Mécanique des Fluides I

Examen 2007

22 février 2007

Remarques à lire absolument

a) Commencez chaque exercice sur une nouvelle feuille A4.

b) Ecrivez vos noms et prénoms sur chaque nouvelle feuille.

c) Rendez toutes les feuilles de données.

d) Pour chaque exercice agrafez vos notes à la table de résultats correspondante.

e) Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les exercices y figure !

f) Précisez les hypothèses que vous faites au départ.

g) Dans les simplifications de vos équations, précisez quelles hypothèses ou équations vous permettent de faire disparaître des termes.

h) L'examen comporte 4 exercices. **Aucun** support n'est autorisé pour le premier exercice à l'exception d'un aide mémoire d'une page.

i) Le premier exercice se déroule de 14 :00 à 14 :30. Les trois suivants de 14 :45 à 18 :00.

j) Bon courage

Exercice 1 : Modèle réduit du port de Morges

La jetée couvrant la rade d'un port est exposée à un système de vagues venant du large et ayant pour période T_1=7.5s. Afin d'étudier le comportement de cette jetée, on réalise une maquette au 1/20. Quelle période T_2 doit-on donner au système de vagues artificiellement produit pour réaliser la similitude dynamique ?

Réponses : Nom, Prénom :

Hypothèses de départ	
Période T_2 analytique	
Période T_2 numérique	

Tab. 1 – Réponses exercice 1

Exercice 2 : Mais où va-t-il ?

Deux jets liquides 1 et 2, de même masse volumique ρ se mélangent pour former un jet unique 3. Les vitesses v_1 et v_2 ainsi que les débits-masses $\dot{M}_1$ et $\dot{M}_2$ sont connus.

Déterminer l'angle θ que fait le jet 3 avec l'axes x_1, ainsi que sa vitesse.

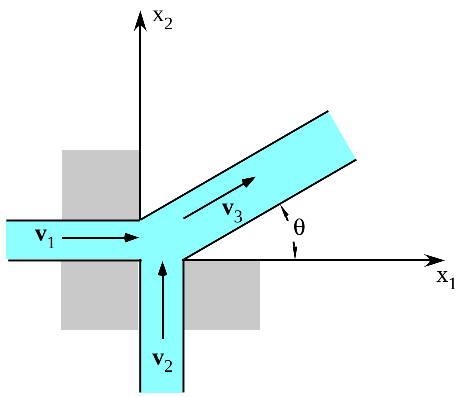

FIG. 1 – Rencontre de deux jets pour en former un troisième

Réponses : Nom, Prénom :

Hypothèses de départ	
Angle θ	
Vitesse v_3	

TAB. 2 – Réponses exercice 2

Exercice 3 : Poids variable ?

Un container métallique de 0.6m de haut et de section 0.1 m^2 a une masse de 2.5 kg à vide. Il est placé sur une balance et de l'eau s'écoule par les ouvertures 1, 2 et 3. En régime permanent, la hauteur de l'eau dans le réservoir est de 57 cm. Déterminer la lecture faite sur la balance.

On donne,

a) $P_1 = P_2 = P_3 = P_0$, la pression atmosphérique

b) $S_1 = S_2 = S_3 = 0.01\ m^2$

c) $|\vec{v_1}| = 6\ ms^{-1}$

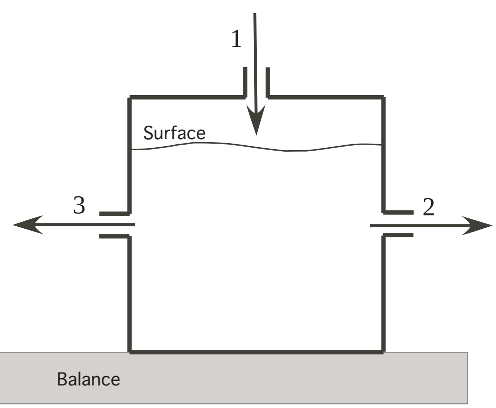

FIG. 2 – Container

Réponses : Nom, Prénom :

Hypothèses de départ	
Force appliquée sur la balance (résultat analytique)	
Lecture balance (résultat numérique)	

TAB. 3 – Réponses exercice 3

Exercice 4 : Rhéomètre, la cellule de Couette

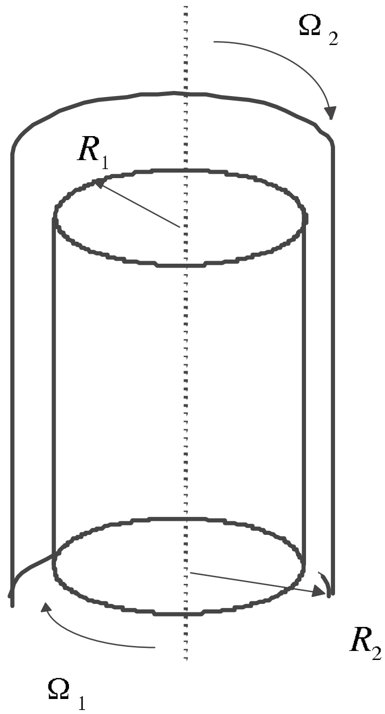

FIG. 3 – Schéma d'une cellule de Couette

On se propose de mesurer expérimentalement la viscosité d'un fluide newtonien. Pour ce faire on dispose d'un rhéomètre muni d'une géométrie de type Couette (cf. Fig. 3). Il s'agit en fait de deux cylindres concentriques de hauteur h entre lesquels se trouve le fluide. Le cylindre intérieur de rayon R_1 est en rotations à vitesse angulaire constante Ω_1, tandis que le cylindre extérieur de rayon R_2 est fixe ($\Omega_2 = 0$). Pour entretenir la rotation on applique un couple C constant sur le cylindre intérieur. L'entrefer entre les cylindres R_1 et R_2 est petit.
On suppose que l'écoulement engendré est circulaire et le champ de vitesse est donné par :

$$\begin{aligned} u_r &= 0 \\ u_\theta &= u_\theta(r) = \alpha r + \beta \frac{1}{r} \\ u_z &= 0 \end{aligned}$$

