**Conditions d'examen**

**Professeur responsable :** Christophe ANCEY

**Documentation autorisée :** toute documentation sauf problème 1

**Matériel autorisé :** tout matériel sauf appareil de transmission (laptop avec connexion blue tooth, téléphone, email, etc.)

**Durée de l'examen** : 3 h 15 (14h15–17h30)

**Date et lieu** : 18 juin 2009, salle CE4 ou CE6

**Code** : A.

---

1. Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les exercices y figure !
2. Commencez chaque exercice sur une nouvelle feuille A4.
3. **Écrivez vos noms et prénom(s) sur chaque nouvelle feuille ainsi que le code figurant sur cette feuille.**
4. L'examen comporte 5 exercices. **Aucun support (livre, aide-mémoire) n'est autorisé pour le premier exercice.**
5. Le premier exercice se déroule de 14:15 à 15:00. Les deux suivants de 15:05 à 17:30.
6. **Le résultat des calculs devra être encadré et écrit de façon très lisible. Les calculs seront éventuellement joints sur des feuilles au propre.** Les feuilles mal écrites ou écrites avec un crayon papier seront considérées comme des brouillons et ne seront pas prises en compte. Pour les applications numériques, ne pas oublier les unités.
7. Le barème de chaque question est indiqué au début de chaque question.

**Problème 1** Une hémisphère de rayon $a$ repose à une profondeur $h$ dans un fluide de masse volumique $\varrho$ ; voir figure 1.

On cherche à calculer la force de pression.

Vous pouvez résoudre le problème en vous servant de deux techniques. **Choisissez l'une des deux.**

**Méthode 1** : résolution par intégration. Répondez aux questions suivantes :

(a) [0,25] Calculer la pression au sein du fluide à une profondeur $z$ (l'origine des $z$ est au fond, axe $z$ orienté vers le haut, $z = h$ désignant la surface libre).

(b) [0,25] Que valent $\mathbf{n}$ et $\mathrm{d}S$ dans le calcul de la force de pression ?

(c) [0,50] Donner l'expression analytique de la force de pression exercée sur la demie sphère (on négligera la pression atmosphérique) ?

**Méthode 2** : résolution par la détermination de la force d'Archimède. Donnez simplement le résultat en justifiant brièvement. [1 point]

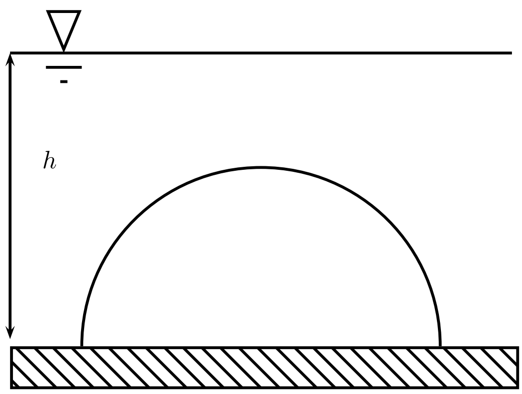


**Figure 1** : hémisphère reposant à une profondeur $h$.

$\boxed{\textbf{Attention}}$ : il faut conserver sur une feuille libre la formule analytique que vous avez obtenue ; vous en aurez besoin par la suite.

