

Corrigé détaillé de l'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Problème 1

Question (a)

La puissance des efforts est $P_m = U_m F_m$. Les moteurs doivent fournir une puissance qui compense exactement la puissance dissipée, donc la puissance des moteurs est P_m .

Question (b)

Il y a en tout $n = 7$ variables : P , U , ϱ , μ , g , L , et M . On ne compte pas la force F parmi ces variables car il y aurait redondance avec P . Les unités sont au nombre de $K = 3$. D'après le théorème de Vashy-Buckingham, on peut donc former $n - K = 4$ nombres sans dimension indépendants.

Question (c)

Il y a une infinité de possibilités. On cherche une expression adimensionnelle de la relation explicite

$$P = P(U, \varrho, \mu, g, L, M).$$

On pourrait employer une matrice dimensionnelle comme en cours (exercice du calcul de la force de traînée). On va procéder ici de façon plus empirique (et efficace). Comme on impose d'employer les nombres de Reynolds et de Froude ($Re = \varrho UL/\mu$ et $Fr = U/\sqrt{gL}$), il ne reste qu'à adimensionnaliser la puissance du cargo et trouver un quatrième nombre traduisant le rôle joué par la masse. Pour ce dernier, c'est simple : on définit le nombre adimensionnel

II de la façon suivante

$$\Pi = \frac{m}{\rho L^3}.$$

Pour la puissance, il faut réfléchir un peu plus. La puissance des pompes sert à vaincre les forces de frottement F_f , qui sont de type traînée, donc de la forme $F_f \propto C_d \rho U^2 S$ avec S la surface exposée et le C_d le coefficient de traînée. Cela implique que la puissance varie comme $P \propto F_f U$ c'est-à-dire $P \propto \rho U^3 L^2$. On en déduit que la relation adimensionnelle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{P}{\rho U^3 L^2} = \mathcal{P}(Re, Fr, \Pi).$$

Question (d)

Si on impose une similitude complète, alors on doit avoir

$$Re = Re_m \Rightarrow \frac{U_m}{U} = k^{-1} = 100,$$

tandis que

$$Fr = Fr_m \Rightarrow \frac{U_m}{U} = k^{1/2} = 0,1,$$

et donc en déduit une incompatibilité. En hydraulique, comme les phénomènes faisant intervenir de la turbulence développée ne dépendent que faiblement de Re , on fonde la similitude sur le respect du nombre de Froude.

Question (e)

La similitude partielle impose

$$Fr = Fr_m \Rightarrow \frac{U_m}{U} = k^{1/2} = 0,1 \text{ donc } U_m = 1 \text{ m/s}$$

et

$$\Pi_m = \Pi \Rightarrow \frac{M_m}{M} = k^3 = 0,1 \text{ donc } M_m = 10 \text{ kg}$$

donc on déduit

$$\frac{P_m}{\rho_m U_m^3 L_m^2} = \frac{P}{\rho U^3 L^2} \Rightarrow P = k^{-2} \left(\frac{U}{U_m} \right)^3 = 0,1 \text{ donc } M_m = 10 \text{ MW}$$

Problème 2

Question (a)

La force de pression incrémentale est définie comme

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}dS,$$

On introduit la coordonnée z' ($z' = D - z$) (voir figure 1); on introduit aussi l'angle θ tel que $z' = R(1 - \sin \theta)$. Le champ de pression est alors $p = \rho_1 g z'$. L'élément de surface est

$$dS = LRd\theta,$$

tandis que les coordonnées de la normale \mathbf{n} orientée de l'intérieur vers l'extérieur sont $(-\cos \theta, \sin \theta)$ dans le repère (x, z) . La force est donc

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \rho_1 g LR^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1 - \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} d\theta,$$

ce qui donne

$$\mathbf{F}_1 = \rho_1 g LR^2 \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

