Correction

Problème 1 Un bassin sert à alimenter en eau une machine hydraulique (une simple turbine pour produire de l'électricité). Se reporter au plan de la figure 3. Le bassin est alimenté par un torrent, dont le débit usuel est $Q_s = 100$ l/s (débit de service). Le bassin est muni d'un déversoir (seuil) qui en cas de trop plein (crue du torrent), évacue les eaux en direction d'un canal.

L'alimentation de la conduite de la machine se fait par une conduite verticale de diamètre d et de longueur $L_c = 1$ m. La hauteur d'eau dans le bassin est $h = 5$ m et en conditions usuelles de fonctionnement, l'eau est supposée au repos. La longueur et la largeur du bassin sont $L = 100$ m et $W = 50$ m. Le déversoir est une paroi mince de pelle $p = 5$ m et de largeur $\ell = 1$ m. L'eau se déverse dans un coursier (canal en béton), puis dans une rivière de largeur $B = 4$ m et de pente $i = 0{,}1$ %. Le lit de la rivière est composé de gravier, dont le diamètre d_{90} vaut 1 cm.

Lorsque le torrent entre en crue, son débit atteint $Q_c = 2$ m^3/s. Dans de telles circonstances, la conduite d'alimentation est coupée et toute l'eau qui arrive par le torrent est déversée dans la rivière.

(a) [0,50] Calculer le diamètre de la conduite d'alimentation de la machine hydraulique pour que le débit soit celui du torrent en conditions usuelles ($Q = Q_s$).

$\rightsquigarrow$ Application simple de Bernoulli (formule de Torricelli) :

$$d = 2\sqrt{\frac{Q_s}{\pi\sqrt{2g(h+L_c)}}} = 11 \text{ cm}.$$

(b) [0,25] Calculer la hauteur dans le bassin lorsque le torrent est en crue ($Q = Q_c$).

$\rightsquigarrow$ La hauteur correspond à la charge à l'amont du seuil. Il suffit donc de prendre la formule du seuil en régime dénoyé et de l'inverser (connaissant le débit transitant $Q = Q_c$)

$$h_{crue} = p + \frac{3}{2}\left(\frac{q}{\sqrt{g}}\right)^{2/3} = 6{,}1 \text{ m},$$

avec $q = Q_c/\ell$.

(c) [0,25] Calculer la hauteur normale dans la rivière en considérant une loi de Manning-Strickler pour la résistance du lit (pour $Q = Q_c$).
$\leadsto$ La formule de Jäggi donne

$$K = \frac{23{,}2}{d_{90}^{1/6}} = 50 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La formule de Manning-Strickler donne alors la hauteur normale en résolvant l'équation implicite

$$Q_c = h_n B K \sqrt{i} \left(\frac{B h_n}{B + 2h_n} \right)^{2/3} \Rightarrow h_n = 55 \text{ cm}.$$

(d) [0,25] Calculer la hauteur critique dans le canal (pour $Q = Q_c$).
$\leadsto$ La hauteur critique est telle que $Fr(h_c) = 1$, soit donc

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 29 \text{ cm}.$$

(e) [0,50] Tracer qualitativement la ligne d'eau (courbe de remous) en la plaçant correctement par rapport aux grandeurs caractéristiques. Commenter le graphique avec les caractéristiques essentielles de la ligne d'eau (pour $Q = Q_c$).
$\leadsto$ Il faut reporter les valeurs remarquables de h et tracer la courbe selon ce qui est indiqué en cours. Voir figure 1.

