Correction de l'examen du 12 avril 2010

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Documentation autorisée : aucune documentation sauf formulaire A4

Matériel autorisé : tout matériel sauf appareil de transmission (laptop avec connexion blue tooth, téléphone, email, etc.)

Durée de l'examen : 2 h (14 h 15–16 h 15)

Date et lieu : 12 avril 2010 salle CM 1

Problème 1 Un bloc solide de forme cubique avec pour côté $a = 1$ m est posé sur un film d'une huile silicone, fluide newtonien de viscosité $\mu = 0{,}1$ Pa·s. L'épaisseur du film est $e = 1$ mm. Calculer la force de traction qu'il faut exercer pour déplacer le bloc à la vitesse $U = 10$ cm/s. Calculer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement du film fluide sous le bloc.

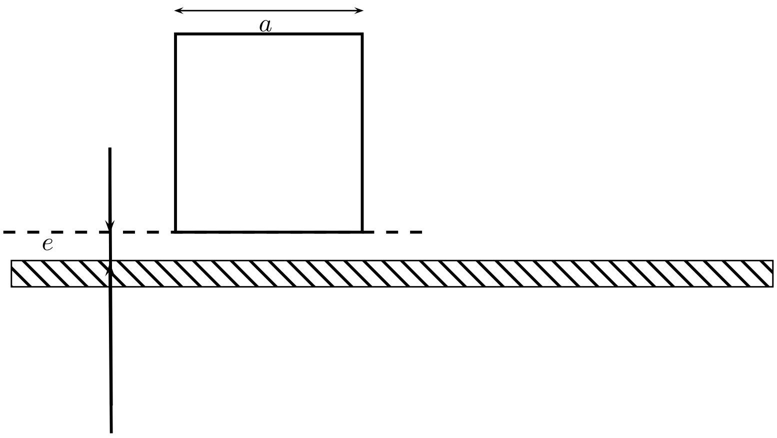

Figure 1 : bloc solid glissant sur un film.

Réponse : on a

$$F = \tau S, \text{ avec } S = \mu \frac{U}{e} \text{ et } S = a^2.$$

AN

$$F = 1 \times 1 \times 1 \times 0{,}1 \times 0{,}1/10^{-3} = 10\,\text{N}$$

Par définition, on a

$$Re = \rho \frac{Ue}{\mu}$$

Note, comme $\rho \approx 10^3$ kg/m^3, on a $Re \approx 1$ (écoulement laminaire).

Problème 2 On utilise un tensiomètre de Noüy de rayon extérieur $R_2 = 10$ cm et de largeur $\Delta R = R_2 - R_1 = 5$ mm. On le place à la surface d'un fluide dont on veut mesurer la tension de surface. Pour soulever le tensiomètre, on doit exercer une force $F = 20$ mN (en plus du poids propre du tensiomètre). Calculer la tension de surface du liquide.

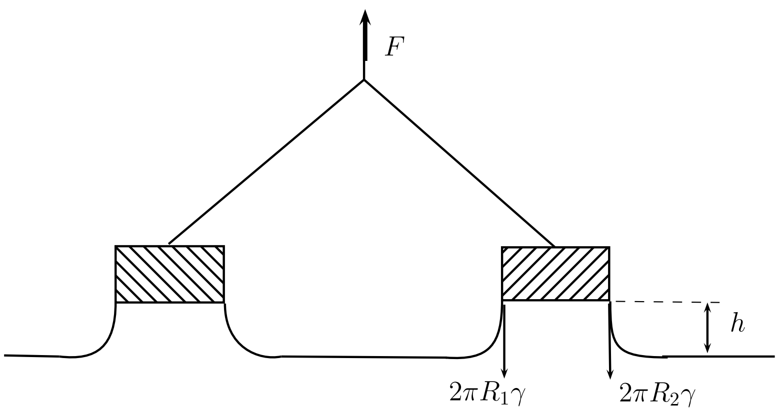

Figure 2 : tensiomètre de Noüy.

