Conditions d'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Documentation autorisée : formulaire A4 recto verso

Matériel autorisé : calculatrice scientifique

Durée de l'examen : 2 h 30

Date et lieu : 19 juin 2014 – salles CM 1106 et PO 01, 8 h 30 à 11 h 00

---

1. Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les problèmes y figure ! **Il y a un formulaire à la dernière page de l'examen.**
2. L'examen comporte 5 problèmes et il est noté sur 6,5 points.
3. **Pour le problème n° 1 à rendre, il faut écrire vos nom et prénom en lettres capitales sur les feuilles d'examen que vous rendez**. Vous ne devez rendre d'explications que pour le problème n° 1. **Pour ce problème, le résultat des calculs devra être encadré et écrit de façon très lisible. Les calculs seront éventuellement joints sur des feuilles au propre.** Les feuilles mal écrites ou écrites avec un crayon papier seront considérées comme des brouillons et ne seront pas prises en compte. Pour les applications numériques, ne pas oublier les unités. Pour les problèmes nos 2 à 5, il s'agit d'un questionnaire à choix multiples. Il faut indiquer vos réponses sur la première page de cet examen. Vous ne devez rendre que cette première page et le problème n° 1.
4. **Aucun document n'est autorisé, à l'exception d'un formulaire recto-verso au format maximal A4.**
5. **Calculatrice scientifique autorisée.** Pas de machine avec connexion wifi, bluetooth, ou tout autre type de transmission. La mémoire vive de la calculatrice ne doit servir qu'aux calculs et non à stocker de l'information.
6. Le barème est indiqué au début de chaque question. Choisissez bien vos questions pour optimiser vos points.
7. Il n'y a qu'une seule bonne réponse. **Cocher une mauvaise réponse entraîne une pénalité de 0,2 point.**

Problème 1 Un bassin sert à alimenter en eau une machine hydraulique (une simple turbine pour produire de l'électricité). Se reporter au plan de la figure 1. Le bassin est alimenté par un torrent, dont le débit usuel est $Q_s = 100$ l/s (débit de service). Le bassin est muni d'un déversoir (seuil) qui en cas de trop plein (crue du torrent), évacue les eaux en direction d'un canal.

L'alimentation de la conduite de la machine se fait par une conduite verticale de diamètre d et de longueur $L_c = 1$ m. La hauteur d'eau dans le bassin est $h = 5$ m et en conditions usuelles de fonctionnement, l'eau est supposée au repos. La longueur et la largeur du bassin sont $L = 100$ m et $W = 50$ m. Le déversoir est une paroi mince de pelle $p = 5$ m et de largeur $\ell = 1$ m. L'eau se déverse dans un coursier (canal en béton), puis dans une rivière de largeur $B = 4$ m et de pente $i = 0{,}1$ %. Le lit de la rivière est composé de gravier, dont le diamètre d_{90} vaut 1 cm.

Lorsque le torrent entre en crue, son débit atteint $Q_c = 2$ m^3/s. Dans de telles circonstances, la conduite d'alimentation est coupée et toute l'eau qui arrive par le torrent est déversée dans la rivière.

(a) [0,50] Calculer le diamètre de la conduite d'alimentation de la machine hydraulique pour que le débit soit celui du torrent en conditions usuelles ($Q = Q_s$).

(b) [0,25] Calculer la hauteur dans le bassin lorsque le torrent est en crue ($Q = Q_c$).

(c) [0,25] Calculer la hauteur normale dans la rivière en considérant une loi de Manning-Strickler pour la résistance du lit (pour $Q = Q_c$).

(d) [0,25] Calculer la hauteur critique dans le canal (pour $Q = Q_c$).

(e) [0,50] Tracer qualitativement la ligne d'eau (courbe de remous) en la plaçant correctement par rapport aux grandeurs caractéristiques (en indiquant les différentes hauteurs caractéristiques et la courbe de remous). Commenter le graphique avec les caractéristiques essentielles de la ligne d'eau (pour $Q = Q_c$).

