Conditions d'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Documentation autorisée : aucune documentation sauf formulaire A4

Matériel autorisé : aucun matériel électronique sauf calculatrice simple

Durée de l'examen : 2 h 45 (8 h 15–11 h 00)

Date et lieu : 22 juin 2017 salle CO3

---

1. Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les exercices y figure !
2. **Écrivez vos noms et prénom(s) en lettres capitales.**
3. L'examen comporte 6 exercices. Le total des points P est 7. La note finale N de cet examen est $N = 1 + 5P/7$.
4. **Aucun document n'est autorisé, à l'exception d'un formulaire recto-verso au format maximal A4. Une calculatrice scientifique (éventuellement graphique) est tolérée. Les appareils de type mini PC ou tout autre appareil permettant de communiquer et/ou stocker des données sont interdits. Un formulaire accompagne chaque question.**
5. **Le résultat des calculs devra être encadré et écrit de façon très lisible. Les calculs seront éventuellement joints sur des feuilles au propre.** Les feuilles mal écrites ou écrites avec un crayon papier seront considérées comme des brouillons et ne seront pas prises en compte ; **une pénalité de 0,25 (sur la note N) sera appliquée à la note de cet examen** pour ceux qui ne respecteront pas cette consigne. Pour les applications numériques, ne pas oublier les unités. Pensez à numéroter les pages et mettre vos noms sur chaque feuille.
6. Le barème de chaque question est indiqué au début de chaque question. Choisissez bien vos questions pour optimiser vos points.
7. Il n'y a pas de pièges, mais il faut aller vite...

Problème 1 Un Parshall est un dispositif qui sert à mesurer le débit dans un canal à partir de la mesure de la hauteur (voir figure 1). Il comporte :

- un tronçon convergent, tout d'abord ascendant puis horizontal, où l'écoulement est subcritique ;
- un coursier à pente descendante, étroit de largeur constante W_2, où l'écoulement est critique ;
- un tronçon divergent et légèrement ascendant, où l'écoulement est supercritique.

On mesure la hauteur d'eau h_1 dans un puits relié au premier tronçon au niveau de la section 1 (voir figure 1). La largeur du canal en cette section est notée W_1. Le débit total est Q. Le régime est permanent. La différence d'altitude entre le sommet du seuil (section 2) et le lit du canal est notée Δz. On appelle h_c la hauteur critique atteinte dans le second tronçon où l'écoulement est critique (on a donc $h_2 = h_c$). Le seuil est dénoyé.

(a) [0,20] Donner l'expression de l'énergie totale à la section 2 en fonction de Δz et h_c. On peut répondre en termes d'énergie totale ou de charge hydraulique.

(b) [0,20] Donner l'expression de l'énergie totale à la section 1 en fonction de Δz, Q, W_1 et h_1. On peut répondre en termes d'énergie totale ou de charge hydraulique.

(c) [0,20] En négligeant la dissipation d'énergie entre les sections 1 et 2, déterminer l'équation (implicite) permettant de calculer le débit si on suppose que h_1 est déterminée (à partir d'une mesure dans le puits).

(d) [0,20] Faire une application numérique.

(e) [0,20] Dans l'expression de l'énergie spécifique à la section 1, laquelle des deux contributions est négligeable et pourquoi ? En déduire une expression approchée permettant de déduire Q en fonction de Δz, W_2, W_1 et h_1. Faire une application numérique. Quelle est la précision de cette approximation ?

Données numériques :

- Largeur des tronçons : $W_1 = 6$ m et $W_2 = 2$ m
- Hauteur mesurée $h_1 = 1$ m
- Hauteur de la marche $\Delta z = 30$ cm

