ : le gradient de pression ne peut plus être le moteur de l'écoulement, c'est la gravité qui devient l'agent moteur. Le domaine d'application est large :

- cours d'eau : rivières, fleuves, etc. ;
- canaux de navigation, d'irrigation, etc. ;
- systèmes d'évacuation : réseaux d'assainissement pluvial ;
- aménagements : retenues d'eau, usines de production d'électricité, ports, etc.

Une caractéristique de la plupart de ces écoulements : une hauteur d'écoulement petite par rapport à la longueur d'écoulement. On parle d'écoulement filaire.

B.1.2 Un peu de vocabulaire et des notations

- *bief* : tronçon homogène en termes de pente moyenne et de section d'écoulement (on emploie parfois aussi le mot *bisse*, notamment dans le Valais, dont l'origine étymologique est la même) ;
- type de cours d'eau : une distinction des cours d'eau en fonction de la pente i :
 - $i < 3 \%$ on parle de *rivière*,
 - $3 < i < 6 \%$, on parle de *rivière torrentielle*,
 - $i > 6 \%$, on parle de *torrent* ;
- *périmètre mouillé* χ : longueur de la surface d'écoulement en contact avec le lit (fond + berges), c'est-à-dire le périmètre de la section d'écoulement – la largeur au miroir.
- section d'écoulement (ou section mouillée) S : partie de la section du canal limitée par les parois et la surface libre ;
- *hauteur d'écoulement* : hauteur moyenne d'eau, par définition : $h = S/B$;
- *hauteur normale* h_n : c'est la hauteur d'un écoulement permanent uniforme dans un bief. La hauteur normale est fonction du débit Q , de la rugosité K , et de la pente moyenne i ;

1. La pression du fluide à cette interface est égale à celle de l'atmosphère.

- *tirant d'eau* : profondeur maximale d'une section d'écoulement ;
- *largeur au miroir* B : largeur de la section d'écoulement au niveau de la surface libre ;
- *rayon hydraulique* : c'est une longueur caractéristique définie par $R_H = S/\chi$. Pour un écoulement dans un canal rectangulaire infiniment large ($B \gg h$), le rayon hydraulique correspond à la hauteur d'écoulement h ;
- régime *uniforme* : régime d'écoulement le long d'un bief où les caractéristiques d'écoulement (hauteur et vitesse) sont constantes quelle que soit la position le long de la direction d'écoulement. On a ainsi $\partial h/\partial x = 0$;
- régime *permanent* : régime où l'écoulement ne dépend pas du temps. On a ainsi $\partial h/\partial t = 0$;
- régime *graduellement varié* : régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très faible, typiquement si L désigne une longueur d'écoulement et Δh une variation de hauteur, on a $\Delta h/L \ll 1$. **Les équations de Saint-Venant ou le calcul différentiel des courbes de remous ne sont valables que pour ce régime ;**
- régime *rapidement varié* : régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très importante, typiquement si L désigne une longueur d'écoulement et Δh une variation de hauteur, on a $\Delta h/L = O(1)$. À l'approche d'une singularité ou bien en cas de ressaut hydraulique, l'écoulement peut entrer dans un régime rapidement varié ;
- *ressaut hydraulique* : variation brutale de hauteur d'eau (passage d'un régime torrentiel à un régime fluvial) ;
- *pente moyenne* : pente moyenne longitudinale $i = \tan \theta$ d'un bief exprimé en % ou en ‰ ;
- régime *torrentiel* : régime supercritique ($Fr > 1$), forte vitesse, faible hauteur ;
- régime *fluvial* : régime subcritique ($Fr < 1$), faible vitesse, hauteur élevée ;
- *débit* Q : flux d'eau par unité de temps à travers la surface d'écoulement ;
- *vitesse moyenne* $\bar{u}$: vitesse $\bar{u} = Q/S$;
- coefficient de *rugosité* : coefficient traduisant la rugosité des parois (coefficient de Chézy noté C ou de Manning-Strickler noté K) ;
- lit *mineur* : lit occupé ordinairement par un cours d'eau par opposition au lit *majeur* qui correspond à l'emprise maximale historique d'un cours d'eau ou à la plaine inondable. On parle aussi de *niveau des plus hautes eaux* (PHE) pour désigner la cote maximale atteinte par la surface libre d'un cours d'eau ;
- la berge ou rive est le talus qui sépare le lit mineur du lit majeur. Lorsque la berge est couverte par la végétation, on parle de *ripisylve* ;
- l'étiage correspond aux plus basses eaux d'un cours d'eau (généralement durant l'été). Le débit d'étiage est donc le débit minimal d'un cours d'eau. Le débit de plein bord (*bankfull discharge* en anglais) est le débit atteint lorsque la rivière sort de son lit mineur. Durant une crue, on parle de débit de pointe (*peak discharge* en anglais) pour désigner le débit maximal atteint. Pour les crues, on peut relier le débit de pointe à la *période de retour* T^2 . On parle de débit dominant est le débit de la crue ordinaire qui permet de façonner un cours d'eau. Pour les rivières à sable, le débit dominant correspond au débit de pointe d'une crue de période 1–2 ans alors que pour un lit à gravier, il correspond à crue de période de retour de quelques dizaines d'années.



2. La période de retour T est définie par rapport à la probabilité d'observer la crue (ou une crue supérieure) P : $T = 1/P$; c'est aussi l'intervalle de temps moyen entre deux crues ayant dépassant un certain seuil.

B.2 Régime permanent uniforme

B.2.1 Relation d'équilibre pour un régime permanent uniforme

Considérons un bief uniforme (section en travers uniforme, rugosité uniforme) de pente $i = \tan \theta > 0$ et un débit constant. Dans ces conditions, on peut observer un régime permanent uniforme où il y a équilibre parfait entre frottement aux parois et force motrice (gravité). La hauteur est appelée *hauteur normale*. Considérons une tranche de fluide le long du lit (sur un petit morceau de bief AB) et écrivons que toute la force de pesanteur du volume de fluide soit être entièrement repris par le frottement aux parois.

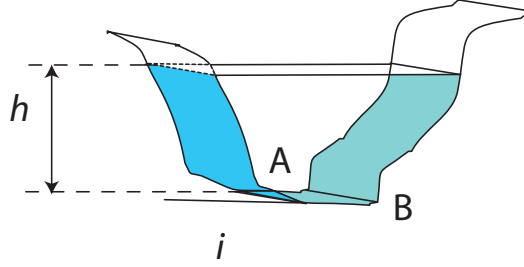


Figure B.1 : équilibre d'une tranche de fluide. La hauteur h est ici le tirant d'eau puisqu'elle correspond à la hauteur maximale d'eau dans le cours d'eau.

$$\tau_p = \rho g h \sin \theta,$$

ou de façon plus générale pour un canal de section quelconque : $\chi \tau_p = S \rho g \sin \theta$, avec χ le périmètre mouillé, ce qui donne :

$$\boxed{\tau_p = \rho g \sin \theta R_H \approx \rho g i R_H,} \quad (\text{B.1})$$

(canal de section quelconque). Pour des pentes faibles, on a $\sin \theta \approx \tan \theta = i$.