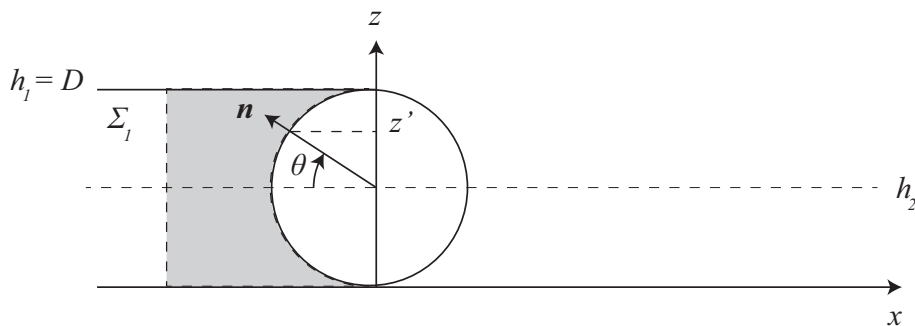


Figure 1 : schéma du cylindre.

Question (b)

La procédure de calcul est identique. Les seules différences sont :

- la distribution de pression est $p(z) = \varrho_2 g z'$ avec $z' = R - z = -R \sin \theta$;
- la normale a pour coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$;
- on intègre sur l'intervalle $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$.

On trouve

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{2} \varrho_2 g L R^2 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Question (c)

Le cylindre est soumis à : son poids propre $M\mathbf{g}$, la force de réaction du sol, les forces de pression \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 .

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la composante horizontale de \mathbf{F}_2 compense celle de \mathbf{F}_1 . Pour la direction z , les forces de pression tendent à soulever le cylindre, il faut que le poids soit supérieur à la projection de $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1$ sur Oz (la différence de forces sera reprise par la force de réaction du sol).

Mathématiquement cela impose donc que pour la direction Ox on ait

$$\frac{1}{2} \varrho_2 g L R^2 = 2 \varrho_1 g L R^2 \Rightarrow \varrho_2 = 4 \varrho_1.$$

Pour la direction Oz , on a l'inégalité suivante

$$Mg \geq g L R^2 \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 + \varrho_1 \right),$$

soit encore

$$M \geq L R^2 \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \varrho_2 + \varrho_1 \right),$$

et si ρ est la masse volumique du cylindre, alors $M = \rho \pi L R^2$, donc la condition porte sur les masses volumiques uniquement

$$4\rho \geq \varrho_2 + 2\varrho_1.$$

Question (d)

Le volume de fluide Σ_1 est soumis à: son poids propre P , la force de réaction du sol \mathbf{S} , la force de pression à la gauche du volume \mathbf{F}_p , et à la force de réaction du cylindre $\mathbf{F}_{cyl. \rightarrow eau}$. L'énoncé ne précise pas la largeur du volume de contrôle; on lui assigne arbitrairement une largeur ℓ .

Évaluons chacune des forces :

- poids :

$$P = -\rho_1 L g \left(2\ell R - \frac{1}{2} \pi R^2 \right) ;$$

- la force de réaction du sol \mathbf{S} est telle qu'elle contrebalance toutes les autres forces verticales ;
- la force de pression le long d'une surface droite se calcule simplement

$$F_p = \frac{1}{2} \pi \rho_1 g (2R)^2 L = 2\pi \rho_1 g R^2 ;$$

- la force de réaction du cylindre $\mathbf{F}_{cyl. \rightarrow eau}$ est l'opposée de la force que l'on a calculée précédemment :

$$\mathbf{F}_{cyl. \rightarrow eau} = -\mathbf{F}_1.$$

Ce bilan permet de calculer la force de pression exercée par le fluide sur le cylindre. En effet si l'eau dans la couche 1 est au repos, la somme des forces doit être nulle. Si l'on note F_x et F_z les coordonnées de \mathbf{F}_1 , alors on note :