### Formulaire

- Équation de Pascal $\varrho \mathbf{g} - \nabla p = 0$.
- Calcul des forces de pression $\mathbf{F} = \int_S -p\mathbf{n}\mathrm{d}S$
- On se sert de l'un des trois systèmes orthonormés suivants :
  - coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ : voir figure 2 ;
  - coordonnées cylindriques $(r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \arctan(y/x), z)$ : voir figure 3 ;
  - coordonnées sphériques $(x = r\cos\varphi\sin\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\theta)$ avec $0 \le \theta \le \pi$ et $-\pi \le \varphi \le \pi$ : voir figure 4.
- Le calcul des volumes nécessite de calculer un volume infinitésimal selon le système de coordonnées choisi :
  - coordonnées cartésiennes : $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ;
  - coordonnées cylindriques : $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ ;
  - coordonnées sphériques : $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.
- Le calcul des surface nécessite de calculer une surface infinitésimale selon le système de coordonnées choisi :
  - coordonnées cartésiennes (planes) : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ;
  - coordonnées cylindriques (planes) : $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ;
  - coordonnées cylindriques (révolution) : $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\ell\,\mathrm{d}\theta$ avec $\mathrm{d}\ell$ un incrément de longueur (du profil) et $R$ le rayon de rotation par rapport à l'axe de révolution. Si le profil est une courbe d'équation $y = f(x)$ alors $\mathrm{d}\ell = \sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$ ;
  - coordonnées sphériques : $\mathrm{d}S = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

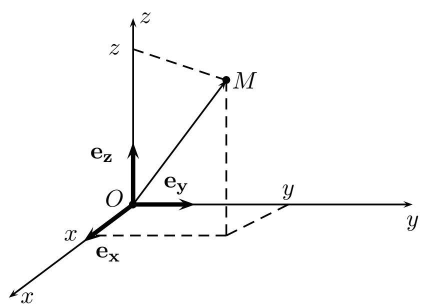


**Figure 2** : représentation d'un point dans un système de coordonnées cartésiennes.

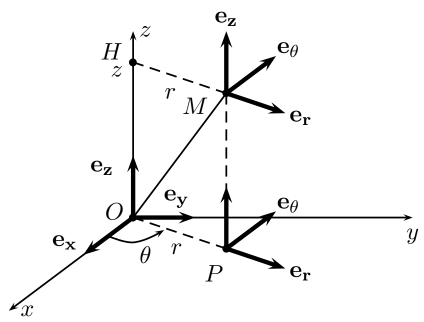


**Figure 3** : représentation d'un point dans un système de coordonnées cylindriques.

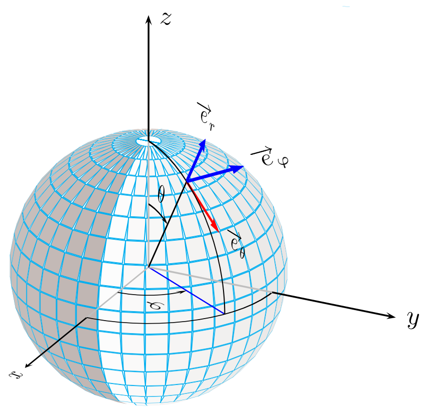


**Figure 4** : représentation d'un point dans un système de coordonnées sphériques.

Une commune décide de séparer les eaux pluviales des eaux usées afin de lutter contre les inondations dues aux orages et à la pollution des eaux. Lors d'orages, les eaux ruisselant des surfaces imperméabilisées (toiture, chaussée goudronnée) sont collectées dans un réseau de conduites souterraines, qui convergent vers un canal unique en béton. Ce canal a pour longueur $L_c$ et largeur $B_c$. Sa pente est notée $i_c$. Le canal se déverse dans un bassin décanteur afin de filtrer les eaux (on tente de diminuer la quantité de matières en suspension et de sédiment). Ce dernier canal déverse les eaux filtrées vers un bassin de compensation, qui restitue les eaux vers un cours d'eau naturel. Voir figure 5.

Votre mission est d'assister le maître d'ouvrage en dimensionnant les différents ouvrages hydrauliques nécessaires à cet aménagement.