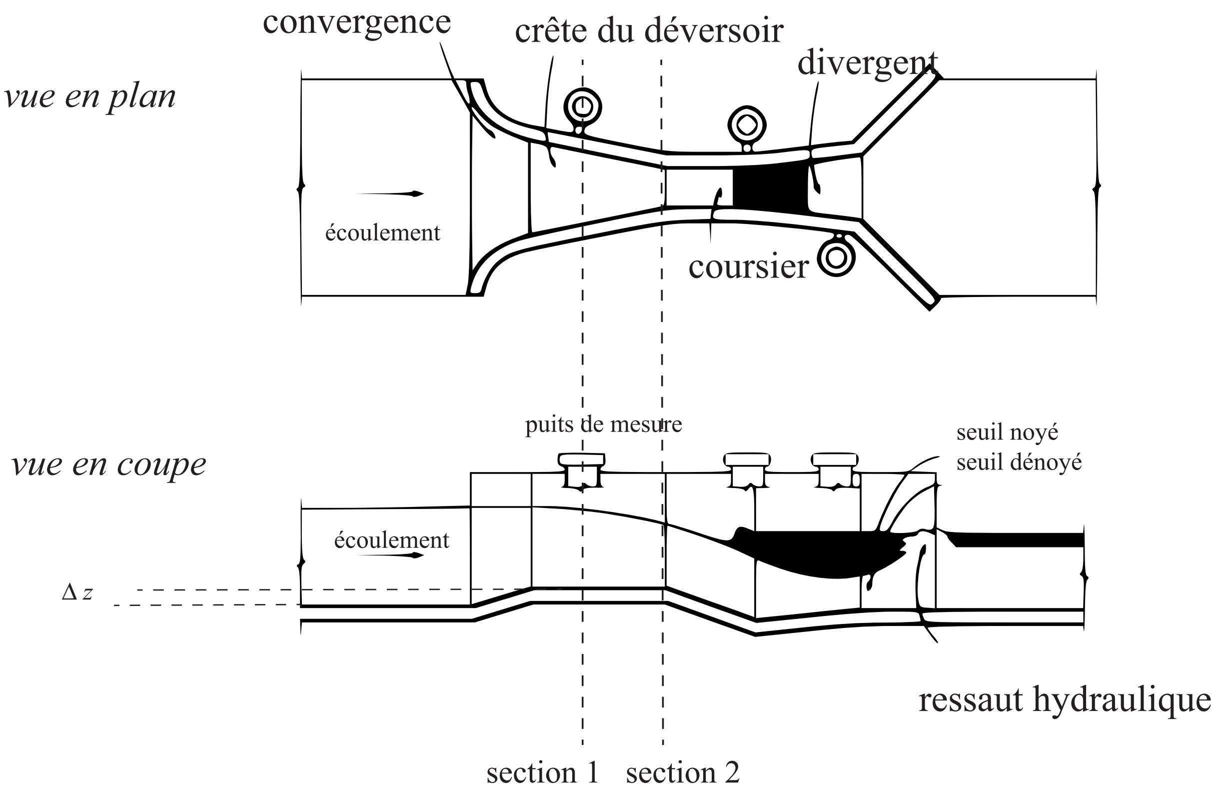


Figure 1 : schéma d'un canal Parshall.

Problème 2 Un réservoir contient un volume d'eau (voir figure 2). La hauteur est $h = 8$ m. La paroi du réservoir est munie d'une vanne de forme semi-circulaire de rayon $R = 2$ m. On souhaite calculer la force de pression exercée par l'eau sur cette vanne afin de concevoir un dispositif de fermeture adapté. On suppose que la pression atmosphérique est $p_a = 0$.

(a) [0,20] Donner l'expression de la distribution de pression au sein du volume d'eau selon la verticale.

(b) [0,60] Calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la vanne.

(c) [0,20] Faire l'application numérique.

(d) [0,50] Calculer la position du point d'application de la résultante des forces et le moment résultant des forces de pression par rapport à la charnière supposée être le long du sol.