(f) [0,25] Lorsque la crue arrive, on suppose que le débit du torrent passe soudainement de Q_s à Q_c. Cela provoque une variation graduelle de hauteur d'eau dans le bassin. En faisant un bilan des flux d'eau entrant et sortant au moment d'une crue, écrire l'équation différentielle régissant la hauteur d'eau dans le bassin dans le régime transitoire. Tracer la forme de la solution.

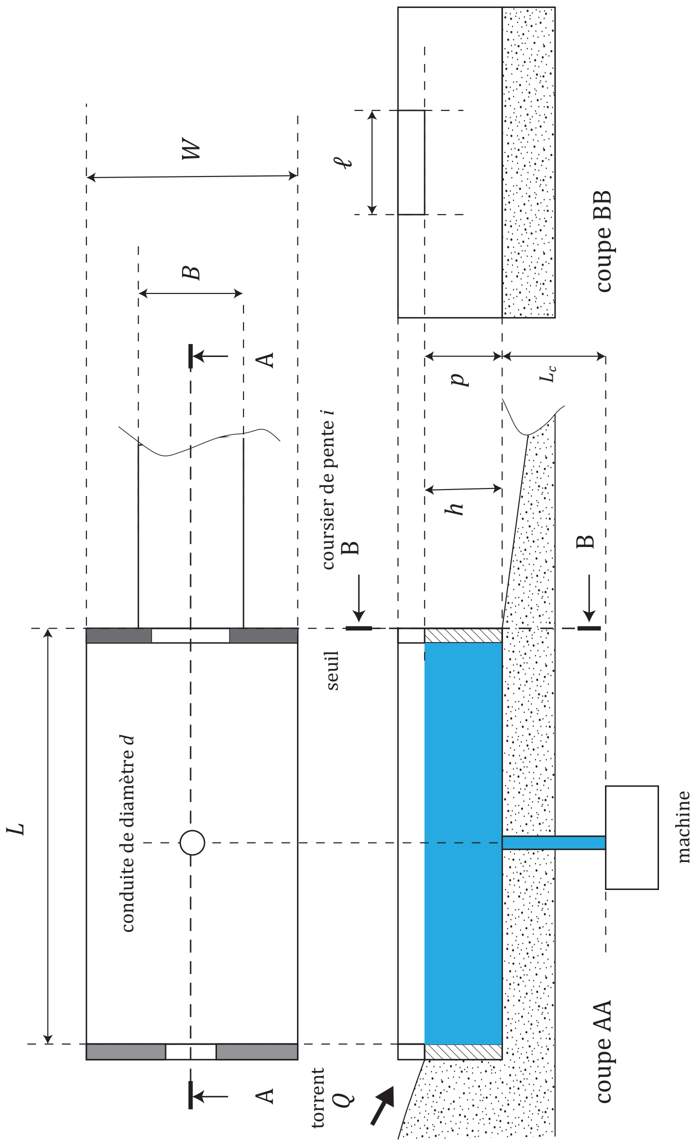

Figure 1 : schéma de l'aménagement étudié. La hauteur du bassin vaut $h = 5$ m. Pour le gravier du canal, le diamètre d_{90} vaut 10 mm. La longueur de la conduite est $L_c = 1$ m. La longueur et largeur du bassin sont $L = 100$ m et $W = 50$ m. Le déversoir a pour largeur $\ell = 1$ m ; sa pelle vaut $p = 5$ m et on suppose le seuil est dénoyé. La pente du coursier et de la rivière est $i = 0{,}1$ %.

Examen du 19 juin 2014

---

1 Problème 1

À rendre sur feuille libre

---

2 Problème 2

Vous vous intéressez au mouvement des tortues marines. En première approximation, vous considérez qu'une tortue est assimilable à une demie sphère de rayon $R = 25$ cm et de masse volumique $\varrho_t = 1200$ kg·m^{-3}. La force de portance (force verticale dirigée vers le haut) est fonction de la vitesse de la tortue v_t et de celle de l'eau u_e (voir figure 1) :

$$F_L = \varrho C_L \pi R^2 \frac{u_e^2}{2} - \varrho \pi R^2 \frac{v_t^2}{2},$$

avec ϱ la masse volumique de l'eau et C_L le coefficient de portance, qui est une fonction du nombre de Reynolds $Re = Rv_t/\nu$ avec ν la viscosité cinématique de l'eau. On suppose ici [1]