Réponse : voir cours p. 22.

AN

$$F = 4\pi R\gamma \text{ avec } R \approx \frac{R_2 + R_1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{F}{4\pi R} = 16{,}3 \times 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{m}$$

(on peut poser le calcul exact en écrivant : $F = 2\pi(R_1 + R_2)\gamma$, mais on peut se servir d'une approximation comme $R \approx R_1$)

Problème 3 En vous servant de l'équation de Laplace, calculer la différence de pression entre l'intérieur d'une bulle de savon et l'air ambiant en sachant que $\gamma = 50$ mPa·m et le rayon de la bulle est $R = 2$ cm.

Réponse : voir cours p. 23.

AN

$$\Delta p = 2\frac{\gamma}{R} = 2\frac{50 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-2}} = 5 \text{ Pa}$$

Problème 4 Quelle est la remontée (résultant de la tension de surface) le long de la paroi en verre d'un aquarium rempli d'eau ($\gamma = 72$ mPa·m) sachant que l'angle de contact vaut $\theta = 20°$?

Réponse : voir cours p. 24.

AN

$$h = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g} \sin\theta} = \sqrt{\frac{2 \times 72 \times 10^{-3}}{10^3 \times 9{,}81} \sin 20°} = 2{,}2 \text{ mm}$$

Problème 5 Écrire l'unité de travail (joule) dans le système d'unités international.

Réponse : travail = force $\times$ déplacement = kg·m·s^{-2} $\times$ m = kg·m^2 ·s^{-2}

Problème 6 Écrire l'unité de viscosité dynamique dans le système d'unités international.

Réponse : on sait par exemple que $Re = \rho u d/\mu$, donc $[\mu] = [\rho]\,[u]\,[d] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$.

Problème 7 Un écoulement d'eau se fait dans une rivière avec une profondeur d'eau h et une vitesse moyenne $\bar{u}$. La pente de la rivière est uniforme, avec une inclinaison moyenne θ. Le lit de la rivière est composé de pierres, dont le diamètres moyen est d_m. Quels nombres adimensionnels caractérisent ce problème ? A-t-on besoin de tenir compte de la masse volumique de l'eau (et pourquoi ?) ?

Réponse : voir § 2.4.5 (pp. 36–38). Il y a 5 paramètres, dont 4 avec des dimensions en [m] et [s] : $\bar{u}$ [m/s], g [m/s^2], h [m], d_m [m], et θ [-]. La masse volumique n'intervient pas car elle s'élimine des équations du mouvement. En revanche, g intervient. Les nombres sans dimensions sont : $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh}$ (nombre de Froude), h/d_m (submersion relative), θ.

Problème 8 Vous devez réaliser la simulation d'une crue dans une zone urbaine. Quels sont les critères de similitude que vous devez prendre en compte ?

Réponse : voir § 2.6.2 (pp. 41–42) ; en général, on se contente d'une similitude sur le nombre de Froude, parfois on tient compte aussi du nombre de Reynolds (mais cela est rarement possible)

Problème 9 Quelle est la pression de l'eau à 10 m de profondeur ?

Réponse : voir cours p. 46. on a $P = \rho g h = 1000 \times 9{,}81 \times 10 = 9{,}8 \times 10^4$ Pa.

Problème 10 Dans un musée océanographique, un aquarium est construit avec une paroi en verre haute de 5 m et large de 10 m. L'aquarium est rempli d'eau. Quelle est la force totale de pression qui s'exerce sur cette paroi ?

Réponse : exo traité en cours. On a

$$F = \frac{1}{2}\rho g h^2 W = \frac{1}{2} 1000 \times 9{,}81 \times 5^2 \times 10 = 1{,}2 \text{ MN}$$

Problème 11 Un projet prévoit la construction d'un tunnel sur le fond du lac Léman. En considérant que le tunnel est un tuyau de section demi-cylindrique (rayon $R = 10$ m), long de $L = 18$ km, à une profondeur moyenne de $h = 150$ m, calculer la force d'Archimède qui s'exerce sur ce tunnel.

