Correction de l'examen du 26 juin 2012

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Documentation autorisée : aucune documentation sauf formulaire A4

Matériel autorisé : calculatrice scientifique simple

Durée de l'examen : 2 h 15 (8 h 15–10 h 30)

Date et lieu : 26 juin 2011 salle INM 200 ou 202

Problème 1 Un architecte souhaite créer un « jardin à la babylonienne », c'est-à-dire un aménagement avec des jardins en terrasse. Pour amener l'eau, l'idée est de créer des réservoirs en cascade, reliés entre eux par des canaux de section trapézoïdale.

(a) [0,30] sachant que les réservoirs sont munis d'un orifice de rayon a placé tout en bas du mur du réservoir et que les réservoirs sont pleins d'eau, mais ne débordent pas, calculez le débit transitant par ces réservoirs ;

(b) [0,50] calculez la hauteur d'eau ;

(c) [0,20] calculez le nombre de Froude au débit calculé en (a) ;

(d) [0,40] calculez la hauteur critique et tracez la forme de la courbe de remous.

Réponse :

On a $v = \sqrt{2gH} = 4{,}4$ m/s, soit $Q = 140$ l/s

Il faut ensuite résoudre

$$Q = S\sqrt{i}R_h^{2/3}K,$$

avec $S = h(B_c + h)$ et $R_h = S/(B_r + 2\sqrt{2}h)$. On trouve $h = 32$ cm.

La vitesse est $u = Q/S = 1{,}04$ m/s, soit $Fr = 0{,}59$. L'écoulement est subcritique.

Pour calculer la hauteur critique, on résout

$$Fr = 1 \Rightarrow \sqrt{gh} = Q/S = \frac{Q}{(B_c + h)h},$$

on trouve $h_c = 0{,}251$ m. Gentille courbe de remous...

Problème 2 Considérons une rivière dont le lit est composé de gravier de diamètre $d_{90} = 50$ mm ; sa pente est de 10 cm/km. La section est rectangulaire et la largeur est de 80 m. En régime permanent uniforme, le débit est de 10 m^3/s. On demande de calculer :

(a) [0,2] la hauteur critique (canal infiniment large) ;
(b) [0,2] le coefficient de Manning-Stricker ;
(c) [0,2] la hauteur normale ;
(d) [0,2] le rayon hydraulique ;
(e) [0,2] le nombre de Froude et le type de régime ;
(f) [0,2] la contrainte de cisaillement au fond ;
(g) [0,2] la pression au fond.

Réponse : on a

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = 12 \text{ cm.}$$

La valeur de K est

$$K = 38 \text{ m}^{1/3}\text{ s}^{-1}.$$

La vitesse (p. 94) est $\bar{u} = K\sqrt{i}R_H^{2/3}$, soit encore

$$\frac{Q}{Bh_n} = K\sqrt{i}\left(\frac{Bh_n}{B+2h_n}\right)^{2/3}$$

On trouve $h_n = 51$ cm. Le rayon hydraulique est

$$R_H = \frac{Bh_n}{B+2h_n} = 51 \text{ cm}$$

Le nombre de Froude est

$$Fr = \frac{Q}{Bh_n\sqrt{gh_n}} = 0{,}11$$

Le régime est subcritique (fluvial). La contrainte au fond est

$$\tau_b = \rho g h_n \sin i = 0{,}5 \text{ Pa.}$$

La pression étant hydrostatique, on a

$$p = \rho g h_n \cos i = 5024 \text{ Pa}.$$

Problème 3 Un barrage-poids est formé par un prisme triangulaire en béton de masse volumique ρ_b, dont l'arête amont est verticale. On cherche quelle condition doit remplir l'angle au sommet I pour que le barrage n'ait pas tendance à basculer vers l'aval autour de 0, lorsque l'eau, de masse volumique ρ, atteint le haut du barrage, on supposera que la pression le long de AO est la pression atmosphérique. Application numérique pour une densité $d = \rho_b/\rho = 2{,}2$, une masse volumique $\rho = 1$ g/cm^3, une hauteur $h = 10$ m. On demande de calculer :

(a) [0,25] la distribution de pression le long du mur AI ;
(b) [0,25] la force totale de pression exercée par l'eau sur le mur ;
(c) [0,50] les moments de force résistant et de pression ;
(d) [0,25] la condition sur a pour que le barrage-poids soit stable. En déduire l'angle α.

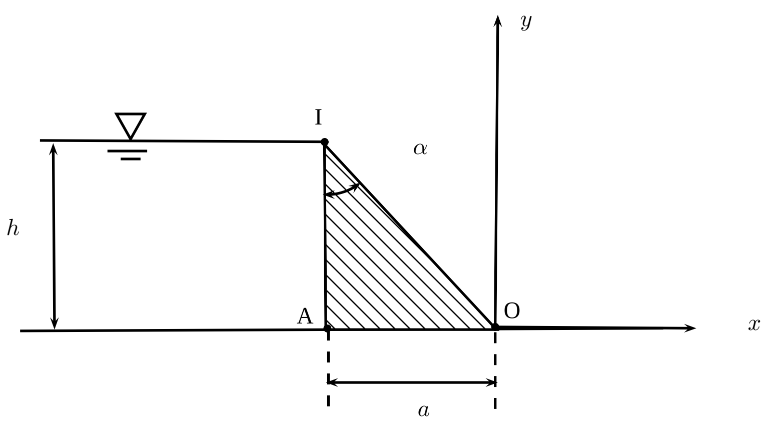

Figure 1 : schéma du barrage.