$$C_L = \frac{27}{16}.$$

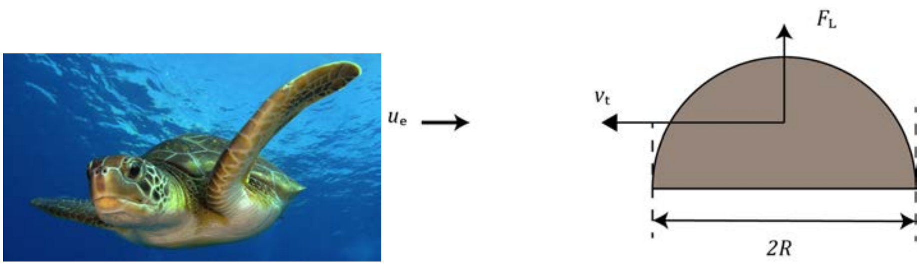

Figure 1 : *tortue marine et schématisation par une demie sphère.*

Question 1 [0,25] Calculer la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur la tortue ;

- A 385 N
- B 770 N
- C On ne peut pas répondre car la pression dépend de la profondeur.
- D 642 N
- E 321 N

Question 2 [0,25] Pour quelle valeur de v_t la force de portance est-elle maximale ?

- A $\sqrt{\frac{4}{3}\frac{\varrho_t - \varrho}{\varrho} Rg + \frac{27}{16} u_e^2}$
- B ∞
- C u_e
- D 0

---

1. Julien, P.-Y., *Erosion and Sedimentation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

Question 3 [0,50] Si la vitesse de l'eau est de 1 m/s, quelle doit être la vitesse de la tortue pour qu'elle reste à la même profondeur, c.-à-d. qu'elle ne remonte pas vers la surface ou ne coule pas vers le fond (c.-à-d., la somme des forces – à savoir poids, portance, pression – est nulle) ;

- A 1,5 km h^{-1}
- B On peut pas répondre car la vitesse dépend de la profondeur.
- C 2,5 km h^{-1}
- D 1,2 m s^{-1}
- E 1,5 m s^{-1}

Question 4 [0,25] Qu'est-ce qu'implique l'hypothèse d'un coefficient de portance constant ?

- A Implicitement cela traduit l'invariance du problème vis-à-vis des changements d'échelle.
- B Cela n'est en fait pas possible car il est bien connu que la force de portance autour d'un corps mobile est nulle. C'est le paradoxe de d'Alembert.
- C Implicitement on suppose qu'on est à suffisamment grand nombre de Reynolds pour que le coefficient C_L tende vers une asymptote.

---

3 Problème 3

Vous travaillez dans un cabinet d'architectes à la construction d'un hôtel aquatique. Votre rôle est principalement de faire des calculs de pression sur la structure. Les dimensions du caisson rectangulaire sont indiquées sur la figure 2. La largeur est $W = 3$ m. Ce caisson est également muni d'une (seule) grande baie vitrée (voir figure 2).

(a)

(b)

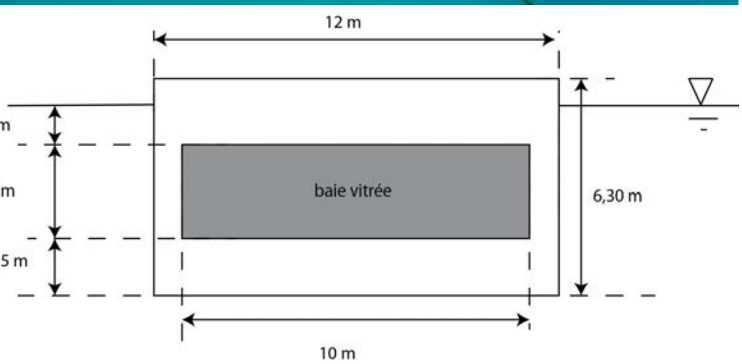

Figure 2 : *hôtel aquatique. (a) Exemple de réalisation et (b) vue de face du projet.*

Question 5 [0,50] Calculer la résultante des forces de pression sur le caisson.