Formulaire :

- $\int \cos^2 x \mathrm{d}x = x/2 + \sin(2x)/4$ et $\int \sin^2 x \mathrm{d}x = x/2 - \sin(2x)/4$
- $\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = -\cos^2 x/2$ et $\int \sin^2 x \cos^2 x \mathrm{d}x = x/8 - \sin(4x)/32$
- $\int \cos^2 x \sin x \mathrm{d}x = -\cos^3 x/3$ et $\int \sin x \cos^2 x \mathrm{d}x = \sin^3 x/3$

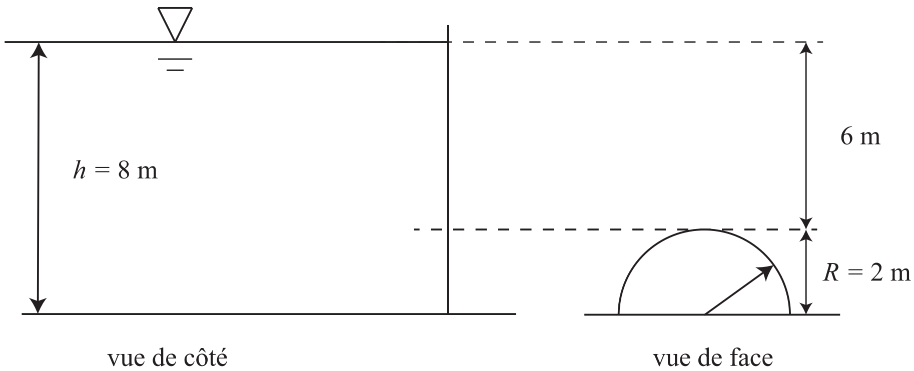


Figure 2 : schéma du réservoir.

Problème 3 Un canal industriel de section rectangulaire (et de largeur B) est muni d'une vanne guillotine de même largeur. La vanne est ouverte en partie et laisse passer une lame d'eau d'épaisseur d (voir figure 3). Un régime permanent est établi, avec un débit total Q. On néglige le frottement de l'eau sur les parois du canal.

(a) [0,20] En appliquant le théorème de Bernoulli, établir le débit qui transite sous la vanne sachant qu'à l'amont de ladite vanne, il y a une hauteur d'eau h_1. Pour ce faire, on pourra s'inspirer de la démonstration de la formule de Torricelli. On suppose que la vanne est « dénoyée », c'est-à-dire que l'écoulement aval ne perturbe pas l'écoulement amont.

(b) [0,10] Des mesures montrent que le débit sous la lame est

$$Q = C_d B d \sqrt{2gh_1}$$

avec $C_d = 0{,}67$. Si cette équation est différente de l'équation obtenue précédemment, justifier la raison de l'écart. Faire l'application numérique.

(c) [0,20] On souhaite calculer la force F qu'il faut exercer pour maintenir en place la vanne lorsqu'il y a écoulement. Pour cela on va se servir des équations de conservation sur un volume de contrôle arbitraire fixe qui englobe la vanne et les deux tronçons du canal de part et d'autre de la vanne (voir figure 3). Le fluide est parfait (non visqueux). Exprimer la conservation de la masse en établissant une relation liant les variables h_1, h_2, u_1 et u_2.

(d) [0,20] Calculer la force de pression qui s'exerce sur la face amont et celle qui s'exerce sur la face aval du volume de contrôle. On prendra garde de fournir ici des valeurs algébriques (la projection de la force sur l'axe x).

(e) [0,20] Calculer les flux de quantité de mouvement à travers les faces amont et aval du volume de contrôle.

(f) [0,50] En appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement, établir la force F de réaction qui s'exerce sur la vanne.

(g) [0,10] Faire l'application numérique.

Données :

- $B = 10$ m, $d = 1$ m
- $h_1 = 5$ m et $h_2 = 80$ cm.

Formulaire :
Le théorème de conservation appliqué à un volume de contrôle arbitraire (non matériel) V_a s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_a} \varrho \boldsymbol{u} \mathrm{d}V + \int_{S_a} \varrho \boldsymbol{u}[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})\cdot \boldsymbol{n}]\mathrm{d}S = \varrho V_a \boldsymbol{g} + \int_{S_a} \boldsymbol{\sigma}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

où S_a est la surface enveloppant V_a, $\boldsymbol{w}$ est la vitesse de déplacement de la surface arbitraire S_a, $\boldsymbol{w}$ est la normale à la surface de contrôle orientée de l'intérieur vers l'extérieur de V_a, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes (pour un fluide parfait $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$ avec p la pression), et $\boldsymbol{u}$ est la vitesse matérielle du fluide.

