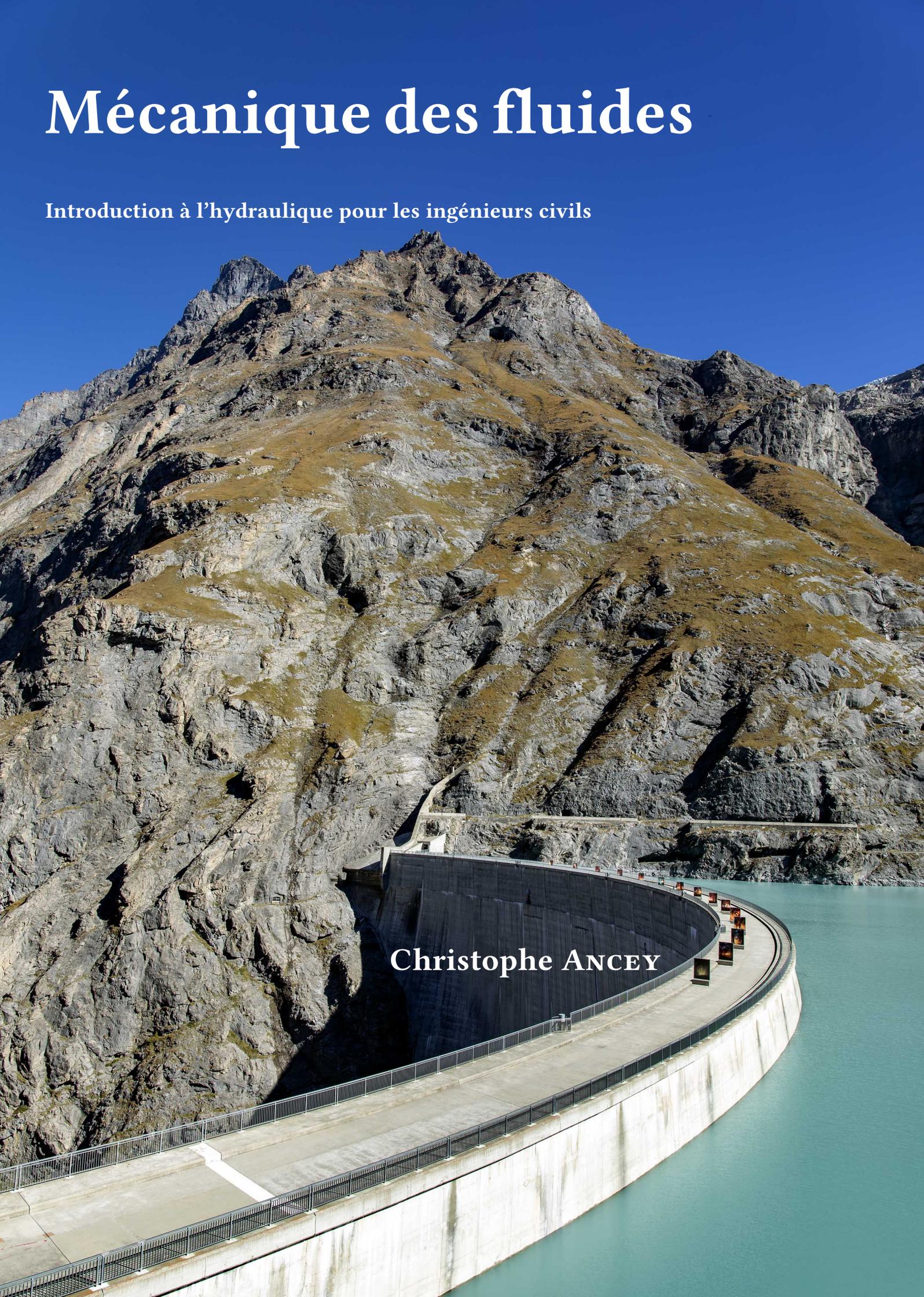


Mécanique des fluides

Introduction à l'hydraulique pour les ingénieurs civils

A large concrete dam is shown in a mountainous region. The dam is curved and has a walkway on top with a railing. The reservoir behind the dam is filled with clear, light blue water. The surrounding mountains are rocky and have some sparse vegetation. The sky is clear and blue.

Christophe ANCEY

C. ANCEY,
EPFL, ENAC/IIC/LHE,
Ecublens, CH-1015 Lausanne, Suisse
christophe.ancey@epfl.ch, lhe.epfl.ch



Hydraulique à surface libre / C. ANCEY par version 22.4 du 16 janvier 2025, Lausanne



Attribution : pas d'utilisation commerciale, pas de modification, 3.0. [Licence Creative Common 3.0](#). Ce travail est soumis aux droits d'auteurs. Tous les droits sont réservés ; toute copie, partielle ou complète, doit faire l'objet d'une autorisation de l'auteur. La gestion typographique a été réalisée à l'aide du package *efrench* de Bernard GAULLE (mis à jour par Raymond Juillierat). Tous les clichés sont de Christophe Ancey sauf mention contraire.

Crédit des illustrations. Première de couverture : barrage de Mauvoisin (VS). Robert Belz, *la nef des fous*. Illustrations par Pieter Bruegel dit Bruegel l'Ancien. **Table des matières** : *les sept péchés mortel* (gravure). *La parabole des aveugles* (musée Capodimonte, Naples). **Conseils aux étudiants** : Rogier van der Weyden, polyptique du jugement dernier, hospice de Beaune (Côte d'Or, France). **Histoire de l'hydraulique** : Hubert Robert, *le pont du Gard* (musée du Louvre, Paris). **Chapitre 1** : Alexandre Calame, *torrent de montagne par orage* (collection privée). **Chapitre 2** : *la Tour de Babel* (Kunsthistorisches Museum, Vienne). **Chapitre 3** : *le triomphe de la mort* (museo del Prado, Madrid). **Chapitre 4** : *le grand poisson mangeant les petits poissons* (gravure). **Chapitre 5** : *les chasseurs dans la neige* (Kunsthistorisches Museum, Vienne). **Chapitre 6** : la rentrée des troupeaux (Kunsthistorisches Museum, Vienne). **Chapitre 7** : *les mendiants* (musée du Louvre, Paris). **Bibliographie** : *le combat de carnaval et carême* (musée du Louvre, Paris). **Index** : *les sept péchés mortel* (gravure).



Table des matières

Table des matières

iii

1	Propriétés des fluides	1
1.1	Définition physique d'un fluide	1
1.1.1	États de la matière	1
1.1.2	Matière divisée : dispersions, suspensions, émulsions	5
1.2	Définition rhéologique d'un fluide	6
1.3	Viscosité des fluides	10
1.3.1	Manifestation à l'échelle macroscopique	10
1.3.2	Origine physique	11
1.3.3	Fluides newtoniens et non newtoniens	12
1.4	Tension de surface	16
1.4.1	Mise en évidence et définition	16
1.4.2	Mesure de la tension de surface	19
1.4.3	Loi de Laplace	20
1.4.4	Loi de Laplace-Young	22
1.4.5	Remontée capillaire et loi de Jurin	24
2	Similitude	29
2.1	Théorie de la similitude	29
2.1.1	Objet de la théorie de la similitude	29
2.1.2	Invariance d'échelle	30
2.2	Unités de mesure	33
2.3	Principaux nombres adimensionnels	35
2.4	Théorème de Vaschy–Buckingham	38
2.4.1	Méthode de Rayleigh	38
2.4.2	Théorème de Vaschy–Buckingham	40
2.4.3	Application n° 1 du théorème II : force de traînée	42
2.4.4	Application n° 2 du théorème II : puissance d'une explosion nucléaire	46
2.4.5	Application n° 3 du théorème II : loi de Manning-Strickler	47
2.5	Analyse dimensionnelle et équations du mouvement	48
2.6	Similitude en ingénierie	51
2.6.1	Généralités	51
2.6.2	Similitude en hydraulique	52

2.6.3	Courbe maîtresse	53
3	Statique des fluides	55
3.1	Origine physique de la pression dans les fluides	55
3.2	Loi de l'hydrostatique	57
3.2.1	Loi de Pascal	57
3.2.2	Principe d'Archimède	59
3.2.3	Calcul des forces de pression en pratique	59
3.3	Mesure de la pression	61
4	Équations de bilan	63
4.1	Théorèmes de transport	63
4.1.1	Vue générale	63
4.1.2	Théorème de transport en dimension 1	65
4.1.3	Généralisation et théorème de Reynolds	71
4.1.4	Volume de contrôle fixe, matériel et arbitraire	72
4.1.5	Conservation de la masse	73
4.1.6	Conservation de la quantité de mouvement	75
4.1.7	Conservation de l'énergie, théorème de Bernoulli	81
4.2	Quelques applications du théorème de Bernoulli	86
4.2.1	Formule de Torricelli	86
4.2.2	Intrusion d'un courant de gravité	87
4.2.3	Tube de Pitot	88
5	Écoulement à surface libre	91
5.1	Introduction	91
5.1.1	Généralités	91
5.1.2	Un peu de vocabulaire et des notations	92
5.1.3	Terminologie dans d'autres langues	100
5.1.4	Morphologie du lit	103
5.2	Hydraulique des canaux	113
5.2.1	Charge totale et charge spécifique	113
5.2.2	Courbes de remous obtenues par l'équation de Bernoulli	118
5.3	Régime permanent uniforme	120
5.3.1	Relation d'équilibre pour un régime permanent uniforme	120
5.3.2	Loi de frottement	121
5.3.3	Justification physique	126
5.4	Hauteur normale selon la section d'écoulement	129
5.4.1	Hauteur normale et courbe de tarage	129
5.4.2	Granulométrie et résistance à l'écoulement	131
5.4.3	Limites des relations $\bar{u}(h, \theta)$	132
5.4.4	Structure morphologique: le cas des dunes	133
5.5	Régime permanent non-uniforme	136
5.5.1	Canal large	136
5.5.2	Canal quelconque	137
5.5.3	Courbes de remous: forme générale	138
5.5.4	Résolution numérique de l'équation de la courbe de remous	139
5.5.5	Classification des régimes d'écoulement	139
5.5.6	Conditions aux limites	143
5.6	Courbes de remous et écoulement critique	146

5.6.1	Hauteur critique et régimes associés	146
5.6.2	Ressaut hydraulique	147
5.6.3	Conjugaison d'une courbe de remous	152
5.6.4	Effet d'un obstacle	157
6	Écoulements laminaires et turbulents	167
6.1	Équations de Navier–Stokes	167
6.1.1	Bases théoriques	167
6.1.2	Équations de Navier–Stokes	168
6.1.3	Conditions aux limites	170
6.2	Base phénoménologique du modèle newtonien	172
6.3	Méthodes de résolution des équations de Navier–Stokes	174
6.3.1	Expérience de Newton	174
6.3.2	Expérience de Trouton	177
6.4	Adimensionalisation des équations	182
6.4.1	Choix des échelles	182
6.4.2	Régimes d'écoulement	183
6.5	Écoulements dominés par la viscosité	184
6.5.1	Sédimentation	184
6.5.2	Écoulement dans les milieux poreux	186
6.5.3	Effet coin d'huile	188
6.6	Couche limite	192
6.6.1	Définition	192
6.6.2	Estimation de l'épaisseur de la couche limite	193
6.6.3	Équation de la couche-limite	194
6.6.4	Équation de Blasius	195
6.7	La turbulence ou les limites du modèle newtonien	197
6.8	Quelques illustrations de la turbulence à grande échelle	199
6.9	Moyenne des équations de Navier–Stokes	204
6.10	Problème de fermeture	206
6.11	Exemple d'application : écoulement sur un plan incliné	207
7	Écoulements turbulents en charge	213
7.1	Introduction	213
7.2	Écoulement permanent uniforme lisse	214
7.2.1	Équations du mouvement	214
7.2.2	Phénoménologie	215
7.2.3	Zone logarithmique	216
7.2.4	Zone centrale	218
7.2.5	Synthèse	218
7.3	Écoulement permanent uniforme rugueux	219
7.3.1	Équations du mouvement ; effet de la rugosité	219
7.3.2	Calcul du débit pour des canalisations rugueuses	219
7.4	Dissipation d'énergie dans les conduites en régime établi	220
7.4.1	Bilan d'énergie en régime laminaire	220
7.4.2	Bilan d'énergie en régime turbulent	224
7.5	Pertes de charge singulières	230
7.5.1	Problématique	230
7.5.2	Principales formules de perte de charge singulière	230
7.6	Pompage	233

vi Table des matières

7.6.1	Propriétés d'une pompe	233
7.6.2	Calcul du point de fonctionnement d'une pompe	234
7.7	Application	235
7.7.1	Vidange d'un réservoir	235
7.7.2	Remplissage d'un réservoir	236
	Bibliographie	239
	Bibliographie	239

Der Studenten ich auch nicht schone:
 Sie haben die Kappe voraus zum Lohne,
 Und wenn sie die nur streifen an,
 Foigt schon der Zipfel hintendran,
 Denn wenn sie sollten fest studieren,
 So gehn sie lieber bubelieren.
 Die Jugend schätzt die Kunst gar klein;
 Sie lernt jetzt lieber ganz allein,
 Was unnütz und nicht fruchtbar ist.
 Denn dies den Meistern auch gebrist,
 Daß sie der rechten Kunst nicht achten,
 Unnütz Geschwätz allein betrachten.

Sebastian BRANT (1458–1521) – *Das Narrenschiff*, 27. Von unnützem Studieren



Je ne veux pas ménager les étudiants,
 le bonnet leur revient de droit,
 et, s'ils le touchent seulement du bout des doigts,
 la pointe leur tombe aussitôt dans le dos.
 Car, au lieu d'étudier sérieusement,
 ils recherchent plutôt leur amusement.
 La jeunesse méprise les sciences.
 Elle préfère s'instruire au hasard
 de choses inutiles et stériles.
 Aussi faut-il en faire le reproche aux Maîtres
 qui ne savent plus enseigner la vraie culture
 et qui se perdent en polémiques stériles.

Sebastian BRANT (1458–1521) – *La nef des fous*, 27. Des études vaines



Conseils aux étudiants

Ever tried. Ever failed. No matter. Try again. Fail again. Fail better.

Samuel BECKETT (1906–1989) – *Worstward Ho*

J'ai essayé. J'ai échoué. Peu importe. Essayer encore. Échouer encore. Échouer mieux.

Samuel BECKETT (1906–1989) – *Cap au pire*

LA mécanique des fluides est une discipline scientifique dont les racines descendent jusqu'à la plus haute antiquité grecque. À travers ses applications en hydraulique, en génie mécanique, ou en aérodynamique (pour ne citer que quelques-unes de ses branches), la mécanique des fluides a été au cœur des développements techniques des sociétés modernes. On peut même dire qu'elle constitue, avec la dynamique des corps célestes, l'impulsion qui a permis la révolution scientifique au XVII^e siècle. On verra dans ce cours quelques noms des savants illustres qui ont conçu les outils de la science moderne : Isaac NEWTON, Blaise PASCAL, Leonhard EULER, et Daniel BERNOULLI (voir historique pp. xvii–xxvii). Dès cette époque, la mécanique des fluides s'est appuyée sur une solide base expérimentale et a été intimement liée au développement de l'analyse différentielle. Avec la Révolution industrielle du XIX^e siècle, la mécanique des fluides s'est enrichie de nombreux outils théoriques, dont les équations de conservation, les équations de Navier–Stokes, et les lois de frottement que l'on verra au fil des chapitres 3 à 5.

Pour l'étudiant en génie civil, certaines notions sont déjà connues car elles ont été abordées dans d'autres cours. Nous les reverrons ici afin de donner une perspective complète de la discipline. D'autres notions – comme les équations de conservation, la dérivée matérielle ou les bilans sur des volumes de contrôle – seront nouvelles et paraîtront éso-tériques. Cela constituera le cœur du chapitre 4. Il est certain qu'il y a dans le formalisme mathématique une difficulté considérable qui peut rebuter. On conviendra aisément qu'il

est difficile d'apprendre une langue étrangère (ou sa langue maternelle) sans aborder les notions de grammaire à un moment ou un autre car ce sont ces règles qui permettent de structurer l'ensemble des mécanismes linguistiques que l'on mobilise quand on parle ou quand on écrit. Il en est de même des principes fondamentaux de la mécanique des fluides.