Relation avec les équations de Saint Venant : en régime permanent uniforme, les termes avec des différentielles disparaissent dans les équations (1.21-??). On a donc :

$$g \sin \theta = \frac{\tau_p}{\rho h},$$

soit encore : $\tau_p = \rho g h \sin \theta$, qui équivaut bien à la relation (B.1) dans le cas où $R_H = h$ (canal infiniment large).

Relation avec le théorème de Bernoulli :

Le théorème de Bernoulli s'écrit sur une petite tranche du bief de longueur $\delta L = dx$

$$y_\ell(A) + h(A) + \frac{\bar{u}^2(A)}{2g} = y_\ell(B) + h(B) + \frac{\bar{u}^2(B)}{2g} + \Delta H,$$

avec y_ℓ la cote du fond. Comme le régime est supposé permanent et uniforme ($\bar{u}(A) = \bar{u}(B)$ et $h(A) = h(B)$), on déduit que

$$y_\ell(A) = y_\ell(B) + \Delta H.$$

En introduit la pente $y_\ell(A) - y_\ell(B) = i dx$ et la perte de charge $\Delta H \approx dH$, on tire $i dx = dH$. On introduit la pente de la perte de charge appelée *pente de frottement* (voir ci-dessous

l'utilisation du théorème de Bernoulli): $j_f = dH/dx$, avec H la charge hydraulique. La condition d'écoulement permanent uniforme s'écrit alors :

$$i = j_f.$$

B.2.2 Loi de frottement

Plusieurs lois empiriques ont été proposées pour établir la relation entre τ_p et les variables d'écoulement $\bar{u}$ et h . Ces lois sont les équivalents des formules de pertes de charge régulières vues dans les séances précédentes.

Loi de Manning-Strickler

La loi la plus employée car valable pour une large gamme de débits et de rugosité est la loi de Manning-Strickler; la contrainte pariétale s'écrit

$$\tau_p = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_H^{1/3}}, \quad (\text{B.2})$$

avec K le coefficient de Manning-Strickler souvent relié à la rugosité du lit, par exemple la loi de Meyer-Peter³ & Müller⁴ (1948) :

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}},$$

ou bien sa variante actuelle (formule de Jäggi, 1984) :

$$K = \frac{26}{k_s^{1/6}} = \frac{23,2}{d_{90}^{1/6}},$$

où d_{90} est diamètre des gros blocs (90 % des blocs ont un diamètre plus petit que d_{90}) ; ce diamètre caractéristique sert aussi à définir une échelle caractéristique $k_s = 2d_{90}$, qui est utilisée notamment dans la formule de Keulegan. Les valeurs de K sont tabulées en fonction du type de cours d'eau :

- canal en béton lisse : $K = 65 - 90 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- canal en terre : $K = 40 - 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- rivière à galet, rectiligne, section uniforme : $K = 30 - 40 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- rivière avec méandre, sinuosité, etc. : $K = 20 - 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- rivière végétalisée ou torrent : $K = 10 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$.

3. Eugen Meyer-Peter (1883–1969) commença sa carrière comme ingénieur pour la société Zschokke à Zürich. En 1920, il fut nommé professeur d'hydraulique de l'ETHZ et créa un laboratoire d'hydraulique pour étudier expérimentalement des écoulements graduellement variés, du transport solide, de l'affouillement de fondations, etc. Les travaux les plus connus de Meyer-Peter sont ceux relatifs au transport de sédiment dans les rivières alpines, notamment la formule dite Meyer-Peter-Müller (1948) obtenue par la compilation de données expérimentales obtenues pendant 16 années à l'ETHZ.

4. Robert Müller (1908–1987) était un ingénieur hydraulicien suisse spécialisé dans le transport de sédiment et les problèmes d'érosion. Il fit l'essentiel de sa carrière au VAW de l'ETH, où il travailla notamment avec Hans Einstein et Eugen Meyer-Peter. En 1957, il démissionna et exerça une activité de conseil en hydraulique. Il s'intéressa plus particulièrement à la correction des eaux dans le canton du Jura et à la liaison des lacs de Murten, Bienne, et Neuchâtel.

Principalement dans les pays anglo-saxons, on écrit aussi K en fonction du *coefficient de Manning* n

$$K = \frac{1}{n}.$$

Notons que la formule de Manning-Strickler ne s'applique pas sur des fonds très lisses (béton lissé par exemple). On pose parfois la relation suivante

$$K < 78\bar{u}^{1/6},$$

qui fournit la borne supérieure du coefficient K en fonction de la vitesse moyenne $\bar{u}$. En pratique, cette borne supérieure se situe entre 80 et 100 m^{1/3}s⁻¹.

Loi de Darcy-Weisbach

Pour les écoulements en charge, on a employé la formule de Darcy-Weisbach. Cette formule et ses variantes peuvent également s'appliquer à l'hydraulique à surface libre, surtout dans le cas de fond relativement lisse

$$\tau_p = \varrho \frac{f}{8} \bar{u}^2, \quad (\text{B.3})$$

avec :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{k_s}{14,8 R_H} + \frac{2,51 \nu}{4 \text{Re} \bar{u} \sqrt{f}} \right),$$

(formule de Colebrook-White où l'on remplace le diamètre hydraulique par $4R_H$). Cette équation non linéaire est complexe à résoudre et on lui préfère une forme approchée :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 3,38 + 5,75 \log_{10} \frac{R_H}{d_{84}}.$$

On prendra garde que dans un certain nombre de formules de résistance (dont la loi de Darcy-Weisbach), le nombre de Reynolds est défini à partir du rayon hydraulique

$$\text{Re} = \frac{4R_H \bar{u}}{\nu},$$

car en hydraulique en charge, le nombre de Reynolds est défini à partir du diamètre hydraulique D_H et qu'on a $D_H = 4R_H$.

Loi de Chézy

La loi de Chézy est la formule historique, peu utilisée aujourd'hui si ce n'est pour obtenir des ordres de grandeur

$$\tau_p = \frac{\varrho g}{C^2} \bar{u}^2, \quad (\text{B.4})$$

avec C le coefficient de Chézy variant dans la fourchette 30–90 m^{1/2}s⁻¹ (du plus rugueux au plus lisse).