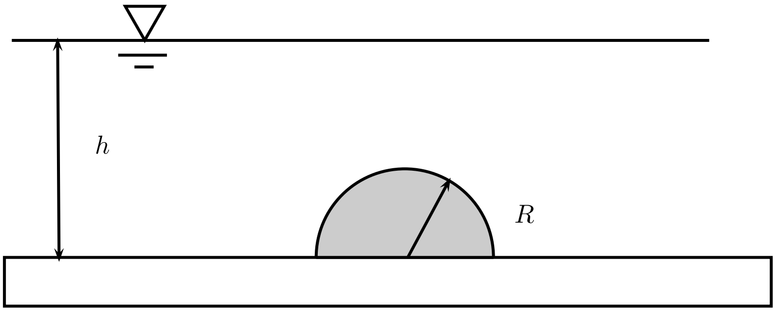

Figure 3 : tunnel sous le lac Léman.

Réponse : exo similaire 3.8 (voir aussi exo 4.1 si on fait un calcul complet). La force résultante est la somme de la force d'Archimède et des forces de pression agissant à la base du tunnel. La force d'Archimède équivaut au poids du volume d'eau déplacé et agit dans le sens vertical ascendant. Donc

$$F_1 = \rho g V = \rho g \frac{1}{2} \pi R^2 L.$$

La force de pression à la base est égale au poids propre de l'eau (pression de l'eau $\times$ surface S) et agit dans le sens vertical descendant

$$F_2 = -Sp = -2RL\rho gh$$

Soit

$$F = F_1 + F_2 = \rho g \frac{1}{2} \pi R^2 L - 2RL\rho gh$$

$$F = -2\rho g RL \left(h - \frac{\pi}{4} R\right) = -5 \times 10^{11} \text{ N}.$$

Problème 12 Calculer la distribution de pression s'exerçant sur une digue en terre, de forme triangulaire, d'angle $\theta = 30°$, contenant une retenue d'eau de hauteur $h = 5$ m. En déduire la force de pression totale qui s'exerce par unité de longueur de la digue.

Réponse : la pression est hydrostatique, donc

$$p = \rho g (h - y),$$

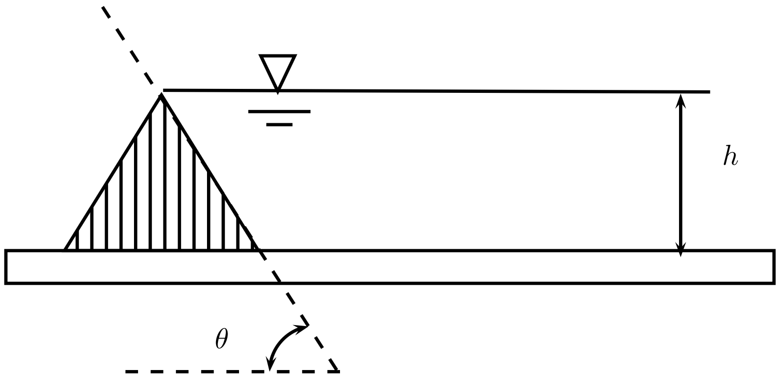

Figure 4 : digue triangulaire.

avec y l'axe vertical. Sur le parement de la digue (orientée par la normale $\mathbf{n} = (\sin\theta,\ \cos\theta)$), on a donc

$$\mathbf{F} = -\int_{y=0}^{h} p\mathbf{n}\mathrm{d}\mathbf{S},$$

avec $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y/\sin\theta$ (par unité de largeur), d'où

$$\mathbf{F} = -\rho g \begin{pmatrix} 1 \\ \cot\theta \end{pmatrix} \int_{y=0}^{h} (h-y)\mathrm{d}y = -\rho g \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \cot\theta \end{pmatrix} = -122 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ kN}$$