Correction

Problème 1 Un pipeline transporte du pétrole de masse volumique $\varrho = 800$ kg/m^3 et de viscosité dynamique $\mu = 6$ mPa s. Le débit nominal est $Q = 500$ l/s. Une station de pompage compense exactement les pertes de charge ΔH sur une distance $L = 10$ km. Le diamètre du tube cylindrique est $D = 800$ mm. Un modèle réduit est fabriqué avec un rapport d'aspect de 1:50. On emploie de l'air comme fluide dans l'essai à échelle réduite. La masse volumique de l'air est 1,2 kg/m^3 et sa viscosité dynamique est $\mu = 2 \times 10^{-5}$ Pa s.

(a) Combien de nombre sans dimension peut-on former ?
$\rightsquigarrow$ Il y a $n = 6$ variables : ϱ, μ, Q, L, D, et ΔH. Il y a 3 unités physiques. On peut former la matrice

	ϱ	μ	Q	L	D	ΔH
m	-3	1	3	1	1	1
kg	1	-1	0	0	0	0
s	0	-1	-1	0	0	0

dont le rang est $r = 3$. On peut former $n - r = 3$ nombres sans dimension: $\Delta H/L$, L/D, et $Re = \varrho u D/\mu$ (avec $u = 4Q/(\pi D^2)$ la vitesse débitante).

(b) Calculer le nombre de Reynolds à l'échelle 1 (celle du pipeline).
$\rightsquigarrow$ C'est une simple application numérique : $Re = 4\varrho Q D/(\pi \mu D^2) = 1{,}06 \times 10^5$.

(c) Quelle est la vitesse de l'air dans le modèle réduit ?
$\rightsquigarrow$ On doit résoudre l'équation

$$\varrho_a u_a D_a/\mu_a = 1{,}06 \times 10^5 \Rightarrow u_a = \frac{\mu_a}{\varrho_a D_a} 1{,}06 \times 10^5 \text{ avec } D_a = \frac{D}{50}.$$

On trouve $u_a = 110$ m/s.

Problème 2 On considère un canal rectiligne sur fond horizontal, de largeur B. On observe la propagation d'un ressaut hydraulique (mascaret), qui s'apparente à une « onde de choc » ou une discontinuité se déplaçant à la vitesse constante c dans le sens de l'écoulement. On va s'intéresser à ce qui se passe dans un volume de contrôle mobile ABCD (voir figure 1) qui se déplace à la vitesse c ; ce volume est dit arbitraire car il se déplace à une vitesse différente de la vitesse (matérielle) de l'eau. Le raisonnement que l'on va suivre est donc identique à celui utilisé en cours pour obtenir l'équation du ressaut hydraulique si ce n'est que le ressaut est désormais mobile.

Le volume de contrôle est supposé de petites dimensions en sorte que l'on puisse négliger les pertes de charge dues au frottement sur le fond par rapport à la dissipation d'énergie associée à la propagation du mascaret (cela revient aussi à supposer le fluide parfait, c.-à-d. de viscosité nulle). La masse volumique de l'eau est ϱ. Le mascaret est dû au lâcher d'eau d'un barrage. On supposera qu'à l'aval, la hauteur est uniforme et égale à h_2 ; la vitesse est $u_2 = 0$. A l'amont du mascaret, la hauteur est également uniforme, mais égale à $h_1 > h_2$; la vitesse est $u_1 > 0$. On supposera ici que le profil de vitesse est uniforme : par exemple, le profil de vitesse à l'amont du ressaut est $u(z) = u_1$ pour $0 \leq z \leq h_1$. La pression atmosphérique est supposée nulle.