**Données** :

- la largeur du canal collecteur est $B_c = 1$ m, sa longueur $L_c = 500$ m, $i_c = 1$ ‰. Le canal est en béton rugueux, avec un coefficient de Manning-Strickler égal à $K = 65$ m$^{1/3}$/s. Il a une section rectangulaire ;
- le débit de projet pour l'évacuation des eaux pluviales est $Q = 100$ l/s. La durée de la pluie de projet est $T = 6$ heures ;
- le sédiment transporté dans le réseau d'évacuation des eaux pluviales est du sable fin de diamètre médian $d_m = 1$ mm. La masse volumique est $\varrho_p = 2500$ kg/m$^3$ ;
- pour les calculs, on suppose que la hauteur d'eau est $H_b = 5$ m. Le bassin de décantation a une largeur $W_b = 5$ m ;
- le parement amont du déversoir du bassin de décantation fait un angle $\theta = 60°$ par rapport à l'horizontale (voir figure 7). La pelle vaut $p = 4{,}25$ m ;
- le rayon de la demie sphère est $R_s = 4$ m et le diamètre du siphon est $d_s = 50$ cm ;
- l'évacuation des eaux depuis le bassin de décantation peut se faire par une conduite cylindrique de diamètre $D_e = 400$ mm ou bien un coursier large de $B_e = 50$ cm, dont le fond est constitué d'enrochements de diamètre $d_{90} = 10$ cm. Dans les deux cas de figure, la longueur de l'évacuateur est $L = 0{,}5$ km et la dénivellation parcourue est $\Delta H = 50$ m ;
- le bassin de compensation a une longueur $L_{bc} = 50$ m et une largeur $W_{bc} = 20$ m. Il est constitué de terre battue, avec un coefficient de Manning-Strickler $K = 50$ m$^{1/3}$/s. La pelle du déversoir est $p_{bc} = 1$ m (attention ce seuil n'occupe pas toute la largeur du bassin de compensation car il ne fait que 10 m de long) ;

