Correction

Problème 1 On étudie l'écoulement oscillant d'un fluide newtonien de viscosité cinématique ν et masse volumique ϱ placé entre deux plaques (supposées de dimensions infinies). L'épaisseur de fluide est notée h. La plaque supérieure subit un mouvement oscillant dans la direction x : $x(t) = A\sin(\omega t)$ avec A l'amplitude et ω la fréquence angulaire du mouvement (ou pulsation). La plaque inférieure est immobile. On cherche à calculer le champ de vitesse fluide entre les deux plaques. La pression est notée p. Le champ de vitesse est noté $\boldsymbol{u} = (u,v)$. On admet qu'il n'y a pas de gradient de pression dans le sens horizontal : $\partial_x p = 0$. On introduit un repère cartésien galiléen fixe $(0,\, x,\, y)$ tel qu'il est montré sur la figure 1. Le vecteur gravité est dans ce repère $\boldsymbol{g} = (0, -g)$.

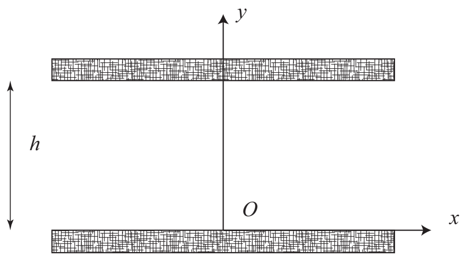

Figure 1 : oscillation d'une plaque entraînant un fluide newtonien.

(a) Déterminez les conditions aux limites cinématiques.

$\rightsquigarrow$ Il y a adhérence du fluide aux parois donc $u = 0$ et $v = 0$ en $y = 0$, tandis qu'en $y = h$, $u = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A\omega\cos(\omega t)$ et $v = 0$

(b) Compte tenu des symétries du problème (qui permettent de simplifier sa formulation), déterminer quelles sont les variables du problème.

$\rightsquigarrow$ Le fluide est mu par la plaque supérieure. On s'attend à avoir une pression hydrostatique, pas de vitesse verticale, et une vitesse horizontale qui ne dépend que de la profondeur y. Donc $u(y,t)$ et $p(y)$ sont les variables qui nous intéressent.

(c) Sur la base de la dernière question, comment se simplifie l'équation de Navier-Stokes projetée selon y ?

$\rightsquigarrow$ L'équation originale à résoudre est

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}-\varrho g+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),$$

Compte tenu des symétries, on obtient directement

$$0=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}-g$$

Cela confirme que la distribution de pression est hydrostatique.

(d) Comment se simplifie l'équation de Navier-Stokes projetée selon x ?
$\rightsquigarrow$ L'équation originale à résoudre est

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

Après simplification, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(e) Quelle est la solution à l'équation de Navier-Stokes parmi celles reportées ci-dessous ?
$\rightsquigarrow$ Aucune des solutions reportées n'est la bonne.
Toutefois (ce n'est pas dans l'examen) dans la limite $h\to\infty$, l'effet de la paroi immobile sur l'écoulement devient négligeable. On recherche alors une solution périodique de la forme

$$u(y,t)=f(y)\cos(\omega t+\phi)=\mathcal{R}(f(y)\mathrm{e}^{\imath\omega t}),$$

avec f une fonction complexe. Pour simplifier la notation, on a fait un changement de variable : l'ordonnée y pointe désormais vers le bas et la position de la plaque mobile est en $y=0$.
On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Rightarrow\imath\omega=\nu f''.$$

La solution générale est de la forme

$$f(y)=a\mathrm{e}^{-(1+\imath)ky}+b\mathrm{e}^{(1+\imath)ky}\text{ où }k=\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}},$$

et a et b sont deux constantes d'intégration. Les conditions aux limites imposent $b = 0$ et $a = A\omega$. La composante horizontale de la vitesse est donc

$$u = \omega A \mathrm{e}^{-ky} \cos(\omega t - ky)$$

tandis que $v = 0$.