Aborder correctement ces concepts nécessite un travail itératif où l'on voit la théorie, on tente de résoudre les exercices, souvent on échoue, on revoit la théorie, on tente de s'éclairer à la lumière du corrigé, on essaie de nouveau de résoudre l'exercice, et ainsi de suite. J'encourage donc les étudiants à ne pas voir ce cours comme un livre de recettes dans lequel on cherche la « bonne formule » qui permette de résoudre un exercice. Il s'agit plutôt d'une grammaire qui permet de donner une vision structurée de la mécanique des fluides.

Comme beaucoup de disciplines exigeantes – qu'elles soient sportives ou intellectuelles –, la mécanique des fluides nécessite un travail quotidien régulier avant qu'on puisse espérer la maîtriser. Cette maîtrise requiert souvent plusieurs années de pratique. Aussi, il ne faut pas désespérer devant les difficultés.

Ne noircissons toutefois pas exagérément le tableau. Certaines parties sont bien plus faciles sur le plan conceptuel. Cela sera le cas des outils de l'hydraulique des rivières et canaux que l'on abordera au chapitre 5. Le parti pris dans ce cours est de présenter l'hydraulique des rivières à l'aide de quelques concepts importants (telle la charge hydraulique), d'applications du théorème de Bernoulli et d'équations empiriques (telle la loi de Manning–Strickler). Il faudra se reporter à mon cours de master pour voir comment l'analyse différentielle permet d'aller plus loin dans l'analyse des cours d'eau et des constructions hydrauliques. Si je mets l'accent sur une formulation simple des concepts fondamentaux de l'hydraulique à surface libre, il ne faut pas oublier que ces concepts s'appuient sur un ensemble de règles empiriques (c'est-à-dire tirées de l'expérience) plus ou moins implicites, qu'il faut bien appréhender pour pouvoir appliquer sereinement ces concepts à des cas pratiques. « Science sans conscience n'est que ruine de l'âme » écrivait Rabelais¹, un dicton qu'il faudra faire sien.

1. La citation est tirée du second livre « Pantagruel, roi des Dipsodes » de François RABELAIS, chapitre 8. Gargantua est parti étudier à Paris, et son père Pantagruel lui prodigue d'utiles conseils pour qu'il apprenne utilement. Le danger est, selon Pantagruel, d'ingurgiter la connaissance sans la comprendre. La citation « Science sans conscience n'est que ruine de l'âme » peut se traduire en français moderne par « la connaissance sans la compréhension n'entraîne que la ruine de l'intelligence ». Elle est souvent reprise, mais parfois avec un sens fort différent de son sens en moyen français.



Avant-propos

IL S'AGIT d'un recueil de notes contenant les principales notions du cours ainsi que les formules à connaître. Il ne s'agit pas d'un cours complet de mécanique des fluides. Le support complet de mon cours peut être trouvé à travers :

- les deux ouvrages « Hydrodynamique » et « Hydraulique » de Graf & Altinakar ;
- le manuel de cours « Mécanique des fluides » de Rhyming ;
- le cours « mécanique des fluides : une introduction » par Botsis & Deville ;
- l'ouvrage « Constructions hydrauliques » de Sinniger & Hager. mis à jour par Hager & Schleiss.

tous publiés aux PPUR (collection Traités de Génie Civil pour les ouvrages de Graf & Altinakar et Sinniger & Hager). Un grand nombre des données biographiques données à travers les différents chapitres sont issues du livre du prof. Willi Hager de l'ETHZ « Hydraulicians in Europe 1800–2000 » publié par l'*International Association of Hydraulic Engineering and Research* (Delft, 2003).

J'emploie les notations usuelles modernes :

- les exemples sont le plus souvent introduits à l'aide de « ♣ **Exemple.** – » et on indique la fin d'un exemple par le symbole « qed » □ ;
- les parties qui peuvent poser des problèmes d'interprétation sont indiquées par le symbole ⊗ dans la marge ;
- les démonstrations un peu techniques (qui peuvent être sautées en première lecture) sont signalées par le symbole ⊗ ;
- les vecteurs, matrices, et tenseurs sont en gras ;
- les variables scalaires sont en italique ;
- les fonctions, opérateurs, et nombres sans dimension sont en roman ;
- le symbole O (O majuscule) signifie « est de l'ordre de » ;
- le symbole o (o minuscule) signifie « est négligeable devant » ;
- je n'emploie pas la notation D/Dt pour désigner la dérivée particulaire, mais d/dt (qu'il ne faudra donc pas confondre avec la différentielle ordinaire selon t). Je considère que le contexte est suffisant pour renseigner sur le sens de la différentielle et préfère garder le symbole D/Dt pour d'autres opérations différentielles plus complexes ;
- le symbole \propto veut dire « proportionnel à » ;
- le symbole \sim ou \approx veut dire « à peu près égal à » ;

- les unités employées sont celles du système international : mètre [m] pour les longueurs, seconde [s] pour le temps, et kilogramme [kg] pour la masse. Les unités sont précisées entre crochets ;
- pour la transposée d’une matrice ou d’un vecteur, j’emploie le symbole \dagger en exposant : A^\dagger veut dire « transposée de A ».

Remerciements pour les relecteurs suivants : Damien Bouffard, Steve Cochard, Nicolas Andreini, Sébastien Wiederseiner, Martin Rentschler, Maxime Trolliet, Madeleine Bouchez, Jonas Haller, Scott Favre, François Gallaire, Roberto Siccardi, Arnaud Eggimann, Clemente Gotelli.

Ce travail est soumis aux droits d’auteurs. Tous les droits sont réservés ; toute copie, partielle ou complète, doit faire l’objet d’une autorisation de l’auteur.

La gestion typographique du français a été réalisée avec \LaTeX à l’aide du package *french* de Bernard Gaulle, mis à jour par Raymond Juillerat.

GitHub : les scripts python (sous forme de cahier Jupyter) montrés au chapitre 5 (résolution de la courbe de remous) sont disponibles depuis github.com/cancey/introduction-hydraulique.

Nomenclature

<i>Variable</i>	<i>Signification</i>
a	rayon d'une particule
B	largeur au miroir
C	coefficient de Chézy
C_f	coefficient de frottement
c	célérité des ondes
\mathbf{D}	tenseur des taux de déformation
D	diamètre d'une conduite
e	énergie interne massique
\mathbf{e}_x	vecteur unitaire selon la direction x
\mathbf{e}_y	vecteur unitaire selon la direction y
\mathbf{e}_z	vecteur unitaire selon la direction z
f	coefficient de frottement (Darcy-Weisbach)
g	accélération de la gravité
h	hauteur d'écoulement
h_c	hauteur critique
h_n	hauteur normale
H	charge de l'écoulement
H_s	charge spécifique
i	pente d'un bief
\mathbf{j}	vecteur courant (p. ex. flux de chaleur)
j_f	pente de frottement
\mathbf{k}	vecteur normal unitaire
k	énergie cinétique massique
k	conductivité hydraulique
k_s	rugosité
K	coefficient de Manning-Strickler
l	échelle de longueur
l	largeur
l_m	longueur de mélange
L_*	longueur caractéristique
m_p	masse d'une particule
\mathbf{n}	vecteur normal unitaire
p	pression
p	hauteur de pelle (pour un seuil)
P_*	échelle de pression
Q	débit
Q	chaleur
q	débit par unité de largeur
R	rayon de courbure
R	constante des gaz parfaits
R_H	rayon hydraulique
Re	nombre de Reynolds
S	section d'écoulement
S	entropie

<i>Variable</i>	<i>Signification</i>
\mathbf{T}	tenseur des extra-contraintes (appelé encore partie déviatorique)
t	temps
T	température
u	vitesse, composante de la vitesse dans la direction x
u_*	vitesse de glissement, vitesse de cisaillement
\bar{u}	vitesse moyennée selon la hauteur d'écoulement
$\langle u \rangle$	vitesse moyennée dans le temps
\mathbf{u}	vitesse
\mathbf{u}'	fluctuation de vitesse
U_*	échelle de vitesse
u_s	vitesse de sédimentation
v	vitesse, composante de la vitesse dans la direction y
v	vitesse quadratique moyenne
\mathbf{v}	vitesse
\mathcal{V}	volume de contrôle
\mathbf{W}	tenseur des taux de rotation

Symboles grecs et autres

<i>Variable</i>	<i>Signification</i>
α	diffusion thermique
χ	périmètre mouillé
δ	fonction de Dirac
δ	petite variation
γ	déformation
γ	tension de surface
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement
ϵ	rapport d'aspect
κ	conductivité thermique
κ	constante de von Kármán
μ	viscosité dynamique
ϕ	potentiel de vitesse
Φ	fonction de dissipation
ψ	fonction de vitesse
ψ	potentiel gravitaire
Ψ	énergie totale
Π	nombre sans dimension
ρ	masse volumique
σ	contrainte
σ	contrainte normale
θ	angle de pente
τ	contrainte de cisaillement
τ_p	contrainte de cisaillement à la paroi
ξ	variable de similitude

<i>Variable</i>	<i>Signification</i>
1	tenseur identité
∇	opérateur nabla



Un rapide historique de l'hydraulique

Les premiers développements

Antiquité et Moyen Âge

N PEUT dire que la civilisation est née avec la maîtrise de l'eau (Viollet, 2005; Mays, 2010; Zhuang, 2017). Ce qu'on désigne sous le nom de révolution néolithique correspond à une mutation importante des sociétés humaines amorcée il y a dix mille ans avec l'apparition de l'agriculture, la domestication et l'élevage d'animaux, la sédentarisation et la création de communautés urbaines permanentes, la mise en place de structures hiérarchiques (proto-État), etc. (Scott, 2017). Les fouilles archéologiques au Proche- et Moyen-Orient montrent que très tôt, les hommes se sont intéressés à maîtriser la ressource en eau pour l'irrigation des champs, le stockage d'eau potable pour la période sèche, et la prévision des crues. Sans doute est-ce l'Empire romain avec ses aqueducs, ses établissements thermaux, et les structures d'adduction et d'évacuation des eaux usées qui reflète le mieux le lien entre civilisation et maîtrise de l'eau.

En Europe, le Moyen Âge est souvent vu comme la longue période de transition entre l'Antiquité et la Renaissance, une période qui n'aurait pas connu d'évolutions technologiques significatives. Rien n'est plus faux. La principale innovation dans le domaine hydraulique a concerné le développement des moulins au fil de l'eau. Si l'utilisation de la force motrice de l'eau pour moulin du grain, fouler la laine, scier le bois ou presser des olives a été connue dès l'Antiquité en Europe et en Chine, elle est restée confidentielle² (Brun & Leguilloux, 2014).

Le moulin à eau connaît une explosion en Europe occidentale dès le x^e siècle au point de devenir la principale source d'énergie (Braudel, 1979; Mokyr, 1990; Gimpel, 2002). Des moulins exploitant la force des marées apparaissent à la même époque en France et Angleterre. La première société par actions naît à Toulouse au xii^e siècle pour gérer les moulins construits le long du Bazacle (Société du Bazacle). La régulation des débits de cette

2. Les historiens évoquent la disponibilité en main d'œuvre servile pour expliquer le peu d'intérêt des Romains pour les machines hydrauliques.



Figure 1 – Thermes de Caracalla à Rome. Construits au début du III^e siècle, les thermes fonctionnèrent jusqu’au VI^e siècle. Lors du siège de Rome de 537, les Ostrogoths détruisirent l’aqueduc (Aqua Antoniniana) qui acheminait l’eau jusqu’aux établissements thermaux. Les thermes ont longtemps symbolisé le raffinement de la civilisation romaine en offrant des lieux de convivialité, d’hygiène, et de loisir à la population. Du fait de la prolifération bactérienne, ils furent aussi un vecteur important de contamination (Harper, 2017).

rivière amène aussi à la construction d’un des premiers barrages modernes³. La Société du Bazacle marque non seulement le début d’une exploitation que l’on peut qualifier de capitaliste de l’eau, mais également les premiers différends entre actionnaires et travailleurs, et les premiers conflits d’usage de l’eau (Gimpel, 2002). Mutualisation des efforts, capitalisation et investissement, mais aussi grèves, flambée et effondrement des cours des actions, tout ce qui caractérise le capitalisme industriel du XIX^e siècle apparaît dès le XII^e siècle.

En Italie, la maîtrise de l’eau passe par la construction des canaux pour l’irrigation et le transport de marchandise (Squatriti, 1998). Le système de canaux de Venise est sans doute l’exemple le plus connu d’aménagement hydraulique fondé sur l’utilisation massive de canaux. Venise dut sa puissance à sa maîtrise de l’eau, et sa puissance ne sera contestée qu’au XVII^e siècle lorsque le centre de gravité se déplace de la Méditerranée à l’Atlantique et que États centralisés (Portugal, Angleterre, Espagne) sont mieux à même d’investir dans des flottes commerciale et militaire. Avant l’invention du chemin de fer au XIX^e siècle, il était beaucoup plus rapide et économique de transporter les marchandises sur l’eau⁴; le commerce était donc d’autant plus intense que les marchands disposaient de voies d’eau (rivières, canaux, mers) pour le transport de marchandises.

Sur le territoire actuel des Pays-Bas, les paysans exploitent la tourbe dès le haut Moyen Âge, et tentent de drainer les marécages pour accroître la superficie agricole. Les tempêtes

3. On trouve de nombreuses traces de barrage romain, notamment en Espagne, mais principalement pour le stockage d’eau (del Mar Castro García, 2018).

4. Un bœuf tractait un chariot à une vitesse moyenne de 3 à 4 km/h et portait une cargaison d’environ une tonne (Schied, 2014).



Figure 2 – Paysage avec moulin. François Boucher, 1755. National Gallery of London. Les scènes pastorales sont en vogue au XVIII^e siècle. Boucher est un maître du genre. En dehors des scènes mythologiques et des portraits, il affectionne les paysages avec des éléments architecturaux (ponts, moulins, etc.).

de la mer du Nord entraînant des inondations dévastatrices en 1287 et 1421, les paysans érigent des digues, qu'ils complètent par des systèmes⁵ de pompes hydrauliques mues par des moulins à vent à partir du XVI^e siècle (Van Koningsveld *et al.*, 2008).

Les textes anciens voient apparaître la référence aux « ingeniators », c.-à-d. les premiers ingénieurs, qui étaient tout autant architectes, ingénieurs civils que maîtres d'œuvre. Un ingénieur comme Villard de Honnecourt (au début du XIII^e siècle) nous a laissé un carnet avec les premiers schémas de principe de vérin et de scie hydrauliques.

Prémices de la révolution industrielle

En Europe, un changement d'échelle dans la construction des infrastructures est notable dès la fin du XVII^e siècle (Bordes, 2005). À travers toute l'Europe occidentale se multiplient les travaux pour construire des canaux, améliorer l'irrigation des champs ou drainer les terres, approvisionner en eau des centres urbains, concevoir des protections contre les inondations, et aménager les ports. Bien que ces travaux aient été principalement réalisés dans le cadre d'investissements privés, leurs objectifs vont au-delà des intérêts personnels des acteurs économiques : ils traduisent un lien social fort entre les autorités du royaume et les autorités locales, les associations d'habitants, les chambres de commerce, les banques d'investissement et les industriels (mines, chemins de fer, électrochimie, etc.).

Dans le même temps, l'Europe d'après la Renaissance connaît une importante effervescence intellectuelle. Une première phase entre les années 1500 et 1650 voit principalement

5. L'ensemble de digues et pompes est connu sous le nom de *polder*.



Figure 3 – Bassin de Saint Marc à Venise. Giovanni Antonio Canal dit Canaletto, vers 1730. Städel Museum, Francfort-sur-le-Main. Même si elle était devenue une cité de second plan au XVIII^e siècle, elle continuait d’être un centre actif des arts avec des peintres connus à travers toute l’Europe (Canaletto, Tiepolo, Guardi, etc.) et des musiciens très recherchés (Vivaldi est le plus connu).

des savants à l’esprit universel tel Léonard de Vinci ([Marusic & Broomhall, 2021](#)) qui décrivent les écoulements d’eau et imaginent moult dispositifs et machines hydrauliques (qui ne dépassent que rarement l’étape conceptuelle ou du prototype).