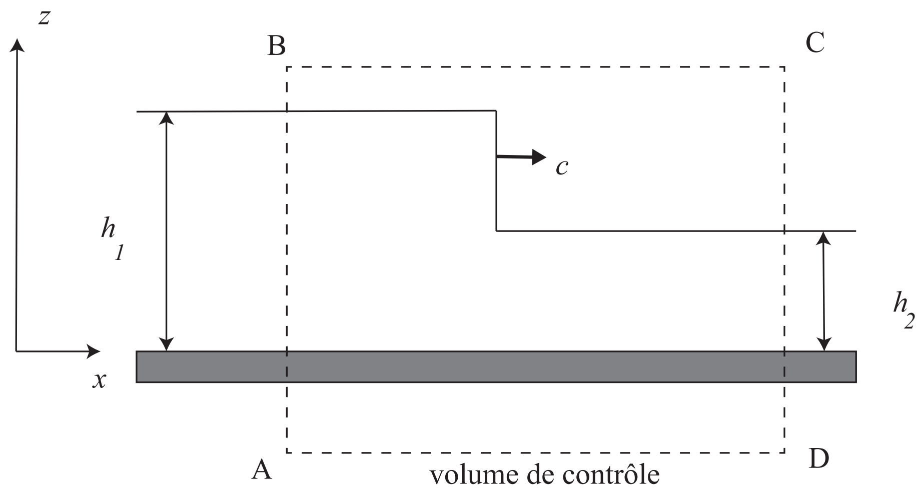

Figure 1 : schéma d'un mascaret avec le volume de contrôle (arbitraire) V_a associé.

(a) Est-ce que la pression est hydrostatique ?

$\rightsquigarrow$ La pression est hydrostatique. Pour le montrer, on peut intégrer l'équation du mouvement pour un fluide parfait qui n'est ici que l'équation de l'hydrostatique : $0 = -g - \mathrm{d}p/\mathrm{d}z$.

(b) Quelle est la distribution de pression $p(z)$ sur la face AB ?
$\rightsquigarrow$ C'est une simple application du calcul des pressions en hydrostatique

$$p = \varrho g(h_1 - z)$$

(c) Quelle est la résultante des forces de pression F_{AB} sur la face AB ?
$\rightsquigarrow$ C'est une simple application du calcul des forces en hydrostatique

$$F_{AB} = \varrho \frac{1}{2} g B h_1^2$$

(d) Quelle est la résultante des forces de pression F_{CD} sur la face CD ?
$\rightsquigarrow$ C'est une simple application du calcul des forces en hydrostatique, mais faire attention au signe

$$F_{CD} = -\varrho \frac{1}{2} g B h_2^2$$

(e) En vous servant de la conservation de la masse en régime permanent, déterminer la célérité c en fonction de h_1 et h_2
$\rightsquigarrow$ On se sert du théorème de Reynolds appliqué à V_a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho \mathrm{d}V = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_a} f \mathrm{d}V}_{0} - \varrho B h_1 (u_1 - c) + \varrho B h_2 (-c) = 0,$$

soit après élimination

$$-ch_2 = h_1(u_1 - c) \Rightarrow c = \frac{h_1 u_1}{h_1 - h_2}. \quad (1)$$

(f) En vous servant de la conservation de la quantité en mouvement en régime permanent, déterminer le flux ϕ_{AB} de quantité de mouvement à travers la face AB.
$\rightsquigarrow$ On s'aide de la définition du flux à travers S_a

$$\phi_{AB} = -\varrho B h_1 u_1 (u_1 - c).$$

(g) En vous servant de la conservation de la quantité en mouvement en régime permanent, déterminer le flux ϕ_{CD} de quantité de mouvement à travers la face CD.
$\rightsquigarrow$ Même chose que précédemment, mais avec $u_2 = 0$

$$\phi_{CD} = 0.$$

(h) En régime permanent, la conservation de la quantité de mouvement implique que le flux de quantité de mouvement à travers la surface de contrôle est égal à la somme des forces appliquées au volume (théorème d'Euler). En déduire l'équation que doit vérifier c en égalant forces de pression et flux de quantité de mouvement après simplification.
$\rightsquigarrow$ Il faut ajouter les flux d'un côté et les forces de pression de l'autre $F_{AB} + F_{CD} = \phi_{AB} + \phi_{CD}$, soit après élimination de B

$$\frac{1}{2} g(h_1^2 - h_2^2) = h_1 u_1 (c - u_1). \tag{2}$$

(i) En vous servant de conservation de la masse, en déduire la vitesse c en fonction de h_1 et h_2 :
$\rightsquigarrow$ Il faut résoudre les équations (1) et (2). On trouve

