Examen final du 26 juin 2015

Un formulaire est placé en fin de cet énoncé. L'examen est noté sur 35 points (barème en début de chaque question).

---

1 Exercice 1

On étudie l'écoulement oscillant d'un fluide newtonien de viscosité cinématique ν et masse volumique ϱ placé entre deux plaques (supposées de dimensions infinies). L'épaisseur de fluide est notée h. La plaque supérieure subit un mouvement oscillant dans la direction x : $x(t) = A\sin(\omega t)$ avec A l'amplitude et ω la fréquence angulaire du mouvement (ou pulsation). La plaque inférieure est immobile. On cherche à calculer le champ de vitesse fluide entre les deux plaques. La pression est notée p. Le champ de vitesse est noté $\boldsymbol{u} = (u,v)$. On admet qu'il n'y a pas de gradient de pression dans le sens horizontal : $\partial_x p = 0$. On introduit un repère cartésien galiléen fixe $(0,\, x,\, y)$ tel qu'il est montré sur la figure 1. Le vecteur gravité est dans ce repère $\boldsymbol{g} = (0, -g)$.

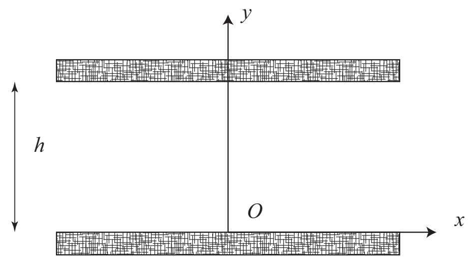

Figure 1 : *oscillation d'une plaque entraînant un fluide newtonien.*

Question 1 [1] Déterminez les conditions aux limites cinématiques.

- [A] $u = 0$ et $v = 0$ en $y = 0$, $u = 0$ et $v = 0$ en $y = h$
- [B] $u = 0$ et $v = 0$ en $y = 0$, $u = A\sin(\omega t)$ et $v = 0$ en $y = h$
- [C] $u = 0$ et $v = 0$ en $y = 0$, $u = A\omega\cos(\omega t)$ et $v = 0$ en $y = h$

Question 2 [1] Compte tenu des symétries du problème (qui permettent de simplifier sa formulation), déterminer quelles sont les variables du problème.

- [A] $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ et $p(x,y,t)$
- [B] $u(y,t)$ et $p(y)$
- [C] $u(x,y,t)$ et $p(y,t)$
- [D] $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ et $p(y,t)$

Question 3 [2] Sur la base de la dernière question, comment se simplifie l'équation de Navier-Stokes (conservation de la quantité de mouvement) projetée selon y ?

- [A] $0 = -\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - g$
- [B] $\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - g + \nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
- [C] $\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - g$
- [D] $\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - g + \nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

Question 4 [1] Comment se simplifie l'équation de Navier-Stokes projetée selon x ?

A $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

B $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$.

C $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

D $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x}$.

E $0 = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Question 5 [3] Quelle est la solution à l'équation de Navier-Stokes parmi celles reportées ci-dessous ?

A $u = \omega A \mathrm{e}^{-ky} \cos(\omega t - \phi)$ et $v = 0$.

B $u = \omega A \mathrm{e}^{-ky} \cos(\omega t - ky)$ et $v = 0$.

C $u = \omega A \cos(\omega t - \phi)(1 - y/h)y$ et $v = 0$.

D aucune des solutions.

E $u = \omega A y$ et $v = 0$.

---

2 Exercice 2

Un batardeau en palplanches[1] sépare deux fosses de profondeur respective $h_1 = 2{,}5$ m et $h_2 = 4$ m (voir figure 2). Les calculs se font par unité de largeur. La masse volumique de l'eau est $\varrho = 1000$ kg·m^{-3} et on prend $g = 9{,}81$ m·s $^{-2}$ comme accélération de la gravité.

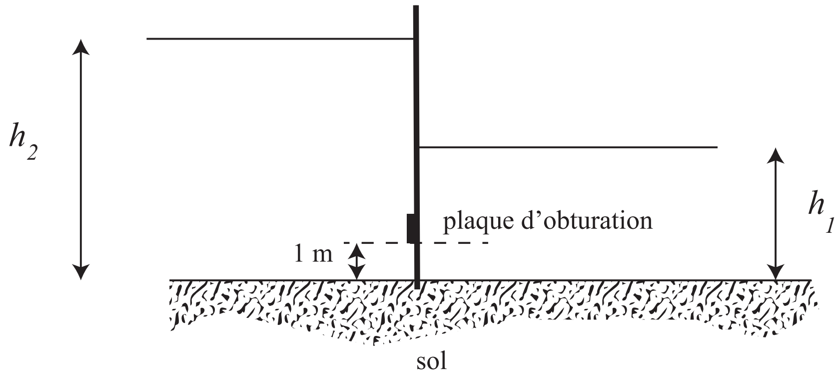

Figure 2 : *batardeau en palplanches.*

Question 6 [2] Quelles sont les expressions (analytiques) des poussées hydrostatiques sur chacune des faces du batardeau ?