(f) [0,25] Lorsque la crue arrive, on suppose que le débit du torrent passe soudainement de Q_s à Q_c. Cela provoque une variation graduelle de hauteur d'eau dans le bassin. En faisant un bilan des flux d'eau entrant et sortant au moment d'une crue, écrire l'équation différentielle régissant la hauteur d'eau dans le bassin dans le régime transitoire. Tracer la forme de la solution.
$\leadsto$ Il faut écrire le bilan de masse entre le flux entrant et le flux sortant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{volume} = \text{flux entrant} - \text{flux sortant},$$

soit

$$LW \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h = Q_c - \ell \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}(h - p) \right)^{2/3},$$

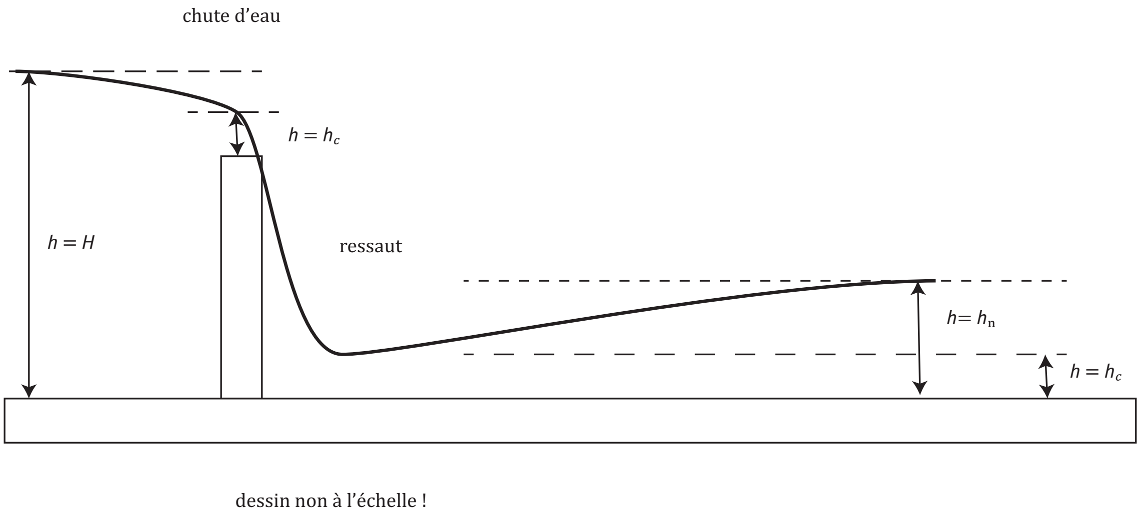


Figure 1 : courbe de remous.

une équation différentielle en h avec pour condition initiale

$$h(0) = p.$$

Aux temps grands, elle tend vers la solution h_{crue} calculée précédemment. Voir figure 2.

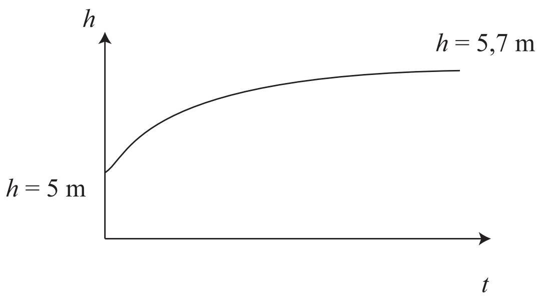


Figure 2 : évolution de la hauteur d'eau dans le bassin.

