

**Conditions d'examen**

**Professeur responsable :** Christophe ANCEY

**Documentation autorisée :** aucune documentation sauf formulaire A4

**Matériel autorisé :** aucun matériel électronique sauf calculatrice simple

**Durée de l'examen :** 2 h 15 (14 h 15–16 h 30)

**Date et lieu :** 24 juin 2011 salles CM1120 et CM1121

---

1. Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les exercices y figure !
2. **Écrivez vos noms et prénom(s) en lettres capitales.**
3. L'examen comporte 5 exercices. **Aucun document n'est autorisé, à l'exception d'un formulaire recto-verso au format maximal A4.**
4. **Le résultat des calculs devra être encadré et écrit de façon très lisible. Les calculs seront éventuellement joints sur des feuilles au propre.** Les feuilles mal écrites ou écrites avec un crayon papier seront considérées comme des brouillons et ne seront pas prises en compte. Pour les applications numériques, ne pas oublier les unités.

**Problème 1** Considérons une rivière dont le lit est composé de gravier de diamètre  $d_{90} = 10$  mm ; sa pente est de 8 cm/km. La section est rectangulaire et la largeur est de 100 m. En régime permanent uniforme, le débit est de  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ . On demande de calculer :

- (a) la hauteur critique (canal infiniment large) ;
- (b) le coefficient de Manning-Stricker ;
- (c) la hauteur normale ;
- (d) le rayon hydraulique ;
- (e) le nombre de Froude et le type de régime ;
- (f) la contrainte au fond ;
- (g) la pression au fond.

Formulaire :

- (a) Formule de Jäggi :  $K = 23,2/d_{90}^{1/6}$
- (b) Formule de Manning Strickler :  $\tau_p = \rho g \bar{u}^2 / (K^2 R_H^{1/3})$

**Problème 2** Un canal d'irrigation trapézoïdal dont la section est donnée sur la figure 1 est constitué d'un revêtement en béton de coefficient de Manning-Strickler  $K = 60 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ . Sa pente est de 30 cm/km. Calculez le débit dans ce canal en fonction de la côte  $a$ . Faire une application numérique pour  $a = 5$  m.

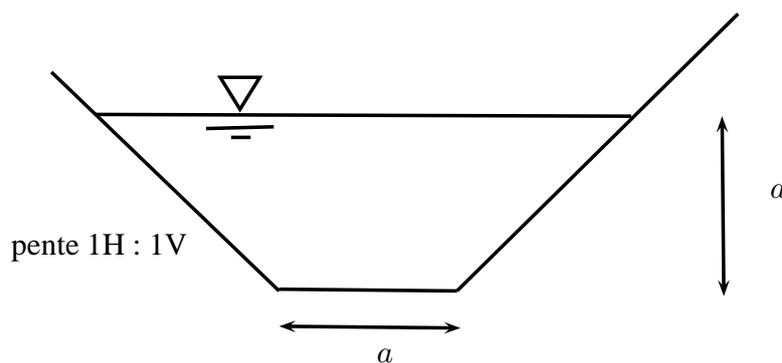


Figure 1 : canal trapézoïdal.

**Problème 3** Pour lutter contre les marées et les vagues associées, une commune de bord de mer songe à imiter l'exemple de Venise en construisant des protections amovibles. Il s'agit de murs articulés qui sont posés au fond de la mer (fond supposé imperméable) et peuvent être dressés à l'aide de vérin. La figure 1 montre un mur en position haute. La hauteur du mur est calculée pour correspondre au plus haut niveau de la marée (noté ici  $H_1$ ). Lorsque cette marée se produit, il y a une différence de hauteur d'eau entre  $H_1$  et  $H_2$ . On demande de calculer :

- la distribution de pression due à la hauteur d'eau  $H_1$  ;
- la distribution de pression due à la hauteur d'eau  $H_2$  ;
- la force nette de pression (par unité de largeur de mur) que doit encaisser le vérin ;
- le rapport de semelle  $B_2/B_1$  (en fonction de  $H_1$ ,  $H_2$ , et  $B_1$ ) à respecter pour que le mur soit autostable (donc qu'une fois dressé, le mur et sa semelle ne basculent pas). Pour répondre on fera un bilan des moments au point A en considérant que le pivotement se fait autour du point A (on négligera l'épaisseur du mur vertical dans le calcul des moments).

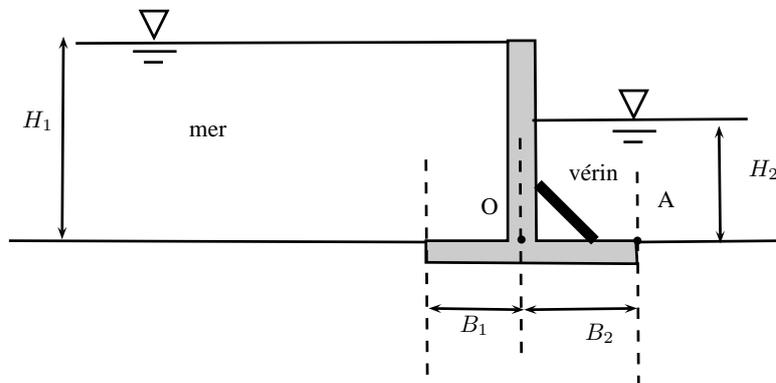


Figure 2 : digue en L.