A $F_1 = \frac{1}{2}\varrho g h_1^2$ et $F_2 = \frac{1}{2}\varrho g (h_2^2 - h_1^2)$.

B $F_1 = \frac{1}{2}\varrho g h_1^2$ et $F_2 = \frac{1}{2}\varrho g h_2^2$.

C $F_1 = \varrho g h_1$ et $F_2 = \varrho g h_2$.

1. barrage provisoire constitué de planches métalliques enfoncées dans le sol

Question 7 [2] Calculer le moment (fléchissant) M à l'encastrement du batardeau dans le sol (par mètre linéaire de longueur du batardeau) ?

- A $M = 79{,}1$ kN·m·ml^{-1}.
- B $M = 19$ kN·m·ml^{-1}.
- C $M = 80{,}3$ kN·m·ml^{-1}.
- D $M = 910$ kN·m·ml^{-1}.
- E $M = 457$ kN·m·ml^{-1}.

Question 8 [3] On découpe dans le batardeau une fenêtre carrée de côté 1 m et dont le bord inférieur est situé à 1 m au-dessus du sol (voir figure 2). Cette fenêtre est munie d'une plaque pour l'obturer. Calculer la résultante des forces de poussées F sur la plaque d'obturation.

- A $F = 14{,}7$ kN.
- B $F = 1{,}7$ kN.
- C $F = 21{,}2$ kN.
- D $F = 7$ kN.
- E $F = 24{,}4$ kN.

Question 9 [1] On retire la plaque d'obturation. Un mouvement d'eau se produit de la gauche vers la droite. Évaluez le débit en vous servant de la formule de Bernoulli.

- A $Q = 1{,}8$ m^3·s^{-1}.
- B $Q = 2{,}5$ m^3·s^{-1}.
- C $Q = 5{,}4$ m^3·s^{-1}.
- D $Q = 8{,}8$ m^3·s^{-1}.
- E $Q = 7{,}0$ m^3·s^{-1}.

---

3 Exercice 3

On considère la jonction en T de trois conduites circulaires (voir figure 3). La section d'entrée est appelée S_1 et a pour diamètre $D_1 = 450$ mm ; elle est horizontale et orientée dans le sens des $x > 0$. Les deux autres sections, notées S_2 et S_3, ont un diamètre identique $D_2 = D_3 = 200$ mm et sont verticales. Le débit à l'entrée S_1 est $Q_1 = 300$ l/s et la pression (uniforme sur la section S_1) vaut $p_1 = 500$ kPa. Les conduites transportent de l'eau de masse volumique $\varrho = 1000$ kg·m^{-3}. On prend $g = 9{,}81$ m·s $^{-2}$ comme accélération de la gravité. Pour le calcul des forces on considère également un volume de contrôle avec une surface de contrôle, dont la normale $\boldsymbol{n}$ est orientée de l'intérieur vers l'extérieur (convention usuelle).

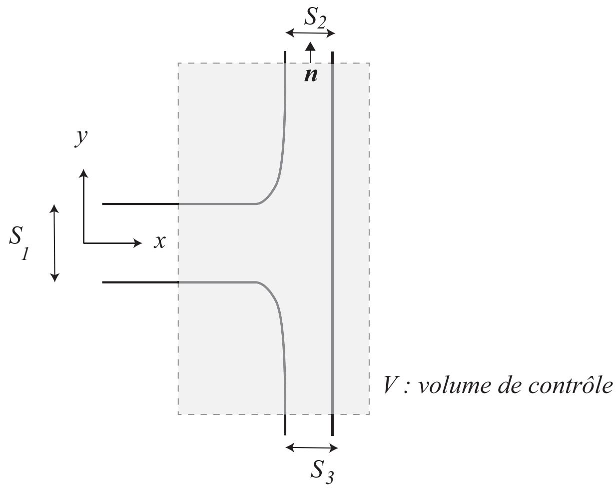

Figure 3 : *jonction en T de trois conduites.*

Question 10 [1] Calculer les vitesses moyennes entrante (à travers S_1) et sortantes (dans les sections S_2 et S_3).