Loi de Keulegan

Pendant longtemps, on a utilisé le profil de vitesse logarithmique (en principe valable uniquement près du fond) pour décrire tout le profil de vitesse d'un écoulement hydrauliquement

turbulent dans un canal. Fondée sur cette approximation, la loi de Keulegan⁵ est une formule bien adaptée pour les écoulements sur des lits à gravier. Elle revient à supposer que la contrainte à la paroi serait similaire à celle donnée par la formule de Chézy, mais avec un coefficient $C = \sqrt{g}\kappa^{-1} \ln(11h/k_s)$ fonction de la hauteur d'eau et de la rugosité, soit encore :

$$\tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2(11h/k_s)} \rho \bar{u}^2, \quad (\text{B.5})$$

avec κ la constance de von Kármán et k_s une taille caractéristique des rugosités du lit ($k_s \approx 2d_{90}$). La formule est valable tant que le fond est suffisamment rugueux, c'est-à-dire $h/k_s < 10$. Cette formule peut se généraliser à des géométries plus complexes en substituant la hauteur h par le rayon hydraulique R_H .

Notons que de nos jours, on préfère employer une loi puissance de type Manning-Strickler plutôt qu'une loi logarithmique pour relier le coefficient de Chézy aux paramètres hydrauliques. Par exemple, pour des lits à gravier (fond mobile), la formule de Parker donne

$$C = 8,10\sqrt{g} \left(\frac{h}{k_s} \right)^{1/6},$$

qui fournit des résultats bien meilleurs que la formule de Keulegan pour des lits très rugueux ($h/k_s < 5$).

Synthèse

On en déduit facilement les différentes formules du régime permanent uniforme ; elle sont recensées dans le tableau B.1. La relation $q = f(h)$ (ou bien $\bar{u} = f(h)$) est appelée *courbe de tarage* ou bien *loi d'écoulement* ou bien encore *débitance* du canal.

Tableau B.1 : vitesse moyenne, hauteur normale, et pente de frottement selon la loi de frottement utilisée.

loi de frottement	$\bar{u}$	h_n^a	j_f
Manning-Strickler	$\bar{u} = K\sqrt{i}R_H^{2/3}$	$h_n = \left(\frac{q}{K\sqrt{i}} \right)^{3/5}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{K^2 R_H^{4/3}}$
Darcy-Weisbach	$\bar{u} = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{i} R_H^{1/2}$	$h_n = \left(q \sqrt{\frac{f}{8gi}} \right)^{2/3}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2 f(R_H)}{2g \cdot 4R_H}$
Chézy	$\bar{u} = C\sqrt{i}R_H^{1/2}$	$h_n = \left(q \frac{1}{C\sqrt{i}} \right)^{2/3}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{C^2 R_H}$

^a uniquement pour un canal infiniment large

5. Garbis Hvannes Keulegan (1890–1989) était un mécanicien américain d'origine arménienne. Il commença ses études en Turquie, puis émigra aux États-Unis pour les achever. Il fit l'essentiel de sa carrière dans le National Bureau of Standards (NBS), où il participa à la création du NBS National Hydraulic Laboratory. Ingénieur de recherche, il travailla principalement sur les écoulements turbulents stratifiés. La loi qui porte son nom date de 1938 et résultait d'une étude expérimentale des profils de vitesse pour des écoulements à surface libre dans des canaux rugueux.

B.2.3 Hauteur normale selon la section d'écoulement

Hauteur normale et courbe de tarage

La hauteur normale est la profondeur moyenne d'eau en régime permanent uniforme. Elle se calcule en égalant contrainte pariétale et contrainte motrice. Par exemple, si l'on applique une loi de type Manning-Strickler, on obtient une équation implicite pour h_n

$$Q = \bar{h}B\bar{u} = KR_H^{2/3}\sqrt{i}S,$$

(avec $S = \bar{h}B = f(h_n)$ la section d'écoulement, B la largeur au miroir, Q le débit total, $\bar{h}$ la hauteur moyenne d'eau) qui peut se résoudre explicitement dans le cas d'un canal infiniment large ($B \gg h$, soit $R_H \approx h$) :

$$h_n = \left(\frac{q}{K\sqrt{i}} \right)^{3/5},$$

avec q le débit par unité de largeur. La hauteur normale est une fonction du débit et de la pente. Elle correspond au tirant d'eau pour un canal rectangulaire ou un canal infiniment large, mais s'en distingue dans les autres cas. À pente constante, la relation $h = f(q)$ est appelée *courbe de tarage* ou de *débitance*. Sa représentation graphique se présente sous la forme d'une courbe avec deux branches :

- pour les petits débits, une relation rapide de la hauteur avec le débit ;
- quand le débit dépasse le débit de plein bord, le cours d'eau quitte son lit mineur, ce qui se traduit par une faible augmentation de la hauteur quand le débit croît.

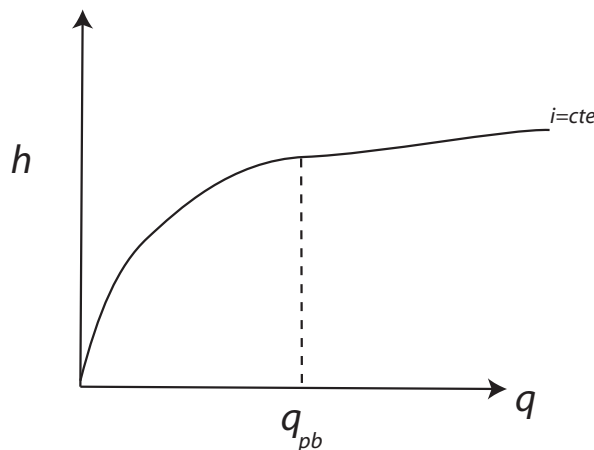


Figure B.2 : courbe de tarage.

Les géométries de canaux les plus courantes sont la section trapézoïdale (en terre pour la navigation et l'irrigation), rectangulaire (béton ou maçonnerie pour les aménagements hydrauliques), ou circulaire (en béton pour l'assainissement pluvial).

Tableau B.2 : hauteur, section, périmètre mouillé pour trois géométries usuelles.

type	circulaire	rectangulaire	trapézoïdal
h	$R(1 - \cos \delta)$	h	h
S	$R^2(\delta - \sin \delta \cos \delta)$	Bh	$(B + b)h/2$
χ	$2R\delta$	$B + 2h$	$2h/\cos \phi + b$

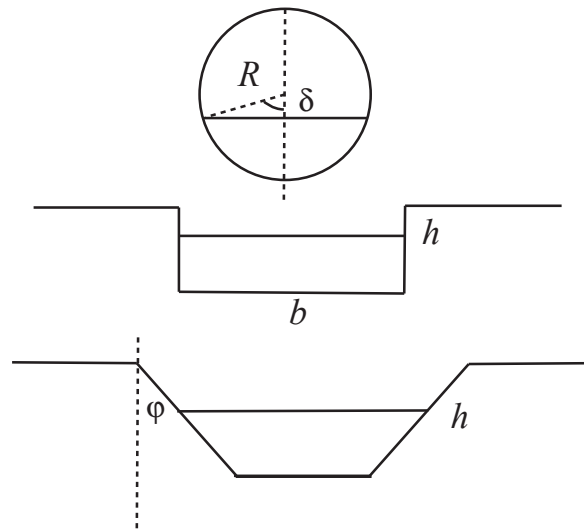


Figure B.3 : sections usuelles pour des canaux.