La seconde phase marque une rupture nette en se centrant sur la mise en évidence de phénomènes physiques et leur quantification. Ainsi, Torricelli (1644) tente de généraliser les principes du mouvement avancés par Galilée ; Pascal (1663) met en évidence la pression atmosphérique et son lien avec l’altitude, jetant les pierres de l’hydrostatique ; Newton introduit la notion d’inertie et de viscosité, ce qui constitue la première quantification de fluides réels ; Gugliemini (1697) propose les premiers principes de calcul des écoulements dans les canaux, ce qui est souvent considéré comme les tout premiers pas de l’hydraulique fluviale ([Rouse & Ince, 1963](#)).

L’introduction du calcul différentiel par Leibniz (1692) permet d’entrer dans la troisième phase, qui marque les débuts des premiers calculs en hydrodynamique. En Suisse, Bernoulli et Euler proposent les premières équations (qui permettent d’exprimer la conservation de la quantité de mouvement et de l’énergie), et posent ainsi la pierre de fondation de la mécanique des fluides. Leurs travaux sont complétés au cours du XVIII^e siècle par les Français Clairaut, d’Alembert, Lagrange, et Laplace. En parallèle, l’école française donne vigueur à l’ingénierie hydraulique avec Chézy et à la mécanique des fluides expérimentale avec les travaux de Borda, Bossut, du Buat. En Angleterre, des inventeurs talentueux comme Savery, Newcomen et Watt perfectionnent la machine à vapeur. Il reste à établir le lien entre force, chaleur, et énergie. Cela sera le grand chantier du XIX^e siècle avec la thermodynamique.



Figure 4 – Port de mer au soleil couchant. Claude Gellée dit Le Lorrain, 1639. Musée du Louvre, Paris. Peintre fameux au XVII^e siècle, Claude Gellée a prisé les vues de port où il mêlait des éléments architecturaux fictifs (des monuments antiques), des personnages s’adonnant à diverses activités, des bateaux, et le soleil se couchant dans la mer. William Turner verra en lui un grand précurseur des vues marines, où la lumière chaleureuse et généreuse contraste avec le bleu de la mer.

Révolution industrielle

La Révolution industrielle marque une accélération nette des sciences et techniques. On peut dire qu’avant le XIX^e siècle, sciences et développement technologique n’étaient pas liés. En effet, bien des machines (machines à vapeur, métiers à tisser, procédés métallurgiques, etc., dans le domaine industriel mais également canaux en hydraulique) étaient essentiellement le produit d’efforts empiriques où des inventeurs sans formation technique tâtonnaient jusqu’à aboutir à une version satisfaisante de leur prototype. Leur but était d’obtenir un avantage concurrentiel en remplaçant la main d’œuvre humaine par des machines ; le but n’était pas de faire avancer la science qui était encore balbutiante. Au cours du XIX^e siècle, la science prend une part bien plus active dans le développement technologique, notamment pour faire sauter certains verrous technologiques (efficacité des machines à vapeur, chimie de synthèse, etc.).

Dans le même temps, la révolution industrielle marque un décloisonnement des champs d’application (ainsi la machine à vapeur révolutionne le transport maritime, ce qui à son tour permet une intensification de l’exploration du monde, avec ses travers telle la colonisation ou l’exploitation intensive des ressources naturelles). C’est au cours du XIX^e siècle que l’université – créée en Europe au XI^e siècle – change de visage pour accueillir des laboratoires de recherche et s’ouvrir à l’ingénierie (Charle & Verger, 2007). En Suisse, L’École polytechnique fédérale de Zurich est créée en 1855. C’est ce qu’on appelle parfois le modèle de Humboldt (du nom du grand savant prussien Alexander von Humboldt) où recherche et enseignement sont combinés au sein des mêmes lieux.



Figure 5 – Étude par Léonard de Vinci d'un écoulement d'eau au passage d'obstacles (vers 1508). « Observe le mouvement de l'eau à sa surface, combien il ressemble à celui de la chevelure, laquelle en a deux, l'un suivant l'ondulation de la surface, l'autre les lignes des courbures ; ainsi, l'eau forme des tourbillons qui suivent en partie l'impulsion du courant principal, et en partie les mouvements ascendants et incidents. » (Carnets, chap. XXI, de la nature de l'eau).

Durant toute la période proto-industrielle (*grosso modo* le XVIII^e siècle) et la révolution industrielle, il n'y a presque pas de recherche académique en hydraulique : la recherche est menée par des entreprises privées et au sein de corps étatiques spécialisés (comme le Corps des Ponts et Chaussées en France). Les pionniers des sciences de l'eau tels que Darcy et Saint-Venant sont des ingénieurs.

En Suisse, la création de grandes entreprises comme Brown-Boveri (aujourd'hui ABB) et de grandes banques comme la Société de Banque Suisse (aujourd'hui UBS) est étroitement liée au développement de l'électrification et de l'hydroélectricité. Des sociétés transfrontalières sont aussi créées. En 1895, la société allemande AEG crée à Zurich Elektrowatt, qui devient un acteur majeur en Allemagne, en Suisse, en Italie et en France ; rebaptisée Elektrowatt, la société a finalement été rachetée par le groupe finlandais Jaakko Pöyry à la fin du XX^e siècle, après le retrait du Crédit Suisse de sa participation.

En France, des entreprises telles que Veolia et Suez, aujourd'hui leaders mondiaux des services de l'eau, sont également créées par des banques d'investissement (au milieu du XIX^e siècle) lorsque de grandes villes comme Paris et Lyon connaissent une période d'intense renouvellement urbain.

Si les investissements dans les infrastructures hydrauliques sont le fait d'organismes privés, les autorités nationales et locales ne restent pas inactives. Agissant comme arbitres dans les conflits d'usage de l'eau, elles s'intéressent à l'expansion et à la modernisation du pays. En Suisse, le XIX^e siècle marque le début de grands travaux d'ingénierie pour



Figure 6 – Forges de Buffon construites par le grand naturaliste français Buffon au XVIII^e siècle. Comme beaucoup d’aristocrates de son époque, Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon, s’est intéressé aux sciences et aux techniques, notamment à la sidérurgie. La forge qu’il construisit non loin de son domicile de Montbard dans les Côtes-d’Or était constituée d’un haut fourneau et d’un système hydraulique (roue à aube) servant à mouvoir le soufflet et le marteau pilon. Les forges de Buffon sont un des premiers exemples d’usine sidérurgique réunissant ateliers et lieux de vie des ouvriers.

la gestion fluviale, notamment pour la prévention des crues et l’assèchement des terres (Vischer, 2003) : la Linth (1807–1816), le Rhin alpin (1862–1900), le Rhône (1863–1894), les eaux du Jura (1868–1891).

L’âge d’or

Le XX^e siècle a été le siècle des grands barrages, l’un des principaux moteurs d’un boom économique sans précédent. Bien que la plus grande partie de la recherche sur les barrages ait été menée par ou avec des entreprises privées, les universités ont commencé à être plus étroitement associées. Dans les régions sous influence française, des scientifiques tels que le mathématicien français Joseph Boussinesq et le géologue suisse Maurice Lugeon s’intéressent à des questions spécifiques liées aux ouvrages hydrauliques.

Le principal changement de paradigme vient de l’Allemagne, qui va servir de modèle pour la mise en place des universités modernes : le premier laboratoire d’hydraulique est créé par Hubert Engels à l’Université de Dresde en 1898, un modèle suivi par la plupart des pays. En Suisse, le premier laboratoire hydraulique est créé par Alfred Stucky en 1928 à l’*École d’Ingénieurs de l’Université de Lausanne*⁶, suivi en 1930 par la création de

6. Cette école est rebaptisée *École Polytechnique de l’Université de Lausanne* en 1944, avant d’acquiescer le statut d’université fédérale en 1969 et devenir l’*École Polytechnique Fédérale de Lausanne*

la Versuchsanstalt für Wasserbau (VAW) par Eugen Meyer-Peter à l'ETHZ. Le laboratoire hydraulique de l'EPUL est étroitement lié à la création de deux grandes entreprises suisses : Stucky (créée en 1926, rachetée par Gruner en 2013) et Bonnard & Gardel (créée en 1954). Le prestige des entreprises d'ingénierie hydraulique est suffisamment élevé pour attirer des scientifiques talentueux. Par exemple, Alexandre Preissmann quitte l'ETHZ pour une entreprise française (Sogreah), où il a développé le premier code d'hydraulique numérique dans les années 1960 (Cunge & Hager, 2015).

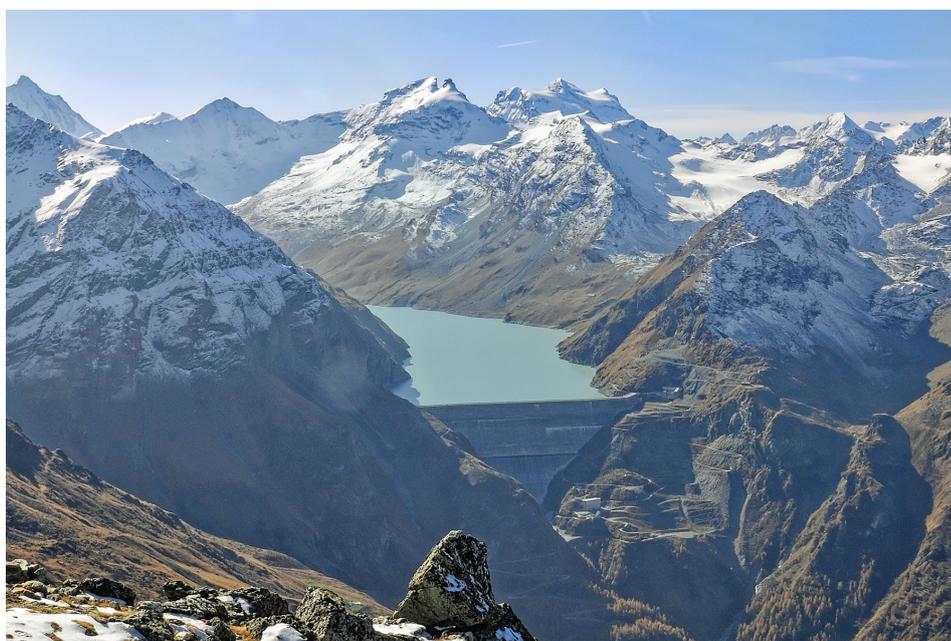


Figure 7 – Barrage-poids de la Grande Dixence. C'est le plus grand ouvrage de sa catégorie à travers le monde. Sa production annuelle est voisine de 2 TWh, soit 3 % de la production électrique suisse (sa puissance maximale est de 2 GW répartie sur les quatre centrales de Bieudron, Fionnay, Chandoline et La Nendaz).

Le déclin ?

À la fin des années 1980, un certain nombre de changements majeurs ont un impact sur le marché de l'hydroélectricité. La financiarisation croissante de l'économie a poussé les banques d'investissement à réviser leurs stratégies, avec pour conséquence qu'elles ont cessé d'intervenir sur le marché de l'énergie et de l'ingénierie en tant que propriétaires et actionnaires d'entreprises. En 1987, par le biais de l'Acte unique européen, l'Union européenne déclare son intention de créer un marché unique de l'énergie, ce qui va impliquer la déréglementation des marchés nationaux de l'énergie, l'harmonisation des politiques énergétiques et la résolution de problèmes techniques (par exemple, la synchronisation et l'interconnexion des réseaux à travers l'Europe). L'ouverture des frontières a entraîné une baisse du prix de gros de l'électricité, et donc aujourd'hui, les pays à coûts de production élevés comme la Suisse font face à une concurrence accrue. Cette baisse s'est brutalement

(EPFL).

arrêtée après que les armées russes ont attaqué l'Ukraine en février 2022. En représailles, l'Union Européenne déclare un embargo sur le gaz russe, ce qui affecte directement le prix de l'électricité (les industriels allemands avaient obtenu de l'UE que les prix de l'électricité soient indexés sur ceux du gaz).

L'industrie électrique suisse connaît d'importantes difficultés financières et ne montre aucun signe de reprise. Pour les sociétés de conseil en ingénierie, les perspectives sont parfois sombres en Suisse. Pour les grands barrages, le marché intérieur de la construction s'est progressivement rétréci et le marché de la rénovation souffre du manque d'investissement de la filière électrique. Dans les années 2010, deux barrages ont été érigés (surélévation du Vieux-Émosson, VS, et nouveau barrage-poids à Muttsee, GL). Le barrage de Serra (VS) vient d'être remplacé, et le remplacement du barrage de Spitalamm (BE) est en cours. Il est prévu de construire un barrage-réservoir en aval du glacier du Trift (BE). Il existe un potentiel de plusieurs nouveaux réservoirs dans les Alpes suisses, mais l'opposition à la construction doit encore être surmontée.

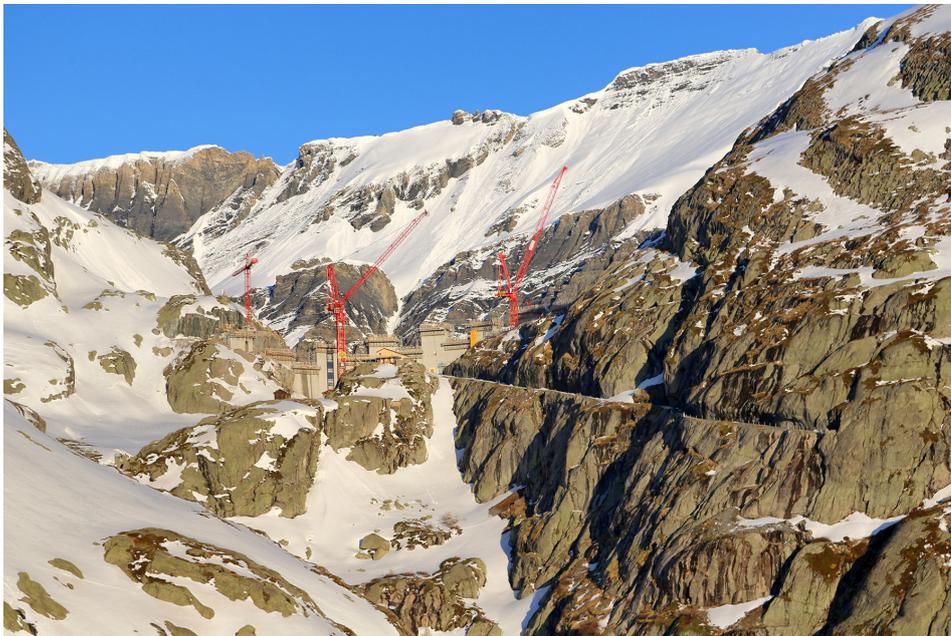


Figure 8 – Travaux d'élévation du barrage du Vieux-Émosson (Finhaut, VS) en 2010. En surélevant de 20 mètres, les ingénieurs ont pu doubler la capacité de la retenue d'eau et la porter à 25 millions de m³. Le barrage est relié à la centrale du Nant de Drance, qui permet de turbiner (pour répondre à une demande d'énergie) ou de pomper (lorsque le prix de l'électricité est bas et qu'il y a plus d'offres que de demandes) l'eau entre les lacs d'Émosson et du Vieux-Émosson. La puissance maximale est de 900 MW.

Selon l'Office fédéral de l'énergie, la Suisse dispose d'un potentiel de développement hydroélectrique allant de –60 à 1560 GWh (par an) d'ici 2050, mais compte tenu du réchauffement climatique, ce potentiel pourrait chuter à 0 ± 600 GWh (voir tableau 3), alors que le Conseil fédéral table sur une augmentation de 4 TWh. À ce résultat décevant il faut ajouter les fortes incertitudes quant à l'impact du changement climatique sur l'approvisionnement en hydroélectricité (Schewe *et al.*, 2019). Le recul des glaciers dans les zones de haute altitude offrira de nouvelles opportunités pour les grands réservoirs, dont la capacité hydroélectrique n'a pas encore été évaluée. Dans un premier temps (jusque vers

2100), le recul des glaciers sera favorable au remplissage des grandes retenues et devrait permettre de construire de nouveaux barrages dans les zones délaissées par les glaciers⁷ (Haeberli *et al.*, 2016; Farinotti *et al.*, 2016; Ehrbar *et al.*, 2018; Farinotti *et al.*, 2019).