- A $u_1 = 1{,}88$ m·s^{-1}, $u_2 = 3{,}62$ m·s^{-1} et $u_3 = 2{,}50$ m·s^{-1}.
- B $u_1 = 1{,}88$ m·s^{-1} et $u_2 = u_3 = 3{,}76$ m·s^{-1}.
- C $u_1 = 1{,}88$ m·s^{-1} et $u_2 = u_3 = 4{,}77$ m·s^{-1}.
- D $u_1 = 1{,}88$ m·s^{-1}, $u_2 = 2{,}12$ m·s^{-1} et $u_3 = 4{,}77$ m·s^{-1}.

Question 11 [1] Calculer les pressions dans les sections de sortie S_2 et S_3 (on négligera la différence d'altitude) ?

- A $p_2 = 495{,}23$ et $p_3 = 498{,}65$ kPa
- B $p_2 = p_3 = 494{,}71$ kPa
- C $p_2 = p_3 = 490{,}38$ kPa
- D $p_2 = 499{,}53$ et $p_3 = 490{,}38$ kPa

Question 12 [1] Que valent les forces de pression (composantes cartésiennes) sur chacune des sections ?

- A $\boldsymbol{F}_1^p = (79{,}52\ ;\ 0)$ kN ; $\boldsymbol{F}_2^p = (0\ ;\ -19{,}96)$ kN ; et $\boldsymbol{F}_3^p = (0\ ;\ -19{,}96)$ kN.
- B $\boldsymbol{F}_1^p = (79{,}52\ ;\ 0)$ kN ; $\boldsymbol{F}_2^p = (0\ ;\ 15{,}54)$ kN ; et $\boldsymbol{F}_3^p = (0\ ;\ -15{,}54)$ kN.
- C $\boldsymbol{F}_1^p = (79{,}52\ ;\ 0)$ kN ; $\boldsymbol{F}_2^p = (0\ ;\ -15{,}40)$ kN ; et $\boldsymbol{F}_3^p = (0\ ;\ 15{,}40)$ kN.

Question 13 [2] Que valent les flux de quantité de mouvement (composantes cartésiennes) sur chacune des sections ?

- A $\boldsymbol{F}_1^m = (-0{,}566{,}0)$ kN ; $\boldsymbol{F}_2^m = (0\ ;\ 0{,}716)$ kN ; et $\boldsymbol{F}_3^m = (0\ ;\ -0{,}716)$ kN.
- B $\boldsymbol{F}_1^m = (-0{,}566\ ;\ 0)$ kN ; $\boldsymbol{F}_2^m = (0\ ;\ 0{,}40)$ kN ; et $\boldsymbol{F}_3^m = (0\ ;\ 0{,}40)$ kN.
- C $\boldsymbol{F}_1^m = (0{,}566\ ;\ 0)$ kN ; $\boldsymbol{F}_2^m = (0\ ;\ 0{,}71)$ kN ; et $\boldsymbol{F}_3^m = (0\ ;\ -0{,}40)$ kN.

Question 14 [2] En vous servant de l'équation d'Euler sous forme intégrale et en négligeant la contribution due aux forces de pesanteur, calculer la force de réaction (F_x^r ; F_y^r) sur le fluide contenu dans le volume de contrôle ?

- A $F_x^r = 80{,}09$ kN et $F_y^r = 19{,}5$ kN.
- B $F_x^r = 80{,}09$ kN et $F_y^r = 29{,}65$ kN.
- C $F_x^r = -80{,}09$ kN et $F_y^r = 0$ kN.
- D $F_x^r = -80{,}09$ kN et $F_y^r = -29{,}65$ kN.

---

4 Exercice 4

On considère un écoulement d'eau dans un canal de rayon hydraulique R_h. La rugosité du fond et des berges est notée k_s. Les propriétés physiques de l'eau qui nous intéressent ici sont la masse volumique ϱ et la viscosité dynamique μ. La pente du canal est notée i. L'écoulement est à surface libre ; il est donc mu par la gravité, dont la constante d'accélération est g. La vitesse de l'écoulement est u. En régime permanent, les parois (fond et berges) exercent une contrainte pariétale sur l'écoulement, notée τ_p. On suppose que l'écoulement est permanent. On cherche sous quelle forme adimensionnelle on peut écrire la contrainte pariétale en fonction de groupes adimensionnels (nombres sans dimension).