Granulométrie et résistance à l'écoulement

La résistance à l'écoulement est en grande partie liée à la taille des grains. Par exemple, il existe des formules empiriques donnant le coefficient de Manning-Strickler en fonction de la granulométrie telle que la formule de Meyer-Peter et Müller

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}},$$

ou ou bien la formule plus récente de Jäggi

$$K = \frac{23,2}{d_{90}^{1/6}},$$

ou encore celle de Raudkivi

$$K = \frac{24}{d_{65}^{1/6}},$$

avec d_{65} le diamètre des particules tel que 65 % (en poids) des grains du lit aient un diamètre inférieur.

La morphologie d'un chenal varie en fonction de la pente de telle sorte qu'il y ait un certain équilibre entre la pente (terme gravitaire moteur dans les équations du mouvement), le débit liquide, et le débit solide :

- Pour les rivières (naturelles) de plaine, la sinuosité du lit, la possibilité de migration des méandres, et le développement de structures morphologiques (dunes, bancs de sable) permettent d'obtenir cet équilibre moyen.
- Pour les rivières torrentielles et les torrents, cet équilibre se manifeste principalement à travers un équilibre de la section en travers et il existe une relation entre granulométrie du lit, capacité de transport, et débit dominant ; la dissipation d'énergie est variable en fonction de la composition granulométrique du lit (plus le lit est grossier, plus la dissipation d'énergie est importante) et des *structures morphologiques* (distribution régulière de seuils et de mouilles, antidune). En général, les lits composés d'éléments granulométriques variés sont pavés (*armoring* en anglais), c'est-à-dire il se forme une

couche à la surface du lit, composée d'éléments grossiers, offrant une bonne résistance à l'érosion et permettant de dissiper suffisamment d'énergie. Le pavage est généralement stable (c'est-à-dire il n'est pas « affouillé » par les petites crues), mais il peut être détruit lors de grosses crues. Pavage et structures morphologiques évoluent sans cesse soit par ajustement local (petite crue), soit par déstabilisation massive, puis restructuration ; les échelles de temps associées varient fortement :

Tableau B.3 : durée moyenne de vie T (en années) du pavage et des structures morphologiques.

<i>type</i>	<i>T</i>
pavage	1–2
seuil	20–50
alternance seuil/mouille	100–1000

B.3 Courbes de remous et écoulement critique

B.3.1 Hauteur critique et régimes associés

La hauteur croît ou décroît selon le signe respectif du numérateur et du dénominateur dans l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{j_f - i}{Fr^2 - 1}, \quad (\text{B.6})$$

ce qui donne différentes formes de courbes de remous. Notons ce point important : lorsque le nombre de Froude prend la valeur 1, le dénominateur est nul et en ce point la dérivée devient infinie, ce qui est physiquement impossible. En fait au voisinage de ce point, il se forme

- soit une discontinuité de la surface libre appelée *ressaut* qu'il faut étudier avec des outils spécifiques (cf. § B.3.2) lorsqu'on passe d'un régime super- à subcritique ;
- soit une « chute » d'eau, c'est-à-dire une accélération brutale et un raidissement de la surface libre (passage d'un seuil par exemple, avec transition d'un régime sub- à supercritique).

La pente du canal et/ou la hauteur pour lesquelles on a $Fr = 1$ s'appelle la *pente critique* et la *hauteur critique* h_c . On distingue deux régimes selon la valeur du nombre de Froude :

- $Fr < 1$, régime sub-critique plus couramment appelé *régime fluvial* pour lequel on a $h > h_c$;
- $Fr > 1$, régime super-critique plus couramment appelé *régime torrentiel* pour lequel on a $h < h_c$.

La hauteur critique étant définie comme étant $Fr(h_c) = 1$, on tire que :

$$h_c = \left(\frac{1}{g \cos \theta} \frac{Q^2}{B^2} \right)^{1/3},$$

avec Q le débit total et B la largeur au miroir. Dans le cas d'un canal rectangulaire, en introduisant le débit par unité de largeur $q = Q/B$, on tire :

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g \cos \theta} \right)^{1/3}.$$

Le débit critique ne dépend pas (directement) de la pente, mais uniquement du débit liquide.

B.3.2 Ressaut hydraulique

Au niveau d'un ressaut, la courbure de la ligne d'eau est trop importante et les équations de Saint Venant cessent d'être valables. On utilise alors le théorème de quantité de mouvement de part et d'autre du ressaut (sur un volume de contrôle) pour simplifier le problème et déduire les caractéristiques du ressaut. Pour cela on considère un volume de contrôle (par unité de largeur) de part et d'autre du ressaut. Notons que l'écoulement va de la gauche vers la droite et il faut se souvenir que dans ce sens d'écoulement, un ressaut provoque une augmentation de hauteur, jamais une diminution (en effet le ressaut est associé à une dissipation d'énergie, donc à un ralentissement de l'écoulement). La tranche amont (resp. aval) est référencée par l'indice 1 (resp. 2). La longueur du volume de contrôle est L .

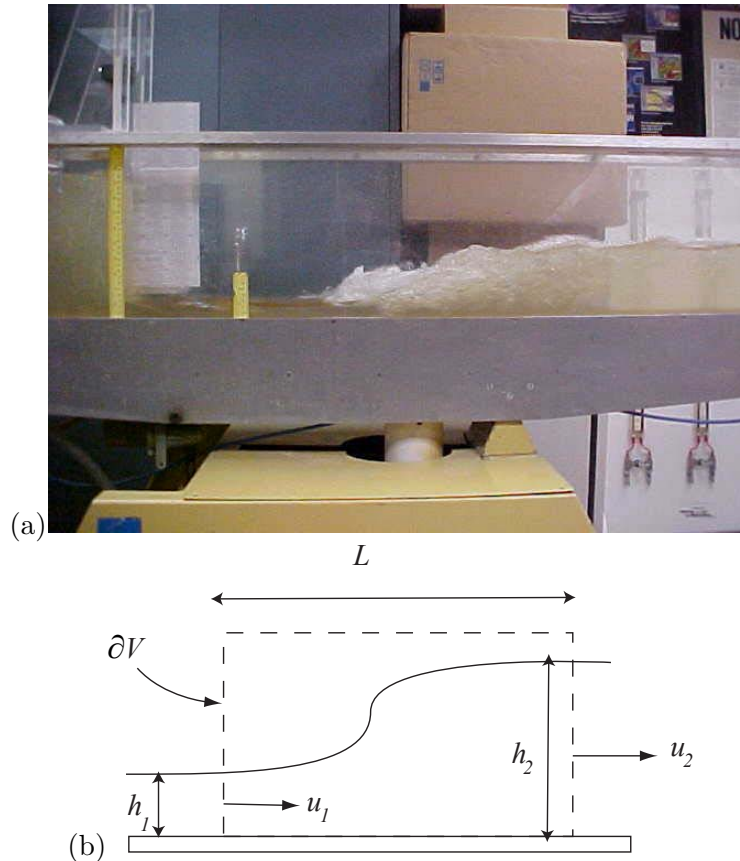


Figure B.4 : simulation d'un ressaut au laboratoire (a) et schématisation d'un ressaut (b).