Problème 2 Un batardeau en palplanches[1] sépare deux fosses de profondeur respective $h_1 = 2{,}5$ m et $h_2 = 4$ m (voir figure 2). Les calculs se font par unité de largeur. La masse volumique de l'eau est $\varrho = 1000$ kg·m^{-3} et on prend $g = 9{,}81$ m·s $^{-2}$ comme accélération de la gravité.

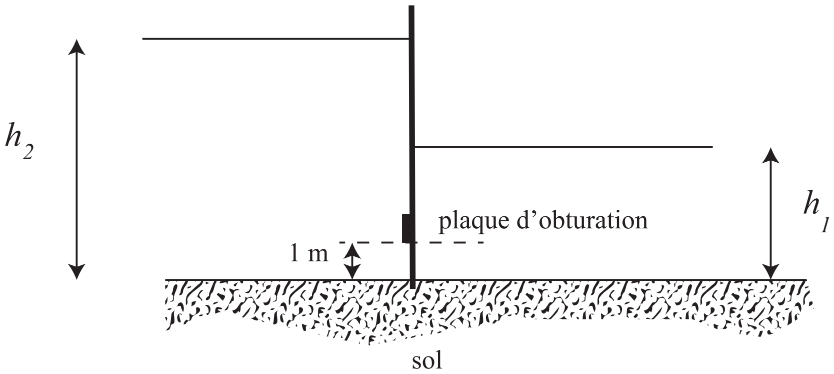

Figure 2 : batardeau en palplanches.

(a) Quelles sont les expressions (analytiques) des poussées hydrostatiques sur chacune des faces du batardeau ?
$\rightsquigarrow$ Il suffit d'intégrer l'équation de l'hydrostatique sur chaque paroi du batardeau

$$F_1 = \int_0^{h_1} \varrho g(h_1 - z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\varrho g h_1^2 \text{ et } F_2 = \int_0^{h_2} \varrho g(h_2 - z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\varrho g h_2^2$$

(b) Calculer le moment (fléchissant) M à l'encastrement du batardeau dans le sol (par mètre linéaire de longueur du batardeau) ?
$\rightsquigarrow$ Comme le bras de levier est le tiers de la hauteur, on a

$$M = \frac{1}{3}h_2 F_2 - \frac{1}{3}h_1 F_1$$

Soit $M = 79{,}1$ kN·m·ml^{-1}.

(c) On découpe dans le batardeau une fenêtre carrée de côté 1 m et dont le bord inférieur est situé à 1 m au-dessus du sol (voir figure 2). Cette fenêtre

1. barrage provisoire constitué de planches métalliques enfoncées dans le sol

est munie d'une plaque pour l'obturer. Calculer la résultante des forces de poussées F sur la plaque d'obturation.

$\rightsquigarrow$ La force résultante est

$$F = \int_{z_1}^{z_2} \varrho g(h_2 - z)\mathrm{d}z - \int_{z_1}^{z_2} \varrho g(h_1 - z)\mathrm{d}z,$$

avec $z_1 = 1$ m et $z_2 = 2$ m. L'application numérique donne : $F = 14{,}71$ kN.

(d) On retire la plaque d'obturation. Un mouvement d'eau se produit de la gauche vers la droite. Évaluez le débit en vous servant de la formule de Bernoulli.

$\rightsquigarrow$ En première approximation, les lignes de courant à travers l'ouverture sont des segments horizontaux avec à gauche une pression $p_2 = \varrho g(h_2 - z)$ et à droite une pression $p_1 = \varrho g(h_1 - z)$. A profondeur égale, il se crée donc un gradient de pression $\Delta p = \varrho g(h_2 - h_1)$ et d'après Bernoulli on en déduit qu'il y a une vitesse