Question 15 [2] Combien peut-on former de nombres sans dimension pour ce problème ?

- A 5
- B 3
- C 4

Question 16 [1] On veut faire un modèle réduit de ce canal. On prend l'eau comme fluide pour les deux échelles (donc la viscosité et la masse volumique sont identiques entre la réalité et le modèle réduit). Du point de vue théorique, quels sont les nombres sans dimension qu'il faut considérer ?

- A Le nombre de Froude
- B Le nombre de Froude, le nombre de Reynolds et la pente
- C Aucune des solutions reportées ici
- D Le nombre de Reynolds
- E Le nombre de Froude, le nombre de Reynolds, le rapport d'aspect, et un nombre semblable au nombre de traînée
- F Le nombre de Froude et la pente

Question 17 [1] En pratique, vous ne sélectionnez qu'un seul nombre pour réaliser le modèle. Lequel et pourquoi ?

- A Le nombre de Froude car on est en similitude incomplète, mais aussi en turbulence suffisamment développée pour que la valeur précise du nombre de Reynolds importe peu.
- B Le rapport d'aspect car tous les autres nombres sans dimension se déduisent de lui
- C Le nombre de traînée car l'équilibre de l'écoulement en régime permanent traduit l'égalité entre forces de pesanteur et de frottement (pariétal).
- D Le nombre de Reynolds car l'écoulement est pleinement turbulent

---

5 Exercice 5

Un canal de section rectangulaire et de largeur $b = 10$ m se compose de trois biefs successifs :

- le premier a une pente i_1 et il est très long ;
- le second a une pente $i_2 = 2$ % et il est également très long ;
- le troisième est horizontal.

Les parois sont en béton lissé, avec un coefficient de rugosité de Strickler $K = 75$ m$^{1/3}$·s^{-1}. Le débit est $Q = 100$ m^3·s^{-1}.

1 Quels sont hauteurs normales et critiques pour chacun des biefs (pour la hauteur normale on se contentera de donner l'équation qu'il faut résoudre implicitement) ?

1 Quels sont la pente et nombre de Froude critiques du canal ?

2 Si la hauteur normale d'eau dans le premier bief est $h_1 = 5$ m, quelle est sa pente ? Quel est le nombre de Froude ? Comment caractériseriez-vous le régime d'écoulement dans ce bief ?

1 Comment caractériseriez-vous le régime d'écoulement dans le second bief ?

2 Tracez de façon schématique la courbe de remous le long du canal ?

1 Calculer la hauteur d'eau à l'aval h_a du ressaut hydraulique.

Formulaire :

- Formule de Manning Strickler : contrainte pariétale pour une section de rayon hydraulique R_h et de rugosité K, $\tau_p = \varrho g \bar{u}^2/(K^2 R_h^{1/3})$
- Condition d'équilibre du lit en régime permanent uniforme : $\tau_p = \varrho g R_h i$ pour une section de rayon hydraulique R_h et de pente i
- Formule du périmètre mouillé $R_h = S/\chi$ avec S section mouillée et χ périmètre mouillé
- Théorème de Bernoulli : la charge $H = z + h + u^2/(2g)$ est constante le long d'une ligne de courant pour un écoulement isochore permanent.
- Relation de conjugaison avec la section amont (resp. aval) référencée par l'indice 1 (resp. 2) :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right).$$

Équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible. Le principe de conservation de la quantité de mouvement conduit aux formes suivantes pour un repère cartésien (x, y, z) :

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varrho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \varrho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

avec p pression du fluide, $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ les composantes du champ de vitesse, $\boldsymbol{g} = (g_x, g_y, g_z)$ l'accélération de la gravité. L'équation de continuité est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Équation d'Euler sous forme intégrale : elle exprime le principe de conservation de la quantité de mouvement dans un volume de contrôle V (dont la surface de contrôle est S et la normale à la surface est notée $\boldsymbol{n}$) pour un fluide non visqueux ($\mu = 0$).

$$\int_S \varrho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}S + \int_S \varrho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = \int_V \varrho\boldsymbol{g}\mathrm{d}V - \int_S p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

Loi de Pascal ou de l'hydrostatique

$$-\nabla p + \varrho\boldsymbol{g} = 0.$$

Théorème de Vaschy-Buckingham Dans un problème physique qui implique n variables et p unités physiques, on peut former $k = n - r$ nombres sans dimension indépendants, avec r le rang de la matrice dimensionnelle associée au problème. On a souvent, mais pas tout le temps, $r = p$.