- dans la direction x , F_x doit compenser exactement les forces de pression \mathbf{F}_p s'exerçant sur la face gauche du domaine, et donc

$$F_x = 2\pi \rho_1 g R^2.$$

- dans la direction z , la réaction du sol doit compenser le poids et la force F_z . La force F_z est nécessairement indépendante de la largeur ℓ du volume de contrôle. La seule contribution indépendante de ℓ dans l'expression de P est $\frac{1}{2} \rho_1 L g \pi R^2$. On déduit donc

$$F_z = \frac{1}{2} \rho_1 L g \pi R^2.$$

On conclut donc qu'un bilan des forces sur le volume de contrôle Σ_1 permet de calculer plus simplement que pour la question 1 la résultante des forces de pression. Notons que l'application du principe d'Archimède ne nous aurait donné que la composante verticale de cette résultante.

Problème 3

Question (a)

La conservation de la masse impose la conservation du débit, donc

$$Q = A_e v_e = A_s v_s. \quad (1)$$

Question (b)

Dans le volume de contrôle ouvert V_a , qui est stationnaire \mathbf{w} , le fluide a un écoulement permanent, donc les termes temporels disparaissent. L'équation de conservation

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} \rho \mathbf{u} dV + \int_{S_a} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] dS = \rho V_a \mathbf{g} + \int_{S_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS$$

se simplifie grandement en l'absence d'effet de la pesanteur et compte tenu de nos hypothèses

$$\int_{S_a} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{S_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2)$$

Si on décompose la surface de contrôle en la surface entrante A_e , sortante A_s , et la surface de la buse A_b , alors en tenant compte de la condition de non-pénétration, on a pour le terme d'inertie (ou convection)

$$\int_{S_a} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{A_e} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{A_s} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

dont les contributions s'évaluent facilement

$$\int_{A_e} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = -\rho A_e v_e^2 \mathbf{e}_z,$$

$$\int_{A_s} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = +\rho A_s v_s^2 \mathbf{e}_z.$$

On a introduit \mathbf{e}_z le vecteur unitaire orientant l'axe z . Pour les forces qui s'exercent aux frontières du volume de contrôle, on opère une décomposition similaire

$$-\int_{S_a} p \mathbf{n} dS = -\int_{A_e} p \mathbf{n} dS - \int_{A_s} p \mathbf{n} dS - \int_{A_b} p \mathbf{n} dS.$$

On évalue chacune des contributions :

$$- \int_{A_e} p \mathbf{n} dS = +p_e A_e \mathbf{e}_z,$$

$$- \int_{A_s} p \mathbf{n} dS = 0,$$

tandis que le troisième terme représente la force recherchée

$$- \int_{A_b} p \mathbf{n} dS = \mathbf{F}.$$

On peut donc écrire la conservation de la quantité de mouvement (9)

$$\rho(A_s v_s^2 - A_e v_e^2) \mathbf{e}_z = \mathbf{F} + p_e A_e \mathbf{e}_z$$

et donc

$$\mathbf{F} = (\rho(A_s v_s^2 - A_e v_e^2) - p_e A_e) \mathbf{e}_z. \quad (3)$$

Comme la buse est une structure de révolution autour de l'axe z , les efforts dans la direction radiale r s'annulent ; il n'y a qu'une composante dans la direction z .

Question (c)

Le long de l'axe z , on a d'après Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho v_e^2 + p_e = \frac{1}{2} \rho v_s^2 + p_s,$$

or $p_s = 0$, donc on tire

$$p_e = \frac{1}{2} \rho v_s^2 - \frac{1}{2} \rho v_e^2 = \frac{1}{2} \rho v_e^2 \left(\frac{v_s^2}{v_e^2} - 1 \right),$$

qui, compte tenu de la conservation débit (8), donne

$$p_e = \frac{1}{2} \rho v_e^2 \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right).$$

L'équation (10) de la force peut s'écrire

$$\mathbf{F} = \rho Q v_e \left((r^{-1} - 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) \right) \mathbf{e}_z,$$

soit après simplification

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2r^2} \rho \frac{Q^2}{A_e} (1-r)^2 \mathbf{e}_z.$$

Notons le signe négatif : telle que calculée, \mathbf{F} représente l'action de la buse sur le fluide. Si on veut calculer l'effort généré par le fluide sur la buse, le principe d'action et réaction nous dit que c'est $-\mathbf{F}$.