$$u = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}.$$

Le débit est donc

$$Q = uS = 5{,}4 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Problème 3 On considère la jonction en T de trois conduites circulaires (voir figure 3). La section d'entrée est appelée S_1 et a pour diamètre $D_1 = 450$ mm ; elle est horizontale et orientée dans le sens des $x > 0$. Les deux autres sections, notées S_2 et S_3, ont un diamètre identique $D_2 = D_3 = 200$ mm et sont verticales. Le débit à l'entrée S_1 est $Q_1 = 300$ l/s et la pression (uniforme sur la section S_1) vaut $p_1 = 500$ kPa. Les conduites transportent de l'eau de masse volumique $\varrho = 1000$ kg·m^{-3}. On prend $g = 9{,}81$ m·s $^{-2}$ comme accélération de la gravité. Pour le calcul des forces on considère également un volume de contrôle avec une surface de contrôle, dont la normale $\boldsymbol{n}$ est orientée de l'intérieur vers l'extérieur (convention usuelle).

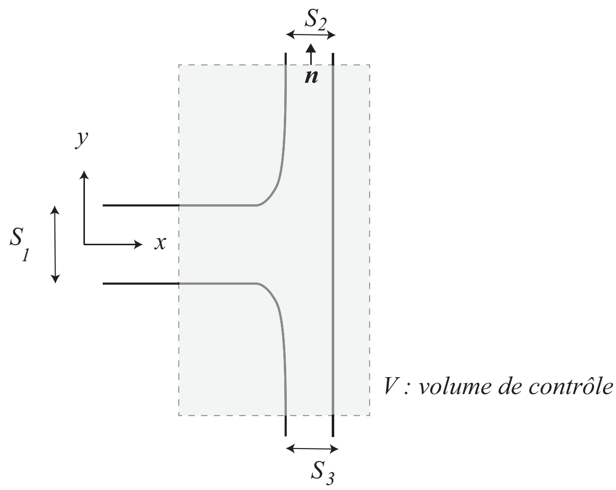

Figure 3 : jonction en T de trois conduites.

(a) Calculer les vitesses moyennes entrante (à travers S_1) et sortantes (dans les sections S_2 et S_3).
⇝ Il suffit d'écrire la relation entre débit et hauteur

$$u_1 = 4\frac{Q_1}{\pi D_1^2},\ u_2 = 4\frac{Q_2}{\pi D_2^2},\ \text{et}\ u_3 = 4\frac{Q_3}{\pi D_3^2}$$

L'application numérique donne : $u_1 = 1{,}88$ m·s^{-1} et $u_2 = u_3 = 4{,}77$ m·s^{-1}.

(b) Calculer les pressions dans les sections de sortie S_2 et S_3 (on négligera la différence d'altitude) ?
⇝ On applique le théorème de Bernoulli

$$p_2 = p_3 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho(u_1^2 - u_2^2),$$

dont l'application numérique fournit $p_2 = p_3 = 490{,}38$ kPa.

(c) Que valent les forces de pression (composantes cartésiennes) sur chacune des sections ?

⇝ Les forces de pression ont pour amplitude $F_i = p_i \pi D_i^2/4$. Le signe dépend de chaque section de contrôle : positif pour les sections 1 et 3, mais négatif pour la 2. Les valeurs numériques sont $\boldsymbol{F}_1^p = (79{,}52\ ;\ 0)$ kN ; $\boldsymbol{F}_2^p = (0\ ;\ -15{,}40)$ kN ; et $\boldsymbol{F}_3^p = (0\ ;\ 15{,}40)$ kN.

(d) Que valent les flux de quantité de mouvement (composantes cartésiennes) sur chacune des sections ?

⇝ Par définition le flux est la force définie par

$$\boldsymbol{F}_i^m = \int_{S_i} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}S,$$

L'application numérique est directe : $\boldsymbol{F}_1^m = (-0\ ;\ 566{,}0)$ kN ; $\boldsymbol{F}_2^m = (0\ ;\ 0{,}716)$ kN ; et $\boldsymbol{F}_3^m = (0\ ;\ -0{,}716)$ kN.

(e) En vous servant de l'équation d'Euler sous forme intégrale et en négligeant la contribution due aux forces de pesanteur, calculer la force de réaction $(F_x^r\ ;\ F_y^r)$ sur le fluide contenu dans le volume de contrôle ?