$$c = \sqrt{g \frac{h_1}{2h_2}(h_1 + h_2)}.$$

Problème 3 On considère un cube de côté a et de masse M. Il est plongé dans un chambre de section carrée de côté $a + 2d$ et de hauteur h, remplie d'un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique μ et masse volumique ϱ. Le fluide remplit entièrement le volume de cette chambre et sa surface est à l'air libre. Le cube est en train de descendre vers le fond de la chambre son l'effet de sous poids. La distance d séparant la paroi du cube de celle de la chambre est petite : $d \ll a$. La pression atmosphérique est prise égale à $p_{atm} = 0$. On note $S = a^2$ l'aire d'une des faces du cube. On note $w(x)$ la vitesse du fluide dans l'interstice entre le cube et la paroi intérieure de la chambre. On travaille dans un repère cartésien tel que le montre la figure 2.

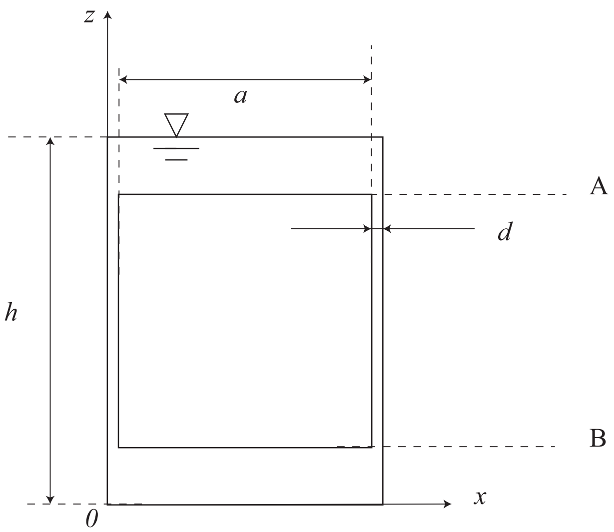

Figure 2 : bloc solide en forme de cube glissant au fond d'une chambre.

(a) Quelle est la pression qui sur la face supérieure du cube (ligne A d'altitude z_a) ?
$\rightsquigarrow$ Il s'agit d'une simple application de l'hydrostatique $p_a = \varrho g(h - z_a)$

(b) Quelle est la pression qui sur la face inférieure du cube (ligne B d'altitude z_b) en supposant que la pression du fluide doit reprendre la force exercée par le cube ?
$\rightsquigarrow$ Le cube est soumis à son poids $-Mg$ et à la force de pression sur la face

supérieure $-SP_a$

$$p_b = p_a + \frac{Mg}{S},$$

(c) En déduire le gradient de pression vertical dans l'interstice entre le cube et la paroi intérieure de la chambre entre les cotes A et B :
$\rightsquigarrow$ C'est la différence de pressions ramenée à la différence d'altitude

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{p_a - p_b}{a} = -\frac{Mg}{Sa}.$$

(d) On fait l'hypothèse de couche mince et d'écoulement permanent pour le fluide contenu dans l'interstice. Qu'est-ce que cela veut dire ?
Cela veut dire deux choses :

- l'écoulement est permanent : $\partial_t w = 0$;
- l'écoulement est mince, donc les gradients dans la direction transverse x sont bien supérieurs à ceux dans la direction d'écoulement :

$$\frac{\partial w}{\partial z} \ll \frac{\partial w}{\partial x}$$

(e) Pourquoi peut-on considérer que la vitesse du fluide est indépendante de z dans l'interstice ?
$\rightsquigarrow$ Le fluide est incompressible et l'écoulement est permanent. Comme la section d'écoulement est constante, le débit l'est aussi, donc la vitesse.

(f) En vous servant de l'hypothèse de couche mince et en supposant que l'écoulement de fluide dans l'interstice est permanent avec une vitesse $w(x)$, écrire la composante verticale de la conservation de la quantité de mouvement selon Navier-Stokes.
$\rightsquigarrow$ On simplifie la projection selon z de l'équation de Navier-Stokes et obtient compte tenu des hypothèses et simplifications

$$0 = -\varrho g - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \mu \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}. \tag{3}$$

(g) Quelles sont les conditions aux limites si la vitesse du cube est $U < 0$. On se placera ici sur la face de gauche et on considéra l'interstice $0 \le x \le d$.
$\rightsquigarrow$ On doit exprimer l'adhérence du fluide aux parois, donc $w(0) = 0$ et $w(d) = U$.