Tableau 3 – Production annuelle hydroélectrique en 2020 et gain potentiel à l’horizon 2050. La petite hydroélectricité regroupe toutes les sources de production électrique dont la puissance nette ne dépasse pas 10 MW. La loi sur l’eau impose des contraintes sur les débits turbinés. Sources : (Tonka, 2015; OFEN, 2019; Schaepli *et al.*, 2019).

	Production en 2020 (GWh)	Gain de production en 2050 (GWh)
Grands barrages	32 700	2500 ± 400
Petite hydroélectricité	3700	300 ± 200
Loi sur l’Eau		−1900
Changement climatique		−900
Total	36 400	0 ± 600

Le marché suisse du traitement et de la protection de l’eau est stable. Certes, avec près de 800 stations d’épuration et de 40 000 à 50 000 km de canalisation (égouts publics, aduction d’eau), l’infrastructure suisse des eaux usées est quasiment complète. Au total, 40 à 50 milliards de francs ont été nécessaires pour financer cette infrastructure (la valeur de remplacement est estimée à 80 à 100 milliards), et son entretien nécessite des investissements conséquents. La restauration des rivières a commencé au début des années 1990 en Suisse, où 4000 km de rivières dégradées doivent être restaurées. Aujourd’hui, environ 10 % du travail a été fait, ce qui implique qu’il reste encore beaucoup de travail à faire pour les prochaines décennies (Kurth & Schirmer, 2014; Gregor & Renner, 2021).

A l’étranger, la concurrence est féroce dans le secteur des grandes infrastructures, où la Chine et le Brésil sont désormais des concurrents sérieux. La capacité hydroélectrique totale installée en Europe était de 251 GW en 2019. La rénovation et les nouvelles centrales ont augmenté cette capacité de 682 MW (+0,27 %) en 2018. Cela doit être comparé aux capacités totales et ajoutées en Chine (356 GW, +1,27 %) et le Brésil (109 GW, +4,5 %). La capacité mondiale totale était de 1308 GW en 2019, et elle avait augmenté de 1,2 % en 2018. L’Europe représentait 3,1 % de la nouvelle capacité ajoutée en 2018 (Asie de l’Est : 30 %, Amérique du Sud : 24 %, Afrique : 4 %) selon à l’*Association internationale de l’hydroélectricité*⁸.

Malgré une concurrence accrue, les entreprises suisses (par exemple Afry, Lombardi, Gruner) continuent de jouer un rôle important sur la scène internationale, avec plusieurs nouvelles constructions et projets de réhabilitation. Les grands projets de réhabilitation et les nouvelles constructions (en cours ou récemment achevés) ont impliqué des entreprises suisses dans le monde entier, signe fort de la reconnaissance des capacités d’ingénierie suisses. Beaucoup de ces projets sont financés par des institutions internationales telles que la Banque mondiale, la Banque européenne pour la reconstruction et le développement, la Banque asiatique de développement et la Banque africaine de développement.

La mondialisation a également touché les universités. À l’ère du numérique, l’hydraulique numérique a pu sembler être l’approche la plus prometteuse pour résoudre une multitude de problèmes d’ingénierie hydraulique. C’est ainsi que de nombreux laboratoires

7. Le Conseil a ainsi donné son feu vert en décembre 2021 à la construction d’un barrage-voûte à l’aval du glacier du Gorner à Zermatt.

8. Voir le site de l’AIH : <https://www.hydropower.org>

ont été fermés dans les années 1990 et 2000 (Hager & Boes, 2014). La tendance n'était cependant pas systématique. Aux États-Unis, en Europe et en Suisse, certaines universités ont opté pour le renforcement de leurs installations. C'est le cas de l'ETHZ avec le VAW, ou récemment en France avec la création d'un nouveau laboratoire d'essais à Lyon (INRAE) ou le renforcement du centre de recherche EDF de Chatou. HR Wallingford (ex. Hydraulics Research Station avant sa privatisation) a construit en 2014 le Fast Flow Facility (dédié aux essais marins). Aux USA, les universités ont également renforcé leurs infrastructures : laboratoire de Saint Anthony Falls à Minneapolis, laboratoire d'hydraulique de la Colorado State University, le laboratoire d'hydraulique et de sédimentation de l'Université du Tennessee. Au Japon, le simulateur physique de tsunamis à grande échelle a été conçu pour des expériences à grande échelle sur les tsunamis après la catastrophe de Fukushima en 2011. Aux Pays-Bas, le TU Delft, une université de premier plan, a réussi à capitaliser sur les possibilités offertes par l'hydraulique numérique, tout en maintenant son expertise dans l'étude d'infrastructures hydrauliques à partir de modèles réduits.



L'OBJET de ce chapitre est de définir ce qu'est un fluide. On verra deux propriétés importantes : la viscosité et la tension de surface. Ce cours concerne principalement les fluides à viscosité constante, appelés fluides newtoniens.

1.1 Définition physique d'un fluide

1.1.1 États de la matière

Il y a trois états de la matière (voir figure 1.1) pour un corps simple :

- solide : matériau à faible température ;
- liquide : matériau à température moyenne et pression suffisamment élevée ;
- gaz : matériau à température suffisamment élevée et à faible pression.

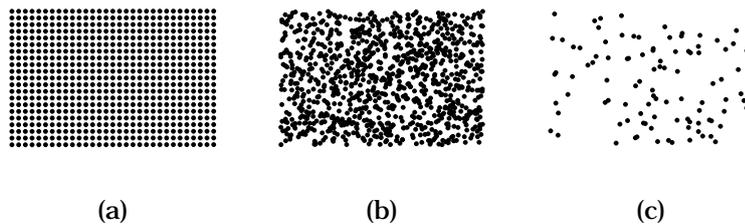


Figure 1.1 – Représentation idéalisée des trois états de la matière : (a) solide (réseau ordonné de molécules/atomes), (b) fluide (collection dense et désordonnée de molécules), (c) gaz (collection diluée et très agitée de molécules).

Les différents états occupés par un corps simple peuvent être représentés dans un diagramme p, T, V comme le montre la figure 1.2. Les surfaces grisées représentent des états purs où un seul état subsiste, alors que la surface blanche représente l'ensemble des états où deux phases peuvent co-exister. Le point C est appelé *point critique*.

L'état solide est un état organisé de la matière : les arrangements entre molécules présentent un ordre relativement stable dans le temps. Les états gazeux et liquide représentent la matière en désordre : il n'existe pas d'ordre privilégié dans l'agencement des molécules

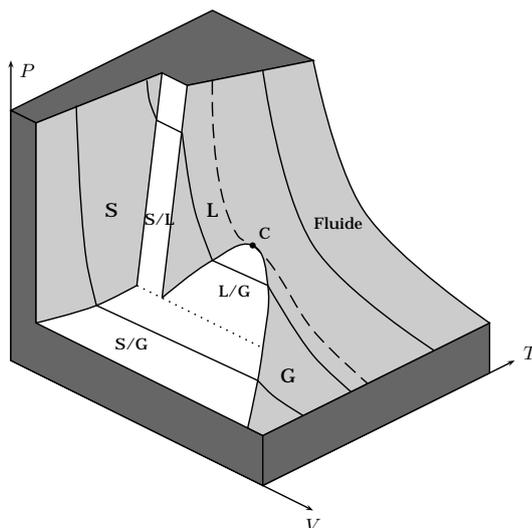


Figure 1.2 – Diagramme schématisé des phases d'un corps simple dans un espace pression (p), température (T), et volume (V).

car celles-ci sont perpétuellement en mouvement. Un fluide au repos à l'échelle humaine est en fait, à l'échelle moléculaire, en perpétuelle agitation.

Les états gazeux et liquide présentent des similarités : ce sont des fluides. Un fluide n'a pas de forme propre : placé dans un récipient, il adopte les formes du récipient. Il existe également des différences notables : un liquide a une surface libre ; si l'on place un liquide dans un bol, on observe une interface nette, appelée *surface libre*, entre ce liquide et le gaz environnant. Un gaz a tendance à occuper tout le volume qui s'offre à lui. Un gaz n'a donc pas de surface libre.

À l'échelle atomique, ces différences peuvent s'expliquer assez simplement : un gaz est une collection très diluée de molécules ou d'atomes. Si d représente la taille d'une molécule, alors la distance entre deux molécules est de l'ordre de $10d$. Dans le cas d'un liquide, cette distance intermoléculaire est beaucoup plus faible, de l'ordre de d en général. Cela a des répercussions considérables sur les interactions entre molécules : pour un gaz, les molécules se rencontrent rarement et interagissent principalement au moment des collisions par des échanges de quantité de mouvement. Pour un liquide, les interactions sont bien plus fréquentes et sont d'une nature différente : il s'agit le plus souvent d'interaction électrostatique d'attraction ou de répulsion. La figure 1.3 montre le potentiel d'interaction $V(r)$, dit de Lennard-Jones¹, et la force d'interaction qui en découle

$$V(r) = 4\epsilon \left(\left(\frac{d}{r} \right)^{12} - \left(\frac{d}{r} \right)^6 \right),$$

où r est la distance depuis le centre de la molécule et ϵ est le potentiel d'adhésion de deux molécules ($\epsilon \sim kT$ pour du méthane ou de l'argon). Aux faibles distances $r/d < 1$, l'interaction est une très forte répulsion qui s'oppose à l'interpénétration des atomes, puis vers $r \approx d$ la force devient négative : deux molécules voisines se sentent attirées, mais

1. Edward Lennard-Jones (1894–1954) était un mathématicien anglais, considéré comme un des pionniers de la chimie moléculaire. Ses travaux ont porté sur les forces intermoléculaires, la valence, la catalyse de surface, et la structure moléculaire.

cette force d'attraction diminue très rapidement avec r . Il s'agit des forces de Van der Waals². Les molécules polyatomiques simples (comme l'eau) peuvent également porter des charges électriques, qui donnent naissance à des forces électrostatiques d'attraction ou de répulsion sensiblement plus fortes que les forces de Van der Waals dues aux atomes qui les composent.

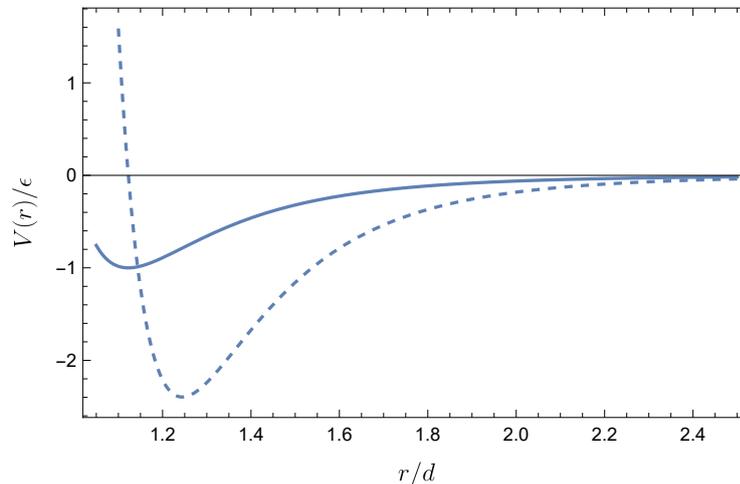


Figure 1.3 – Potentiel de Lennard-Jones (trait continu) et force dérivée $f = -dV/dr$ (courbe en tireté) en fonction de la distance r du centre de la molécule. Pour un corps simple comme l'argon (Ar), on a $d = 0,34$ nm et $\epsilon = 120k_B$ K², avec $k_B = 1,380 \cdot 10^{-23}$ J/K, k_B la constante de Boltzmann.

Notre connaissance des propriétés d'un gaz est bien plus avancée que celle des liquides. Dès la fin du XIX^e siècle, reprenant des idées formulées par de nombreux physiciens de Bernoulli à Clausius, les physiciens Maxwell et Boltzmann³ ont élaboré les bases de la théorie dite « théorie cinétique des gaz », qui permet d'expliquer les propriétés macroscopiques des gaz (notamment la relation entre pression et température) en se fondant sur une description simplifiée des interactions moléculaires (mouvements aléatoires avec des échanges de quantité de mouvement lors des collisions). Cette théorie a également marqué le fondement de la mécanique statistique, branche de la physique qui vise à établir les propriétés macroscopiques de la matière à partir du comportement élémentaire des molécules. À ce jour, aucune théorie cinétique des liquides aussi simple et performante que la

2. Johannes Diderik van der Waals (1837–1923) était un physicien hollandais. Instituteur, il s'est passionné pour la physique et a consacré son temps libre à ses recherches. Son mémoire de thèse présentait une théorie importante sur les gaz; il fut honoré par le prix Nobel en 1910.

3. Les physiciens anglais et autrichien James Clerk Maxwell (1831–1879) et Ludwig Eduard Boltzmann (1844–1906) sont deux monuments de la physique. Ils sont les auteurs de véritables tours de force. Maxwell est surtout connu pour ses travaux sur le magnétisme; les quatre équations connues aujourd'hui sous le nom d'équations de Maxwell sont la formalisation (par un mathématicien anglais, Oliver Heaviside) de ses travaux. Maxwell a fait aussi des avancées majeures en thermodynamique. Boltzmann est considéré comme le père de la mécanique statistique puisqu'il a créé la plupart des outils encore utilisés aujourd'hui. Même si l'idée des atomes est très vieille (Démocrite en parlait déjà cinq siècles avant notre ère), c'est bien Boltzmann qui a fourni une théorie complète et rigoureuse. Très critiqué par ses confrères (la théorie de l'éther prévalait à la fin du XIX^e siècle), Boltzmann s'en trouva très affecté et se suicida. Il fallut attendre les expériences de Planck sur le corps noir et d'Einstein sur l'effet photoélectrique pour qu'on rende justice à ses travaux.

théorie cinétique des gaz n'existe. Cette difficulté à caractériser le comportement liquide se retrouve en thermodynamique lorsqu'on cherche à établir *une équation d'état*, c'est-à-dire une relation entre pression p , température T , et volume V (ou masse volumique): $f(V, p, T) = 0$. La loi de Boyle-Mariotte⁴ est l'équation d'état la plus simple qu'on puisse imaginer

$$pV = xRT,$$

avec p la pression, V le volume du gaz, x le nombre de moles, T la température, et R la constante des gaz parfaits ($R = 8,31 = k_B \mathcal{N}_A$ J/K/mol, avec \mathcal{N}_A le nombre d'Avogadro). Elle a été établie à la fin du XVII^e siècle indépendamment par les physiciens Boyle et Mariotte à partir d'expériences de laboratoire. De nos jours, on utilise une variante de cette loi, connue sous le nom de loi de Van der Waals, qui est plus précise

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = xRT,$$

avec a et b deux constantes, qui dépendent du gaz. Il n'existe pas d'équation pour un liquide car on ne peut pas relier simplement la pression et la température.

