Correction de l'examen du 24 juin 2011

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Documentation autorisée : aucune documentation sauf formulaire A4

Matériel autorisé : aucun sauf deux premières questions

Durée de l'examen : 2 h 15 (14 h 15–16 h 30)

Date et lieu : 24 juin 2011 salle CESPO

Problème 1 Considérons une rivière dont le lit est composé de gravier de diamètre $d_{90} = 10$ mm ; sa pente est de 8 cm/km. La section est rectangulaire et la largeur est de 100 m. En régime permanent uniforme, le débit est de 20 m^3/s. On demande de calculer :

(a) la hauteur critique (canal infiniment large) ;
(b) le coefficient de Manning-Stricker ;
(c) la hauteur normale ;
(d) le rayon hydraulique ;
(e) le nombre de Froude et le type de régime ;
(f) la contrainte au fond ;
(g) la pression au fond.

Réponse : on a

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = 16 \text{ cm}.$$

La valeur de K est

$$K = 50 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}.$$

La vitesse (p. 94) est $\bar{u} = K\sqrt{i}R_H^{2/3}$, soit encore

$$\frac{Q}{Bh_n} = K\sqrt{i}\left(\frac{Bh_n}{B+2h_n}\right)^{2/3}$$

On trouve $h_n = 61$ cm. Le rayon hydraulique est

$$R_H = \frac{Bh_n}{B + 2h_n} = 61 \text{ cm}$$

Le nombre de Froude est

$$Fr = \frac{Q}{Bh_n\sqrt{gh_n}} = 0{,}13$$

Le régime est subcritique (fluvial). La contrainte au fond est

$$\tau_b = \rho g h_n \sin i = 0{,}48 \text{ Pa.}$$

La pression étant hydrostatique, on a

$$p = \rho g h_n \cos i = 6084 \text{ Pa.}$$

Problème 2 Un canal d'irrigation trapézoïdal dont la section est donnée sur la figure 1 est constitué d'un revêtement en béton de coefficient de Manning-Strickler $K = 60$ m$^{1/3}$·s^{-1}. Sa pente est de 30 cm/km. Calculez le débit dans ce canal en fonction de la côte a. Faire une application numérique pour $a = 5$ m.

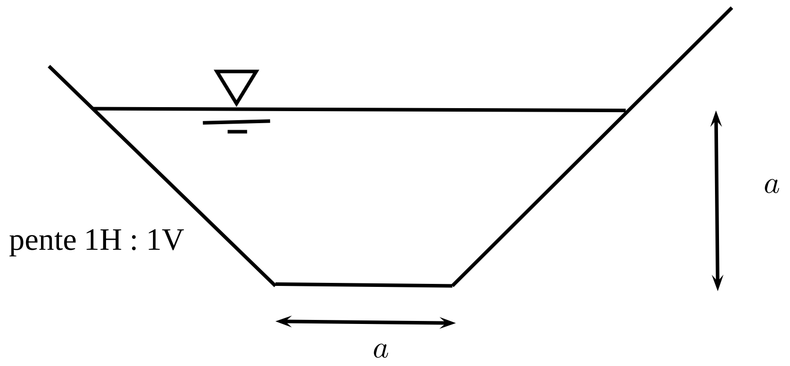

Figure 1 : canal trapézoïdal.

Réponse : la vitesse moyenne (p. 94) est $\bar{u} = K\sqrt{i}R_H^{2/3}$, soit encore

$$Q = K\sqrt{i}2a^2\left(\frac{2a^2}{a + 2\sqrt{2}a}\right)^{2/3} = 98{,}5 \text{ m}^3/\text{s.}$$

Problème 3 Pour lutter contre les marées et les vagues associées, une commune de bord de mer songe à imiter l'exemple de Venise en construisant des protections amovibles. Il s'agit de murs articulés qui sont posés au fond de la mer et peuvent être dressés à l'aide de vérin. La figure 1 montre un mur en position haute. La hauteur du mur est calculée pour correspondre au plus haut niveau de la marée (noté ici H_1). Lorsque cette marée se produit, il y a une différence de hauteur d'eau H_1 et H_2. On demande de calculer :

