Correction de l'examen du 16 avril 2012

Problème 1 Un cylindre de rayon $r_1 = 1$ cm et de hauteur $h = 10$ cm tourne à l'intérieur d'un autre cylindre de rayon $r_2 = 2$ cm. L'entrefer est rempli d'un fluide newtonien de viscosité $\mu = 1$ Pa·s et de masse volumique $\rho = 1000$ kg/m^3. Calculer la force de frottement, puis le couple qu'il faut exercer pour déplacer le cylindre à la vitesse $\Omega = 10$ rad/s. Faire les applications numériques. Calculer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement dans l'entrefer.

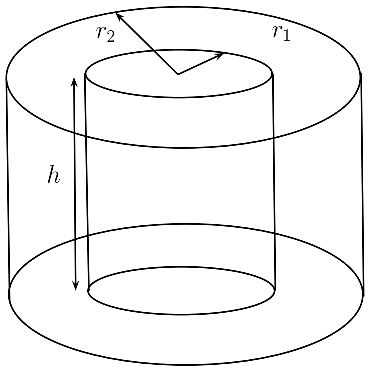

Figure 1: cisaillement d'un fluide entre deux cylindres.

Réponse : La vitesse en r_1 est

$$U = \Omega r_1.$$

donc la contrainte de cisaillement est

$$\tau = \mu \frac{U}{e},$$

avec $e = r_2 - r_1$ l'entrefer. La force de frottement est donc

$$F = \int \tau \mathrm{d}S = \tau S = 2\pi\mu h \frac{\Omega r_1^2}{e}$$

avec $S = 2\pi r_1 h$ la surface du cylindre en contract avec le fluide.

Le couple est par définition

$$C = \int \tau r_1 \mathrm{d}S = r_1 \tau S = 2\pi\mu h \frac{\Omega r_1^3}{e}$$

AN: $F = 6,28 \times 10^{-2}$ N et $C = 6,28 \times 10^{-4}$ N·m.

Le nombre de Reynolds est

$$Re = \frac{\rho U e}{\mu} = 1$$

L'écoulement est laminaire.

Problème 2 On utilise un tensiomètre de Noüy de rayon extérieur $R_2 = 10$ cm et de largeur $\Delta R = R_2 - R_1 = 5$ mm. On le place à la surface d'un fluide dont on veut mesurer la tension de surface. Pour soulever le tensiomètre, on doit exercer une force $F = 10$ mN (en plus du poids propre du tensiomètre). Calculer la tension de surface du liquide. (On pourra faire l'approximation $\pi = 3$ dans l'application numérique).

Réponse : voir cours p. 22.

AN

$$F = 4\pi R\gamma \text{ avec } R \approx \frac{R_2 + R_1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{F}{4\pi R} \approx 8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}$$

(on peut poser le calcul exact en écrivant : $F = 2\pi(R_1 + R_2)\gamma$, mais on peut se servir d'une approximation comme $R \approx R_1$)

Problème 3 Convertir 10 daN/mm^2 dans le système d'unités international (kg s m).

Réponse : 10^8 kg·s^{-2}·m^{-1}.

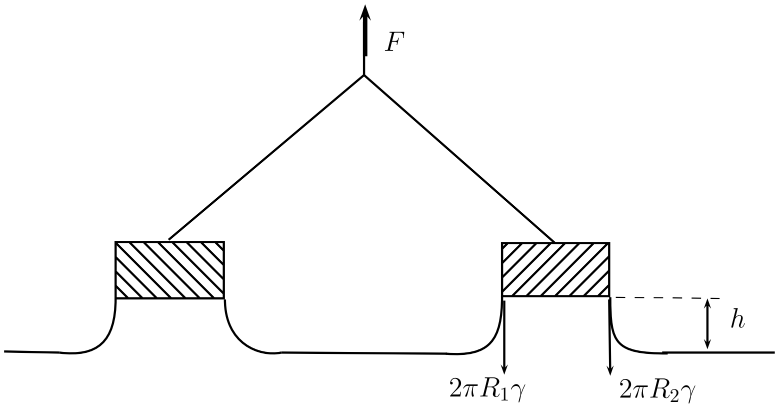

Figure 2: tensiomètre de Noüy.

Problème 4 Un projet prévoit la construction d'une galerie (fermée) sur le fond du lac Léman. En considérant que cette galerie est un tuyau de section carrée (côté $a = 10$ m), long de 20 km, à une profondeur moyenne de $h = 150$ m, calculer la force d'Archimède qui s'exerce sur ce tunnel. Quelle est la pression moyenne qui s'exerce sur le toit de la galerie ? Faire les applications numériques.

