Conditions d'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Documentation autorisée : aucune documentation sauf formulaire A4

Matériel autorisé : calculatrice scientifique simple

Durée de l'examen : 2 h 15 (8 h 15–10 h 30)

Date et lieu : 26 juin 2012 salles INM200 et INM202

---

1. Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les exercices y figure !
2. **Écrivez vos noms et prénom(s) en lettres capitales.**
3. L'examen comporte 5 exercices. **Aucun document n'est autorisé, à l'exception d'un formulaire recto-verso au format maximal A4.**
4. **Le résultat des calculs devra être encadré et écrit de façon très lisible. Les calculs seront éventuellement joints sur des feuilles au propre.** Les feuilles mal écrites ou écrites avec un crayon papier seront considérées comme des brouillons et ne seront pas prises en compte. Pour les applications numériques, ne pas oublier les unités.
5. Le barème de chaque question est indiqué au début de chaque question. L'examen comporte des questions « bonus » (il est noté sur 7,0 points). Choisissez bien vos questions pour optimiser vos points.
6. Il n'y pas de pièges, mais il faut aller vite...

Problème 1 Un architecte souhaite créer un « jardin à la babylonienne », c'est-à-dire un aménagement avec des jardins en terrasse. Pour amener l'eau, l'idée est de créer des réservoirs en cascade, reliés entre eux par des canaux de section trapézoïdale, avec une pente des parois latérales de 45°. Le canal (fond et parois) est en terre battue. Voir figure 1.

(a) [0,30] sachant que chaque réservoir est muni d'un orifice de rayon a placé tout en bas du mur du réservoir et que chacun de ces réservoirs est plein d'eau (niveau H), mais ne déborde pas, calculez le débit transitant par ces réservoirs ;

(b) [0,50] calculez la hauteur d'eau en régime permanent uniforme dans les canaux ;

(c) [0,20] calculez le nombre de Froude correspondant au débit calculé en (a) ;

(d) [0,40] calculez la hauteur critique et tracez la forme de la courbe de remous.

Données numériques :

- Hauteur des réservoirs et hauteur (selon la verticale) des canaux $H = 1$ m
- Inclinaison des pentes du canal 45°
- Largeur de canal $B_c = 0{,}1$ m
- Largeur de réservoir $B_r = 1$ m
- Rayon de l'orifice $a = 10$ cm
- canal en terre battue $K = 40$ m$^{1/3}$/s
- pente $i = 1$ %
- rappel : la hauteur critique est définie comme étant la hauteur d'écoulement pour laquelle $Fr = Q/(S\sqrt{gh}) = 1$

Formulaire :

- Formule de Manning Strickler : $\tau_p = \rho g \bar{u}^2/(K^2 R_H^{1/3})$
- $R_H = S/\chi$ avec S section mouillée et χ périmètre mouillé

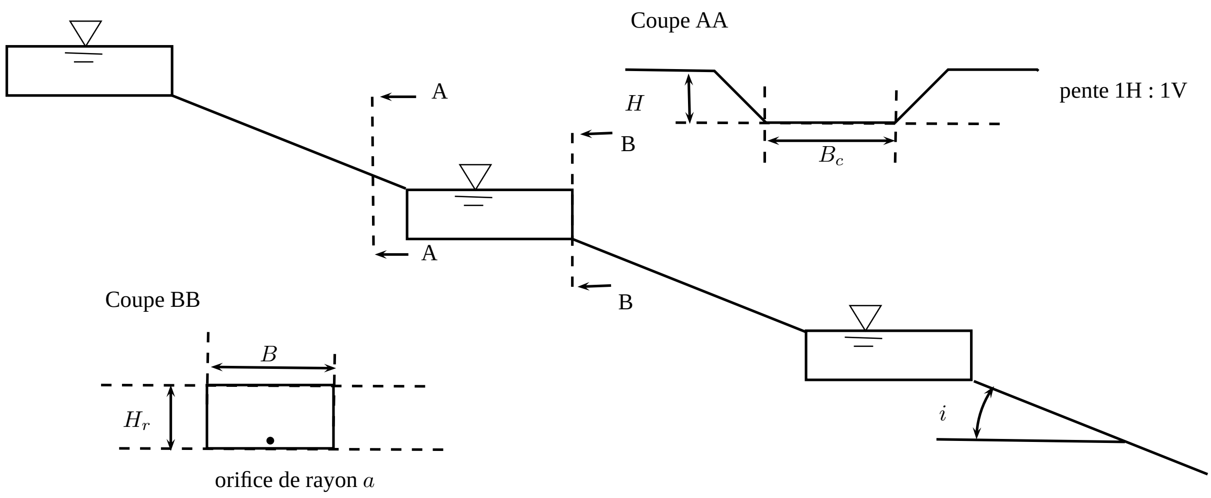

Figure 1 : schéma du cheminement de l'eau dans les jardins à la babylonienne.

