**Correction de l'examen du 29 juin 2010**

**Professeur responsable :** Christophe ANCEY

**Documentation autorisée :** aucune documentation sauf formulaire A4

**Matériel autorisé :** tout matériel sauf appareil de transmission (laptop avec connexion blue tooth, téléphone, email, etc.)

**Durée de l'examen** : 2 h 45 (12 h 15–15 h)

**Date et lieu** : 29 juin 2010 salle CESPO

---

**Problème 1** Considérons une rivière dont le lit est composé de gravier de diamètre $d_{90} = 4$ mm ; sa pente est de 5 cm/km. La section est rectangulaire et la largeur est de $B = 70$ m. En régime permanent uniforme, le débit est de $Q = 15$ m$^3$/s. On demande de calculer :

(a) la hauteur critique

(b) le coefficient de Manning-Stricker ;

(c) la hauteur normale ;

(d) le rayon hydraulique ;

(e) le nombre de Froude et le type de régime ;

(f) la contrainte au fond ;

(g) la pression au fond.

**Réponse :** on a

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = 17 \text{ cm}.$$

La valeur de $K$ est

$$K = 58 \text{ m}^{1/3}\text{ s}^{-1}.$$

La vitesse (p. 94) est $\bar{u} = K\sqrt{i}R_H^{2/3}$, soit encore

$$\frac{Q}{Bh_n} = K\sqrt{i}\left(\frac{Bh_n}{B+2h_n}\right)^{2/3}$$

On trouve $h_n = 68$ cm. Le rayon hydraulique est

$$R_H = \frac{Bh_n}{B + 2h_n} = 67 \text{ cm}$$

Le nombre de Froude est

$$Fr = \frac{Q}{Bh_n\sqrt{gh_n}} = 0{,}12$$

Le régime est subcritique (fluvial). La contrainte au fond est

$$\tau_b = \rho g h_n \sin i = 0{,}33 \text{ Pa}.$$

La pression étant hydrostatique, on a

$$p = \rho g h_n \cos i = 6681 \text{ Pa}.$$

**Problème 2** Pour protéger les riverains d'une rivière en crue, on constitue une digue en forme de dièdre (voir fig. 1). Elle est constituée en éléments préfabriqués, rigides (béton armé) de hauteur $H$ et base $B$ ; on négligera le poids de ces éléments par rapport à la poussée de l'eau. Calculez la longueur de base $B$ qu'il faut prévoir pour que chaque élément soit auto-stable (on négligera le frottement du sol ainsi que tout effort résultant des sous-pressions sous la base). Faire une application numérique pour $H = 1$ m.

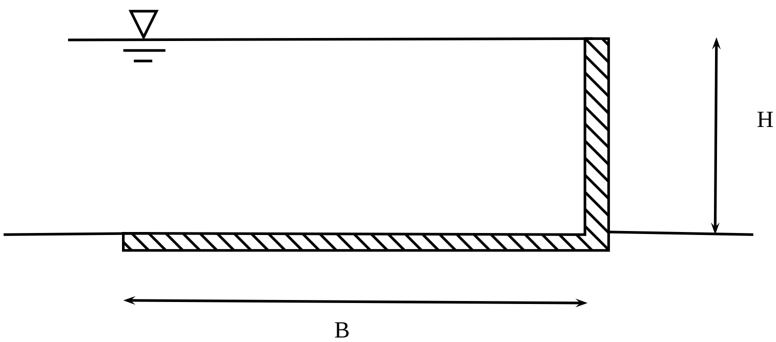


**Figure 1** : digue en L.

**Réponse :** le moment de renversement des forces de pression (par rapport à l'angle du dièdre) sur le mur vertical est

$$M_v = \frac{1}{2}\rho g H^2 \times \frac{H}{3}$$

(force de pression : $\frac{1}{2}\rho g H^2$, point d'application à une hauteur $H/3$ depuis le point de pivot, qui est l'angle du dièdre). Le moment des forces de pression sur la partie horizontale est

$$M_h = \frac{1}{2}\rho g H B \times \frac{B}{2}$$

(force de pression : $\frac{1}{2}\rho g H B$, bras de levier $B/2$ depuis le point de pivot). La condition de stabilité est

$$M_h \geq M_v,$$

soit

$$B \geq \frac{H}{\sqrt{3}}.$$

A.N. : $B = 58$ cm.