⇝ On note que pour les sections 2 et 3, les forces de pression et de flux de quantité de mouvement se contrebalancent exactement, donc $F_y^r = 0$. La section 1 (entrante) est associée à une force effective totale

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_1^p - \boldsymbol{F}_1^m = -\int_{S_1} (p\boldsymbol{n} + \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})) \mathrm{d}S,$$

et d'après le principe d'action et de réaction de Newton, la force de réaction doit contrebalancer exactement cette force horizontale pour que la paroi verticale de la fonction soit en équilibre, donc

$$F_x^r = -|\boldsymbol{F}_1|,$$

soit numériquement $F_x^r = -80{,}09$ kN.

Problème 4 On considère un écoulement d'eau dans un canal de rayon hydraulique R_h. La rugosité du fond et des berges est notée k_s. Les propriétés physiques de l'eau qui nous intéressent ici sont la masse volumique ϱ et la viscosité dynamique μ. La pente du canal est notée i. L'écoulement est à surface libre ; il est donc mu par la gravité, dont la constante d'accélération est g. La vitesse de l'écoulement est u. En régime permanent, les parois (fond et berges) exercent une contrainte pariétale sur l'écoulement, notée τ_p. On suppose que l'écoulement est permanent. On cherche sous quelle forme adimensionnelle on peut écrire la contrainte pariétale en fonction de groupes adimensionnels (nombres sans dimension).

(a) Combien peut-on former de nombres sans dimension pour ce problème ?
$\rightsquigarrow$ Il a 7 variables dimensionnelles : rayon hydraulique R_h [m], rugosité k_s [m], masse volumique ϱ [kg m^{-3}] et la viscosité μ [kg m^{-1} s^{-1}], constante d'accélération est g [m s^{-2}], vitesse u [m s^{-1}], et contrainte pariétale τ_p [kg m^{-1} s^{-2}]. Il y a donc trois unités physiques fondamentales : m, s, et kg. On peut donc former – d'après le théorème de Vaschy-Buckingham – $n = 7 - 3 = 4$ nombres sans dimensions. On peut notamment vérifier que la matrice dimensionnelle

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

où les colonnes sont les variables u, R_h, ϱ, μ, g, k_s, et τ_p et les lignes reportent les unités en kg, m, et s, est bien de rang 3. Il y a dans la formulation originelle du problème un autre nombre sans dimension qui est i. On peut donc former en tout 5 nombres sans dimensions. Ces nombres sont : Reynolds $\varrho u R_h/\mu$, Froude $u/\sqrt{gh}$, submergence k_s/R_h, un nombre similaire à la traînée $\tau_h/(\varrho R_h^2 u^2)$, et la pente i.

(b) On veut faire un modèle réduit de ce canal. On prend l'eau comme fluide pour les deux échelles (donc la viscosité et la masse volumique sont identiques entre la réalité et le modèle réduit). Du point de vue théorique, quels sont les nombres sans dimension qu'il faut considérer ?
$\rightsquigarrow$ Cela réduit de 2 le degré de liberté du système donc, il nous faut maintenant 3 nombres sans dimension. On prend donc le nombres de Froude et de Reynolds ainsi que la pente.

(c) En pratique, vous ne sélectionnez qu'un seul nombre pour réaliser le modèle. Lequel et pourquoi ?

$\rightsquigarrow$ On fonde la similitude sur le nombre de Froude car la turbulence est suffisamment développée (on est à grand nombre de Reynolds) pour que la valeur précise du nombre de Reynolds importe peu.

Problème 5 Un canal de section rectangulaire et de largeur $b = 10$ m se compose de trois biefs successifs :

- le premier a une pente i_1 et il est très long ;
- le second a une pente $i_2 = 2$ % et il est également très long ;
- le troisième est horizontal.

Les parois sont en béton lissé, avec un coefficient de rugosité de Strickler $K = 75$ m$^{1/3}$·s^{-1}. Le débit est $Q = 100$ m^3·s^{-1}.