(h) Intégrer l'équation du mouvement pour en déduire le profil de vitesse $w(x)$.
$\rightsquigarrow$ L'intégration de (3) donne

$$w = \frac{1}{\mu}\left(\varrho g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)\frac{1}{2}x^2 + ax + b,$$

avec a et b deux constantes d'intégration. La condition $w(0) = 0$ donne $b = 0$ et $w(d) = U$ donne

$$ad = U - \left(\varrho g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)\frac{d^2}{2\mu},$$

donc

$$w = K\frac{x^2}{2} + x\left(\frac{U}{d} - \frac{Kd}{2}\right) \text{ avec } K = \frac{1}{\mu}\left(\varrho g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right),$$

(i) Quelles sont les forces visqueuses exercées par le fluide sur le cube ?
$\rightsquigarrow$ Pour une face du cube, la force de frottement est $F_1 = a^2\tau$ avec

$$\tau = \mu\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \mu\left(\frac{U}{d} + \frac{Kd}{2}\right) \text{ en } x = d,$$

d'où

$$F = 4F_1 = 4\mu\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \mu\left(\frac{U}{d} + \frac{Kd}{2}\right).$$

Problème 4 Un lac d'accumulation est muni d'un évacuateur de crue, qui se présente sous la forme d'un déversoir en béton (voir figure 3). Celui-ci se compose d'un radier en béton de largeur $B = 10$ m et de rugosité $K = 65$ m^3 s^{-1}. La hauteur de l'ouvrage par rapport au niveau de référence est $p' = 10$ m. Le radier a une pente de 20°. Il débouche sur un bassin amortisseur de longueur $L = 20$ m, de pente nulle et terminé par un seuil mince de pelle $p = 1$ m. L'eau est ensuite restituée à un cours d'eau de pente $i = 0{,}1$ %. La section est rectangulaire et de largeur constante $B = 10$ m.

Il se produit une crue importante, qui se traduit par une montée rapide des eaux. Le niveau d'eau dans le lac d'accumulation dépasse de $\Delta h = 50$ cm.

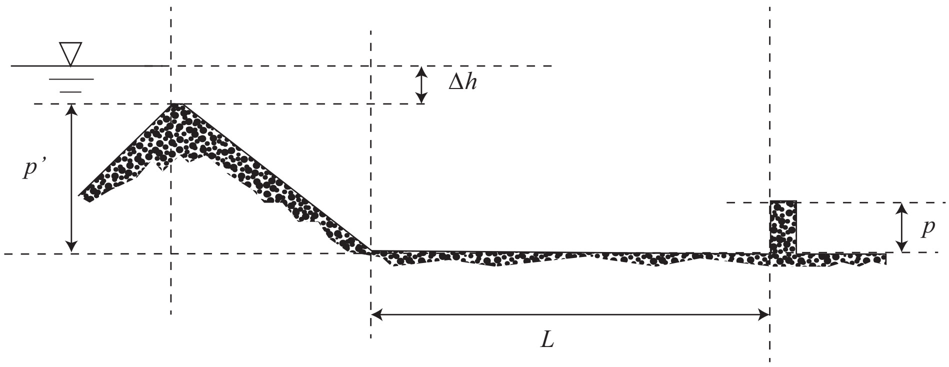

Figure 3 : schéma de l'évacuateur de crue.

Formulaire

– On supposera que les ouvrages de déversement sont parfaits (pas de perte de charge associée) et que le débit par unité de largeur est

$$q = \sqrt{g}\left(\frac{2}{3}(H - p)\right)^{3/2}$$

avec p la pelle de l'ouvrage et H la charge à l'amont de l'ouvrage.

– La longueur d'un ressaut est estimée à l'aide de

$$\frac{L}{h_1} = 220 \tanh \frac{\mathrm{Fr}_1 - 1}{22},$$

avec h_1 et Fr_1 la hauteur d'eau et le nombre de Froude à l'amont du ressaut.

– La formule dite de conjugaison entre les deux hauteurs d'un ressaut s'écrit

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right),$$

avec h_1 et Fr_1 la hauteur d'eau et le nombre de Froude à l'amont du ressaut, et h_2 la hauteur à l'aval du ressaut.