Question (d)

On applique le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant située au centre du jet

$$p_s + \rho g z_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 = p_a + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v(z),$$

avec les hypothèses employées, on a pour expression de la vitesse ascendante

$$\frac{1}{2} \rho v_s^2 - \rho g z = \frac{1}{2} \rho v(z) \Rightarrow v(z) = \sqrt{v_s^2 - 2gz},$$

qui n'est définie que pour $0 \leq z \leq z_{lim} = v_s^2/(2g)$. La conservation de la masse implique

$$Q = A_s v_s = A(z) v(z) \Rightarrow A(z) = \frac{A_s v_s}{v(z)} = A_s \left(1 - \frac{z}{z_{lim}}\right)^{-1/2}.$$

La section du jet s'élargit et devient infiniment grande à l'approche du point d'arrêt z_{lim} . Le calcul n'est pas réaliste loin de la buse car au fur et à mesure que la vitesse, et donc l'inertie, diminue, les effets visqueux ne deviennent plus négligeables. De plus, le fluide va finir par retomber, et donc perturber l'écoulement.

Question (e)

On introduit un repère cartésien (x, y) avec x selon l'horizontale et y la verticale. La loi de Newton pour une parcelle de fluide de masse m et vitesse $\mathbf{v}(t)$ est

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g},$$

avec pour condition initiale $\mathbf{v}(0) = v_s \mathbf{e}_z = v_s(\cos \alpha, \sin \alpha)$. On en déduit la position de la parcelle de fluide au temps t

$$x = v_s t \cos \alpha \text{ et } y = v_s t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Il n'y a aucune différence ici entre une parcelle de fluide et une masse ponctuelle ne subissant aucun frottement. Comme on a ignoré la pression au sein du jet, le théorème de Bernoulli est strictement équivalent au théorème de l'énergie cinétique pour une masse ponctuelle.

Problème 45

Question (a)

La conservation du débit nous impose

$$Q = B(x)h(x)\bar{u}(x). \quad (4)$$

La charge hydraulique s'écrit

$$h + z + \frac{\bar{u}^2}{2g} = H,$$

soit encore

$$h + z + \frac{Q^2}{2gB^2h^2} = H.$$

On différencie par rapport à x et on introduit $i = -z'$ et $j = -H'$

$$h' - \frac{Q^2}{gB^2h^2} \left(\frac{B'}{B} + \frac{h'}{h} \right) = i - j.$$

En regroupant les termes, on a

$$h' = \frac{i - j + \frac{\bar{u}^2}{g} \frac{B'}{B}}{1 - Fr^2}, \quad (5)$$

avec $Fr^2 = \bar{u}^2/(gh) = Q^2/(gB^2h^3)$.

Question (b)

La hauteur normale h_n est définie comme la hauteur pour laquelle le numérateur du rapport dans l'équation de la courbe de remous (12) est nul :

$$i - j + \frac{\bar{u}^2 B'}{g B} = i - \frac{\bar{u}^2}{C^2 R_h} + \frac{Q^2}{gh^2 B^2} \frac{B'}{B} = 0,$$

avec $R_h = Bh/(B+2h)$ le rayon hydraulique. Autrement dit c'est la solution de l'équation algébrique

$$\frac{B+2h}{C^2 Bh} - \frac{1}{g} \frac{B'}{B} = \frac{ih^2 B^2}{Q^2}. \quad (6)$$

Pour la hauteur critique h_c , on est en terrain connu puisque l'on retrouve la condition sur le dénominateur nul, qui donne

$$Fr^2 = 1 \Rightarrow h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}}.$$

Question (c)

Un écoulement est supercritique quand

$$Fr > 1.$$

En termes de vitesse cela impose

$$\bar{u}^2 > gh,$$

or d'après la loi de Chézy, on a $\bar{u} = C\sqrt{ih}$, donc en substituant cette loi dans la condition ci-dessus, on a

$$C^2 i > g.$$

Il existe donc une pente critique

$$i_c = \frac{g}{C^2}$$

telle que pour $i > i_c$ l'écoulement est supercritique, et réciproquement pour $i < i_c$ il est subcritique. Cela est indépendant du débit (contrairement à ce qui est trouvé avec des lois plus réalistes comme Manning-Strickler).