- A 1,9 MN
- B 126 kPa.
- C 141 MN
- D 141 kPa
- E 126 MN

Question 6 [0,25] Sachant que le caisson de la structure émerge de 80 cm, calculer la masse volumique moyenne de ce caisson (c.-à-d. le rapport entre son poids et son volume) ?

- A 711 kg·m^{-3}
- B 873 kg·m^{-3}
- C 635 kg·m^{-3}
- D 787 kg·m^{-3}
- E 1000 kg·m^{-3}

Question 7 [0,25] Calculer la résultante des forces de pression sur la baie vitrée ?

- A 73.6 kPa
- B 736 kPa
- C 736 kN
- D 785 kN

Question 8 [0,25] Déterminer à quelle profondeur se situe le point d'application de cette force ?

- A −3,6 m
- B −2,8 m
- C −3 m
- D −4 m
- E −1 m

4 Problème 4

Un fluide visqueux s'écoule entre deux plans infinis verticaux. L'entrefer est e (voir figure 3). Le fluide a pour viscosité (dynamique) μ et masse volumique ϱ. Le régime est permanent. Il existe un gradient de pression induit par le champ de pesanteur $\boldsymbol{g}$ (pression hydrostatique), auquel s'ajoute un gradient vertical de pression, qui est noté a (avec $a > 0$). Ce gradient est produit par l'aspiration du fluide entre les deux plans. Pour faire l'étude on introduit un repère cartésien avec x l'axe horizontal, y l'axe vertical, et z (indiqué pour mémoire) un axe perpendiculaire au plan de la figure. Les composantes de vitesse sont $\boldsymbol{u} = (u,v,w)$, avec ici compte tenu de la géométrie du problème $u = w = 0$. On rappelle la notation abrégée : $\partial_x f = \partial f/\partial x$. L'objet du problème est de calculer le débit par unité de largeur q

$$q = \int_0^e v(x)\mathrm{d}x,$$

avec $v(x)$ la composante verticale de vitesse.

Question 9 [0,25] Après simplification des équations de Navier-Stokes, écrire les équations du mouvement (conservation de la quantité de mouvement).

- A $\partial_y p = 0$ et $\partial_t v = -\partial_x p + \mu\partial_{yy} v$
- B $0 = -\partial_x p + \mu\partial_{yy} v$ et $\partial_y p = a$
- C $\partial_x p = 0$ et $\partial_t v + v\partial_x v = -\partial_x p + \mu\partial_{yy} v$
- D $0 = -\varrho g - \partial_y p + \mu\partial_{xx} v$ et $\partial_x p = 0$

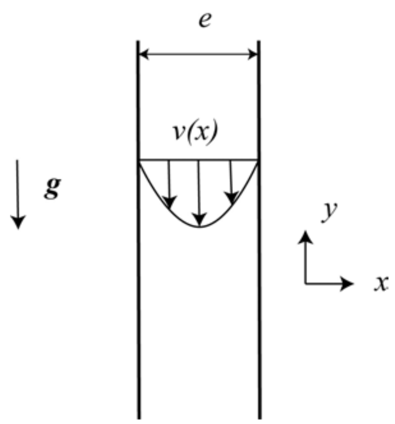

Figure 3 : *écoulement visqueux entre deux parois verticales.*

Question 10 Que vaut le champ de pression (les éventuelles constantes d'intégration sont supposées nulles)?

- A $p = \mu y \partial_x^2 v - a$
- B $p = \varrho g y$
- C $p = a$
- D $p = -\varrho g y + a y$
- E $p = \mu y \partial_x^2 v + a + \varrho g y$

Question 11 [0,25] En déduire l'équation différentielle régissant $v(x)$.

- A $\mu v''(x) = \varrho g y$
- B $\mu v''(x) = 0$
- C $\mu v''(x) = a$
- D $\mu v''(x) = a y$
- E $\mu v''(x) = a y + \varrho g y$

Question 12 [0,25] Quelles sont les conditions aux limites à appliquer?