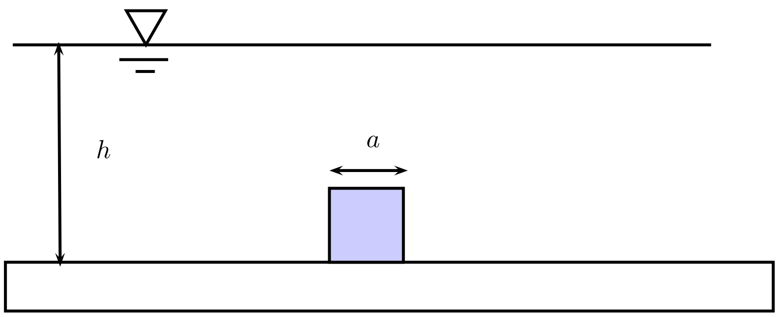

Figure 3: tunnel sous le lac Léman.

Réponse : la force d'Archimède équivaut au poids du volume d'eau déplacé et agit dans le sens vertical ascendant. Donc

$$F_a = \rho g V = \rho g a^2 L = 2 \times 10^{10}\ \text{N}$$

La force de pression sur le toit est égale au poids propre de l'eau ($p = \rho g(h - a)$) et agit dans le sens vertical descendant

$$F_p = -aLp = -\rho g(h - a)aL = -2,8 \times 10^{11} \text{ N}$$

Problème 5 Au fond d'une retenue d'eau, dont la profondeur est $h = 10$, est aménagée dans le mur de retenue une trappe de forme carrée (côté $a = 1$ m), qui sert à vidanger l'eau (voir figure 4). Calculer la distribution et la force de pression qui s'exerce sur cette trappe.

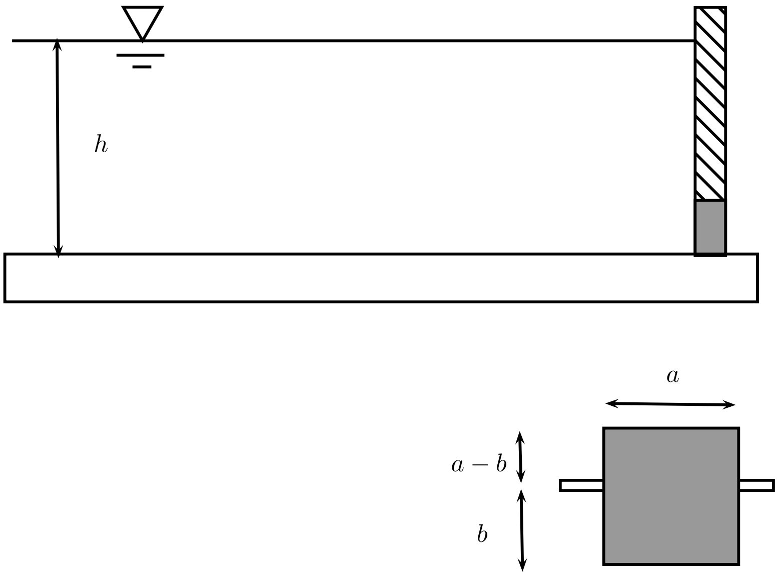

Figure 4: système de vidange de la retenue.

Réponse : la pression est distribuée de façon hydrostatique : $p = \rho g(h - y)$. La force de pression est

$$F = a\int_0^a \rho g(h - y)\mathrm{d}y = a\rho g\left[hy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^a = a^3\rho g\left(\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\right) = 95 \text{ kN}$$

Problème 6 On reprendre la question précédente. La trappe est une plaque en métal, articulée autour d'un axe (supposé de petit diamètre) de telle sorte que les moments de forces de pression se contrebalancent. Calculer la distance b optimale, qui permet l'équilibre des moments des forces de pression de part et d'autre de l'axe de rotation de la plaque. Faire l'application numérique.

On écrit les moments de contraintes par rapport au point B (axe)

$$\int_0^b \rho g(b-y)(h-y)\mathrm{d}y = \int_b^a \rho g(h-y)(y-b)\mathrm{d}y$$

soit

$$\rho g \left[bhy - \frac{by^2}{2} - \frac{hy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^b = \rho g \left[-bhy + \frac{by^2}{2} - \frac{hy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_b^a$$

d'où

$$b = \frac{2a^2 - 3ah}{3(a-2h)} \approx 50 \text{ cm}$$

le résultat est prévisible car à 10 m de fond, avec une plaque de 1 m de hauteur, la pression est quasiment uniforme, donc le point d'application est au milieu de la plaque.