**Problème 3** Une bille sphérique de rayon R et de masse $M$ obstrue un orifice circulaire dans laquelle elle s'enfonce de $h$ (voir fig. 3). La hauteur d'eau est $H$. La bille est totalement immergée. Calculez la force de pression qui s'exerce sur cette bille.

**Réponse :** il s'agit d'une variante des exercices n° 4-7 et/ou n° 5-1. La force de pression est d'après le principe d'Archimède égale à la différence entre le poids d'eau déplacé et la force de pression qui s'exerce au niveau du trou.

Le volume de la bille est

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 + \int_{R-h}^{0} \pi r^2 \mathrm{d}z \text{ avec } r^2 = R^2 - z^2,$$

soit

$$V = \frac{1}{3}\pi(h-2R)^2(h+R)$$

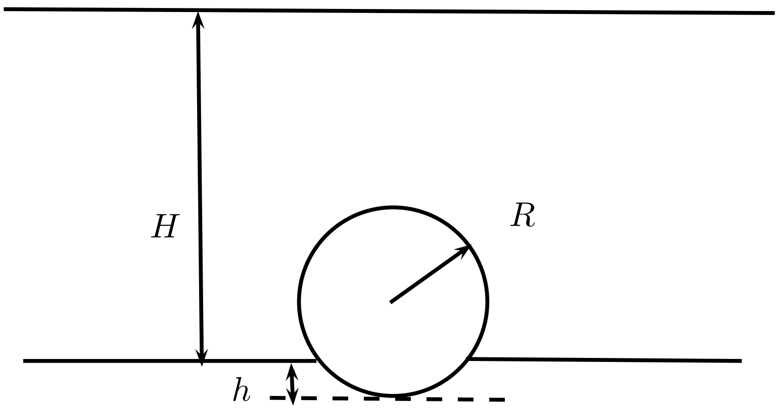


**Figure 2** : Clapet à bille.

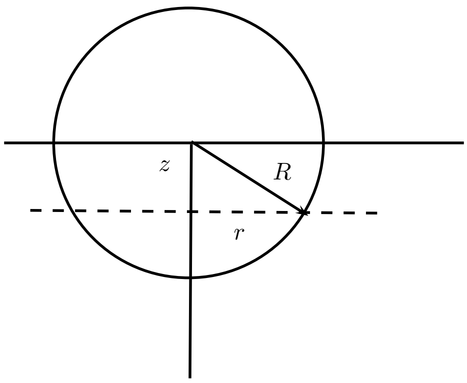


**Figure 3** : Notation.

Le poids du volume d'eau déplacé est

$$P = \rho g V = \frac{1}{3}\pi\rho g(h - 2R)^2(h + R).$$

La pression hydrostatique sur un orifice circulaire de rayon $r_o = \sqrt{R^2 - (R - h)^2}$ sur lequel s'exerce une pression hydrostatique $p = \rho g H$ est

$$F_o = \rho g H \pi r_0^2 = \pi\rho g H h(2R - h).$$

La force totale est

$$F = P - F_o = \frac{1}{3}\pi\rho g(h - 2R)^2(h + R) - \pi\rho g H h(2R - h),$$

soit encore

$$F = \pi\rho g(2R-h)\left((2R-h)\frac{R+h}{3} - Hh\right).$$

**Problème 4** Une conduite de vidange est alimentée en eau par un réservoir de hauteur $h_1 = 10$ m. Le diamètre de la conduite est 8 cm. La dénivellation entre le point de sortie et la surface libre est $h_2 = 30$ m (voir fig. 4). L'eau forme, à sa sortie de la conduite, un jet. On pose les questions suivantes :

A. quelle est la vitesse à la sortie de la conduite ?
B. quel est le débit dans la conduite ?
C. quelle est la hauteur maximale du jet ?