La manipulation des concepts de base de la théorie cinétique et de lois empiriques comme la loi des gaz parfaits permet d'aboutir à des ordres de grandeur très bons pour des gaz simples (gaz monoatomique comme l'argon) et relativement corrects pour des gaz plus complexes. Même si la théorie cinétique ne permet pas de prédire le comportement de tous les gaz, les explications qu'elles donnent sont qualitativement correctes et s'appliquent à la plupart des fluides. L'idée de base est que les particules sont sans cesse agitées. Ainsi, pour un gaz au repos, si la vitesse moyenne est nulle, la vitesse instantanée des particules ne l'est pas. On peut faire une décomposition de la vitesse instantanée \mathbf{u} en une vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}}$ (nulle quand le gaz est au repos) et une vitesse fluctuante \mathbf{u}' : $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$, avec $\bar{\mathbf{u}} = \langle \mathbf{u} \rangle$ (moyenne dans le temps de la vitesse) et $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$. Si on calcule la vitesse quadratique

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')^2 = \bar{\mathbf{u}}^2 + 2\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}'^2,$$

et qu'on prend la valeur moyenne

$$\langle \mathbf{u}^2 \rangle = \bar{\mathbf{u}}^2 + \underbrace{2\bar{\mathbf{u}} \cdot \langle \mathbf{u}' \rangle}_0 + \langle \mathbf{u}'^2 \rangle,$$

on peut définir la quantité $v = \sqrt{\langle \mathbf{u}'^2 \rangle}$ comme étant la vitesse quadratique moyenne; pour un fluide au repos, cette vitesse donne une échelle de variation des fluctuations de vitesse et on l'appelle vitesse thermique ou *vitesse d'agitation thermique*. Pour un gaz dilué, les agitations des particules créent des fluctuations de quantité de mouvement, qui on le verra par la suite, peuvent être interprétées à l'échelle macroscopique comme une force. La force par unité de surface d'un gaz au repos s'appelle la pression et la théorie cinétique montre que s'il y a n atomes de masse m par unité de volume, alors la pression se définit à partir de la vitesse quadratique

$$p = \frac{1}{3}nmv^2,$$

4. Robert Boyle (1626–1691) était un aristocrate anglais passionné par la physique. Il est à l'origine de la Royal Society of London (l'équivalent de l'Académie des Sciences en France) et a fortement plaidé en faveur des sciences expérimentales. Edme Mariotte (1620–1684) était un ecclésiastique, physicien et botaniste français. La loi des gaz parfaits fut déterminée indépendamment par Boyle (1662) et Mariotte (1676).

or d'après la loi de Boyle-Mariotte, la pression à l'échelle macroscopique est $p = nkT$ (puisque le nombre de moles x renferment $x\mathcal{N}_A$ molécules dans un volume V), d'où l'on déduit immédiatement

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}},$$

ce qui montre que l'agitation thermique ne dépend que de la température et de la masse des atomes.

♣ **Exemple.** – Considérons un gaz de masse atomique 14 g/mol (azote) à la pression atmosphérique et à température ordinaire ($T = 20\text{ °C} = 293\text{ K}$). On tire que la densité particulaire n vaut $n = p/k_B T = 10^5/293/(1,38 \times 10^{-23}) = 2,47 \times 10^{25}$ atomes/m³. La vitesse d'agitation est donc

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 293 \cdot 6,02}{14 \times 10^{-3}}} \approx 720\text{ m/s!}$$

□

1.1.2 Matière divisée: dispersions, suspensions, émulsions

Tous les fluides ne sont pas de purs liquides ou gaz. On rencontre des fluides où deux phases en équilibre thermodynamique coexistent. Par rapport aux liquides purs, la présence de « particules » (bulles de gaz, particules solides, gouttelettes) induit la présence d'une multitude d'interfaces entre le liquide (phase continue) et les particules (phase dispersée), qui peuvent radicalement changer la nature du mélange. On distingue :

- les dispersions : ce sont des mélanges de particules très fines (taille inférieure à 1 μm). Ce sont souvent des particules colloïdales telles que des argiles. Les dispersions ne sédimentent pas spontanément et il est donc très difficile de filtrer une eau contenant des particules argileuses fines. En revanche, ce sont des mélanges très sensibles chimiquement à tout ce qui peut modifier la nature des interactions entre particules. La simple modification du pH d'une solution affecte considérablement le comportement des interfaces des particules, ce qui produit des variations brutales de comportement mécanique à l'échelle macroscopique. Par exemple, en ajoutant du sel de cuisine sur un gel pour cheveux, on peut liquéfier le gel (constitué de chaînes polymériques) ;
- les suspensions : ce sont des mélanges de particules fines ou grossières (taille supérieure à 1 μm), en général sans interaction colloïdale entre elles. Contrairement aux dispersions, les suspensions sédimentent (plus ou moins rapidement selon la taille des particules et les conditions de sédimentation) et peuvent être filtrées mécaniquement. En général, les suspensions sont peu sensibles aux variations chimiques du liquide. Du sable fin (sable, limon, silt) peut être transporté en suspension dans un cours d'eau ;
- les émulsions : ce sont des mélanges de fines gouttelettes d'un liquide dans un autre. Les émulsions en gel sont des émulsions très concentrées où les gouttelettes ne peuvent quasiment plus se déplacer les unes par rapport aux autres. La plupart des liquides étant non miscibles, les émulsions sont très courantes. Le lait ou bien la mayonnaise sont des exemples d'émulsion de globules de graisse dans une phase aqueuse. Comme pour les dispersions colloïdales, la physique de ces mélanges est

dictée par le comportement des interfaces. Un problème important est la stabilité des émulsions (coalescence des gouttelettes, séparation des phases). Les mousses sont des cas particuliers d'émulsion où les gouttelettes sont des bulles de gaz (voir figure 1.4). L'eau blanche qui se forme dans les cours d'eau à très forte pente ou bien l'écume des vagues sont des émulsions d'air dans de l'eau ; la cavitation dans les conduites peut amener à la formation d'émulsions.



Figure 1.4 – La mousse d'un café est un mélange de bulles de gaz dans un liquide.

1.2 Définition rhéologique d'un fluide

Un fluide est le plus souvent décrit comme un milieu continu, déformable, et s'écoulant. Ainsi, quoique discret à l'échelle moléculaire, un gaz comme l'air peut être décrit comme un milieu continu à notre échelle d'observation, c'est-à-dire que l'on peut négliger le comportement individuel des molécules (un cube de $1\ \mu\text{m}$ de côté contient 3×10^7 molécules !) et décrire le comportement local à l'aide de champs vectoriels continus. Ainsi le champ *vitesse* $u(x,t)$ signifie la vitesse du fluide à la position x et au temps t (ce que l'on mesure avec un appareil comme un tube de Pitot) et correspond physiquement à la vitesse moyenne des molécules contenues dans un voisinage infinitésimal autour de x . Cette approximation de milieu continu est très utile car elle permet d'étudier le comportement mécanique des fluides à l'aide d'une relation liant contraintes et vitesses (taux) de déformation et qu'on appelle « loi de comportement ». La loi de comportement la plus simple est la loi newtonienne, selon laquelle les tenseurs des contraintes et des taux de déformation sont reliés linéairement par l'intermédiaire d'un paramètre appelé viscosité ; c'est ce que l'on va voir dans la section suivante. L'écoulement d'un fluide dépend foncièrement de la loi de comportement. Comme le montre la figure 1.5, les lignes de courant varient fortement selon que le fluide s'écoule comme un fluide newtonien en régime laminaire (à droite) ou que son écoulement prend la forme d'un écoulement potentiel (à gauche).

Tous les matériaux sont déformables et peuvent être considérés comme fluide si l'on attend suffisamment longtemps. C'est donc l'échelle de temps qui est importante. On introduit à cet effet un nombre sans dimension dit de Deborah⁵ :

$$\text{De} = \frac{t_r}{t_e},$$

5. Ce nombre a été appelé ainsi en référence à un passage dans la Bible, où la prophétesse Deborah déclara « les montagnes s'écouleront avant le Seigneur », ce qui fut interprété par les rhéologues modernes comme la première affirmation que tout s'écoule si on attend suffisamment longtemps.

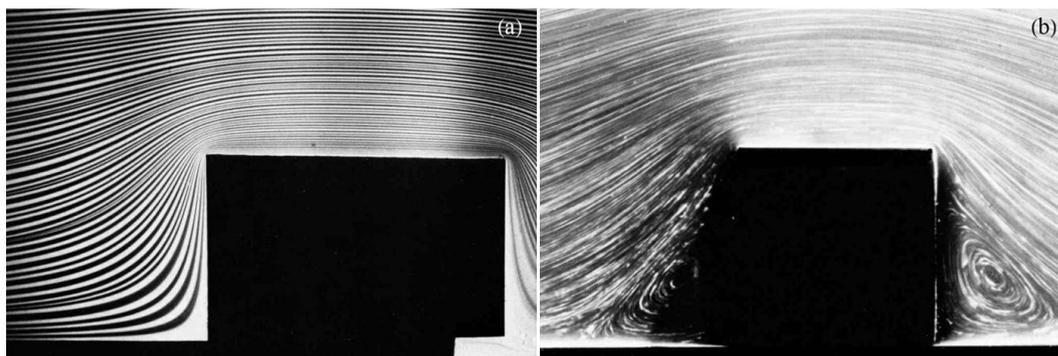


Figure 1.5 – Écoulement permanent d'un fluide visqueux autour d'un solide de section rectangulaire, avec à gauche (a) un écoulement potentiel dans une cellule de Hele-Shaw (fluide: eau) et à droite (b) un écoulement de Stokes tridimensionnel ($Re = 0,02$; dans ce dernier cas, on note l'apparition de zones mortes, sièges de vortex – fluide: glycérine). Source: S. Taneda et D.H. Peregrine in (Van Dyke, 1982, voir figures 5 et 11). Pour l'image (b) on visualise l'écoulement dans une cellule de Hele-Shaw, qui est un dispositif expérimental composé de deux plaques parallèles, très rapprochées, ce qui permet de créer des écoulements bidimensionnels. Quoique dans un régime laminaire (écoulement de Stokes), de tels écoulements présentent un champ cinématique similaire à celui d'un écoulement potentiel. Un écoulement est dit *potentiel* lorsque le champ de vitesse est le gradient d'une fonction scalaire appelée « potentiel » ϕ . Ce type d'écoulement est très important sur le plan théorique car il sert à décrire des écoulements de fluide parfait (ou fluide d'Euler), c'est-à-dire des fluides pour lesquels il n'y a aucune dissipation d'énergie (par frottement visqueux). En pratique, un écoulement potentiel sert à décrire des écoulements en régime turbulent loin de toute paroi. Dans le cas présent, l'écoulement potentiel autour d'un obstacle rectangulaire est donc une idéalisation d'un écoulement turbulent autour d'un obstacle sans effet de couche limite et de sillage (c'est-à-dire précisément deux effets dus au frottement du fluide sur les parois de l'obstacle), des effets qui seront étudiés au chapitre 6; l'écoulement est alors gouverné par un équilibre entre gradient de pression et termes inertiels (accélération). Pour l'image(b), on visualise un écoulement laminaire dit de Stokes. C'est écoulement purement visqueux, sans effet inertiel. La dynamique de l'écoulement est alors entièrement commandée par l'équilibre entre termes de frottement visqueux et gradient de pression. On étudiera ces écoulements au chapitre 6.

avec t_r temps de relaxation du matériau et t_e le temps de l'expérience (ou de l'observation). Si $De \ll 1$, le matériau se comporte comme un fluide et inversement si $De \gg 1$, il se comporte comme un solide. Par exemple, un glacier est fluide à l'échelle géologique (voir figure 1.6)!

Un fluide peut être *compressible*, c'est-à-dire le volume qu'il occupe change avec la pression appliquée. Ainsi, les gaz peuvent facilement changer de volume, mais les liquides sont caractérisés par une très faible compressibilité. Un fluide compressible peut s'écouler à volume constant. On dit alors que l'écoulement est *isochore*. À faible vitesse, un écoulement d'air est isochore: on peut négliger toute variation de volume du gaz. En revanche, à très grande vitesse, le gaz va se comprimer et on ne peut plus négliger la compressibilité de l'air; un phénomène caractéristique est l'onde de choc (une saute brutale de la masse volumique du gaz) lors du passage du mur du son par un avion supersonique. En aéronautique, on se sert ainsi du nombre de Mach, rapport de la vitesse de l'objet sur la vitesse du son, comme



Figure 1.6 – Tout s’écoule, même les montagnes! Vue du glacier rocheux de Lona qui s’alimente à partir des éboulis rocheux du mont Sasseneire (commune d’Anniviers, VS). C’est un reliquat de glacier qui est couvert de rochers, et qui s’écoule lentement dans le lac de Lona.

indice servant à caractériser l’importance de la compressibilité dans la dynamique du gaz.

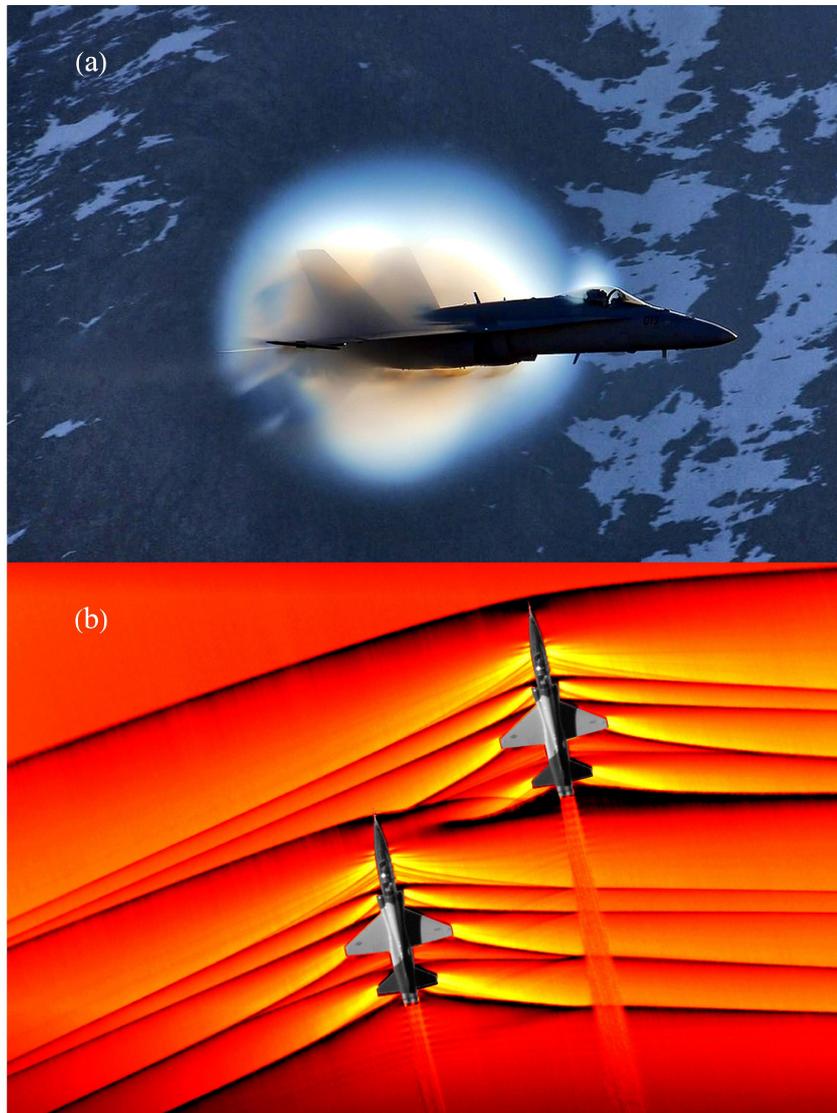


Figure 1.7 – (a) Passage du mur du son par un McDonnell Douglas F/A-18 Hornet [crédit: Timothy O’Leary]. L’onde de choc induit un changement brutal de pression, qui provoque la condensation de la vapeur d’eau et la formation de micro-gouttelettes qui matérialise l’onde de choc aux abords de l’avion. (b) Interactions d’ondes de choc créées par deux avions militaires T-38 volant en formation [crédit: NASA]. L’image a été obtenue à l’aide d’une technique appelée strioscopie (le terme anglais schlieren est également souvent employé), qui consiste à filtrer la lumière en séparant les parties déviées ou non déviées par le fluide. Il est ainsi de visualiser les fines zones où le fluide subit des variations significatives d’indice de réfraction, ce qui est le cas lors du passage du mur du son (compression de l’air). Les couleurs ont été modifiées numériquement.

1.3 Viscosité des fluides

1.3.1 Manifestation à l'échelle macroscopique

Beaucoup de fluides de l'environnement courant sont des fluides *newtoniens*. Ces fluides se caractérisent notamment par une dépendance linéaire des contraintes et des vitesses de déformation. Ainsi, Newton montra que lorsqu'on cisaille un fluide (voir figure 1.8)

- il se produit une force de résistance du fluide contre cette action de cisaillement;
- cette force est proportionnelle au taux de cisaillement, ici U/h [s^{-1}].