On fait les hypothèses suivantes

- l'écoulement est permanent et le débit par unité de largeur vaut q ;
- l'écoulement est unidirectionnel ;
- le ressaut est immobile (sa vitesse de déplacement est nulle) ;
- la pression est hydrostatique loin du ressaut ;
- le profil de vitesse est uniforme ;
- le fond est peu rugueux.

On considère un volume de contrôle dont les frontières englobent le ressaut.

- L'équation de continuité donne : $u_1 h_1 = u_2 h_2 = q$.

– L'équation de quantité de mouvement

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_{\partial V} p \mathbf{n} dS + \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS$$

projetée le long de la direction d'écoulement donne :

$$\rho q(u_2 - u_1) = -L\tau_p + \frac{1}{2}\rho g(h_1^2 - h_2^2).$$

On suppose que l'on connaît les conditions à l'amont et on veut déduire ce qui se passe à l'aval. Quand on peut négliger le frottement τ_p , on tire :

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right)}. \quad (\text{B.7})$$

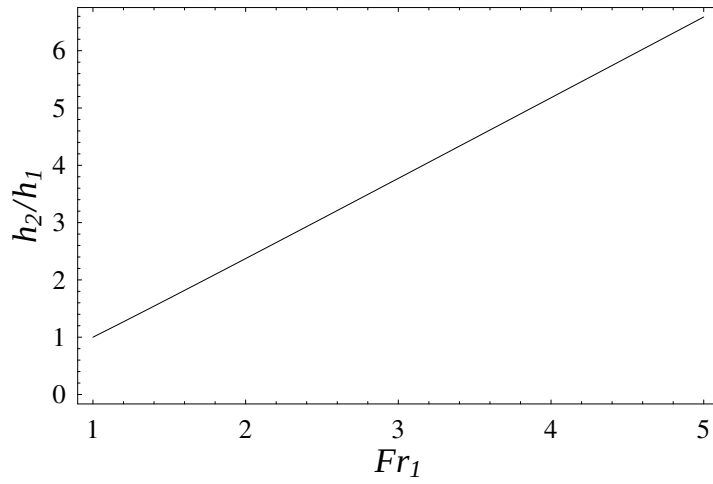


Figure B.5 : variation du rapport h_2/h_1 en fonction du nombre de Froude.

La figure B.5 montre que le rapport h_2/h_1 varie de façon à peu près linéaire avec le nombre de Froude amont Fr_1 .

L'équation (B.7) s'appelle *équation de conjugaison* et les hauteurs h_1 et h_2 sont dites *conjuguées*. La perte de charge associée s'écrit :

$$\boxed{\Delta H = H_2 - H_1 = h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2} = h_1 \frac{\left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 3 \right)^3}{16 \left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right)}}.$$

La longueur du ressaut n'est en général pas très élevée, ce qui permet de justifier notre approximation. Expérimentalement on trouve que :

$$\frac{L}{h_1} = 160 \tanh \frac{\text{Fr}}{20} - 12,$$

pour $2 < \text{Fr} < 16$.

Bibliographie

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. 1964 *Handbook of Mathematical Functions*. Washington: National Bureau of Standards.
- ALCRUDO, F. & BENKHALDOUN, F. 2001 Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step. *Computers & Fluids* **30**, 643–671.
- ANCEY, C. & COCHARD, S. 2009 The dam-break problem for Herschel-Bulkley fluids down steep flumes. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **158**, 18–35.
- ANCEY, C., IVERSON, R., RENTSCHLER, M. & DENLINGER, R. P. 2008 An exact solution for ideal dam-break floods on steep slopes. *Water Resources Research* **44**, W01430.
- BALMFORTH, N., VON HARDENBERG, J., PROVENZALE, A. & ZAMMETT, R. 2008 Dam breaking by wave-induced erosional incision. *Journal of Geophysical Research* **113**, F01020.
- BISCHOF, R., HAUENSTEIN, W., KALT, L., MÜLLER, R., POUGATSCH, H., RABOUD, P.-B. & VETTERLI, W. 2002a Sécurité des barrages d'accumulation. *Tech. Rep.*. Bundesamt für Wasser und Geologie.
- BISCHOF, R., HAUENSTEIN, W., KALT, L., MÜLLER, R., POUGATSCH, H., RABOUD, P.-B. & VETTERLI, W. 2002b Sécurité des barrages d'accumulation – Documentation de base relative aux critères d'assujettissement. *Tech. Rep.*. Bundesamt für Wasser und Geologie.
- CLAGUE, J. & EVANS, S. 2000 A review of catastrophic drainage of moraine-dammed lakes in British Columbia. *Quaternary Science Reviews* **19**, 1763–1783.
- COSTA, J. & SCHUSTER, R. 1988 The formation and failure of natural dams. *Geological Society of America Bulletin* **100**, 1054–1068.
- COURANT, R. & FRIEDRICH, K. 1948 *Supersonic Flow and Shock Waves*. New York: Intersciences Publishers.
- DENT, J. & LANG, T. 1983 A biviscous modified Bingham model of snow avalanche motion. *Annals of Glaciology* **4**, 42–46.
- DIDDEN, N. & MAXWORTHY, T. 1982 The viscous spreading of plane and axisymmetric gravity currents. *Journal of Fluid Mechanics* **121**, 27–42.
- DRAZIN, P. & JOHNSON, R. 1996 *Solitons: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- DRESSLER, R. 1958 Unsteady non-linear waves in sloping channels. *Proceedings of the Royal Society of London series A* **247**, 186–198.
- EVETTE, A., PEYRAS, L. & LAIGLE, D. 2009 *Risques et impacts des retenues d'altitude*. Versailles: Éditions Quæ.
- FRANCA, M., FERREIRA, R. M. L., AMARAL, S. & MONTENEGRO, H. 2007 The failure of the Fonta Santa mine tailing dam (Northeast Portugal). In *River, Coastal and Estuarine Morphodynamics* (ed. C. Dohmen-Janssen & S. Hulscher), pp. 1153–1160. University of Twente, Enschede: Taylor & Francis Group.
- FRITZ, H. M., HAGER, W. H. & MINOR, H.-E. 2003a Landslide generated impulse waves. 1. Instantaneous flow fields. *Experiments in Fluids* **35**, 505–519.
- FRITZ, H. M., HAGER, W. H. & MINOR, H.-E. 2003b Landslide generated impulse waves. 2. Hydrodynamic impact crater. *Experiments in Fluids* **35**, 520–532.