Question (d)

Avec $B(x) = B_0 - kx$ et $R_h \propto h$, l'équation (13) devient

$$\frac{1}{C^2 h} + \frac{1}{g} \frac{k}{B} = \frac{i h^2 B^2}{Q^2}.$$

Soit encore

$$h^3 = \frac{Q^2}{i C^2 B^2} \left(1 + \frac{k C^2 h}{g B} \right),$$

On a donc

$$h = \left(\frac{Q^2}{i C^2 B^2} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{k C^2 h}{g B} \right)^{1/3},$$

et comme k est petit, on a au premier ordre en k

$$h = \left(\frac{Q^2}{i C^2 B^2} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{k C^2 h}{g B} \right).$$

En regroupant les termes en h et en faisant un nouveau développement limité en k , on déduit

$$h_n = \left(\frac{Q^2}{i C^2 B^2} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{k C^2}{g B} \left(\frac{Q^2}{i C^2 B^2} \right)^{1/3} \right).$$

L'écoulement est supercritique lorsque $h_n < h_c$, soit quand

$$h_n < h_c \Rightarrow \left(\frac{Q^2}{i C^2 B^2} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{k C^2}{g B} \left(\frac{Q^2}{i C^2 B^2} \right)^{1/3} \right) < \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}}.$$

En simplifiant on trouve

$$1 + \frac{1}{3} \frac{k C^2}{g B} \left(\frac{Q^2}{i C^2 B^2} \right)^{1/3} < \sqrt[3]{\frac{i C^2}{g}}.$$

Un développement limité donne une expression simplifiée

$$i > \underbrace{\frac{g}{C^2}}_{i_{c0}} + k \frac{1}{B} \left(\frac{Q^2}{i C^2 B^2} \right)^{1/3}. \quad (7)$$

On a vu au (c) que si le canal était droit ($k = 0$), la condition $i > i_{c0} = g/C^2$ est la condition usuelle pour observer un écoulement supercritique avec un frottement à la Chézy, et cela indépendamment du débit. On voit que la contraction du radier avec un coefficient k a pour effet d'augmenter la pente à partir de laquelle le régime supercritique est observé car le second terme dans le membre de droite dans (14) est positif (quelle que soit la valeur de i). Pour s'en convaincre on peut poser $i = i_{c0} + \delta i$ avec $\delta i \ll 1$. En reportant dans (14), on trouve

$$\delta i > \frac{\alpha}{1 + \alpha/3} \text{ avec } \alpha = \frac{k}{B} \left(\frac{Q^2}{i_{c0} C^2 B^2} \right)^{1/3}.$$

Le facteur correctif dépend du débit.

Question (e)

Le débit critique est

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = 2,16 \text{ m}$$

La hauteur normale est solution de l'équation.

$$Q^2 = B^2 C^2 i h^2 \frac{Bh}{B + 2h},$$

qui donne $h_n = 43 \text{ cm}$. Si on fait l'approximation d'un canal large, alors

$$h_n = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{iC^2 B^2}} = 42,7 \text{ cm}.$$

Comme le régime est supercritique et que la condition initiale vérifie $h_c > h_0 > h_n$, on doit avoir une courbe de remous décroissante qui tend vers son asymptote h_n . Si on intègre numériquement l'équation de la courbe de remous (12) avec pour condition initiale $h(0) = h_0$ on obtient la solution tracée sur la figure 2.