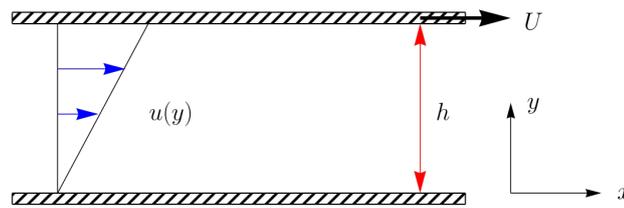


Figure 1.8 – Cisaillement d'un fluide entre deux plaques parallèles espacées d'une distance h ; la plaque supérieure se déplace à la vitesse U .

Si on définit la contrainte de cisaillement τ comme la force par unité de surface [$Pa=N/m^2$], alors on a la relation :

$$\tau = \mu \frac{U}{h},$$

où μ est le coefficient de *viscosité dynamique* [en $Pa \cdot s$]. On introduit aussi une *viscosité cinématique* $\nu = \mu/\rho$ [en m^2/s] (cette relation sert par exemple dans la définition du nombre de Reynolds). L'unité de mesure de la contrainte est le Pascal [Pa], c'est-à-dire $1 Pa = 1 N/m^2$. On verra plus loin au chapitre 6 que cette loi empirique s'écrit

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (1.1)$$

avec $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement ou gradient de vitesse, qui dans le cas particulier examiné ici prend la valeur U/h .

La viscosité dépend foncièrement de la température du liquide : en général, elle diminue avec la température (plus la température est élevée, plus l'agitation moléculaire est grande, moins le fluide oppose de résistance). Ainsi, la viscosité de l'eau liquide vaut $1,8 \times 10^{-3} Pa \cdot s$ pour $T = 0^\circ C$, $1,0 \times 10^{-3} Pa \cdot s$ pour $T = 20^\circ C$, $0,35 \times 10^{-3} Pa \cdot s$ pour $T = 80^\circ C$, et $0,28 \times 10^{-3} Pa \cdot s$ pour $T = 100^\circ C$. Pour un gaz, c'est l'inverse : on observe une augmentation de la viscosité avec la température. Le tableau 1.1 donne les valeurs des viscosités pour l'eau et l'air à température ambiante ainsi que la masse volumique. Le tableau 1.2 donne la viscosité dynamique pour des produits courants.

À retenir que l'unité de la viscosité dynamique est le $Pa \cdot s$ (unité du système international ou USI). Auparavant on employait le poiseuille ($1 Po = 1 Pa \cdot s$) ou le poise (le plus souvent le centipoise) : $1 Pa \cdot s = 10 Po = 100 cPo$. Pour la viscosité cinématique, on emploie le m^2/s ; certains ont recours au stokes (St) $1 St = 1 cm^2/s = 10^{-4} m^2/s$ et $1 cSt = 1 mm^2/s = 10^{-6} m^2/s$.

Tableau 1.1 – Quelques valeurs de viscosité à $T = 20 - 30$ °C.

	ρ kg/m ³	μ Pa·s	ν m ² /s
eau	1000	10^{-3}	10^{-6}
air	1,17	2×10^{-5}	$1,6 \times 10^{-5}$

Tableau 1.2 – Quelques valeurs de viscosité de matériaux familiers à température ordinaire.

	μ (Pa·s)
air	2×10^{-5}
eau	10^{-3}
huile d'olive	0,1
miel	1 – 10
sirop d'érable	100
bitume	10^8

1.3.2 Origine physique

La viscosité des gaz monoatomiques dilués peut s'expliquer assez simplement à l'aide de la théorie cinétique. Pour des gaz polyatomiques ou concentrés, les prédictions de cette théorie sont un peu moins bonnes. Pour les liquides, le sujet a été abordé depuis longtemps, mais reste encore très débattu.

Considérons l'expérience de Newton, où le gaz est cisailé entre deux plaques. À l'échelle atomique, les molécules vont en moyenne dans la direction x , mais sont également en perpétuelle agitation. Considérons deux couches voisines et parallèles de molécules, dont le mouvement moyen est un glissement relatif selon x . Si le libre parcours moyen⁶ des molécules est ℓ , alors l'ordre de grandeur de la séparation entre deux couches dans la direction y est 2ℓ . Une molécule est animée d'une vitesse fluctuante due à l'agitation thermique, qui est isotrope et qui prend donc une valeur $v(T) \propto \sqrt{T}$ dans toutes les directions $\mathbf{v} = (v, v)$, et d'une vitesse moyenne $u(y)$ selon la direction x . La vitesse instantanée est donc la somme de ces deux vitesses $\mathbf{u} = (u + v, v)$.

Considérons un petit volume de contrôle entre deux couches, long de δx , comme le montre la figure 1.9. Du fait de l'agitation thermique, à chaque instant, à peu près $n/6$ molécules passent de l'altitude $y + \ell$ à y (les autres vont dans les autres directions de l'espace), où n désigne le nombre moyen de molécules par unité de volume (à ne pas confondre avec la normale \mathbf{n}). Le flux élémentaire de quantité de mouvement pour une particule entrant dans le volume s'écrit sur la face supérieure (à l'altitude $y + \ell$)

$$\delta\phi(y + \ell) = m(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}\delta x = m \begin{pmatrix} v(T)u(y + \ell) \\ v(T)^2 \end{pmatrix} \delta x,$$

avec \mathbf{n} la normale à la facette. Comme il y a en $n/6$ particules entrant dans le volume par unité de temps, on déduit que le flux tangentiel (dans la direction x) s'écrit donc $\delta\phi_x(y + \ell) = nm\mathbf{v}u(y + \ell)\delta x/6$. On fait de même avec la facette intérieure sachant que les flux latéraux ne comptent pas (flux nul car le volume est pris entre deux couches adjacentes) et

6. Le libre parcours moyen est la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions.

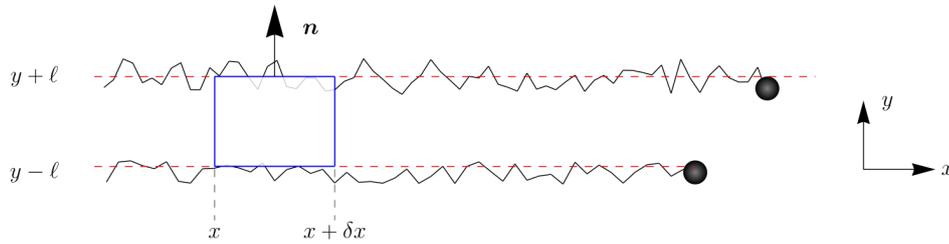


Figure 1.9 – Théorie cinétique très simplifiée. On considère un volume de contrôle compris entre deux couches de glissement à l'échelle moléculaire. On reporte deux trajectoires aux cotes $y - \ell$ et $y + \ell$. Le volume de contrôle est calé entre les deux couches, et \mathbf{n} représente un vecteur normal orienté de l'intérieur vers l'extérieur de la surface de contrôle.

on tire que le flux est $\delta\phi_x(y - \ell) = -nmv u(y - \ell)\delta x/6$. Le flux total tangentiel par unité de longueur est donc

$$\phi_t = \frac{\delta\phi_x(y + \ell) + \delta\phi_x(y - \ell)}{\delta x} = \frac{nmv}{6} (u(y + \ell) - u(y - \ell)) \approx \frac{nmv}{3} \frac{du}{dy} \ell + O(\ell),$$

quand on fait un développement limité au premier ordre. On peut faire de même avec le flux normal, mais comme la vitesse fluctuante ne dépend que de la température, on trouve que les deux composantes élémentaires du flux sont de signe opposé et il n'y a donc pas de flux de quantité de mouvement dans la direction y . Comme on peut interpréter un flux de quantité comme une contrainte, on en déduit que ce flux tangentiel équivaut à une contrainte de frottement tangentiel

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

avec

$$\mu = \frac{1}{3} nmv\ell$$

le coefficient de viscosité. Grâce à la théorie cinétique, on peut expliquer le comportement newtonien des gaz, mais également calculer le coefficient de viscosité dynamique, notamment prévoir sa variation avec la température: $\mu \propto T$, ce qui est bien vérifié expérimentalement.

1.3.3 Fluides newtoniens et non newtoniens

Dans ce cours, on s'intéresse essentiellement à des fluides newtoniens. Pour un fluide newtonien à température constante et placé dans un écoulement dit en cisaillement simple, la contrainte de cisaillement est reliée au taux de cisaillement (gradient de vitesse) par la relation linéaire (1.1). Autrement dit, si l'on trace le rapport $\mu = \tau/\dot{\gamma}$ en fonction du taux de cisaillement, on obtient une droite horizontale, comme le montre la figure 1.10.

Tous les fluides ne vérifient pas cette relation ou bien la vérifient partiellement. Par exemple, l'huile de cuisine est newtonienne, mais la mayonnaise ne l'est pas : si on place de la mayonnaise sur une assiette et qu'on incline légèrement cette assiette, rien ne se passe. En fait, il faut exercer une contrainte minimale pour que la mayonnaise s'écoule. On dit que la mayonnaise possède un *seuil de contrainte*. On peut faire une expérience en plaçant

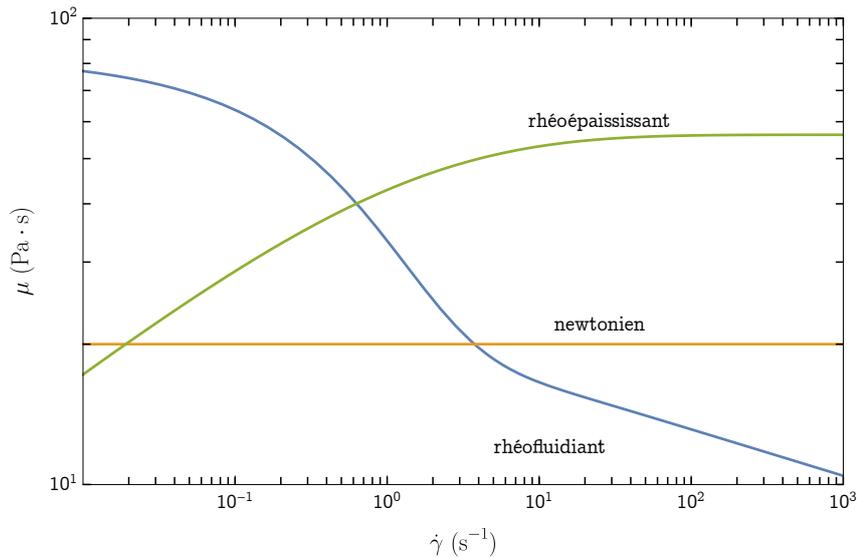


Figure 1.10 – Loi de viscosité pour différents types de fluide. Les fluides newtoniens sont des fluides pour lesquels la viscosité dynamique μ reste constante indépendamment du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ appliqué au fluide. Les fluides rhéoépaississants (resp. rhéofluidiants) sont des fluides non newtoniens pour lesquels la viscosité μ croît (resp. décroît) avec le taux de cisaillement.

un objet à la surface de la mayonnaise : un cornichon a toutes les chances de rester à la surface tandis qu'on peut facilement y enfoncer une cuillère. Le seuil de contrainte peut empêcher la sédimentation d'un corps si la pression exercée par ce corps est inférieure à ce seuil. Si l'on trace la relation $\tau = f(\dot{\gamma})$ pour un tel fluide, on obtient une courbe comme celle reportée sur la figure 1.11, avec une valeur non nulle de la contrainte de cisaillement quand le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ tend vers 0. Un exemple de fluide à seuil est le béton frais : la mise en place du béton dans des coffrages nécessite que le béton soit suffisamment fluide. Des tests comme le cône d'Abrams permettent d'évaluer le seuil de contrainte (voir figure 1.12).

Les fluides non newtoniens possèdent des propriétés parfois stupéfiantes qui les distinguent des fluides newtoniens. Par exemple, l'effet Weissenberg sert à caractériser de façon simple un comportement non newtonien : un fluide newtonien mis en rotation a tendance à se creuser sous l'effet des forces centrifuges, mais un liquide polymérique (constitué de longues chaînes de macromolécules) s'enroule autour du cylindre (voir figure 1.13) comme s'il était aspiré.

D'autres fluides n'ont pas de seuil de contrainte, mais une viscosité qui dépend du taux de cisaillement. On distingue ainsi deux classes de comportement (voir figure 1.10) :

- comportement rhéo-épaississant : plus le taux de cisaillement est important, plus la résistance du fluide est grande. Cela se traduit souvent par des comportements expérimentaux de la forme $\tau \propto \dot{\gamma}^n$, avec $n > 1$. Dans les produits alimentaires, les produits à base d'amidon sont le plus souvent rhéoépaississants (c'est aussi en partie pour cette raison qu'on les utilise pour « épaissir » une sauce) ;
- comportement rhéofluidifiant : plus le taux de cisaillement est important, plus la résistance du fluide est faible. Expérimentalement, on observe des variations de la

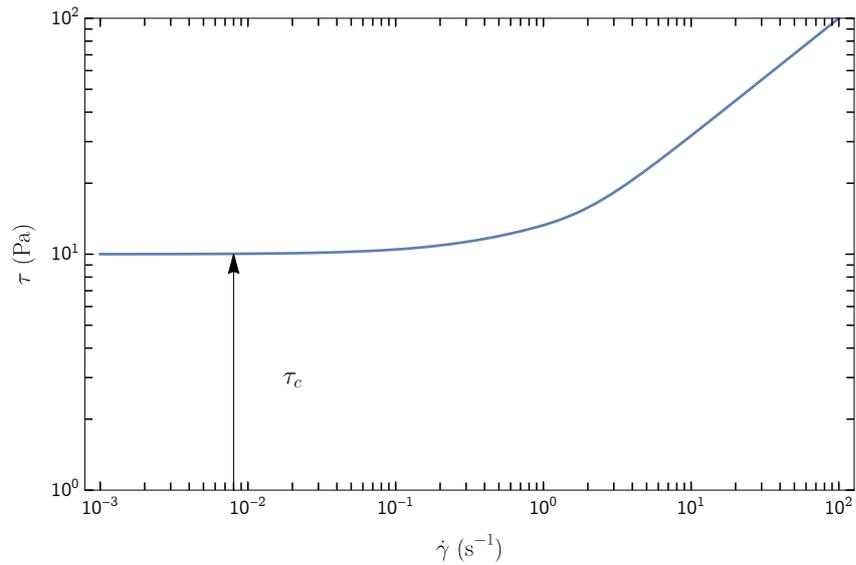


Figure 1.11 – Loi d’écoulement $\tau = f(\dot{\gamma})$ pour un fluide à seuil. Pour un fluide à seuil, la contrainte de cisaillement τ tend vers une valeur-seuil τ_c aux très faibles vitesses de déformation ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$), alors que pour les fluides newtoniens, la contrainte de cisaillement τ tend vers 0 quand $\dot{\gamma} \rightarrow 0$.

