Correction de l'examen intermédiaire de mécanique des fluides.

Joris Heyman

13 mai 2014

1 Poiseuille : $F = 4 \cdot 10^{-2}$N

Si le fluide est Newtonien, la contrainte est proportionnelle à la vitesse de cisaillement, c'est à dire au gradient de vitesse :

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{4\mu u_0}{h}\left(1 - \frac{2z}{h}\right).$$

En prenant $z = 0$ (où de façon équivalente $z = h$), on trouve :

$$\tau = \frac{4u_0}{h}.$$

Soit une force totale appliquée sur la plaque de $F = \tau S = 4 \cdot 10^{-2}$N.

2 Nombres adimensionnels : 3 nombres

Il y a 2 unités caractéristiques dans les paramètres donnés : mètres et secondes. L'angle n'a pas d'unité et est un nombre adimensionnel à part entière. Selon le cours on peut donc former $5 - 2 = 3$ nombres adimensionnels.

3 Modèle réduit : $Q_2 = \frac{1}{4\sqrt{5}}$ m^{3}s^{-1}.

L'égalité des nombres de Froude donne :

$$\frac{Q_1}{B_1\sqrt{gh_1^3}} = \frac{Q_2}{B_2\sqrt{gh_2^3}}.$$

L'échelle du modèle étant 1 :20, on a $B_2 = B_1/20$ et $h_2 = h_1/20$, ce qui donne :

$$\frac{Q_1}{B_1\sqrt{gh_1^3}} = \frac{20\sqrt{20^3}Q_2}{B_1\sqrt{gh_1^3}},$$

$$Q_2 = \frac{Q_1}{20\sqrt{20^3}} = \frac{1}{4\sqrt{5}}\ \mathrm{m^3s^{-1}}.$$

4 Unité de Pression : kg/m^2 n'est pas une pression.

5 Troposphère : $\rho = 0.72$ kg·m^{-3}

Il faut utiliser ici la loi de Pascal :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g.$$

Selon la loi donnée dans l'énoncé, la dérivée de $P(z)$ est :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{0.0065 \times 5.255 \times P_{atm}}{288}\left(1 - \frac{0,0065z}{288}\right)^{4,255},$$

donc la masse volumique de l'air est :

$$\rho(z) = \frac{0.0065 \times 5.255 \times P_{atm}}{288g}\left(1 - \frac{0,0065z}{288}\right)^{4,255},$$

ce qui donne à $z = 5000$ m, $\rho = 0.72$ kg·m^{-3}. Notez que la masse volumique de l'air en altitude est plus *faible* que la masse volumique de l'air à la surface de la terre !

6 Sphère creuse : $r > 24$ cm

L'équilibre se fait entre la poussée d'Archimède et le poids de la sphère. La poussée d'Archimède est proportionnelle au volume immergé (la moitié de la sphère), soit :

$$\mathcal{A} = \rho_e g \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Le poids est proportionnel à la surface de la sphère par son épaisseur :

$$\mathcal{P} = \rho_a g 4\pi r^2 e.$$

Avec la condition $\mathcal{A} > \mathcal{P}$ (la sphère flotte), on obtient :

$$r > 6e\frac{\rho_a}{\rho_e} = 0.24 \text{ m}.$$

7 Seringue : $t = 1$ s

On utilise le théorème de Bernoulli entre un point dans la seringue (pression $4F/(\pi D^2)$ et vitesse nulle) et un point juste en dehors de l'embout (pression nulle et vitesse inconnue v) :

$$v = \sqrt{\frac{8F}{\pi D^2 \rho}}.$$

Le temps nécessaire pour vider la seringue est égal à son volume initial, divisé par le débit (constant) sortant :

$$t = \frac{V}{Q} = L\sqrt{\frac{\pi D^2 \rho}{8F}}\frac{D^2}{d^2} = 1 \text{ s}.$$

8 Surfaces et pressions : 2 à 3

On peut procédé de plusieurs façons ici : (1) on calcule les intégrales des forces de pression sur chacune des surfaces et on les compare où (2) on utilise le théorème d'Archimède disant que l'intégrale des forces de pression autour d'un objet immergé est égale à la poussée d'Archimède (qui est proportionnel à son volume). La surface qui est soumise au plus de forces de pression (force résultante colinéaire à la poussée d'Archimède, mais de sens opposé) est donc celle qui a le plus petit volume en dessous d'elle (la plus petite poussée d'Archimède), c'est à dire 2 à 3.

9 Vanne articulée : $P_2 = 2,9 \cdot 10^5$ Pa

La vanne s'ouvre si le moment des forces résultantes autour de l'articulation est positif. Le moment du aux forces de pression à gauche de la vanne est :

$$M_1 = \frac{1}{2}l^2(P_1 + \rho g h) + \rho g\frac{l^3}{6}.$$

Le moment du aux forces de pression à droite de la vanne est :

$$M_2 = \frac{P_2}{2}l^2.$$

Donc

$$P_2 = P_1 + \rho g(h + \frac{l}{3}) = 2,9 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$