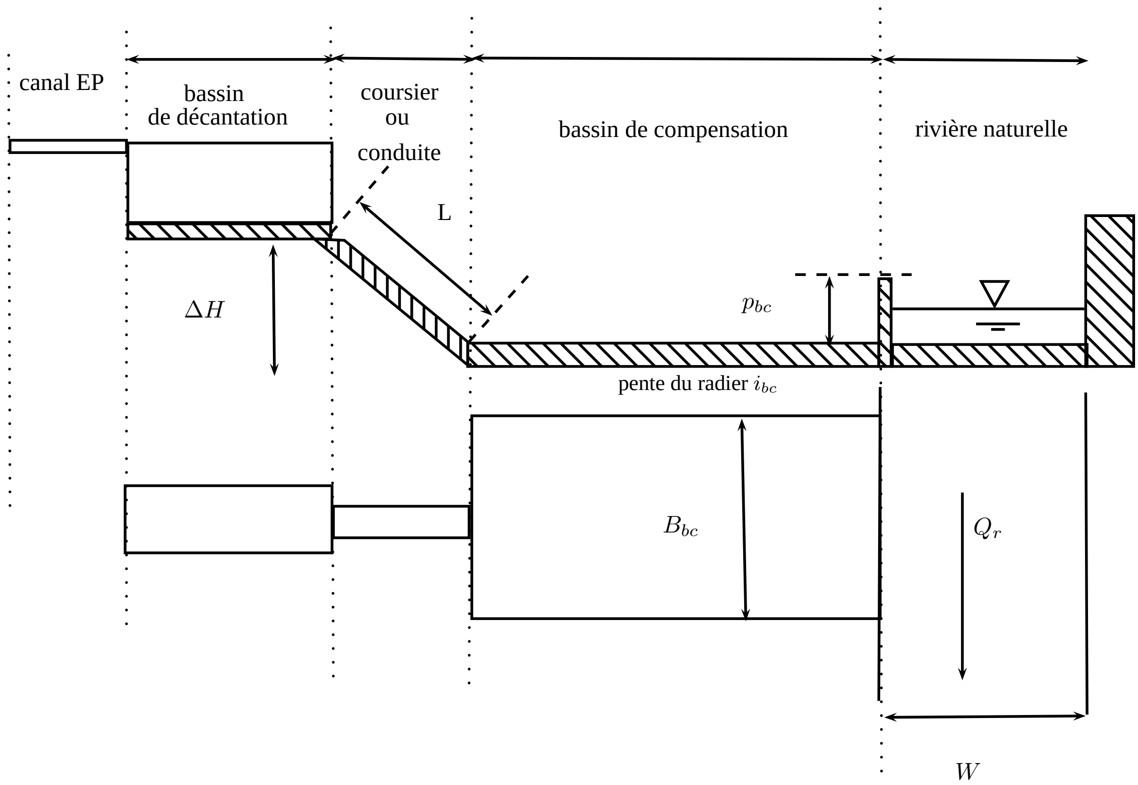


**Figure 5** : schéma de l'aménagement étudié, avec une coupe (en haut) et une vue en plan (en bas). Le canal d'évacuation des eaux pluviales (EP) amène l'eau jusqu'au bassin de décantation. L'eau est ensuite acheminée jusqu'à un bassin de compensation par l'intermédiaire d'une conduite ou d'un coursier. L'eau est stockée dans ce bassin et en cas de trop-plein, l'excédent d'eau est reversé dans une rivières naturelle.

- la viscosité cinématique de l'eau est $\mu = 10^{-3}$ Pa·s ;
- la relation entre le coefficient de traînée $C_d = F/(\frac{1}{2}\pi a^2 \varrho_f u^2)$ en fonction du nombre de Reynolds particulaire $Re_p = 2\varrho_f au/\mu$ d'une sphère de rayon $a$ est précisée à la figure 6. Voir aussi le cours.

**Hypothèses de calcul : tous les calculs dans les canaux à section rectangulaire se feront en supposant que le canal est infiniment large. Pour le calcul des pressions hydrostatiques, on négligea la pression atmosphérique**.

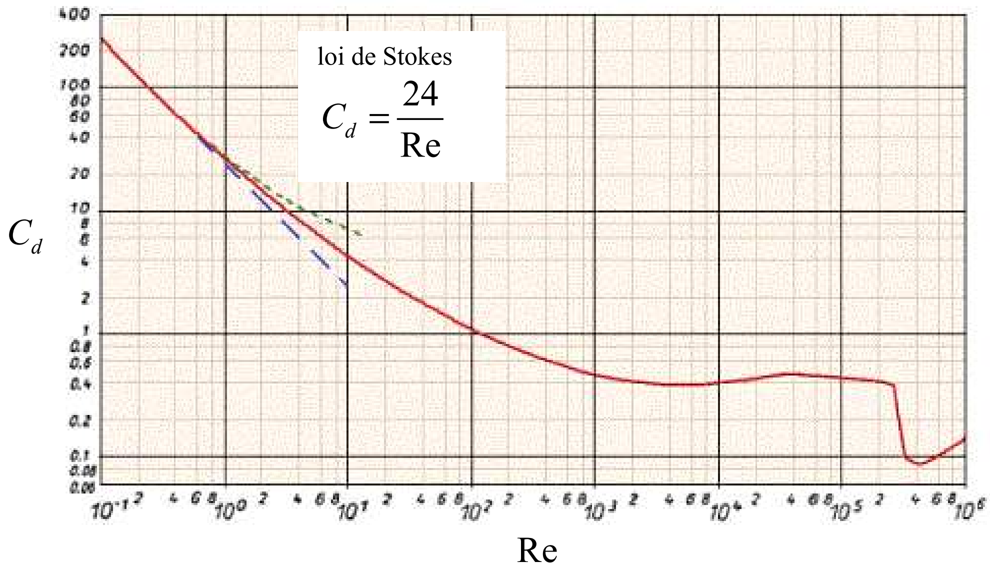


**Figure 6** : variation du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds particulaire.

**Problème 2** Répondez aux questions suivantes [1,5 points] :

(a) [0,25] Calculer la vitesse moyenne du fluide dans le canal en béton en supposant qu'un régime permanent et uniforme s'est établi.