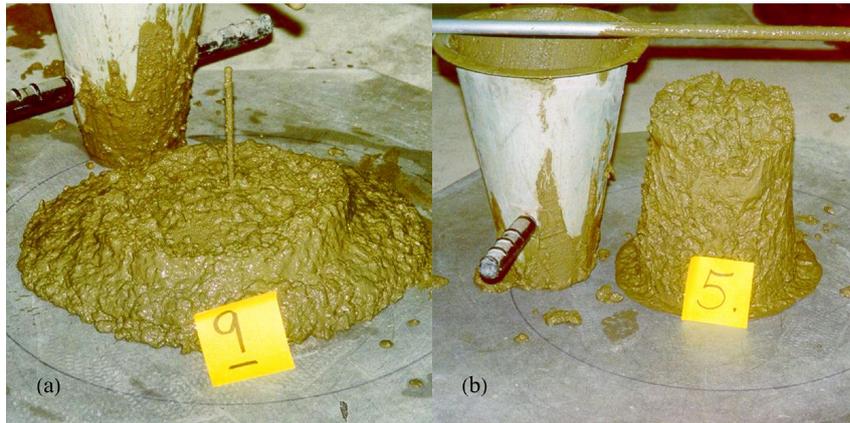


Figure 1.12 – Exemples de test de fluidité d’un béton à l’aide d’un cône d’Abrams. Ce test très simple à mettre en œuvre consiste à remplir de béton un récipient en forme de cône, à retourner le cône tout en obstruant son ouverture, puis à poser le cône sur un support horizontal. On soulève alors le cône, le fluide s’affaisse plus ou moins selon la composition du béton. L’affaissement (hauteur du cône - hauteur du tas) fournit une estimation du seuil de contrainte (Barnes, 2000).

forme $\tau \propto \dot{\gamma}^n$, avec $n < 1$. Le ketchup est un produit rhéofluidifiant. Certaines peintures possèdent cette propriété pour faciliter leur application; elles peuvent également être *thixotropes*: l’application d’une contrainte provoque une déstructuration du matériau, entraînant une chute de viscosité, qui varie au cours du temps (si le matériau est laissé au repos, il retrouve sa structure originale et donc sa viscosité originale).

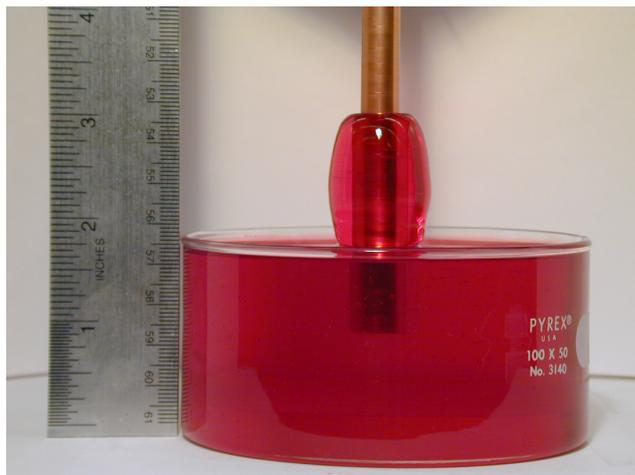


Figure 1.13 – Effet Weissenberg. C'est la remontée d'un liquide polymérique le long d'un cylindre plongé dans un bain et mis en rotation.

À noter que la plupart des matériaux un tant soit peu complexes sont non newtoniens, mais on emploie fréquemment l'approximation de fluide newtonien car assez souvent on travaille sur une gamme restreinte de taux de cisaillement et que dans ce cas-là, l'approximation peut être correcte. Par exemple, on parle de viscosité d'un glacier lorsqu'on fait des calculs de fluage approximatifs sur de très grandes échelles de temps.

1.4 Tension de surface

1.4.1 Mise en évidence et définition

La tension de surface est une propriété des fluides, qui sont attirés ou repoussés lorsqu'ils sont en contact avec un solide, un liquide, ou un gaz. Cette propriété est importante puisqu'elle explique la stabilité des gouttes de pluie dans l'atmosphère, les larmes du vin, le déplacement des insectes à la surface de l'eau, les propriétés anti-adhérence de certains ustensiles de cuisine, les émulsions en cuisine, l'effet du savon, les remontées capillaires dans les solides poreux, etc. La séquence de photographies 1.14 montre comment sous l'effet de la tension de surface, un jet liquide se scinde et forme une goutte. La tension de surface est un phénomène général que l'on rencontre pour tous les fluides ; toutefois, selon la nature du fluide, l'effet de la tension de surface peut amener à des phénomènes d'allure différente comme l'illustre la figure 1.15 dans le cas de ressauts capillaires avec des fluides newtonien et non newtonien.



Figure 1.14 – Formation d'une goutte. Les ondes de surface ainsi que la rupture de la goutte sont commandées par les effets de tension de surface. Source : [Andrew Davidhazy](#).

À l'interface entre deux fluides, il existe des interactions moléculaires en général de répulsion : les milieux n'étant pas miscibles, il existe une force à la surface de contact qui permet de séparer les deux fluides et éviter leur imbrication ou leur mélange. On appelle *tension de surface* ou *tension capillaire* cette force surfacique permettant de maintenir deux

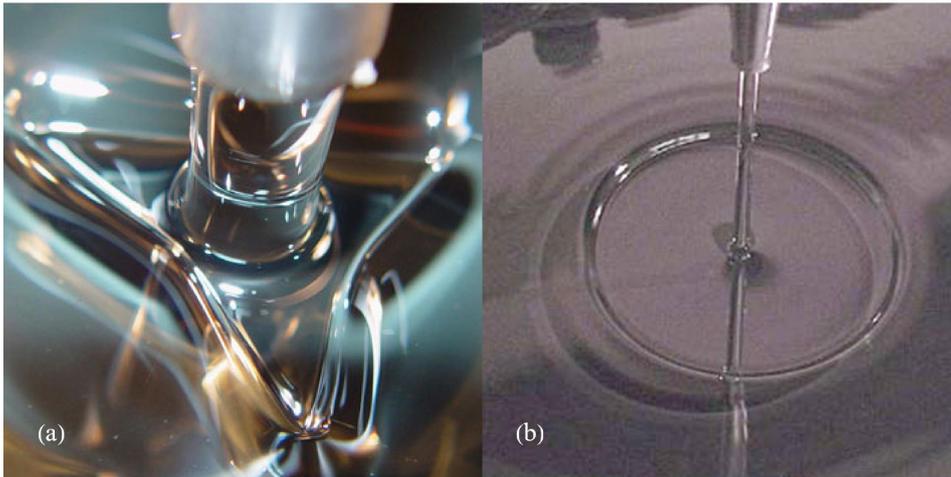


Figure 1.15 – (a) Effet de la tension de surface provoquant une rupture de symétrie dans le ressaut circulaire dans le cas d’une fluide non newtonien. (b) Formation d’un ressaut capillaire avec de l’eau dans un évier. Crédit: [John W. M. Bush](#).

fluides en contact le long d’une interface commune. On la note ici γ [Pa·m]. On l’exprime parfois aussi comme une énergie par unité de surface [J/m^2]. La tension de surface de l’eau en contact avec l’air est $\gamma = 70 \times 10^{-3}$ Pa·m; le tableau 1.3 fournit quelques valeurs de tension de surface.

Tableau 1.3 – Tension de surface γ de quelques liquides à température ambiante ou à celle indiquée entre parenthèses

Fluide	γ [Pa·m]
huile silicone	20×10^{-3}
eau	70×10^{-3}
éthanol	23×10^{-3}
glycérol	63×10^{-3}
mercure	0,485
hélium (à 4 K)	10^{-4}
verre fondu (1500 K)	0,3

Si l’on considère maintenant un liquide le long d’une paroi solide, on observe l’effet inverse : il existe des forces d’adhésion. On dira le plus souvent que le fluide est *mouillant* s’il est attiré par le solide : une goutte d’eau a ainsi le plus souvent le caractère d’un fluide mouillant. On dit qu’il est *non mouillant* lorsqu’il est repoussé par la surface solide ; c’est par exemple ce qu’on cherche à produire en fabriquant des ustensiles de cuisine avec des revêtements en téflon pour éviter l’adhésion des graisses ou bien quand on farte les skis avec des farts fluorés. La figure 1.16 montre un exemple d’application en le génie civil avec la couverture du stade de la Maracaña à Rio-de-Janeiro (Brésil). La figure 1.17 montre la forme d’une goutte sur un support plan en fonction de son caractère mouillant. L’angle que forme la goutte avec le support solide est appelé *angle de contact*. Pour un fluide en équilibre statique, c’est une grandeur constante, qui ne dépend que des propriétés (énergies

de surface) du solide, du liquide, et du gaz. Si le fluide n'est plus au repos, la valeur de l'angle varie avec la vitesse et la direction de l'écoulement.



Figure 1.16 – Pour le projet de réhabilitation du stade Maracanã de Rio de Janeiro pour la Coupe du monde de football 2014 et les Jeux olympiques de 2016, les concepteurs ont prévu de couvrir les gradins à l'aide d'une enveloppe comportant un film plastique couvert de téflon pour éviter l'imprégnation (qui serait préjudiciable au poids que doivent supporter les poutres de la structures) et faciliter le drainage (dans un climat subtropical, les pluies peuvent être très intenses). Source : <http://placar.abril.com.br>.

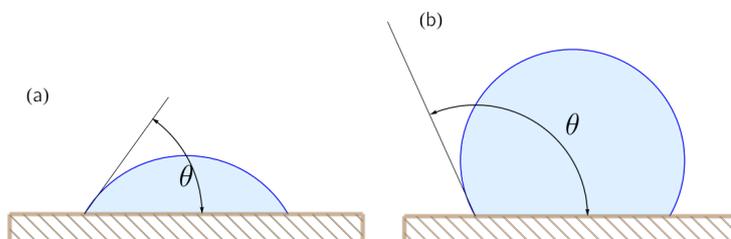


Figure 1.17 – Goutte sur une surface solide dans le cas d'un fluide au repos qui (a) mouillant ($\theta < \pi/2$) ou (b) non mouillant ($\theta > \pi/2$). L'angle de contact est noté θ .

Considérons un cadre métallique surmonté d'une barre mobile. On plonge l'ensemble dans de l'eau savonneuse (la même solution qui sert à faire des bulles de savon), puis on le retire. On constate que la barre roule immédiatement vers la gauche. Il faut exercer une force

$$F = 2\gamma\ell,$$

pour immobiliser la barre. Le facteur 2 correspond aux deux interfaces liquide/air de part et d'autre du film (voir figure 1.18(c)).

Cette expérience montre donc que la force de tension agit comme une force normale (à la barre) proportionnelle à la longueur de film (en contact avec la barre). De manière



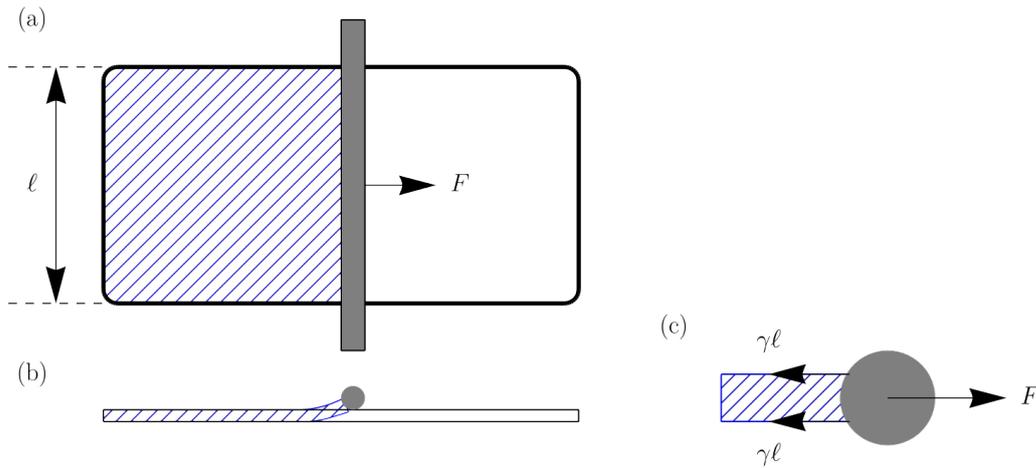


Figure 1.18 – Quand on immerge un profilé métallique avec une barre mobile dans de l'eau savonneuse, la tension de surface entre le film de savon (en hachures bleues) crée une force normale à la barre. (a) Vue du dessus. (b) Vue de profil. (c) Agrandissement et bilan des forces au niveau du film de savon.

générale, la force résultant de la tension de surface sur tout élément de longueur $d\ell$ de la surface libre orientée par la normale \mathbf{n} est pour un fluide au repos près d'une paroi solide :

$$d\mathbf{F} = \gamma \mathbf{n} \times d\boldsymbol{\ell}. \quad (1.2)$$

C'est la force élémentaire exercée par le fluide sur la paroi solide.

Si on prend par une surface solide en contact statique avec un liquide (voir figure 1.19), on trouve

$$\mathbf{F} = \ell \gamma \mathbf{t} = \ell \gamma \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

avec ℓ le périmètre de l'objet en contact avec l'interface et θ l'angle de l'interface que l'on appelle *angle contact*. On note ainsi que la composante verticale de la force est maximale à l'arrachage, c'est-à-dire lorsqu'on retire l'objet du liquide et que la force de tension est orientée verticalement ($\theta \rightarrow 0$ dans l'équation ci-dessus et pour une paroi verticale).

Cette force (1.2) représente la force exercée par le fluide sur une paroi solide. Inversement la force exercée par la paroi sur le fluide est $-\mathbf{F}$ compte du principe d'action et de réaction (appelé encore 3^e principe de Newton). Par la suite, on gardera en tête cette convention selon que l'on est amené à établir un bilan de forces sur un fluide ou calculer la force exercée par le fluide sur un solide.

1.4.2 Mesure de la tension de surface

C'est ce principe qui est exploité dans un appareil appelé « tensiomètre » (de Lecomte du Noüy) qui sert à mesurer la tension de surface : il s'agit de placer un petit anneau à la surface du liquide dont on veut mesurer la tension, puis de mesurer la force nécessaire à son soulèvement. Si le rayon intérieur est R_1 , le rayon extérieur R_2 , l'épaisseur de l'anneau

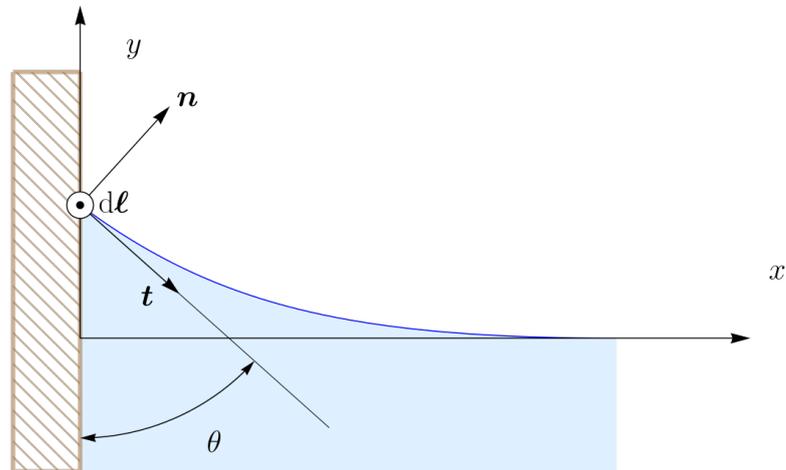


Figure 1.19 – La tension de surface crée une force normale au plan ($d\ell$, \mathbf{n}) exercée par le fluide sur la paroi solide. La direction de cette force est donc donnée par \mathbf{t} .

e , la force due à la tension de surface du fluide a deux contributions correspondant aux actions sur les périmètres interne et externe

$$F_1 = \text{tension de surface} \times \text{longueur} \times \text{angle de contact} = \gamma \times 2\pi R_1 \times \cos \theta,$$

où, comme le fluide s'accroche à la face inférieure de l'anneau, il faut considérer qu'au moment où l'anneau est arraché du fluide, l'angle de contact θ vaut $\pi/2$. De même, on a

$$F_2 = \gamma \times 2\pi R_2 \times \cos \theta.$$

Ces deux forces sont orientées vers le bas tout comme le poids de l'anneau (qui vaut $P = \rho g e \pi (R_2^2 - R_1^2)$). La somme des forces orientées vers le bas s'écrit donc

$$F = F_1 + F_2 + P = 2\pi\gamma(R_1 + R_2) + \rho g e \pi (R_2^2 - R_1^2).$$

Si on suppose l'équilibre des forces, alors la force que doit appliquer l'opérateur est de direction opposée et de même norme. En général, le poids de l'anneau est très faible. De plus, l'anneau a de grands rayons R_1 et R_2 et une petite largeur ($R_2 - R_1 \ll \bar{R} = \frac{1}{2}(R_2 + R_1)$). En conséquence, si on néglige le poids et on approche les rayons R_1 et R_2 par le rayon moyen \bar{R} , on déduit l'approximation :

$$F \approx 4\pi\bar{R}\gamma.$$

Si on peut mesurer de façon précise la tension de surface avec ce simple appareil, on préfère souvent aujourd'hui des méthodes optiques comme la déformation d'une goutte sur un substrat (ce qui permet d'accéder à l'angle de contact et à la tension de surface) ou sortant d'une pipette (Hansen & Rødsrud, 1991).