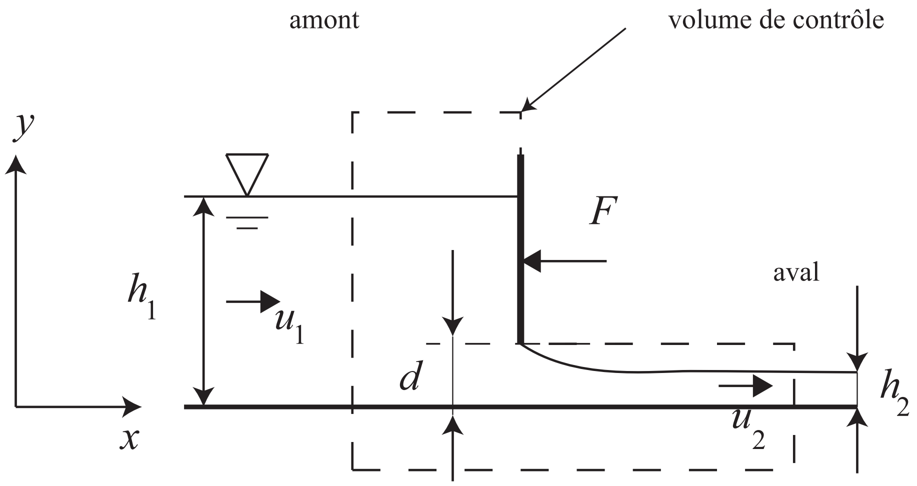


Figure 3 : schéma de principe d'une vanne à guillotine et positionnement du volume de contrôle fixe V_a.

Problème 4 On réalise une étude en soufflerie de l'effet du vent sur une cheminée en béton de longueur 20 m et de diamètre 1 m. Le modèle réduit est à l'échelle 1 : 100 et il est constitué d'un tube en aluminium lisse. Dans la soufflerie, l'air est injecté à 45 m/s à une température de 20 °C et à une pression de $p_a = 10^5$ Pa. Un dynamomètre permet de mesurer la force exercée par l'air sur le cylindre.

(a) [0,40] En soufflerie, on mesure une force $F = 2{,}2 \pm 0{,}1$ N. Est-ce que cette valeur est cohérente avec le diagramme $C_D = f(Re_d)$ de la figure 4 ? (Bien justifier sa réponse).

(b) [0,40] Indiquer la force correspondante pour la cheminée et la plage de vitesse du vent pour laquelle le coefficient C_D est constant pour la cheminée réelle.

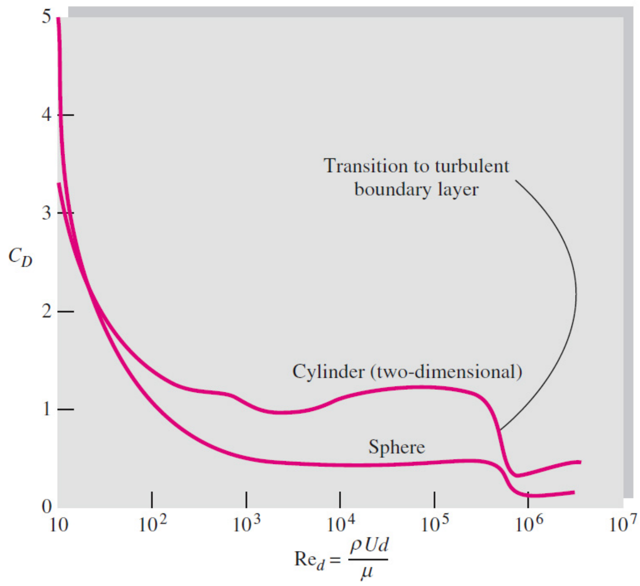
(c) [0,20] Le modèle réduit a été réalisé en métal. Pensez-vous que ce choix soit judicieux ?