(b) [0,10] Est-ce que l'hypothèse de canal infiniment large vous paraît plausible ?

(c) [0,50] Si on décide de remplacer le canal en béton par un tube cylindrique (avec la même pente $i_c$), quel doit être le diamètre minimal du tube pour que la hauteur d'eau ne dépasse pas 80 % de la hauteur maximale (diamètre de la conduite) ?

(d) [0,10] Pourquoi se limite-t-on à 80 % de la hauteur maximale ?

(e) [0,25] L'écoulement transport du sable fin de diamètre médian $d_m$. Calculer la vitesse de sédimentation des particules dans le bassin. Pour cela on supposera que le coefficient de traînée vaut $C_d = 1$ et que l'eau est au repos dans le bassin.

(f) [0,10] Quel temps faut-il pour que les particules sédimentent (c'est-à-dire touchent le fond) sachant que la profondeur d'eau dans le bassin est $H_b$ ?

(g) [0,10] Justifier *a posteriori* (en calculant le nombre de Reynolds) que le coefficient traînée vaut environ 1.

(h) [0,10] Calculer la vitesse de sédimentation de la matière en suspension en supposant que le diamètre médian est $d_{susp} = 1$ µm et la masse volumique $\varrho_{susp} = 2000$ kg/m$^3$. Qu'en concluez-vous pour l'efficacité du décanteur avec la matière en suspension ?

**Problème 3** On étudie maintenant une première variante du bassin de décantation, où l'eau est déversée dans la conduite/coursier par l'intermédiaire d'un déversoir épais.

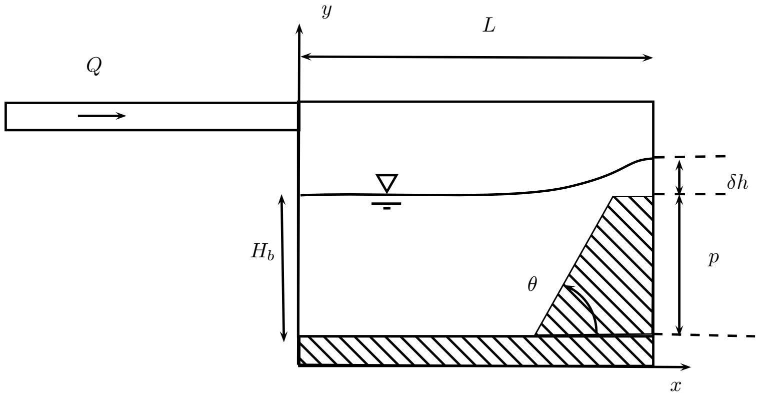


**Figure 7** : variante 1 du bassin de décantation.

Répondez aux questions suivantes [1,5 points] :

(a) [0,5] Calculer la force de pression sur le parement de la variante n° 1, c'est-à-dire le mur incliné d'un angle $\theta$, en supposant que la hauteur d'eau est uniformément répartie dans tout le bassin (et vaut $H_b$). On donnera les composantes de cette force (selon $x$ et $y$).

(b) [0,2] Faire l'application numérique.

(c) [0,3] Le mur incliné se comporte comme un seuil épais. À l'aide du théorème $\Pi$, donner la relation qui relie (en régime permanent) le débit par unité de largeur à la gravité $g$, à la lame d'eau au-dessus du seuil $\delta h$, et à la vitesse au niveau du seuil $u_s$ en introduisant les nombres adimensionnels nécessaires.

(d) [0,3] En se servant de l'équation de Bernoulli (conservation de la charge hydraulique) et en admettant qu'il n'y a pas de perte de charge et la hauteur critique est atteinte au-dessus du seuil et que loin du seuil l'eau est au repos, déterminer le débit par unité de largeur transitant par le seuil pour un régime permanent.

(e) [0,1] Comparer avec la forme donnée par l'analyse dimensionnelle ?

(f) [0,1] Que vaut le débit total ? Faire l'application numérique. Compte tenu du débit entrant retenu dans le projet, déterminer ce qui se passe dans ce bassin.