Cette figure a été obtenue avec Mathematica en quelques lignes

Q = 500

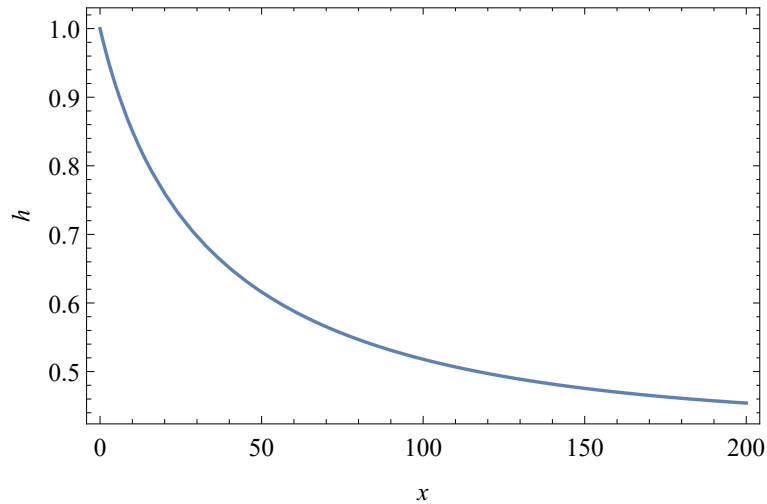


Figure 2 : courbe de remous.

```

B = 50
i = 0.2
Ch = 80
q = Q/B
g = 9.81

```

```

eqn = NDSolve[{
h[0] == 1,
h'[x] == (i - q^2/Ch^2/h[x]^3)/(1 - q^2/g/h[x]^3)
}, h, {x, 0, 200}]

```

```

Plot[h[x] /. eqn, {x, 0, 200}, Frame -> True, FrameLabel -> {"x", "h"},
BaseStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 12}]

```

Problème 5

Question (a)

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Comme on est en régime permanent uniforme, les termes en ∂_x et ∂_t disparaissent. Donc on peut simplifier grandement. Par ailleurs l'équation de continuité impose que $v = 0$ (voir démonstration du cours). La projection de cette équation dans un repère cartésien nous donne

$$0 = \rho g \sin \theta + \frac{d\tau}{dy},$$

et

$$0 = -\frac{dp}{dy} - \rho g_y \cos \theta + \frac{d\sigma_y}{dy}.$$

Question (b)

En tenant compte de $\tau(h) = 0$ et $\Sigma_y(h) = 0$, l'intégration est triviale et nous indique que le champ de contraintes est linéaire avec la profondeur, et cela indépendamment de la forme de la loi de comportement

$$\tau(y) = \rho g \sin \theta (h - y), \quad (8)$$

$$\Sigma_y(h) = \sigma_y - p = -\rho g \cos \theta (h - y). \quad (9)$$

Question (c)

La loi de comportement est $\tau = \mu \dot{\gamma}$ que l'on égale à la distribution (15) :

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} = \frac{\rho}{\mu} g \sin \theta (h - y),$$

soumis à $u(0) = -u_0$. L'intégration donne le profil parabolique

$$u(y) = \frac{\rho}{\mu} g \sin \theta \left(hy - \frac{1}{2} y^2 \right) + C$$

avec la constante d'intégration telle que $u(0) = -u_0$, donc $C = -u_0$. Le profil est donc

$$u(y) = \frac{\rho}{\mu} g \sin \theta \left(hy - \frac{1}{2} y^2 \right) - u_0. \quad (10)$$

Une nouvelle intégration donne le débit par unité de largeur :

$$q = \int_0^h u(y) dy = \left[\frac{\rho}{\mu} g \sin \theta \left(\frac{1}{2} hy^2 - \frac{1}{6} y^3 \right) - u_0 y \right]_0^h = \frac{gh^3 \sin \theta}{3\nu} - hu_0,$$

avec $\nu = \mu/\rho$.