Données :

- caractéristiques de l'air : voir les valeurs reportées dans le tableau 1 (les interpoler si nécessaire).
- masse volumique béton armé $\varrho = 2400$ kg·m^{-3}
- masse volumique aluminium $\varrho = 2690$ kg·m^{-3}
- Expression de la force de traînée $F = \frac{1}{2} C_D S \varrho u^2$ (S surface apparente offerte à l'écoulement)

Tableau 1 : caractéristiques de l'air en fonction de T (température en kelvins) à pression atmosphérique constante ($p_a = 1$ bar), avec ϱ, masse volumique ; μ, viscosité dynamique ; ν, viscosité cinématique. D'après Frank M. White, *Heat and Mass transfer*, Addison-Wesley, 1988.

T	ϱ	μ	ν
K	kg·m^{-3}	Pa·s	m^2·s^{-1}
250	1,413	$1{,}60\times10^{-5}$	$0{,}949\times10^{-5}$
300	1,177	$1{,}85\times10^{-5}$	$1{,}57\times10^{-5}$
350	0,998	$2{,}08\times10^{-5}$	$2{,}08\times10^{-5}$
400	0,883	$2{,}29\times10^{-5}$	$2{,}59\times10^{-5}$
450	0,783	$2{,}48\times10^{-5}$	$2{,}89\times10^{-5}$
500	0,705	$2{,}67\times10^{-5}$	$3{,}69\times10^{-5}$



Cylinder length effect

($10^4 < Re < 10^5$)

L/d	C_D
∞	1.20
40	0.98
20	0.91
10	0.82
5	0.74
3	0.72
2	0.68
1	0.64

Figure 4 : valeur du coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds $Re = \varrho U d/\mu$ avec d le diamètre de la sphère ou du cylindre pour un obstacle lisse. D'après Frank M. White, *Heat and Mass transfer*, Addison-Wesley, 1988.

Problème 5 On considère l'écoulement permanent d'un fluide newtonien incompressible de viscosité cinématique ν entre deux plans parallèles de grandes dimensions, placés horizontalement, et séparés d'une distance d (voir figure 5). Le fluide est mû par un gradient de pression constant $\partial p_x = -a < 0$ (avec a une constante positive). L'axe x est orienté dans le sens de l'écoulement.

(a) [0,20] En supposant que l'écoulement est en régime laminaire, écrire les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites. Les simplifier en tenant compte des symétries simples du problème.

(b) [0,20] Résoudre les équations : déterminer le profil de vitesse en fonction de a, le tracer. Quelle est la vitesse moyenne du fluide $\bar{u}$?

(c) [0,20] Calculer la contrainte de cisaillement et tracer son profil.

(d) [0,20] Le coefficient de Darcy-Weisbach f est lié aux pertes de charges (ici le gradient de pression qu'il faut imposer pour mouvoir le fluide) de telle sorte que

$$|\Delta p| = \frac{1}{2} f \frac{L}{D_h} \varrho \bar{u}^2$$

avec $D_h = d$ le diamètre hydraulique, L la longueur sur laquelle est appliqué le gradient de pression (si Δp est la différence de pression entre deux points séparés de L, alors $\partial_x p = \Delta p/L = -a$), ϱ la masse volumique du fluide.

Calculer f en régime laminaire en fonction du nombre de Reynolds $Re = 4D_h\bar{u}/\nu$.

(e) [0,20] On considère maintenant que l'écoulement est en régime turbulent. On adopte une équation algébrique de fermeture de type « longueur de mélange » pour la viscosité turbulente. Quelle est la forme du profil de vitesse moyennée près de la paroi (on supposera que la contrainte est constante et égale à la contrainte pariétale).

Formulaire :

Modèle de longueur de mélange. On écrit que la contrainte turbulente est

$$\tau = \mu_t \frac{\mathrm{d}\langle u \rangle}{\mathrm{d}y},$$

avec μ_t la viscosité turbulente et $\langle u \rangle$ la vitesse moyennée. Dans ce modèle, la viscosité turbulente vérifie

$$\mu_t = \varrho \ell^2 \left| \frac{\mathrm{d}\langle u \rangle}{\mathrm{d}y} \right|,$$