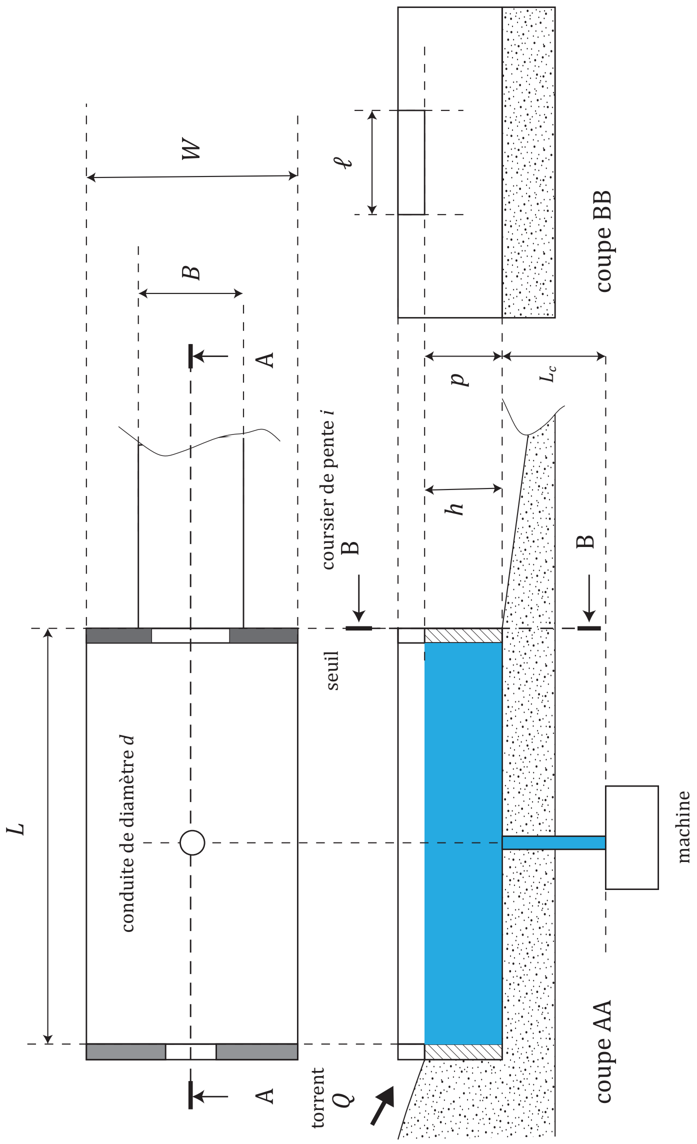


Figure 3 : schéma de l'aménagement étudié. La hauteur du bassin vaut $h = 5$ m. Pour le gravier du canal, le diamètre d_{90} vaut 10 mm. La longueur de la conduite est $L_c = 1$ m. La longueur et largeur du bassin sont $L = 100$ m et $W = 50$ m. Le déversoir a pour largeur $\ell = 1$ m ; sa pelle vaut $p = 5$ m et on suppose le seuil est dénoyé. La pente du coursier et de la rivière est $i = 0{,}1$ %.

Problème 2 Vous vous intéressez au mouvement des tortues marines. En première approximation, vous considérez qu'une tortue est assimilable à une demie sphère de rayon $R = 25$ cm et de masse volumique $\varrho_t = 1200$ kg·m^{-3}. La force de portance (force verticale dirigée vers le haut) est fonction de la vitesse de la tortue v_t et de celle de l'eau u_e :

$$F_L = \varrho C_L \pi R^2 \frac{u_e^2}{2} - \varrho \pi R^2 \frac{v_t^2}{2},$$

avec ϱ la masse volumique de l'eau et C_L le coefficient de portance, qui est une fonction du nombre de Reynolds $Re = Rv_t/\nu$ avec ν la viscosité cinématique de l'eau. On suppose ici

$$C_L = \frac{27}{16}.$$

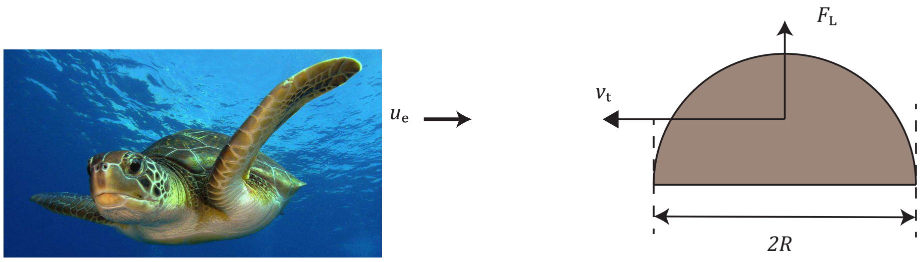


Figure 4 : tortue marine et schématisation par une demie sphère.