Question (d)

La loi de comportement est $\tau = \mu(I)\sigma_y$ que l'on égale à la distribution (15) :

$$\tau = \mu(I)|\sigma_y| = \rho g \sin \theta (h - y),$$

soumis à $u(0) = -u_0$. On a pris $p = 0$ et donc σ_y est donné par (16). On a donc

$$\mu(I) = \tan \theta.$$

Comme on utilise la loi empirique de Jop

$$\mu(I) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{I_0/I + 1},$$

on tire la relation entre I et θ :

$$I = I_0 \frac{\tan \theta - \mu_1}{\mu_2 - \tan \theta}.$$

Un écoulement permanent n'est possible que sur la plage de pentes : $\mu_2 \geq \tan \theta \geq \mu_1$. En utilisant la définition de I , on en déduit le taux de cisaillement :

$$\dot{\gamma} = \frac{I_0}{d} \sqrt{g \cos \theta (h - y)} \frac{\tan \theta - \mu_1}{\mu_2 - \tan \theta}.$$

L'intégration donne le profil en loi puissance 3/2

$$u(y) = C - a \sqrt{g \cos \theta (h - y)}^3 \text{ avec } a = \frac{2I_0 \tan \theta - \mu_1}{3d \mu_2 - \tan \theta}$$

avec la constante d'intégration telle que $u(0) = -u_0$, donc $C = -u_0 + a\sqrt{g \cos \theta} h^3$. Le profil est donc

$$u(y) = -u_0 + a\sqrt{g \cos \theta} h^3 \left(1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{3/2} \right). \quad (11)$$

La figure 3 compare les deux profils, qui ont des formes assez similaires (ce qui est normal car l'un varie en $(h - y)^2$ et l'autre en $(h - y)^{3/2}$) en dépit de la différence de rhéologie.

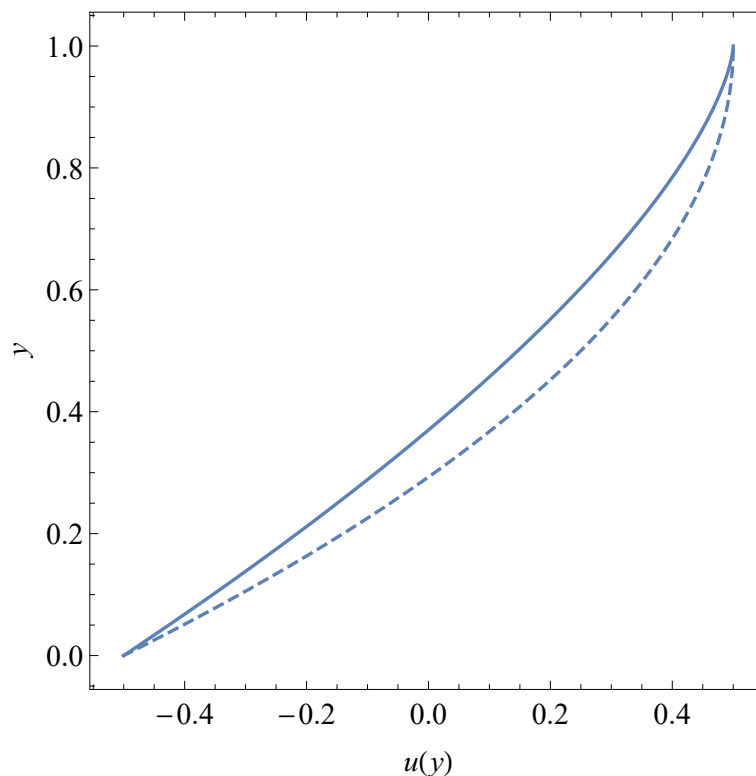


Figure 3 : profil de vitesse pour un fluide newtonien (trait discontinu) – donné par le profil (17) – et granulaire (trait continu) – donné par le profil (18) –; les unités sont arbitraires. Les paramètres ont été choisis en sorte que la vitesse au fond et celle à la surface libre prennent les mêmes valeurs pour les deux rhéologies.