**Problème 4** La même commune s'intéresse à un système de « boudins » (ballons) gonflables, dont la forme est assimilable à un demi cylindre de rayon  $a$  (voir figure 3). On cherche à calculer la pression qu'il faut insuffler pour que le

boudin supporte la pression de l'eau, dont la hauteur est  $h$ . On demande de calculer :

- la distribution de pression due à la hauteur d'eau  $h = a$  ;
- que vaut en coordonnées polaires l'élément de force infinitésimale de pression  $d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}dS$  (calculer  $dS$  et mettre les variables en coordonnées cartésiennes) ?
- intégrer et calculer la force de pression qui s'exerce sur un demi cylindre (par unité de longueur du boudin) ;
- sachant que la pression à l'intérieur du boudin est uniforme et vaut  $p_b$ , la calculer pour qu'il y ait équilibre entre la force due à la pression intérieure et force exercée par la pression hydrostatique.

Formulaire :

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \text{ et } \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

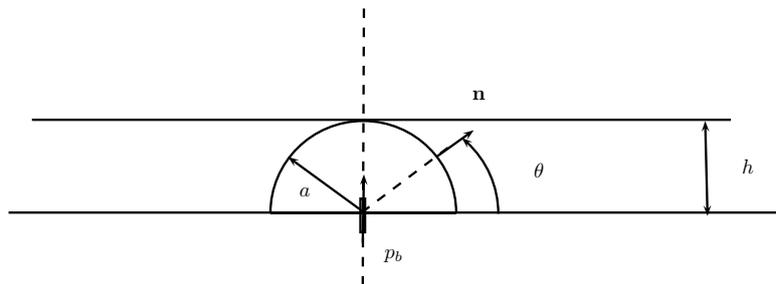


Figure 3 : « boudin » gonflable.

**Problème 5** Une huile (fluide newtonien) de viscosité dynamique  $\mu$  et de masse volumique  $\rho$  est placée entre deux parois solides (plans parallèles et horizontaux) séparées d'une distance  $h$ . La paroi supérieure est déplacée à une vitesse constante  $U$ .

- écrire les équations de Navier-Stokes après simplification des termes ?
- résoudre ces équations pour déterminer le profil de vitesse en régime laminaire ?

3. comment définiriez le nombre de Reynolds? Que vaut-il (pour l'application numérique on prendra pour viscosité de l'huile  $\mu = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  et pour volumique  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ; l'entrefer est  $h = 1 \text{ mm}$  et la vitesse  $U = 10 \text{ mm/s}$ );
4. montrer à partir des équations de conservation du mouvement (et des invariances du problème) que, quelle que soit la loi de comportement, la contrainte de cisaillement est constante pour cette géométrie (on ne cherchera pas à calculer son expression exacte);
5. en se servant du modèle de viscosité de Prandl, calculer le profil de vitesse en régime turbulent (ce régime est *stricto sensu* valable que pour le régime turbulence, c'est-à-dire à une distance suffisamment grande des parois, mais on négligera cet aspect et on se servira de la condition à la limite en  $y = h$  pour déterminer la constante d'intégration).

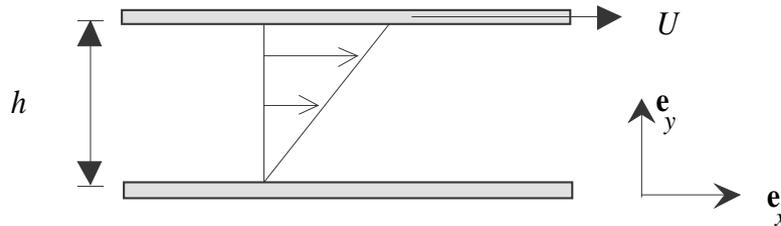


Figure 4 : film d'huile entre deux plaques.

Les équations de Navier-Stokes sont en dimension 2 :

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

avec  $(g_x, g_y)$  la projection du vecteur gravité  $\mathbf{g}$  sur les axes  $x$  et  $y$ .

Le modèle de Prandtl s'écrit

$$\tau = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2$$

avec  $\kappa$  la constante de von Kármán,  $y$  la cote par rapport au fond et  $\langle u \rangle$  la vitesse moyenne (au sens statistique). Quelle que soit la loi de comportement, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$$

avec  $(g_x, g_y)$  la projection du vecteur gravité  $\mathbf{g}$  sur les axes  $x$  et  $y$ . Le tenseur des extra-contrainte s'écrit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{bmatrix}$$