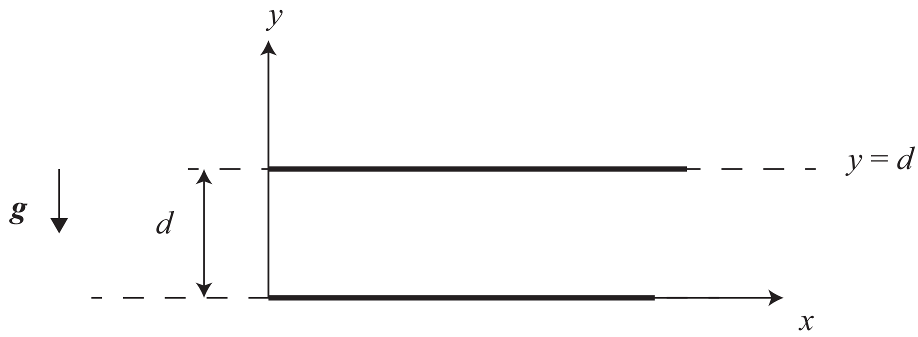


Figure 5 : écoulement entre deux plaques parallèles.

où $\ell = \kappa y$ est la « longueur de mélange » ($\kappa = 0{,}41$ la constante de von Kármán).

Équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible. Le principe de conservation de la quantité de mouvement conduit aux formes suivantes pour un repère cartésien (x, y, z) :

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varrho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \varrho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

avec p pression du fluide, $\boldsymbol{u} = (u,\ v,\ w)$ les composantes du champ de vitesse, $\boldsymbol{g} = (g_x,\ g_y,\ g_z)$ l'accélération de la gravité. L'équation de continuité est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Problème 6 On considère un écoulement permanent d'eau dans un canal de laboratoire. Le fond est composé d'un lit en gravier. La section est rectangulaire de largeur $W = 60$ cm. Les parois sont en verre. La pente du lit est 2 %. Le diamètre d_{90} est 6 mm. Le débit liquide est $Q = 25$ l/s. La longueur du canal est 20 m. À la sortie du canal, l'eau chute dans un réservoir (on peut considérer que l'écoulement devient critique à la sortie du canal).

(a) [0,20] Pourquoi peut-on faire l'approximation d'écoulement indéfiniment large dans le cas présent.

(b) [0,20] Calculer la hauteur normale et la hauteur critique.

(c) [0,20] Quel est le régime d'écoulement.

(d) [0,40] Tracer le profil de hauteur (courbe de remous) en prenant 3 hauteurs initiales (c.-à-d. la hauteur à l'entrée du canal $x = 0$) $h = 2$ cm, 5 cm, 10 cm. Justifier la forme des courbes tracées.

Formulaire

– La longueur d'un ressaut est estimée à l'aide de

$$\frac{L}{h_1} = 220 \tanh \frac{\mathrm{Fr}_1 - 1}{22},$$

avec h_1 et Fr_1 la hauteur d'eau et le nombre de Froude à l'amont du ressaut. La fonction tanh est définie comme

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

– La formule dite de conjugaison entre les deux hauteurs d'un ressaut s'écrit

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right),$$

avec h_1 et Fr_1 la hauteur d'eau et le nombre de Froude à l'amont du ressaut, et h_2 la hauteur à l'aval du ressaut.

– Formule de Manning Strickler : contrainte pariétale pour une section de rayon hydraulique R_h et de rugosité K, $\tau_p = \varrho g \bar{u}^2/(K^2 R_h^{1/3})$.

– Condition d'équilibre du lit en régime permanent uniforme : $\tau_p = \varrho g R_h i$ pour une section de rayon hydraulique R_h et où $i = \sin\theta$.

– Formule du périmètre mouillé $R_h = S/\chi$ avec S section mouillée et χ périmètre mouillé.
– Formule de Jäggi : $K = 23{,}2 d_{90}^{-1/6}$ (unités SI).
– Équation de la courbe de remous pour un canal de section rectangulaire et une loi de Manning-Strickler

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{j_f - i}{\mathrm{Fr}^2 - 1} = \frac{N(h)}{D(h)} = i\frac{(h_n/h)^{10/3} - 1}{(h_c/h)^3 - 1}$$