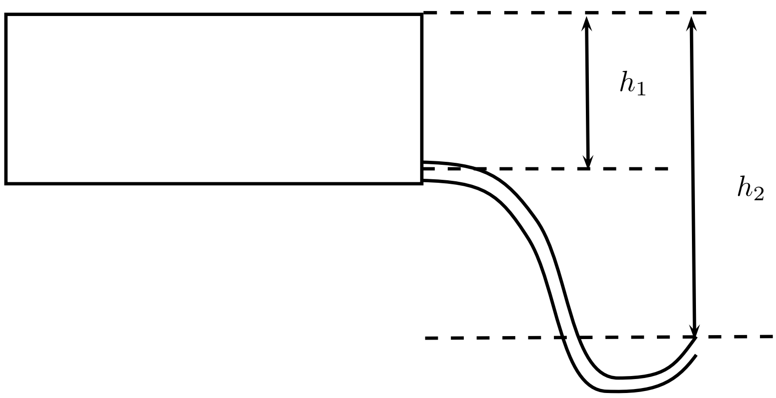


**Figure 4** : Vidange.

**Réponse :** par application de la formule de Torricelli, on a

$$u = \sqrt{2gh_2} = 24{,}2 \text{ m/s;},$$

ce qui fournit un débit de

$$Q = \pi(d/2)^2 u = 122 \text{ l/s}.$$

En l'absence de frottemet, le jet remonte de 30 m.

**Problème 5** De l'eau de pluie qui tombe sur une chaussée de pente 1 % s'écoule sous la forme d'un écoulement permanent uniforme d'épaisseur 2 mm. En supposant que l'écoulement est laminaire et en résolvant les équations de Navier-Stokes, répondez aux questions suivantes :

i. quel est le profil de vitesse ?
ii. quelle est la vitesse moyenne ?
iii. que vaut le débit par unité de largeur ?
iv. que vaut le nombre de Reynolds. Qu'en déduisez-vous quant au régime ?

**Réponse :** il s'agit de l'exercice vu en cours (§ 6.10, pp. 148–150). Le profil de vitesse est

$$u(y) = \frac{\varrho g \sin\theta}{2\mu}\left(2hy - y^2\right).$$

Le profil de vitesse est donc parabolique. La vitesse moyenne est

$$\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\frac{\varrho g \sin\theta}{\mu}h^2 \approx 13 \text{ cm/s}$$

Le débit est $q = \bar{u}h = 0{,}26$ l/s. Le nombre de Reynolds est

$$Re = \frac{\bar{u}h}{\nu} = 261$$

on est à la limite d'application de ce type de calcul

**Problème 6** Un canal d'irrigation trapézïdal dont la section est donnée sur la figure 5 est constitué d'un revêtement en béton de coefficient de Manning-Strickler $K = 50$ m$^{1/3}\cdot$s$^{-1}$. Sa pente est de 40 cm/km. Calculez le débit dans ce canal en fonction de la côte $a$. Faire une application numérique pour $a = 1$ m.

**Réponse :** la vitesse moyenne (p. 94) est $\bar{u} = K\sqrt{i}R_H^{2/3}$, soit encore

$$Q = K\sqrt{i}2a^2\left(\frac{2a^2}{a + 2\sqrt{2}a}\right)^{2/3} = 1{,}3 \text{ m}^3/\text{s}.$$

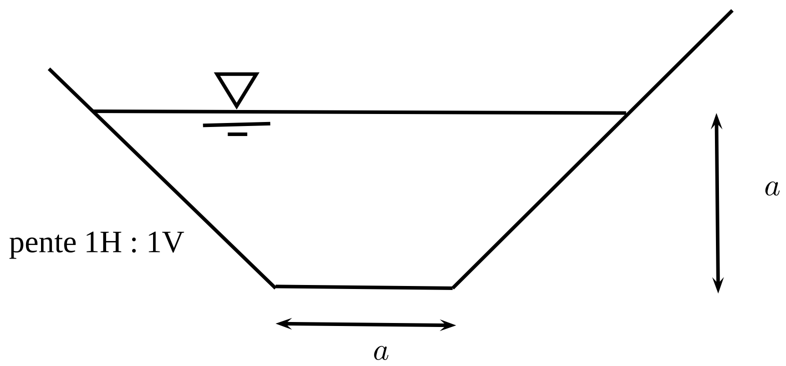


**Figure 5** : Canal trapézoïdal.