(a) [0,25] calculer la force de pression exercée par l'eau sur la tortue ;
⇝ On applique le théorème d'Archimède

$$F = \frac{2}{3}\pi R^3 \varrho g = 321 \text{ N}.$$

(b) [0,25] pour quelle valeur de v_t la force de portance est-elle maximale ?
⇝ La force de portance est maximale pour $v_t = 0$.

(c) [0,50] si la vitesse de l'eau est de 1 m/s, quelle doit être la vitesse de la tortue pour qu'elle reste à la même profondeur, c.-à-d. qu'elle ne remonte pas vers la surface ou ne coule par le fond ;
⇝ Il faut que la force de portance contrebalance exactement le poids déjaugé (poids - force de pression). Soit $v_t = 1{,}01$ m/s. (Une erreur s'est glissée dans les réponses du QCM et la question n'a pas été prise en compte)

(d) [0,25] qu'est-ce qu'implique l'hypothèse d'un coefficient de portance constant ?
$\rightsquigarrow$ Implicitement on suppose qu'on est à suffisamment grand nombre de Reynolds pour que le coefficient C_L tende vers une asymptote.

Problème 3 Vous travaillez dans un cabinet d'architectes à la construction d'un hôtel aquatique. Votre rôle est principalement de faire des calculs de pression sur la structure. Les dimensions du caisson rectangulaire sont indiquées sur la figure 5. La largeur est $W = 3$ m. Ce caisson est également muni d'une (seule) grande baie vitrée (voir figure 5).

(a) [0,50] calculer la résultante des forces de pression sur le caisson.

$\rightsquigarrow$ C'est une application du théorème d'Archimède. Il faut calculer le volume d'eau déplacé. Solution $F = 1{,}94$ MN.

(b) [0,25] sachant que le caisson de la structure émerge de 80 cm, calculer la masse volumique moyenne de ce caisson (c.-à-d. le rapport entre son poids et son volume) ?

$\rightsquigarrow$ Il faut équilibrer le poids et la force de pression pour en déduire le poids. La masse volumique est le rapport entre poids et volume total, soit $\varrho = 873$ kg/m^3.

(c) [0,25] calculer la résultant de la force de pression sur la baie vitrée ?

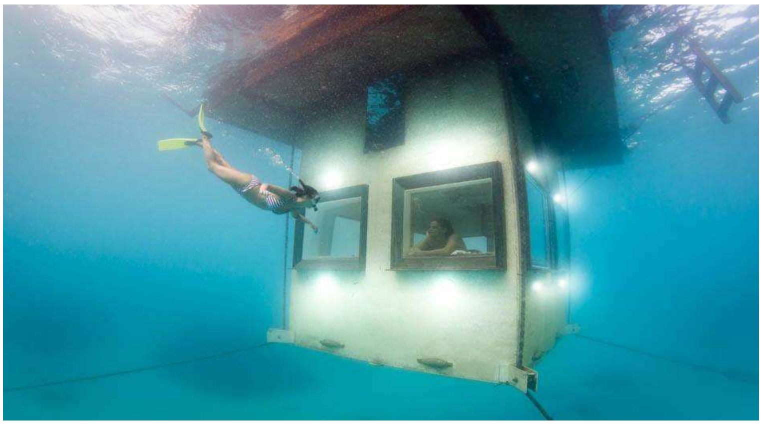
$\rightsquigarrow$ Comme la pression est hydrostatique ($p = \varrho g z$, z la profondeur), il suffit d'intégrer entre $z = -1$ m et $z = -4$ m et multiplier par la largeur 10 m. On trouve $F_p = 736$ kN.

(d) [0,25] déterminer à quelle profondeur se situe le point d'application de cette force ?