(a) Quels sont hauteurs normales et critiques pour chacun des biefs (pour la hauteur normale on se contentera de donner l'équation qu'il faut résoudre implicitement) ?

$\rightsquigarrow$ La hauteur normale est donnée par la condition d'équilibre

$$\tau_p = \varrho g R_h i = \varrho g \bar{u}^2/(K^2 R_h^{1/3}),$$

avec $\bar{u} = Q/(bh)$. Comme $R_h = hb/(2h+b)$, on a donc à résoudre

$$K \left(\frac{h_n b}{2h_n + b}\right)^{2/3} \sqrt{i} = \bar{u} = \frac{Q}{bh_n} \tag{1}$$

La hauteur critique est telle que $Fr = 1$, donc

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} = 2{,}17 \text{ m},$$

pour les trois biefs.

(b) Quels sont la pente et nombre de Froude critiques du canal ?

$\rightsquigarrow$ La pente critique vérifie

$$Q = K h_c b \left(\frac{h_c b}{2h_c + b}\right)^{2/3} \sqrt{i},$$

donc avec $h_c = 2{,}17$ m, on a

$$i_c = 0{,}00217.$$

Par définition le nombre de Froude critique est 1.

(c) Si la hauteur normale d'eau dans le premier bief est $h_1 = 5$ m, quelle est sa pente ? Quel est le nombre de Froude ? Comment caractériseriez-vous le régime d'écoulement dans ce bief ?
$\leadsto$ On résout l'équation (1) avec $h_n = 5$ m et on trouve $i_1 = 2 \times 10^{-4}$. Le nombre de Froude est

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh_n}} = 0{,}29 < 1$$

et donc le régime est subcritique.

(d) Comment caractériseriez-vous le régime d'écoulement dans le second bief ?
$\leadsto$ Comme $i_2 > i_c$ l'écoulement est supercritique. On résout l'équation (1) de façon implicite :

$$h_2 = h_n = 1{,}04 \text{ m},$$

pour le second bief. On trouve que bien

$$Fr_2 = \frac{u}{\sqrt{gh_n}} = 3{,}0 > 1.$$

(e) Tracez de façon schématique la courbe de remous le long du canal ?

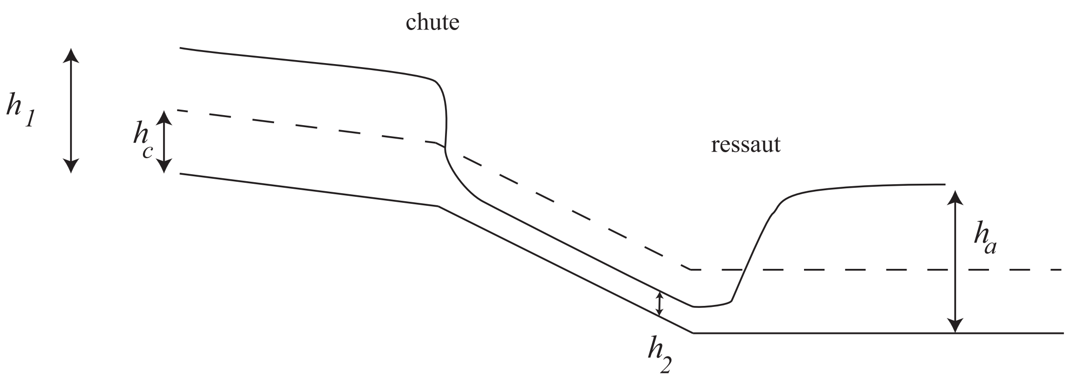

Figure 4 : schéma de la courbe de remous.

(f) Calculer la hauteur d'eau à l'aval h_a du ressaut hydraulique.
$\leadsto$ La relation de conjugaison donne

$$\frac{h_a}{h_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_2^2} - 1\right).$$

Numériquement on trouve $h_a = 3{,}93$ m.