Problème 2 Considérons une rivière dont le lit est composé de gravier de diamètre $d_{90} = 50$ mm ; sa pente est de 10 cm/km. La section est rectangulaire et la largeur est de 80 m. En régime permanent uniforme, le débit est de 10 m^3/s. On demande de calculer :

(a) [0,2] la hauteur critique (canal infiniment large) ;

(b) [0,2] le coefficient de Manning-Stricker ;

(c) [0,2] la hauteur normale ;

(d) [0,2] le rayon hydraulique ;

(e) [0,2] le nombre de Froude et le type de régime ;

(f) [0,2] la contrainte de cisaillement au fond ;

(g) [0,2] la pression au fond.

Formulaire :

(a) Formule de Jäggi : $K = 23{,}2/d_{90}^{1/6}$

(b) Formule de Manning Strickler : $\tau_p = \rho g \bar{u}^2/(K^2 R_H^{1/3})$

Problème 3 Un barrage-poids est formé par un prisme triangulaire en béton de masse volumique ρ_b, dont l'arête amont est verticale. On cherche quelle condition doit remplir l'angle au sommet I pour que le barrage n'ait pas tendance à basculer vers l'aval autour de 0, lorsque l'eau, de masse volumique ρ, atteint le haut du barrage, on supposera que la pression le long de AO est la pression atmosphérique. Application numérique pour une densité $d = \rho_b/\rho = 2{,}2$ une masse volumique $\rho = 1$ g/cm^3, une hauteur $h = 10$ m. On demande de calculer :

(a) [0,25] la distribution de pression le long du mur AI ;

(b) [0,25] la force totale de pression exercée par l'eau sur le mur ;

(c) [0,50] les moments de force résistant et de pression ;

(d) [0,25] la condition sur a pour que le barrage-poids soit stable. En déduire l'angle α.

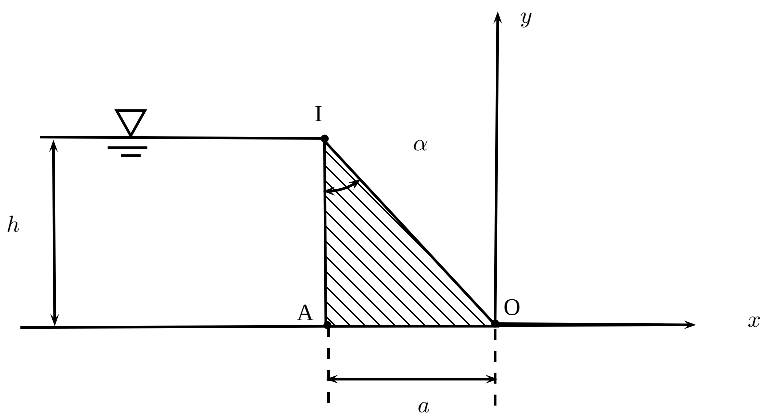

Figure 2 : schéma du barrage.

Problème 4 Du sable fin sédimente dans de l'eau au repos. On suppose que la forme des grains est sphérique et qu'ils ont tous le même diamètre $d = 2a = 200$ µm. La viscosité de l'eau est $\mu = 10^{-3}$ Pa s. La masse volumique du sable est 2500 kg/m^3.

(a) [0,50] écrire le bilan des forces sachant que la force visqueuse est $F = 6\pi\mu a u$ avec u la vitesse de la particule de sable par rapport à l'eau, quand le nombre de Reynolds particulaire $\mathrm{Re} = \frac{2\varrho a u}{\mu} \to 0$;

(b) [0,50] en supposant que le régime est laminaire, calculez la vitesse de sédimentation u. Que vaut le nombre de Reynolds ? Qu'en-déduisez-vous ? ;

(c) [0,25] en se servant de l'abaque de la figure 3, calculez la vitesse réelle.