Hypothèse :

- On néglige la gravité.
- On néglige les effets de bord en haut et en bas du cylindre

a) Justifiez dans quel système de coordonnées vous allez travailler ?
b) Sommes-nous en régime stationnaire ?
c) Calculez α et β pour vérifier les conditions de non-glissement aux parois.
d) En utilisant les équations du formulaire annexé, calculez le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ dans cet écoulement en fonction de R_1, R_2 et Ω_1.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{rr} & D_{r\theta} & D_{rz} \\ D_{\theta r} & D_{\theta\theta} & D_{\theta z} \\ D_{zr} & D_{z\theta} & D_{zz} \end{pmatrix}$$

e) En intégrant la contrainte de cisaillement $T_{r\theta}$ sur le cylindre intérieur sur la surface du cylindre intérieur déterminez $T_{r\theta}$ en fonction du couple C exercé sur le cylindre intérieur R_1
f) Calculer ensuite la viscosité η $\left(\eta = \frac{T_{r\theta}}{2D_{r\theta}}\right)$ en fonction de C, R_1, R_2 et Ω_1.
g) Dans cet écoulement **newtonien**, calculez ensuite en utilisant c) le tenseur des extra-contraintes $\mathbf{T}$ et le tenseur des contraintes de Cauchy $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{rr} & \Sigma_{r\theta} & \Sigma_{rz} \\ \Sigma_{\theta r} & \Sigma_{\theta\theta} & \Sigma_{\theta z} \\ \Sigma_{zr} & \Sigma_{z\theta} & \Sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

h) En utilisant le résultat d) et g), simplifiez les équations de la conservation de quantité de mouvement dans le système de coordonnées que vous avez choisi. (**!!! justifiez TOUS les termes que vous faites disparaître**)
Admettez que $\frac{u_\theta^2}{r}$ est négligeable et que la pression p n'est pas une fonction de θ.
Vérifier en remplaçant $T_{r\theta}$ que les équations sont consistantes, ce qui revient à dire que le profile de vitesse supposé dans la donnée était bon.
i) Comme les cylindres ont une longueur finie (h), pensez-vous que cela engendre des effets de bord ? Commentez.

Réponses exercice 4 : Nom, Prénom :

système de coordonnées	
Régime stationnaire θ	
α et β	
tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$	
$\mathbf{T_{r\theta}} = f(C, ...)$	
viscosité $\eta = g(C, ...)$	
tenseur des extra-contraintes $\mathbf{T}$	
tenseur des contraintes $\mathbf{\Sigma}$	
équation de la conservation de la quantité de mouvement	
effet des bords	

Conservation de la masse et de la quantité de mouvement

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) = \nabla\cdot\mathbf{\Sigma}+\rho\mathbf{g} \tag{2}$$

$$= -\nabla p+\nabla\cdot\mathbf{T}+\rho\mathbf{g} \tag{3}$$

coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}+\rho g_x \tag{5}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}+\rho g_y \tag{6}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\rho g_z \tag{7}$$

coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(rT_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}-\frac{T_{\theta\theta}}{r}+\rho g_r \tag{9}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2T_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}+\rho g_\theta \tag{10}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(rT_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\rho g_z \tag{11}$$

coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2u_r)}{\partial r}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(sin\theta u_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} = 0 \tag{12}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{rsin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}-\frac{u_\theta^2+u_\phi^2}{r}\right) \tag{13}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2T_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(T_{r\theta}sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial\phi}-\frac{T_{\theta\theta}+T_{\phi\phi}}{r}+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{rsin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}+\frac{u_\theta u_r}{r}-\frac{u_\phi^2}{r}cot\theta\right) \tag{14}$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial(r^3T_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(T_{\theta\theta}sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial\phi}-\frac{T_{\phi\phi}}{r}cot\theta+\rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\phi}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{rsin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_\phi u_r}{r}+\frac{u_\phi u_\theta}{r}cot\theta\right) \tag{15}$$

$$= -\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial(r^3T_{r\phi})}{\partial r}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(T_{\theta\phi}sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial\phi}+\frac{T_{\theta\phi}}{r}cot\theta+\rho g_\phi$$

Tenseur des taux de déformation $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right)$

coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$D_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{16}$$
$$D_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{17}$$
$$D_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{18}$$
$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{19}$$
$$D_{xz} = D_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tag{20}$$
$$D_{yz} = D_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \tag{21}$$

coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$D_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{22}$$
$$D_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) \tag{23}$$
$$D_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{24}$$
$$D_{r\theta} = D_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial\left(\frac{u_\theta}{r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \tag{25}$$
$$D_{\theta z} = D_{z\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) \tag{26}$$
$$D_{rz} = D_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{27}$$

coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

$$D_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{28}$$
$$D_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) \tag{29}$$
$$D_{\phi\phi} = \left(\frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta cot\theta}{r}\right) \tag{30}$$
$$D_{r\theta} = D_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial\left(\frac{u_\theta}{r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \tag{31}$$
$$D_{\theta\phi} = D_{\phi\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial\left(\frac{u_\phi}{sin\theta}\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}\right) \tag{32}$$
$$D_{r\phi} = D_{\phi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial\left(\frac{u_\phi}{r}\right)}{\partial r}\right) \tag{33}$$