- GARABEDIAN, P. 1964 *Partial Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.
- GRATTON, J. & MINOTTI, F. 1990 Self-similar viscous gravity currents: phase-plane formalism. *Journal of Fluid Mechanics* **210**, 155–182.
- GRAY, J. 2001 Granular flow in partially filled slowly rotating drums. *Journal of Fluid Mechanics* **441**, 1–29.
- GRUNDY, R. & McLAUGHLIN, R. 1982 Large-time solution of a nonlinear diffusion equation. *Proceedings of the Royal Society of London series A* **381**, 395–406.
- HARTEN, A., LAX, P. & VAN LEER, B. 1983 On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review* **25**.
- HEINRICH, P. 1992 Nonlinear water waves generated by submarine and aerial landslides. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **118**, 249–266.
- HELLER, V. 2007 Landslide generated impulse waves: prediction of near-field characteristics. Phd thesis, ETHZ.
- HELLER, V., HAGER, W. H. & MINOR, H.-E. 2008a Rutscherzeugte Impulswellen in Stauseen – Grundlagen und Berechnung. *Tech. Rep.* VAW 4257. Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie VAW, ETH Zürich – Bundesamt für Energie.
- HELLER, V., HAGER, W. H. & MINOR, H.-E. 2008b Scale effects in subaerial landslide generated impulse waves. *Experiments in Fluids* **44**, 691–703.
- HOGG, A. 2006 Lock-release gravity currents and dam-break flows. *Journal of Fluid Mechanics* **569**, 61–87.
- HOGG, A. & PRITCHARD, D. 2004 The effects of hydraulic resistance on dam-break and other shallow inertial flows. *Journal of Fluid Mechanics* **501**, 179–212.
- HUBBARD, B., HEALD, A., REYNOLDS, J., QUINCEY, D., RICHARDSON, S., ZAPATA LUYO, M., PORTILLA, N. & HAMBREY, M. 2005 Impact of a rock avalanche on a moraine-dammed proglacial lake: Laguna Safuna Alta, Cordillera Blanca, Peru. *Earth Surface Processes and Landforms* **30**, 1251–1264.
- HUBER, A. 1980 Schwallwellen in Seen aus Folge von Felsstürzen. *Tech. Rep.* Mitteilung 47. VAW, Eidg. Tech. Hochsch.
- HUBER, A. 1982 Felsbewegungen und Uferabbrüche an Schweizer Seen, ihre Ursachen und Auswirkungen. *Eclogae Geologicae Helvetiae* **75**, 563–578.
- HUBER, A. & HAGER, W. H. 1997 Forecasting impulse waves in reservoirs. In *19ème Congrès des Grands Barrages*, pp. C.31 : 993–1005. Florence: ICOLD, Paris.
- HUNT, B. 1983 Perturbation solution for dam-break floods. *Journal of Hydraulic Engineering* **110**, 1053–1071.
- HUNT, B. 1987 A perturbation solution of the flood-routing problem. *Journal of Hydraulic Research* **25**, 215–237.
- HUNT, B. 1994 Newtonian fluid mechanics treatment of debris flows and avalanches. *Journal of Hydraulic Engineering* **120**, 1350–1363.
- HUPPERT, H. 1982a Flow and instability of a viscous current down a slope. *Nature* **300**, 427–429.
- HUPPERT, H. 1982b The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface. *Journal of Fluid Mechanics* **121**, 43–58.
- KARELSKY, K., PAPKOV, V., PETROSYAN, A. & TSYGANKOV, D. 2000a The initial discontinuity decay problem for shallow water equations on slopes. *Physics Letters A* **271**, 349–357.
- KARELSKY, K., PAPKOV, V., PETROSYAN, A. & TSYGANKOV, D. 2000b Particular solutions of shallow-water equations over a non-flat surface. *Physics Letters A* **271**, 341–348.

- KERT, C. 2008 Amélioration de la sécurité des barrages et ouvrages hydrauliques. *Tech. Rep.* 454. Office parlementaire d'évaluation des choix scientifiques et technologiques.
- KEVORKIAN, J. 2000 *Partial Differential Equations, Analytical Solution Techniques*. New York: Springer.
- KORUP, O. & TWEED, F. 2006 Ice, moraine, and landslide dams in mountainous terrain. *Quaternary Science Reviews* **26**, 3406–3422.
- LAPOINTE, M., SECRETAN, Y., DRISCOLL, S., BERGERON, N. & LECLERC, M. 1998 Response of the Ha! Ha! River to the flood of July 1996 in the Saguenay Region of Quebec: Large-scale avulsion in a glaciated valley. *Water Resources Research* **34**, 2383–2392.
- LEVEQUE, R. 2002 *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MANGENEY, A., HEINRICH, P. & ROCHE, R. 2000 Analytical solution for testing debris avalanche numerical models. *Pure and Applied Geophysics* **157**, 1081–1096.
- MARCHE, C. 2008 *Barrages, crues de rupture et protection civile*. Montréal: Presses internationales polytechniques.
- MARCHE, C. & ORIAC, A. 2005 Évaluation des conséquences de rupture d'un barrage : calculs détaillés ou méthode simplifiée? *Canadian Journal of Civil Engineering* **32**, 543–552.
- MEI, C. 1966 Nonlinear gravity waves in a thin sheet of viscous fluid. *Journal of Mathematics and Physics* **45**, 266–288.
- MÉRIAUX, P., PEYRAS, L. & GIRARD, H. 2005 Sécurité et durabilité des barrages d'altitude pour la production de neige de culture: état des lieux du parc existant et élaboration d'outils visant à améliorer la conception, la réalisation et l'entretien des ouvrages. *Tech. Rep.*. Cemagref.
- MONTANDON, F. 1925 Les éboulements de la Dent du Midi et du Grammont. *Le Globe* **64**, 35–91.
- NAKAYA, C. 1974 Spread of fluid drops along a horizontal plane. *Journal of the Physical Society of Japan* **37**, 539–543.
- NODA, E. 1970 Water waves generated by landslides. *Journal of the Waterway and Harbors Division: Proceedings of the American Society of Civil Engineers* **96**, 835–855.
- OSTAPENKO, V. 2003a Dam-break flows over a bottom drop. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **44**, 839–851.
- OSTAPENKO, V. 2003b Dam-break problem over a bottom step. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **44**, 495–505.
- PANIZZO, A., DE GIROLAMO, P., DI RISIO, M., MAISTRI, A. & PETACCIA, A. 2005a Great landslide events in Italian reservoirs. *Natural Hazards and Earth System Sciences* **5**, 733–740.
- PANIZZO, A., DE GIROLAMO, P. & PETACCIA, A. 2005b Forecasting impulse wave generated by subaerial landslides. *Journal of Geophysical Research* **110**, C12025.
- PEYRAS, L. & MÉRIAUX, P., ed. 2009 *Retenues d'altitude*. Versailles: Quæ éditions.
- RITTER, A. 1892 Die Fortpflanzung der Wasserwellen. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* **36** (33), 947–954.
- ROE, P. 1981 Approximate Riemann solvers, parameters vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics* **44**, 357–372.
- SMOLLER, J. 1982 *Shock waves and reaction-diffusion equations*. New York: Springer.
- STOKER, J. 1957 *Water Waves*. New York: Interscience Publishers.
- TORO, E. 1997 *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Berlin: Springer.
- TORO, E. 2001 *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Chichester: Wiley.

