Examen d'été - Juillet 2013

Exercice 1

a)

La formule de Torricelli, donnant la vitesse de l'écoulement lors d'une vidange, s'écrit :

$$U = \sqrt{2gh}.$$

On en déduit le débit de sortie Q_{buse} et le débit par unité de largeur dans le canal q_{canal} :

$$Q_{buse} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \sqrt{2gh} = 2.75\ m^3/s,$$

$$q_{canal} = \frac{Q_{base}}{l} = 0.55\ m^2/s.$$

b)

On suppose que la largeur du canal est bien plus grande que la hauteur d'eau, donc on peut écrire :

$$R_h = h.$$

Le coefficient de Manning-Strickler se calcule avec la formule de Jäggi :

$$K = \frac{23.2}{{d_{90}}^{1/6}} = 44.5\ m^{1/3}s^{-1}.$$

La hauteur d'eau en régime uniforme est donc :

$$h_n = \left(\frac{q}{K\sqrt{i}}\right)^{3/5} = 0.57\ m.$$

c)

La hauteur critique est donnée par la formule suivante (nombre de Froude $Fr = 1$) :

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = 0.31\ m.$$

d)

Au seuil, la hauteur d'eau est connue car on atteint la hauteur critique (seuil dénoyé). On utilise la conservation de la charge H pour calculer la hauteur d'eau h_a juste à l'amont du seuil :

$$H_s = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} = 0.47\ m,$$

avec H_s la charge spécifique. Ainsi,

$$H = p + H_s = 1 + 0.47 = 1.47\ m$$

et

$$h_a = H - \frac{q^2}{2gh_a^2}$$

$$h_a = 1.46\ m.$$

e)

La figure 1 résume les grandeurs caractéristiques calculées précédemment, ainsi que la forme de la ligne d'eau.

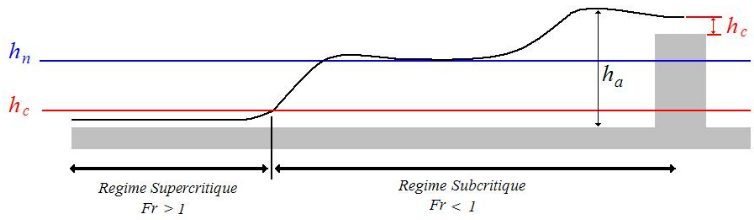

FIGURE 1

Exercice 2

a)

La hauteur critique est :

$$h_c = \left(\frac{Q}{L\sqrt{g}}\right)^{2/3} = 0.19\ m.$$

b)

La formule de Jäggi donne :

$$K = \frac{23.2}{d_{90}{}^{1/6}} = 44.5\ m^{1/3}s^{-1}.$$

c)

En tutilisant la formule de Manning-Strickler, on trouve la hauteur en régime uniforme :

$$h_n = \left(\frac{q}{K\sqrt{i}}\right)^{3/5} = 1.41\ m.$$

d)

Le rayon hydraulique est le rapport de la section sur le périmètre mouillé :

$$R_h = \frac{h_n L}{2h_n + L} = 1.37\ m.$$

e)

On calcul le nombre de Froude Fr :

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh_n}} = 0.05.$$

$Fr < 1$, donc l'écoulement est subcritique.

f)

La contrainte de cisaillement au fond du canal s'écrit (avec $\sin i \approx i$, i pente du canal) :

$$\tau_p = \rho g h_n i = 0.138\ N/m^2.$$

g)

La distribution des pressions est supposée hydrostatique :

$$p = \rho g h_n = 13800\ Pa.$$

Exercice 3

a)

On a la distribution suivante de la pression :

$$P(y) = \rho g y.$$

b)

On en déduit la force de pression s'exerçant sur le vanne par intégration sur la surface de la vanne ($dS = 2a\ dy$) :

$$F_p = 2\int_{h-a}^{h+a} \rho gya \ \mathrm{d}y = 2\frac{\rho gq}{2}\left((h+a)^2 - (h-a)^2\right) = 4\rho ga^2h.$$

c)

Le point d'application de la force (centre de poussée) se situe au 2/3 de la hauteur de la vanne pour la composante linéaire et à 1/2 pour la composante constante. En pondérant avec la distribution des pressions pour chaque composante, on obtient :

$$y_p = h - a + \frac{1}{2}2a\rho g(h-a)\ 2a + \frac{2}{3}2a\frac{1}{2}\rho g\ 2a\ 2a = h + \frac{a^2}{3h}.$$

d)

Le moment des forces de pression (point d'application en P) par rapport au point G s'écrit :

$$M(F_p/G) = (y_c - h)F_p = \frac{4}{3}\rho ga^4.$$

Ce moment ne dépend pas de la hauteur h, il en est de même pour le couple permettant de résister à cette action de la pression.

Exercice 4

a)

Le théorème de Bernoulli à la surface libre, entre l'amont et le seuil, s'écrit :

$$H + \frac{u_c^2}{2g} = H - y + \frac{u_0^2}{2g}.$$

On en déduit q en fonction des données du problème :

$$q = (H-y)\sqrt{u_c^2 + 2gy}.$$

b)

On cherche le débit maximal en annulant la dérivée de l'équation donnant l'expression de q :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} = -\sqrt{u_c^2 + 2gy} + \frac{2g(H-y)}{(u_c^2 + 2gy)} = 0.$$

La valeur correspondante de la différence de cotes y_m est ainsi :

$$y_m = \frac{H - u_c^2/g}{3}.$$

c)

On a :

$$u_c \approx 0.$$

$$\frac{1}{2g}\frac{q^2}{(H-g)^2} - y = 0.$$

On en déduit q dans ce cas précis :

$$q^2 = 2gy(H-y)^2,$$

$$q = (H-y)\sqrt{2gy}.$$

Exercice 5

a)

Le bilan des forces s'écrit, avec F_a la poussée d'Archimède, P le poids et F la force visqueuse :

$$F_a + P + F = 0,$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_f - \rho_p) + 6\pi\mu a u = 0.$$

b)

On a ainsi :

$$\mu = g\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_p - \rho_f)\frac{1}{6\pi a u}.$$

c)

La viscosité est :

$$\mu = 0.33 \ Pa \ s.$$

On peut ainsi calculer le nombre de Reynolds, confirmant que l'écoulement est laminaire :

$$Re = \frac{2\rho a u}{\mu} = 2 \cdot 10^{-5}.$$