(a) la distribution de pression due à la hauteur d'eau H_1 ;

(b) la distribution de pression due à la hauteur d'eau H_2 ;

(c) la force nette de pression (par unité de largeur de mur) que doit encaisser le vérin ;

(d) le rapport de semelle B_2/B_1 (en fonction de H_1, H_2, et B_1) à respecter pour que le mur soit autostable (donc qu'une fois dressé, le mur et sa semelle ne basculent pas). Pour répondre on fera un bilan des moments au point A en considérant que le pivotement se fait autour du point A (on négligera l'épaisseur du mur vertical dans le calcul des moments).

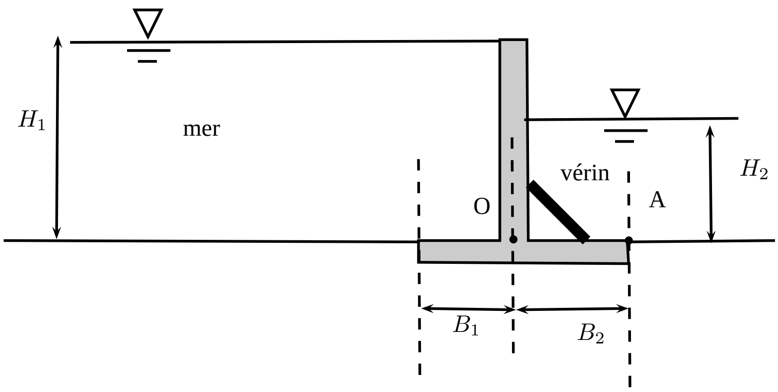

Figure 2 : digue en L.

Réponse :

La distribution de pression est

$$p_i = \rho g(H_i - y)$$

ce qui donne une force

$$F_i = \rho g \frac{H_i^2}{2}$$

La force nette est donc

$$F = \rho g \frac{H_1^2 - H_2^2}{2}$$

le moment de renversement des forces de pression (par rapport au point A) résistantes est

$$M_r = \frac{1}{2}\rho g H_2^2 \times \frac{H_2}{3} + \rho g H_1 B_1 \times \left(\frac{1}{2}B_1 + B_2\right) + \rho g H_2 B_2 \times \frac{1}{2}B_2$$

(force de pression sur mur vertical : $\frac{1}{2}\rho g H_2^2$, point d'application à une hauteur $H_2/3$ depuis le point de pivot. Idem pour les forces sur les pieds). Le moment des forces de pression motrices est

$$M_m = \frac{1}{2}\rho g H_1^2 \times \frac{H_1}{3}$$

(force de pression : $\frac{1}{2}\rho g H B$, bras de levier $B/2$ depuis le point de pivot). La condition de stabilité est

$$M_r \geq M_m,$$

soit

$$B_1^2\left(H_1 + 2H_1\frac{B_2}{B_1} + H_2\frac{B_2^2}{B_1^2}\right) \geq \frac{1}{3}(H_1^3 - H_2^3)$$

Problème 4 La même commune s'intéresse à un système de « boudins » (ballons) gonflables, dont la forme est assimilable à un demi cylindre de rayon a (voir figure 3). On cherche à calculer la pression qu'il faut insuffler pour que le boudin supporte la pression de l'eau, dont la hauteur est h. On demande de calculer :

(a) la distribution de pression due à la hauteur d'eau $h = a$;

(b) les composantes de la normale $\mathbf{n}$;

(c) que vaut en coordonnées polaires l'élément de force infinitésimale de pression $\mathrm{d}\mathbf{F} = -p\mathbf{n}\mathrm{d}S$ (calculer $\mathrm{d}S$ et mettre les variables en coordonnées polaires) ?