Réponse : La pression est distribuée linéairement

$$p = \rho g (h - y)$$

La force totale par unité de largeur du barrage est donc

$$F_p = \int_0^h p(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\rho g h^2 = 490 \text{ kN/m}$$

Le barrage est soumis à deux moments : gravité (résistant) et pression (déstabilisant). La force de pression s'applique à une hauteur $h_a = h/3$ tandis que la formule du barycentre montre que le centre de gravité se trouve à $2a/3$ de O. La condition d'équilibre est donc

$$Mg \times \frac{2}{3}a > \frac{1}{6}\rho g h^3,$$

avec $M = \rho_b a h/2$ la masse du barrage par unité de largeur. Soit

$$a > \frac{h}{\sqrt{2d}} = 4{,}8 \text{ m},$$

L'angle minimal est donc :

$$\tan\alpha = \frac{a}{h} = 0{,}48$$

soit $\alpha = 25°$.

Problème 4 Du sable fin sédimente dans de l'eau au repos. On suppose que la forme des grains est sphérique et qu'ils ont tous le même diamètre $d = 2a = 200$ µm. La viscosité de l'eau est $\mu = 10^{-3}$ Pa s. La masse volumique du sable est 2500 kg/m^3.

(a) [0,50] écrire le bilan des forces sachant que la force visqueuse est $F = 6\pi\mu a u$ avec u la vitesse de la particule de sable par rapport à l'eau, quand le nombre de Reynolds particulaire $\mathrm{Re} = \frac{2\varrho a u}{\mu} \to 0$;

(b) [0,50] en supposant que le régime est laminaire, calculez la vitesse de sédimentation u. Que vaut le nombre de Reynolds ? Qu'en-déduisez-vous ? ;

(c) [0,25] en se servant de l'abaque de la figure 3, calculez la vitesse réelle.

Réponse : Il s'agit d'une question de cours. On se reportera à la démonstration du cours § 6.5.1, p. 138–139.

$$u = \frac{m'g}{6\pi\mu a} = \frac{2}{9}(\varrho_p - \varrho_f)\frac{a^2 g}{\mu} = 3{,}2 \text{ cm/s}.$$

avec $m' = 4(\varrho_p - \varrho_f)\pi a^3/3$. On trouve $Re = 6$. On est un peu en dehors de l'application de la loi de Stokes. On a

$$\frac{1}{2}C_d \rho_f \pi a^2 u^2 = m'g,$$

soit

$$u = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{1}{C_d}\frac{\varrho_p - \varrho_f}{\varrho_f}ag}.$$

par itération on trouve $u = 3{,}6$ cm/s.

Problème 5 Un tapis roulant est constitué d'une bande qui tourne à une vitesse constante U. Le tapis roulant est initialement dans une position horizontale. Une buse déverse un débit q par unité de largeur sur le tapis roulant. Le fluide est newtonien, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ. L'épaisseur de fluide sur le tapis roulant est h. Le fluide ainsi transporté est déversé dans un bac.

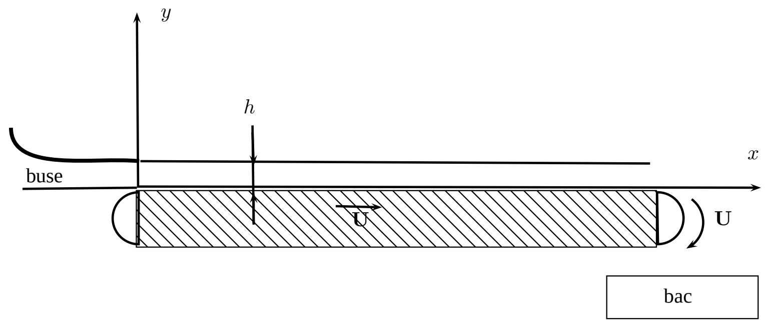

Figure 2 : tapis roulant transport du fluide (haut) position horizontale.

Données :
- $\mu = 2$ Pa·s ;
- $\rho = 1000$ kg/m^3 ;
- $U = 0{,}5$ cm/s ;
- $q = 1$ cm^2/s.

(a) [0,50] En supposant que l'écoulement est permanent uniforme sur le tapis roulant, écrire les équations de Navier-Stokes simplifiées et les conditions aux limites cinématiques et dynamiques. Pour cela on supposera que l'air ambiant n'exerce aucune contrainte sur la surface libre du film de fluide.

(b) [0,25] Montrer que la pression est hydrostatique.

(c) [0,25] Calculer le profil de vitesse selon la hauteur.

(d) [0,25] Calculer la hauteur d'écoulement en fonction de la vitesse du tapis U et du débit injecté q.

(e) [0,25] L'écoulement est laminaire ou turbulent ?

Réponse : Il s'agit d'une question de cours. On se reportera à la démonstration du cours § 6.10, p. 157–160. Il faut de prendre $\theta = 0$ et de changer les conditions aux limites. On trouve $u = U$ partout ! On a donc $h = q/U = 2$ cm. On a $Re = Uh/\nu = 0{,}005 \times 0{,}02 \times 10^3/2 = 0{,}05$. On peut considérer que l'écoulement est laminaire.