(a) Calculer le débit évacué par le déversoir.
$\rightsquigarrow$ Le débit par unité de largeur est $\sqrt{g}(2/3 \times 0{,}5)^{3/2}$, soit $Q = Bq = 6$ m^3/s

(b) Calculer les hauteurs normale et critique sur le coursier.
$\rightsquigarrow$ La hauteur normale est la solution de l'équation implicite

$$Q = K\left(\frac{Bh}{B + 2h}\right)^{2/3} \sqrt{\sin 20°} Bh \Rightarrow h_n = 8{,}3 \text{ cm}$$

et la hauteur critique vérifie

$$Fr = 1 \Rightarrow h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 33 \text{ cm}.$$

(c) Quel est le régime d'écoulement sur le coursier ?
$\rightsquigarrow$ Comme $h_m < h_c$, le régime est supercritique.

(d) Calculer la hauteur normale et critique dans le bassin.
$\rightsquigarrow$ Comme la pente est nulle, il n'y a pas de hauteur normale et la hauteur critique est toujours $h = h_c = 33$ cm quelle que soit la pente.

(e) Calculer la charge à l'amont du seuil mince.
$\rightsquigarrow$ La charge vaut $H = p + h_c + q^2/(2gh_c^2) = p + 3h_c/2 = 1{,}5$ m.

(f) En déduire la hauteur d'eau.
$\rightsquigarrow$ C'est la solution de l'équation exprimant la conservation de la charge juste à l'amont du seuil

$$\frac{q^2}{2gh^2} + h = H \Rightarrow h = 1{,}49 \text{ m}.$$

(g) Dans l'éventualité où un ressaut se forme, calculer les hauteurs juste à l'amont et à l'aval du ressaut. Que vaut le Froude en tête de bassin (c.-à-d. à son extrémité gauche) ? Que se passe-t-il dans ce bassin ?
$\rightsquigarrow$ La hauteur à l'aval est $h_2 = 1{,}49$ m. A l'aval, on se sert de l'équation de conjugaison

$$h_2 = \frac{1}{2}h_1\left(\sqrt{1+8\frac{q^2}{h_1^2(gh_1)}}-1\right) \Rightarrow h_1 = 3 \text{ cm}.$$

A l'aval du ressaut on a $Fr_1 = q/(h_1\sqrt{gh_1}) = 32{,}7$. Un ressaut se forme.

(h) Est-ce que le bassin est suffisamment long ?
$\rightsquigarrow$ Compte tenu des calculs précédents, on a

$$\ell = 220 h_1 \tanh\frac{Fr_1 - 1}{22} = 6{,}4 \text{ m}.$$

Comme $\ell < L = 20$ m on peut considérer que le bassin est suffisamment long.

(i) Tracer la courbe de remous entre le déversoir et la rivière.
$\rightsquigarrow$ On tient compte de : (i) la hauteur normale atteinte sur le coursier, (ii) la hauteur h_1 à l'aval du ressaut, (iii) un ressaut quelque part dans le bassin, (iv) la hauteur h_2 à l'aval du ressaut, (v) la hauteur h_c au-dessus du seuil mince.

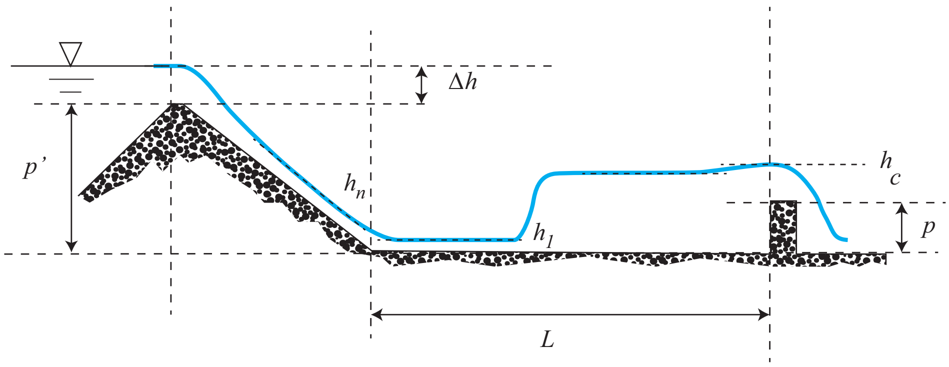

Figure 4 : courbe de remous.