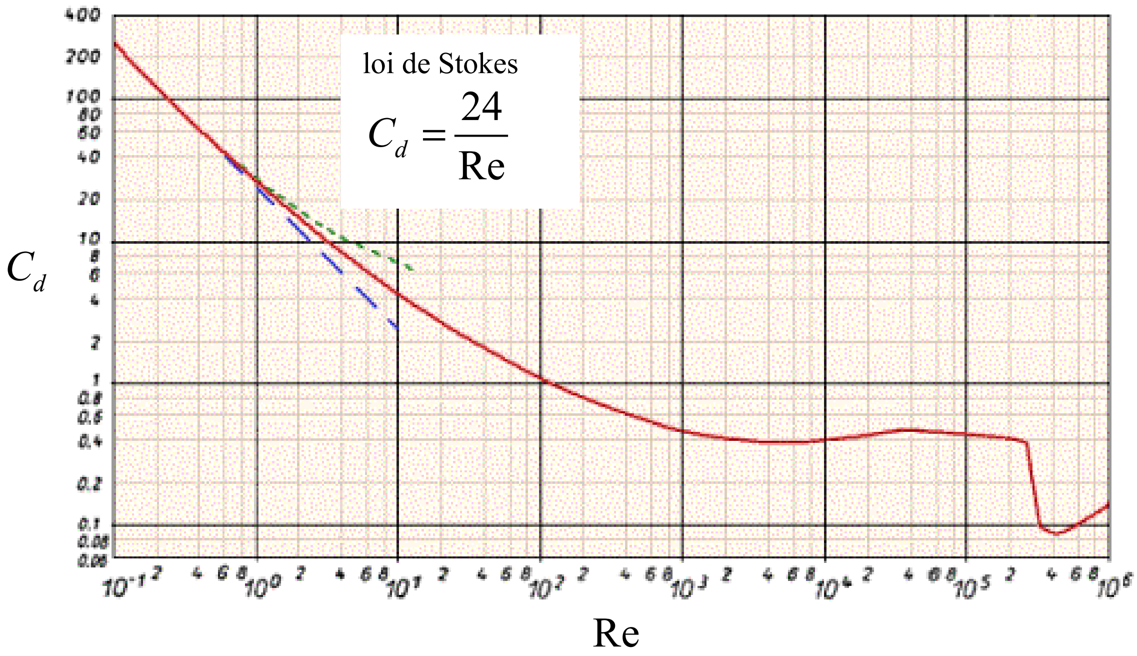

Figure 3 : variation du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds particulaire avec $C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi\varrho a^2 u^2}$ et $\mathrm{Re} = \frac{2\varrho a u}{\mu}$.

Problème 5 Un tapis roulant est constitué d'une bande qui tourne à une vitesse constante U. Le tapis roulant est initialement dans une position horizontale. Une buse déverse un débit q par unité de largeur sur le tapis roulant. Le fluide est newtonien, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ. L'épaisseur de fluide sur le tapis roulant est h. Le fluide ainsi transporté est déversé dans un bac.

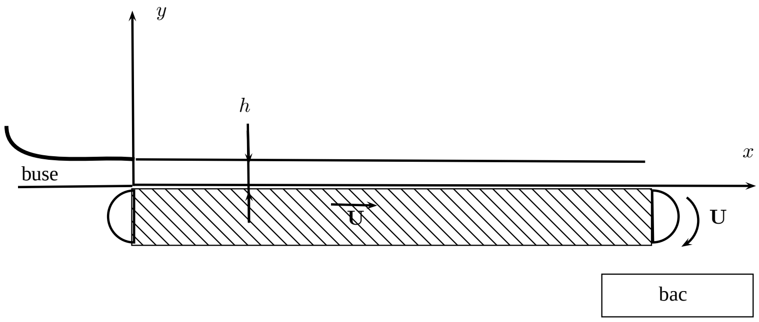

Figure 4 : tapis roulant transport du fluide.

Données :

- $\mu = 2$ Pa·s ;
- $\rho = 1000$ kg/m^3 ;
- $U = 0{,}5$ cm/s ;
- $q = 1$ cm^2/s.

(a) [0,70] En supposant que l'écoulement est permanent uniforme sur le tapis roulant, écrire les équations de Navier-Stokes simplifiées et les conditions aux limites cinématiques et dynamiques. Pour cela on supposera que l'air ambiant n'exerce aucune contrainte sur la surface libre du film de fluide.

(b) [0,25] Montrer que la pression est hydrostatique.

(c) [0,25] Calculer le profil de vitesse selon la hauteur.

(d) [0,25] Calculer la hauteur d'écoulement en fonction de la vitesse du tapis U et du débit injecté q.

(e) [0,25] L'écoulement est laminaire ou turbulent ?

Les équations de Navier-Stokes sont en dimension 2 :

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

– Conservation de la quantité de mouvement

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\varrho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\varrho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),$$

avec (g_x,g_y) la projection du vecteur gravité **g** sur les axes x et y.