- TORO, E. & GARCIA-NAVARRO, P. 2007 Godunov-type methods for free-surface shallow flows: A review. *Journal of Hydraulic Research* **45**, 736–751.
- TROWBRIDGE, J. 1987 Instability of concentrated free surface flows. *Journal of Geophysical Research* **C 92**, 9523–9530.
- VISCHER, D. & HAGER, W. H. 1998 *Dam Hydraulics*. Chichester: John Wiley & Sons.
- VISENTINI, M. 1936 Ecoulement d'un barrage sur l'Orba, en Italie, le 13 août 1935. *Revue de Géographie Alpine* **24**, 381–393.
- WALDER, J., WATTS, P., SORENSEN, O. & JANSSE, K. 2003 Tsunamis generated by subaerial mass flows. *Journal of Geophysical Research* **108** (B12), 2563.
- WATTS, P. 2000 Tsunami features of solid block underwater landslides. *Journal of Waterway, Port Coastal Ocean Engineering* **126**, 144–152.
- WEISS, R., FRITZ, H. & WÜNNEMANN, K. 2009 Hybrid modeling of the mega-tsunami runoff in Lituya Bay after half a century. *Geophysical Research Letters* **36**, L09602.
- WHITHAM, G. 1954 The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem. *Proceedings of the Royal Society of London series A* **227**, 399–407.
- WU, C., HUANG, G. & ZHENG, Y. 1999 Theoretical solution of dam-break shock wave. *Journal of Hydraulic Engineering* **125**, 1210–1220.
- ZAUDERER, E. 1983 *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- ZWEIFEL, A., HAGER, W. H. & MINOR, H.-E. 2006 Plane impulse waves in reservoirs. *Journal of Waterway, Port Coastal Ocean Engineering* **132**, 358–368.

Index

- adjoint, 286
- aggradation, 23
- Airy, 231
- algorithme
 - de Thomas, 122
- angle
 - de Kelvin, 234
- approximation de Padé, 193
- arc
 - spatial, 103
 - temporel, 103
- assurance, 217
- auto-similarité, 55, 162

- barrage, 22, 145, 216, 219
 - classification, 151
 - petit, 152
- berge, 292
- bief, 291
- brèche, 147

- célérité, 23
- caractéristique, 98, 284
- catastrophe
 - naturelle, 217
- cellule convectif, 216
- champ, 263
- champ caractéristique, 92
- changement de variable, 65
- charge, 149
- charge hydraulique, 294
- charriage, 218
- choc, 35, 48, 50, 72, 104, 257
- chute, 299
- coefficient
 - de Boussinesq, 21
 - de frottement, 294
- condition
 - adhérence, 16
 - aux limites, 16, 37, 47, 97
 - aux limites de Dirichlet, 37, 48
 - aux limites de Neuman, 37, 49
 - aux limites mixte, 49
 - CFL, 127
 - choc, 97, 101
- Courant-Friedrichs-Lewy, 127
- d'entropie, 95
- de Courant, 133, 201, 208
- de dégénérescence, 82, 92
- de détente, 86
- de Lax, 76
- de Rankine-Hugoniot, 72, 81, 95
- initiales, 33, 37
- non-pénétration, 16
- saut, 85
- conservation
 - système conservatif, 62
- contrôle, 234
- contrainte, 12
- contrainte pariétale, 191
- convection, 39, 42
- coordonnée
 - caractéristique, 284
- coordonnées
 - cartésiennes, 263
 - cylindriques, 263
 - sphériques, 263
- couche
 - limite, 17
- courbe
 - caractéristique, 66, 72, 284
 - de Hugoniot, 79
- courbe caractéristique, 205
- crue, 215
 - éclair, 216
 - torrentielle, 218

- débit
 - d'étiage, 292
 - de pointe, 292
 - dominant, 292
- débitance, 296
- déposition, 23
- dérivée
 - matérielle, 277
 - particulaire, 277
 - partielle, 269
- déterminant, 267
- développement
 - de Taylor, 119

- différentielle
 - exacte, 271
- différentielle totale, 270
- diffusion, 39, 42
- digue, 156
- discontinuité, 257
- domaine d'influence, 48
- eau blanche, 237
- énergie
 - interne, 13
 - interne massique, 13
- équation
 - caractéristique, 36, 39, 60
 - d'Airy, 231
 - d'Euler, 12, 17
 - d'Euler-Darboux, 106
 - d'Euler-Lagrange, 38
 - d'Exner, 23
 - de Benjamin-Bona-Mahony, 240
 - de Bernoulli, 33, 233
 - de Boussinesq, 107, 240
 - de Buckley-Leverett, 76
 - de Burgers, 43
 - de Cauchy, 12
 - de conjugaison, 301
 - de continuité, 11
 - de convection, 39
 - de diffusion, 39, 120
 - de diffusion non linéaire, 39
 - de Froehlich, 148
 - de Helmholtz, 106
 - de Huppert, 108
 - de Klein-Gordon, 106
 - de Korteweg-de-Vries, 240
 - de l'énergie cinétique, 15
 - de la chaleur, 39, 46, 120, 281
 - de la courbe de remous, 33
 - de Laplace, 46, 231, 232, 281
 - de Navier-Stokes, 12, 13, 15, 16, 18, 159
 - de Newton, 13
 - de Pascal, 33
 - de Rankine-Hugoniot, 12
 - de Saint-Venant, 18, 19, 22, 84, 107, 111, 136, 171, 175, 225, 238, 247
 - de Stokes, 17
 - des ondes, 44, 281
 - du mouvement, 16
 - elliptique, 35, 282
 - homogène, 35
 - hyperbolique, 35, 282
 - linéaire, 33
 - parabolique, 35, 282
 - quasi-linéaire, 33
 - variationnelle, 38
- facteur de Boussinesq, 191
- facteur intégrant, 66
- fluide
 - newtonien, 12
 - non newtonien, 12
 - parfait, 12, 17
 - simple, 12
- flux de chaleur, 13
- fonction
 - de Riemann, 179, 287
- fonctionnelle, 38
- forme
 - canonique, 35, 282
 - caractéristique, 21, 36
 - conservative, 21
 - eulérienne, 199
 - lagrangienne, 199
 - non conservative, 21
- formule
 - de Colebrook, 295
 - de Jäggi, 294
 - de Kleitz-Seddon, 227
 - de Leibniz, 9
 - de Meyer-Peter, 294
 - de Parker, 296
- fréquence, 44
- front, 117, 168
- frontière
 - spatiale, 48, 50
 - temporelle, 48, 50
- glissement, 16
- Green, 40
- harmonique, 44
- hauteur
 - critique, 299
 - d'écoulement, 291
 - normale, 291, 293, 297
- hodographe, 53
- houle, 234, 240, 247
- hyperbolique
 - équation hyperbolique, 61
- inondation, 215, 216

