Examen Intermediaire

Correction

Exercice 1

Tensiometre de Nouy
Réponse

$$\begin{aligned} F &\approx 2\pi\gamma(R_1 + R_2) \\ &\approx 2\pi\gamma(20 \text{ cm}) \\ &= 20 \text{ mN} \\ \Rightarrow 6\gamma \times 0.2 \text{ m} &= 20 \times 10^{-3} \text{ N} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{20 \times 10^{-3}}{6 \times 0.2} \text{ N m}^{-1} \\ &= 0.016 \text{ N m}^{-1}. \end{aligned}$$

Exercice 2

l'Architecte
Réponse

$$1 \text{ t m}^{-2} = 1000 \text{ kg m}^{-2}$$

Mais il faut multiplier par $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$

$$\Rightarrow \ = 10000 \text{ Pa}(10 \text{ kPa})$$

Exercice 3

Barrage 1
Réponse
Ici on prend z de 0 (surface) a 10 (fond).

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{F}_p &= -p\mathbf{n}\mathrm{dS} \\ p &= \rho g z \\ \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sin 30 \\ -\cos 30 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

And $\mathrm{dz} = \sin 30\ \mathrm{dS} = \frac{\mathrm{dS}}{2}$, so

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_p &= -\int_0^{10} \rho \times g \times z \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \mathrm{dz} \\
&= \left[10^5 \times \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \times \frac{z^2}{2} \right]_0^{10} \\
&= 500 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \ \mathrm{kN\ m^{-1}}
\end{aligned}$$

Exercice 4

Bernoulli/Toricelli
Réponse
Bernoulli : $\rho g z + \frac{\rho u^2}{2} + p =$const.

$$\begin{aligned}
Q &= uA \\
A &= 10^{-2}\ \mathrm{m}^2 \\
u_a &= 0 \\
p_a &= p_b = p_{atm} \\
z_a &= 0 \\
z_b &= h
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
\rho g h &= \rho \frac{u_b^2}{2} \\
\Rightarrow u_b &= \sqrt{2gh} \\
Q &\approx 10^{-2}\sqrt{2gh} \\
&\approx 0.141\ \mathrm{m^3\ s^{-1}}
\end{aligned}$$

Exercice 5

Similitude
Reponse
Les critères de similitude qui sont importants sont le nombre de Reynolds et le nombre de Froude. Autrement dit, il faut qu'ils soient le même dans les deux cas, selon le situation :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{UL}{\nu}\right|_{reel} &= \left.\frac{UL}{\nu}\right|_{maquette}, \\
\left.\frac{U}{\sqrt{gh}}\right|_{reel} &= \left.\frac{U}{\sqrt{gh}}\right|_{maquette}.
\end{aligned}$$

On calcule le nombre de Reynolds. S'il est très grand, on est dans une régime turbulent et il ne joue pas un grand rôle (car dans le Navier Stokes, le coéfficient qui multiplie les termes visqeuse est 1/Re).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re} &= \frac{UL\rho}{\mu} \\
&= \frac{\sqrt{2gh_0}h_0\rho}{\mu} \\
&= \sqrt{2}\frac{10^2 \times 10^3}{10^{-3}} \\
&\approx 10^8 \gg 1.
\end{aligned}$$

Donc c'est le Froude ici qui est le plus important pour la similitude. Calculer le Froude :

$$\left.\frac{U}{\sqrt{gh}}\right|_{reel} = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{gh_0}} = \sqrt{2}$$
$$\left.\frac{U}{\sqrt{gh}}\right|_{maquette} = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{gh_0}} = \sqrt{2}$$

Exercice 6

Boite de cisaillement
Réponse

$$\begin{aligned}
F &= \mu \times \dot{\gamma} \times S \\
&= \mu \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} S \\
W &= \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \\
\Rightarrow P &= Fv \\
&= \mu \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 Sh.
\end{aligned}$$

Application numerique :

$$\begin{aligned}
P &= \mu \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 Sh \\
&= \mu Sh(\omega \cos(\omega t))^2 \\
&= 1 \text{ kg m}^{-}1 \text{ s}^{-1} \times (10 \times (10^{-2} \text{ m})^2) \times 10^{-2} \text{ m} \times (10^{-1} \text{ s}^{-1})^2 \cos^2(t/10) \\
&= 10^{-8} \cos^2(t/10) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} (W).
\end{aligned}$$

Travail :

$$\begin{aligned}
W &= \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_0^T F \times \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} \mathrm{dt} \\
&= \int_0^T 10^{-8} \left|\cos^2(t/10)\right| \mathrm{dt} \\
&= 10^{-8} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right]_0^{2\pi/\omega} \\
&= 10^{-8} \frac{\pi}{\omega} \\
&\approx 3 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} (J).
\end{aligned}$$