$\rightsquigarrow$ On peut calculer le moment de force (par rapport à la surface libre) et déterminer le point d'application

$$M = 10 \int_{-4}^{-1} \varrho g z \times z \mathrm{d}z = F \times z_a \Rightarrow z_a = -2{,}8 \text{ m}.$$

(a)



(b)

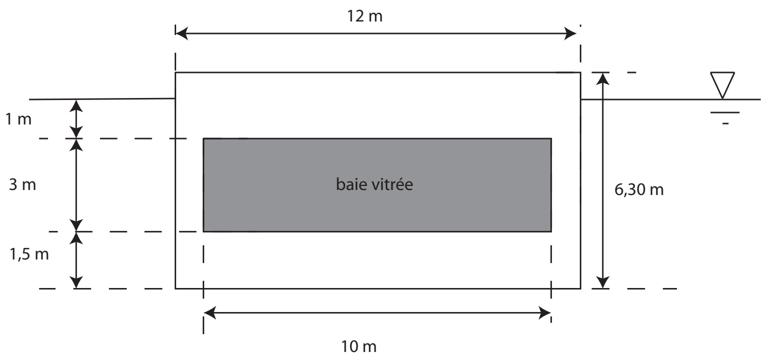


Figure 5 : hôtel aquatique. (a) Exemple de réalisation et (b) vue de face du projet.

Problème 4 Un fluide visqueux s'écoule entre deux plans infinis verticaux. L'entrefer est e (voir figure 6). Le fluide a pour viscosité (dynamique) μ et masse volumique ϱ. Le régime est permanent. Il existe un gradient de pression induit par le champ de pesanteur $\boldsymbol{g}$ (pression hydrostatique), auquel s'ajoute un gradient vertical de pression, qui est noté a (avec $a > 0$). Ce gradient est produit par l'aspiration du fluide entre les deux plans. Pour faire l'étude on introduit un repère cartésien avec x l'axe horizontal, y l'axe vertical, et z (indiqué pour mémoire) un axe perpendiculaire au plan de la figure. Les composantes de vitesse sont $\boldsymbol{u} = (u,v,w)$, avec ici compte tenu de la géométrie du problème $u = w = 0$. On rappelle la notation abrégée : $\partial_x f = \partial f/\partial_x$. L'objet du problème est de calculer le débit par unité de largeur q

$$q = \int_0^e v(x)\mathrm{d}x,$$

avec $v(x)$ la composante verticale de vitesse.

(a) [0,25] Après simplification des équations de Navier-Stokes, écrire les équations du mouvement (conservation de la quantité de mouvement).
$\rightsquigarrow$ En utilisant les invariances et symétries du problème on arrive à

$$0 = -\varrho g - \partial_y p + \mu\partial_{xx}v,$$

$$\partial_x p = 0.$$

(b) [0,25] Que vaut le champ de pression (les éventuelles constantes d'intégration sont supposées nulles) ?
$\rightsquigarrow$ D'après la projection de la quantité de mouvement selon y, la pression est indépendante de x ; on cherche donc p sous la forme $p(y)$. Comme u ne dépend que de x, la projection de la quantité de mouvement selon x montre que l'on a une fonction qui ne dépend que de x qui est ajoutée à une fonction qui ne dépend que de y ; cela n'est possible que si chaque fonction est constante (chacune de même valeur absolue, mais de signe différent). $c = -\varrho g - \partial_y p$ et $\mu\partial_{xx}v = -c$, avec c la constante d'intégration. Donc après $p = -\varrho g y + a y$ où a est le gradient de pression imposé.

(c) [0,25] En déduire l'équation différentielle régissant $v(x)$.
$\rightsquigarrow$ Comme on a $c = -a$, l'équation à résoudre est donc $\mu v''(x) = a$

(d) [0,25] Quelles sont les conditions aux limites à appliquer ?
$\rightsquigarrow$ Il y a non-glissement (ou adhérence) aux deux parois verticales : $v(0) = v(e) = 0$.

(e) [0,25] Intégrer l'équation pour obtenir $v(x)$
$\rightsquigarrow$ Par simple intégration on obtient $v(x) = ax(x-e)/(2\mu)$.

(f) [0,25] Que vaut le débit q?
$\rightsquigarrow$ Une nouvelle intégration donne $q = -ae^3/(12\mu)$.