- instabilité, 237
- intégrale
 - première, 36
- invariance, 53, 55
- invariant
 - de Riemann, 65, 66, 93, 103, 173, 175
 - invariant de Riemann, 86, 92, 98
- jökulhlaup, 154
- lac, 154, 217, 219
 - morainique, 148, 154
- lahar, 219
- lave torrentielle, 218
- lit
 - majeur, 292
 - mineur, 292
 - mouillé, 188
- loi
 - d'écoulement, 294
 - de Chézy, 227, 239, 294–296
 - de comportement, 12, 15
 - de conservation, 62
 - de Darcy, 46
 - de Darcy-Weisbach, 294–296
 - de frottement, 294
 - de Keulegan, 296
 - de Manning-Strickler, 227, 294, 296
 - de tarage, 294
- longueur
 - d'onde, 44
- méthode
 - étape fractionnaire, 140
 - asymptotique, 55
 - auto-similaire, 212
 - aux éléments finis, 119
 - aux différences finies, 119
 - aux perturbations, 54
 - aux volumes finis, 119, 123
 - de Fromm, 142
 - de Green, 53
 - de l'hodographe, 53, 101
 - de Pohlhausen, 191
 - des caractéristiques, 173, 177, 204
 - hodographe, 68
 - Lax-Wendroff, 141
 - TVD, 117
- maillage, 117
- marée, 240
- mascaret, 74, 225, 253, 257
- matrice, 263
- minmod, 142
- mouvement de terrain, 219
- nabla, 273
- nappe, 217
- nombre
 - d'onde, 44
 - d'Ursell, 240
 - de Froude, 20, 23, 239, 291
 - de Froude critique, 234
 - de Reynolds, 20
 - nombre de Froude, 260
- non-glissement, 16
- non-pénétration, 16
- onde, 44
 - capillaire, 240
 - cinématique, 173, 225, 227
 - cnoïdale, 240, 243, 253
 - compression, 100
 - contact, 96, 98
 - courte, 240
 - d'impulsion, 222, 251
 - détente, 98, 100
 - de choc, 75, 77, 81, 95, 98, 225
 - de crue, 227
 - de détente, 75, 95
 - de gravité, 231
 - de Stokes, 243, 253
 - de surface, 231
 - dynamique, 44, 225
 - gravitaire, 240
 - linéaire, 242
 - longue, 240
 - mixte, 76, 92
 - plane, 251, 253
 - progressive, 44, 45, 100
 - régressive, 45, 100
 - simple, 75, 77, 81, 94, 100, 101, 103, 173, 175, 177
 - simple centrée, 82, 173
 - solitaire, 240, 244
 - soliton, 240
 - transsonique, 131
- opérateur
 - adjoint, 286
 - déterminant, 267
 - divergence, 275
 - gradient, 273

- laplacien, 31, 276
- trace, 267
- ordre, 33, 35, 117
- périmètre mouillé, 291
- période, 44
- pente
 - critique, 299
 - de frottement, 294
- perte de charge
 - d'un ressaut, 301
 - régulière, 294
- poche glaciaire, 219
- potentiel
 - gravitaire, 12
- pression
 - généralisée, 13
- principe
 - de la thermodynamique, 13
 - Hamilton, 38
 - variationnel, 38
- problème
 - de Cauchy, 48, 284
 - de Green, 40
 - de Riemann, 74, 78, 82
- produit
 - dyadique, 266
 - mixte, 267
 - scalaire, 265
 - simplement contracté, 265
 - tensoriel, 11, 266
 - tensoriel doublement contracté, 267
 - vectorel, 265
- régime
 - diffusif, 161
 - diffusif-convectif, 161
 - fluvial, 234, 291, 299
 - graduellement varié, 291
 - gravitaire, 166
 - permanent, 291
 - rapidement varié, 291
 - torrentiel, 234, 291, 299
 - uniforme, 291
- Rankine-Hugoniot, 98
- relation
 - de dispersion, 44
 - de Rankine-Hugoniot, 257
- remontée de nappe, 217
- renard, 145
- ressaut, 13, 85, 225, 257, 291, 299, 300
- ripisylve, 292
- rivière, 291
- rivière torrentielle, 291
- roll wave, 237
- runup, 256
- rupture
 - barrage, 143
 - cause, 145
 - de barrage, 175
 - digue, 156
 - graduelle, 147
 - instantanée, 147
- rupture de barrage, 111, 219
- séparation des variables, 53
- scalaire, 263
- schéma
 - amont, 127
 - bien équilibré, 117
 - de Crank-Nicolson, 122
 - de Godunov, 128
 - explicite, 120
 - Godunov, 133
 - implicite, 122
 - Lax-Friedrichs, 125
 - Lax-Wendroff, 141
 - stable, 119
- section d'écoulement, 291
- seiche, 154, 217
- similitude, 60
- solitaire, 244
- soliton, 240, 253
- solution
 - auto-similaire, 55, 60, 162, 172, 212
 - d'Alembert, 45, 48
 - de Hogg, 194
 - de Barrenblatt-Pattle, 162
 - de Huppert, 162
 - de Ritter, 171
 - faible, 62, 288
 - régulière, 288
 - similaire, 60
 - singulière, 36
- solveur
 - HLL, 137
 - Roe, 134
- source, 61, 99, 111, 140
- stabilité, 119
 - numérique, 201

- système
 - caractéristique, 66
 - conservatif, 62
 - hyperbolique, 61
 - linéaire, 65
 - non linéaire, 65
- tenseur, 263
 - des contraintes, 12
 - des extra-contraintes, 12
- terme source, 140
- théorème
 - Bernoulli généralisé, 15
 - de Bernoulli, 17
 - de l'énergie cinétique, 13
 - de Reynolds, 10
 - de Schwarz, 271
 - de transport, 9
- théorie
 - d'Airy, 231, 240, 242
- tirant d'eau, 291
- torrent, 291
- trace, 267
- train d'onde, 237
- transformée
 - de Laplace, 41
- transformation
 - de Cole-Hopf, 43
- transport solide, 23
- tsunami, 217, 240, 247
- vague, 221, 225
 - d'impulsion, 251
- variable
 - dépendante, 35
 - de Riemann, 62, 64–66, 173
 - indépendante, 35
- vecteur, 263
 - propre, 77
- vitesse
 - de groupe, 44
 - de l'onde, 44
 - de phase, 44
- vitesse caractéristique, 72
- volume
 - de contrôle, 10
 - matériel, 10
- zone vide, 111