(d) intégrer et calculer la force de pression qui s'exerce sur un demi cylindre ;

(e) sachant que la pression à l'intérieur du boudin est uniforme et vaut p_b, la calculer pour qu'il y ait équilibre entre la force due à la pression intérieure et force exercée par la pression hydrostatique

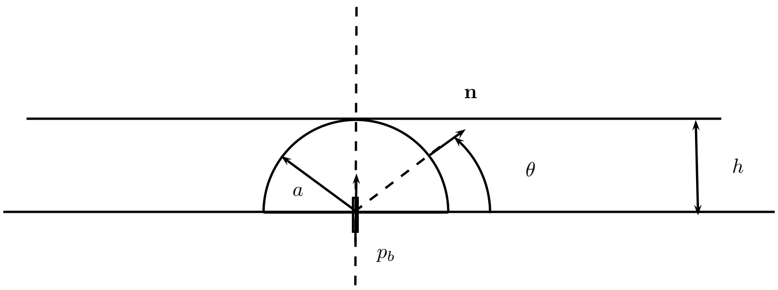

Figure 3 : « boudin » gonflable.

Réponse :

La distribution de pression est

$$p = \rho g(a - y)$$

Les composantes de **n** sont $\cos\theta$ et $\sin\theta$. La force s'écrit

$$\mathbf{F} = \int_0^{\pi/2} (-p)\mathbf{n}\mathrm{d}S = -\rho g a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

soit

$$F_y = -\rho g a^2(1 - \pi/4) \text{ et } F_x = -\rho g a^2/2$$

La force totale est $2F_y$ (les F_x de signe opposé se contrebalancent). Le résultat peut se retrouver en appliquant le théorème d'Archimède.

$$F_t = 2F_y = \rho g a^2(\pi/2 - 2)$$

La pression moyenne est la force totale divisée par l'aire de l'enveloppe constituant le boudin

$$p_b = |F_t|/(\pi a) = \rho g a(2/\pi - 1/2).$$

Problème 5 Une huile (fluide newtonien) de viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ est placée entre deux parois solides (plans parallèles et horizontaux) séparées d'une distance h. La paroi supérieure est déplacée à une vitesse constante U.

2. écrire les équations de Navier-Stokes après simplification des termes ?
3. résoudre ces équations pour déterminer le profil de vitesse en régime laminaire ?
4. comment définiriez le nombre de Reynolds ? Que vaut-il (pour l'application numérique on prendra pour viscosité de l'huile $\mu = 1$ Pa·s et pour volumique $\rho = 1000$ kg/m^3 ; l'entrefer est $h = 1$ mm et la vitesse $U = 10$ mm/s) ;
5. montrer à partir des équations de conservation du mouvement (et des invariances du problème) que, quelle que soit la loi de comportement, la contrainte de cisaillement est constante pour cette géométrie ;
6. en se servant du modèle de viscosité de Prandl, calculer le profil de vitesse en régime turbulent (ce régime est *stricto sensu* valable que pour le régime turbulence, c'est-à-dire à une distance suffisamment grande des parois, mais on négligera cet aspect et on se servira de la condition à la limite en $y = h$ pour déterminer la constante d'intégration).

Réponse : Il s'agit d'une question de cours. On se reportera à la démonstration du cours. On doit obtenir :

$$u = U\frac{y}{h}, \text{ donc } \tau = \mu\dot{\gamma} = \mu\frac{U}{h}$$

On définit le nombre de Reynolds comme étant

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U h}{\mu} = \frac{10^3 \times 10^{-2} \times 10^{-3}}{1} = 10^{-2}$$

On est en régime permanent et invariant par translation selon x, donc

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \varrho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}, \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

Il s'ensuit que τ est constant

$$\tau = \rho\kappa^2 y^2\left(\frac{\mathrm{d}\langle u\rangle}{\mathrm{d}y}\right)^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\langle u\rangle}{\mathrm{d}y} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho\kappa^2 y^2}}$$

soit par intégration

$$\langle u\rangle = \sqrt{\frac{\tau}{\rho\kappa^2}}\ln y + a,$$

avec a une constante d'intégration. En considérant que $\langle u\rangle(h) = U$, on a

$$\langle u\rangle = U + \sqrt{\frac{\tau}{\rho\kappa^2}}\ln\frac{y}{h}.$$