**Problème 4** On étudie maintenant une seconde variante du bassin de décantation, où l'eau est déversée dans la conduite/coursier par un siphon placé dans une demie sphère (voir figure 8).

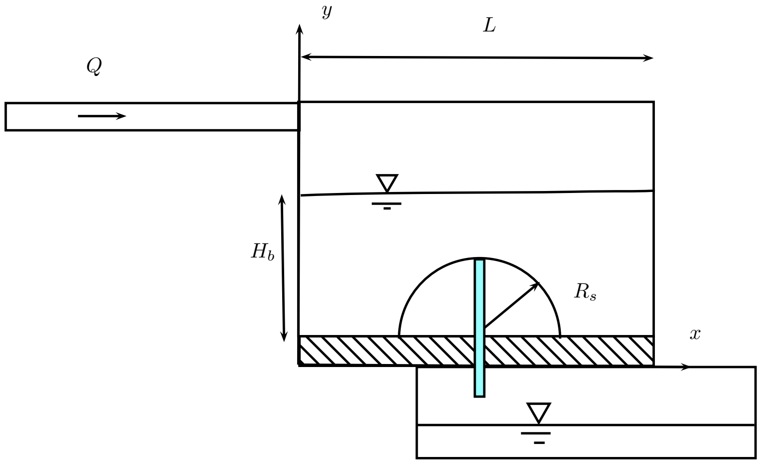


**Figure 8** : variante 2 du bassin de décantation.

Répondez aux questions suivantes [0,5 points] :

(a) [0,2] Reprenez la formule analytique obtenue à l'exercice 1 et calculez numériquement la pression qui s'exerce sur la demi-sphère.

(b) [0,3] La demi-sphère est munie d'un siphon de diamètre $d_s$, qui déverse le trop-plein dans un canal situé sous le bassin de décantation. Calculer le débit sachant que la pression dans le tube du siphon est égale à la pression atmosphérique et l'écoulement n'y est pas en charge.

**Problème 5** Le maître d'ouvrage retient finalement la variante n° 1 (seuil déversoir).

L'eau évacuée du bassin de décantation est évacuée en direction d'un bassin de compensation

- soit par une conduite cylindrique de diamètre $D_e$ mm où l'écoulement est charge ;
- soit par un coursier constitué d'enrochements de diamètre $d_{90}$. Le coursier est à l'air libre. Sa largeur est notée $B_e$.

L'évacuation se fait sur une forte pente. La longueur de l'évacuateur (conduite ou bien coursier) est notée $L$ et la dénivellation parcourue est $\Delta H$.

L'eau arrive ensuite dans un bassin de compensation initialement vide. L'eau est stockée, puis déversée dans une rivière naturelle. La pente du radier dans le bassin est de $i_{bc} = 0{,}01$ %. Ce bassin a une largeur $B_{bc}$ et sa longueur est $L_{bc}$. Il est fermé par un seuil épais sur une longueur de 10 m et de pelle $p_{bc}$.

Répondez aux questions suivantes [1,5 points] :

(a) [0,25] Calculer le débit maximal que peut laisser transiter la conduite en charge ? Quelle est la pression maximale encaissée par la conduite ?

(b) [0,50] Pour le coursier, que vaut le coefficient de Manning-Strickler si on applique la formule de Jäggi ? Calculez la hauteur normale et la hauteur critique dans ce coursier pour le débit de projet. Quel est le régime d'écoulement ?

(c) [0,1] Calculer le temps nécessaire au remplissage du bassin de compensation.

(d) [0,1] Est-ce compatible avec les caractéristiques de l'orage de projet ?

(e) [0,25] Quelles sont les hauteurs normale et critique dans le bassin de compensation ? Quel est le régime d'écoulement ?

(f) [0,30] Tracer qualitativement la courbe de remous dans le coursier en justifiant rapidement la forme tracée.