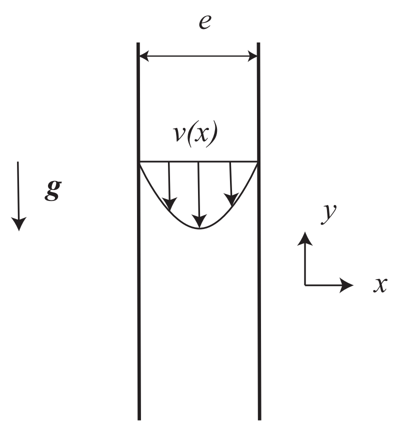


Figure 6 : écoulement visqueux entre deux parois verticales.

Problème 5 On voudrait étudier une avalanche en laboratoire. La vitesse du front de l'avalanche réelle est 30 m·s^{-1}, la hauteur est 10 m, la masse volumique de la neige 200 kg·m^{-3}, la viscosité dynamique est $\mu = 0{,}01$ Pa·s. On veut satisfaire la similitude de Reynolds et de Froude entre l'avalanche réelle et l'avalanche en laboratoire. Pour cette dernière, on réalise un écoulement de hauteur $h = 0{,}2$ m d'un fluide de viscosité dynamique μ et de masse volumique ϱ (figure 7). L'expérience n'est pas réalisée dans l'air, mais dans une cuve d'eau. On admet que la vitesse de l'avalanche de laboratoire est donnée par la formule de von Kármán.

(a) [0,50] Déterminer la viscosité et la masse volumique du fluide.
$\rightsquigarrow$ Il faut égaler le nombre de Froude et de Reynolds entre les deux échelles. La vitesse de l'avalanche dans la cuve est donnée par la formule de von Kármán. On trouve que $Fr = 3$ et $Re = 6 \times 10^6$, d'où l'on déduit $\mu = 7{,}8 \times 10^{-4}$ Pa·s et $\varrho = 5587$ kg·m^{-3}.

(b) [0,25] Il semble difficile de trouver un fluid avec de telles caractéristiques (viscosité et masse volumique). Que suggérez-vous de faire ?

$\rightsquigarrow$ Il faut opter pour une similitude partielle en prenant le nombre de Froude car la valeur exacte du nombre de Reynolds n'est pas essentielle tant que cette valeur est suffisamment grande.

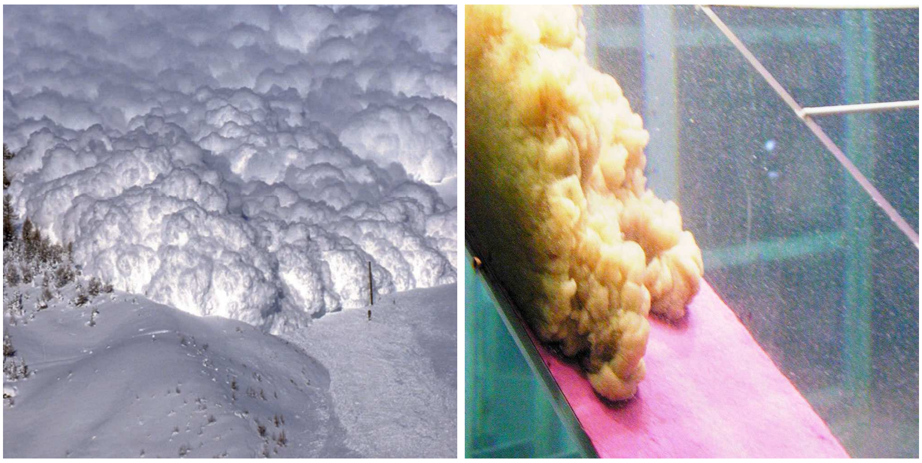


Figure 7 : simulation d'un aérosol à échelle réduite. Pour cet exemple, l'écoulement en laboratoire (cliché de droite) est obtenu en lâchant un mélange d'eau et de particules colorées dans une cuve d'eau.