- A débit constant $\int_0^e v(x)dx = cst$
- B non-pénétration $v(0) = v(e) = 0$
- C adhérence $v(0) = v(e) = 0$
- D adhérence et équilibre des parois $v(0) = v'(0) = 0$

Question 13 [0,25] Intégrer l'équation pour obtenir $v(x)$

- A $v(x) = ax(x-e)/(2\mu)$
- B $v = ay^2/\mu$
- C $v(x) = q/e$
- D $v(x) = ax^2/\mu$

Question 14 [0,25] Que vaut le débit q?

- A $q = -\mu a/e^3$
- B $q = 0$
- C $q = -ae^3/(3\mu)$
- D $q = -ae/\mu$
- E $q = -ae^3/(12\mu)$

5 Problème 5

On voudrait étudier une avalanche en laboratoire. La vitesse du front de l'avalanche réelle est 30 m·s^{-1}, la hauteur est 10 m, la masse volumique de la neige 200 kg·m^{-3}, la viscosité dynamique est 0,01 Pa·s. On veut satisfaire la similitude de Reynolds et de Froude entre l'avalanche réelle et l'avalanche en laboratoire. Pour cette dernière, on réalise un écoulement de hauteur $h = 0{,}2$ m d'un fluide de viscosité dynamique μ et de masse volumique ϱ (figure 4) L'expérience n'est pas réalisée dans l'air, mais dans une cuve d'eau. On admet que la vitesse de l'avalanche de laboratoire est donnée par la formule de von Kármán.

Figure 4 : *simulation d'un aérosol à échelle réduite. Pour cet exemple, l'écoulement en laboratoire (cliché de droite) est obtenu en lâchant un mélange d'eau et de particules colorées dans une cuve d'eau.*

Question 15 [0,50] Déterminer la viscosité et la masse volumique du fluide.

A $\mu = 7{,}8 \times 10^{-4}$ Pa·s et $\varrho = 5587$ kg·m^{-3}
B $\mu = 22$ Pa·s et $\varrho = 1{,}6$ kg·m^{-3}
C $\mu = 2$ Pa·s et $\varrho = 1006$ kg·m^{-3}

Question 16 [0,25] Il semble difficile de trouver un fluide avec de telles caractéristiques (viscosité et masse volumique). Que suggérez-vous de faire ?

A Aucune de ces solutions n'est adéquate. La théorie de la similitude ne marche pas pour ce type d'essais.
B Une similitude partielle en prenant le nombre de Froude car la valeur exacte du nombre de Reynolds n'est pas essentielle tant que cette valeur est suffisamment grande.
C Une similitude partielle par le nombre de Reynolds car il est essentiel de prendre en compte la turbulence.
D Une modification de la dimension des écoulements jusqu'à ce qu'on trouve une hauteur compatible avec les nombres de Froude et de Reynolds.

Formulaire :

- Formule de Manning Strickler : $\tau_p = \varrho g \bar{u}^2/(K^2 R_H^{1/3})$
- Formule de Jäggi : $K = 23{,}2/d_{90}^{1/6}$
- Formule de von Kármán : $u = \sqrt{2g'h}$ avec $g' = g(\varrho - \varrho_a)/\varrho_a$ avec ϱ masse volumique du courant intrusif et ϱ_a celle du fluide ambiant
- Formule du périmètre mouillé $R_H = S/\chi$ avec S section mouillée et χ périmètre mouillé
- Formule du seuil dénoyé $q = \sqrt{g}\left(\frac{2}{3}(H - p)\right)^{3/2}$
- Constantes : masse volumique de l'eau $\varrho = 1$ g·cm^{-3}, masse volumique de l'air $\varrho = 1{,}3$ kg·m^{-3}, accélération de la gravité $g = 9{,}81$ m·s^{-2}
- définition de la charge hydraulique $H = z + h + u^2/(2g)$

On montre que pour les équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible, la conservation de la quantité de mouvement conduit aux formes suivantes pour un repère cartésien:

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varrho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \varrho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

avec p pression du fluide, $\boldsymbol{u} = (u,v,w)$ les composantes du champ de vitesse, $\boldsymbol{g} = (g_x,g_y,g_z)$ l'accélération de la gravité. L'équation de continuité est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$