1.4.3 Loi de Laplace

Quand on place une petite entité de fluide dans un autre fluide, cette entité isolée prend la forme d'une goutte sphérique si rien ne vient (comme un mouvement du fluide

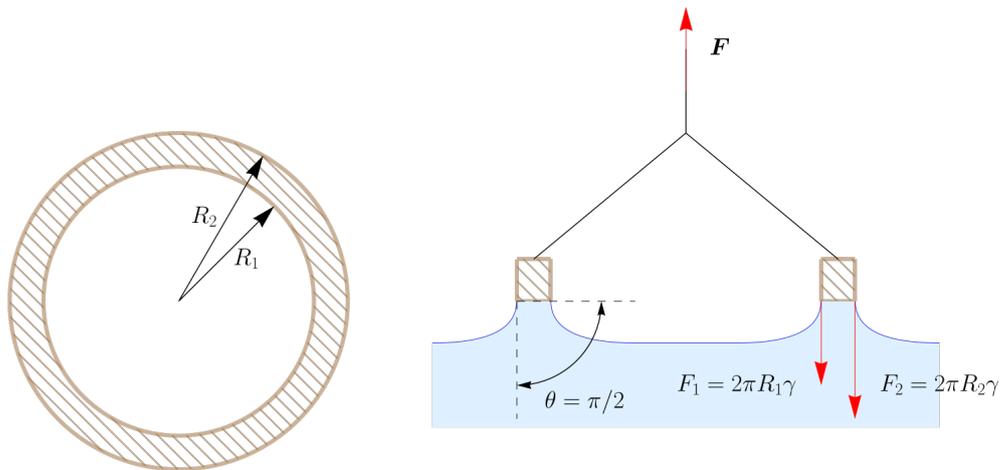


Figure 1.20 – Tensiomètre de Noüy.

environnant) s’opposer à cette forme. En effet, la forme sphérique est la forme qui minimise l’énergie de surface, c’est-à-dire l’énergie que doit dépenser la particule pour éviter que du fluide environnant ne pénètre dans la goutte⁷.

Considérons une goutte de rayon R d’un fluide au repos immergée dans un autre fluide au repos. La pression dans la goutte est p_i ; celle dans le fluide extérieur est p_e ; voir figure 1.21. La goutte est à l’équilibre si le travail des forces de surface est contrebalancé par le travail des forces de pression (on suppose qu’on augmente virtuellement le rayon d’un incrément dR et on impose que la goutte retrouve sa position d’équilibre, donc tous les travaux des différentes forces doivent se compenser):

- travail élémentaire des forces δW_p de pression (force de volume): pression \times incrément de volume = $-\Delta p \times d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, avec $\Delta p = p_i - p_e$;
- travail élémentaire des forces W_t de tension (force de surface): tension $\gamma \times$ incrément de surface = $\gamma \times d(4\pi R^2)$.

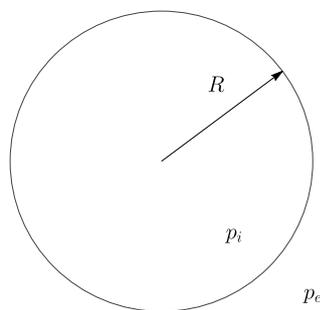


Figure 1.21 – Goutte en équilibre.

7. Ce résultat peut se montrer à l’aide du théorème isopérimétrique en dimension 3.

On doit avoir $\delta W_p + \delta W_t = 0$. En différenciant, puis en simplifiant, on trouve :

$$\boxed{\Delta p = p_i - p_e = \frac{2\gamma}{R}} \quad (1.4)$$

C'est la *loi de Laplace*⁸. À travers toute interface entre deux fluides, il existe une saute de pression égale à $2\gamma/R$.

1.4.4 Loi de Laplace-Young

Cette loi peut se généraliser à des surfaces libres non sphériques. Ainsi, à travers une surface séparant deux fluides, on a une variation brutale de pression à travers l'interface

$$\Delta p = p_i - p_e = \gamma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right), \quad (1.5)$$

avec R_x et R_y les rayons de courbure dans les directions x et y . C'est la *loi de Laplace-Young*.

Attention, courbure et rayon de courbure sont des quantités algébriques. En mathématiques, on montre qu'en dimension 2 (voir figure 1.22), la courbure C et le rayon de courbure $R = 1/C$ d'une courbe d'équation $y = f(x)$ dans un système cartésien de coordonnées sont définis de la façon suivante

$$C = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} \text{ et } R = \frac{1}{C} = \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''}. \quad (1.6)$$

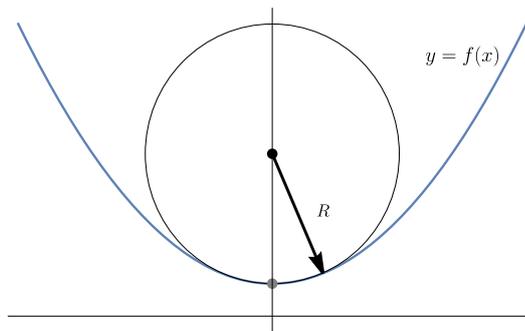


Figure 1.22 – Rayon de courbure d'une fonction en dimension 2.

En dimension 3 (voir figure 1.23), ce résultat se généralise en considérant que toute surface $z = f(x, y)$ (dans un système de coordonnées cartésiennes) peut être caractérisée par l'intersection avec des plans $x = cste$ et $y = cst$. On peut donc définir un rayon de

8. Pierre-Simon Laplace (1749–1827) a été un mécanicien et mathématicien français à la fin du XVIII^e siècle et début du XIX^e siècle. Ses travaux ont porté sur des problèmes de mécanique céleste, où il analysa l'interaction à l'aide d'équations différentielles, de mathématiques (loi de probabilité, transformée de Laplace), et de la thermomécanique des fluides (changement d'état des corps).

courbure R_x (rayon de courbure de la courbe f_x résultant de l'intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan $x = cste$)

$$R_x = \frac{(1 + (\partial_x f)^2)^{3/2}}{\partial_{xx} f}.$$

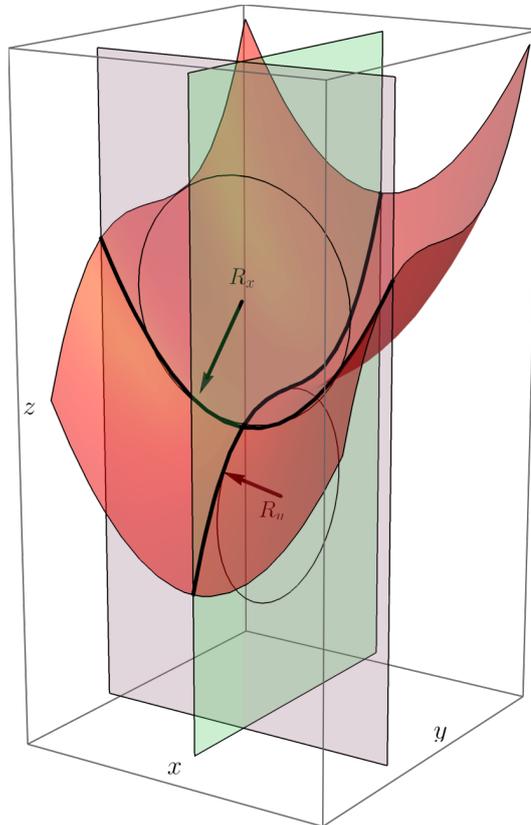


Figure 1.23 – Rayon de courbure d'une fonction en dimension 3.

Attention à quelques subtilités:

- Si on considère une bulle sphérique au lieu d'une goutte, l'intérieur et l'extérieur de la bulle sont composés de gaz et ils sont séparés par un film avec deux interfaces, donc la loi de Laplace est dans ce cas particulier



$$\Delta p = p_i - p_e = 4 \frac{\gamma}{R}. \quad (1.7)$$

Il en est de même pour la loi de Laplace-Young appliquée à un film liquide entouré d'un fluide de part et d'autre de ses interfaces.

- Il faut donc garder en mémoire que le rayon de courbure est algébrique: en mathématiques, la convention est $R > 0$ pour une surface convexe ($f'' > 0$) et $R < 0$ pour une surface concave ($f'' < 0$). Mais on emploie une convention différente: la convexité (concavité) se définit par rapport à la forme de l'interface enveloppant le volume de fluide. Ainsi lorsqu'on emploie la loi de Laplace avec une surface libre concave (comme dans le cas de la remontée capillaire d'un fluide mouillant, voir l'exemple de la loi de Jurin plus bas): la pression du fluide au sein de la goutte est

alors plus petite qu'à l'extérieur (voir figure 1.24). Dans ce cas précis, le fluide étant placé sous la surface du ménisque, la surface est convexe du point de vue mathématique, mais concave du point de vue du fluide.

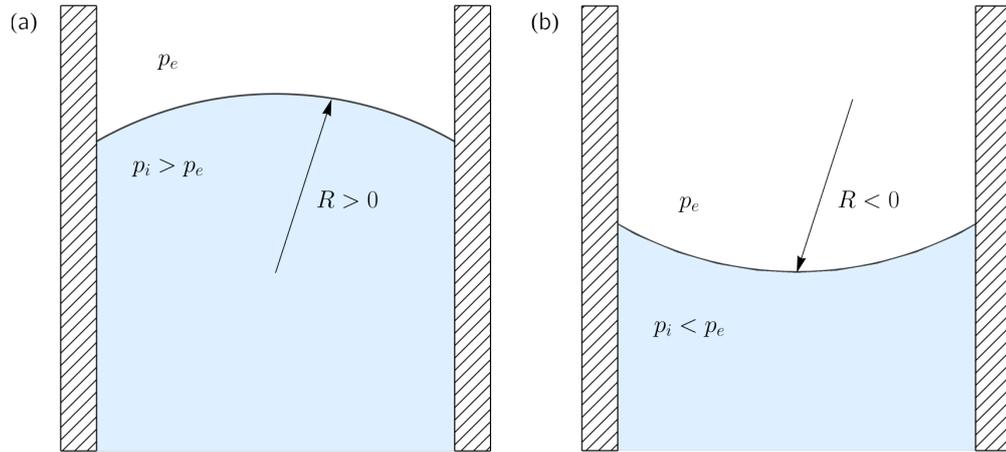


Figure 1.24 – Méninges dans un tube avec (a) fluide non mouillant (interface convexe donc $R > 0$ et $p_i > p_e$) et (b) fluide mouillant (interface concave donc $R < 0$ et $p_i < p_e$).

1.4.5 Remontée capillaire et loi de Jurin

Remontée capillaire

La tension de surface permet d'expliquer la remontée capillaire le long d'une paroi solide. En effet, expérimentalement on observe que la surface libre d'un liquide ne forme pas un angle droit avec une paroi, mais est légèrement incurvée vers le haut (liquide mouillant) ou vers le bas (liquide non mouillant). L'ordre de grandeur de la remontée capillaire est obtenu en égalant la pression (supposée hydrostatique) due à la gravité et la saute de pression due aux forces capillaires, ce qui donne d'après l'équation (1.5)

$$\rho g h \approx \frac{\gamma}{|R|}, \quad (1.8)$$

avec $R_x = R$ le rayon de courbure (dans le plan Oxz) et h la remontée capillaire, $R_y \rightarrow \infty$ et où l'on a négligé la pression atmosphérique (voir figure 1.25). En faisant l'approximation $R \sim h$, on déduit l'ordre de grandeur suivant

$$h^2 = O\left(\frac{\gamma}{\rho g}\right).$$

Ce calcul peut se faire plus rigoureusement en intégrant l'équation (1.8) et en se servant de la définition (1.6) du rayon de courbure

$$R(x) = -\frac{(1 + z_s'^2)^{3/2}}{z_s''},$$

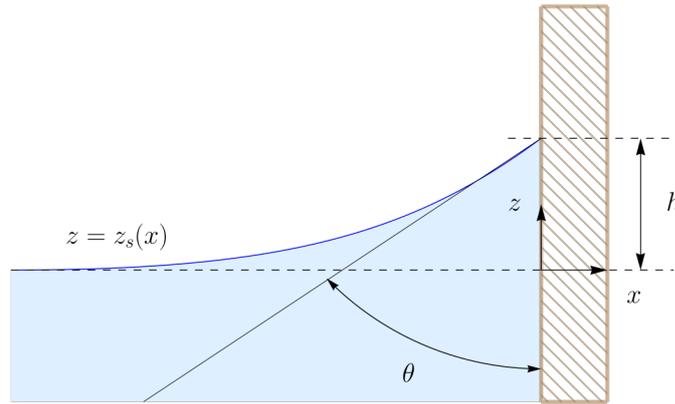


Figure 1.25 – Remontée capillaire le long d’une paroi solide dans le cas d’un fluide mouillant.

où $z_s(x)$ est l’équation de la surface libre et le signe négatif est justifié par le fait que le rayon de courbure est négatif pour une surface concave (avec toujours la convexité/concavité définie du point de vue du liquide). Anticipant le principe de l’hydrostatique (voir chap. 3) selon lequel la variation de pression hydrostatique est proportionnelle à la différence d’altitude pondérée du poids volumique ρg , on peut écrire que la pression p en tout point au sein du fluide situé à l’altitude z est

$$p(z) = \rho g(z_s - z) + p_a + \frac{\gamma}{R},$$

avec p_a la pression atmosphérique et $z_s - z$ la différence d’altitude. Le long du plan horizontal $z = 0$, la pression vaut la pression atmosphérique (voir chap. 3), et donc l’équation différentielle de la surface libre s’écrit :

$$\rho g z_s = \gamma \frac{z_s''}{(1 + z_s'^2)^{3/2}}. \quad (1.9)$$

Pour résoudre cette équation, on a besoin d’une condition aux limites. Celle-ci est donnée expérimentalement par l’angle que forme le liquide avec la paroi solide (l’*angle de contact*).

En partant de l’équation différentielle (1.9) sujette à la condition aux limites $z_s'(0) = \cotan\theta$, en la multipliant par z_s' , on trouve que l’équation différentielle (1.9) est équivalente à la différentielle exacte

$$d \left(\frac{1}{2} z_s'^2 + \frac{\gamma}{\rho g} \frac{1}{\sqrt{1 + z_s'^2}} \right) = 0,$$

ce qui veut dire que la constante d’intégration $\psi = z_s'^2 + 2\gamma/(\rho g\sqrt{1 + z_s'^2})$ se conserve le long de z_s . Comme la surface libre doit devenir horizontale quand x est loin de la paroi, on trouve que cette fonction ψ doit être égale à $\gamma/(\rho g)$ le long de z_s (car $z_s' \rightarrow 0$ et $z_s \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$).

L’équation différentielle non linéaire du premier ordre qui en résulte est assez compliquée, mais on peut obtenir la remontée capillaire sans la résoudre. En se servant de la condition aux limites $z_s'(0) = \cotan\theta$ et en posant $h = z_s(0)$, on trouve finalement

$$\frac{1}{2} z_s'^2 + \frac{\gamma}{\rho g} \frac{1}{\sqrt{1 + z_s'^2}} = \frac{\gamma}{\rho g} \Rightarrow h^2 = 2 \frac{\gamma}{\rho g} (1 - \sin \theta).$$

Loi de Jurin

Une manifestation des effets de tension de surface est la remontée capillaire due à la dépression locale causée par la courbure de la surface libre. Considérons un tube de petites dimensions (diamètre $2r$ petit devant la hauteur du tube) plongé dans un liquide de masse volumique ρ . La pression juste sous l'interface (point A sur la figure 1.26) est

$$P_A = p_a + 2\frac{\gamma}{R},$$

où R désigne le rayon de courbure ($R < 0$ compte tenu de la forme du ménisque) de la surface libre supposée de forme hémisphérique et où la pression extérieure p_a est la pression atmosphérique.

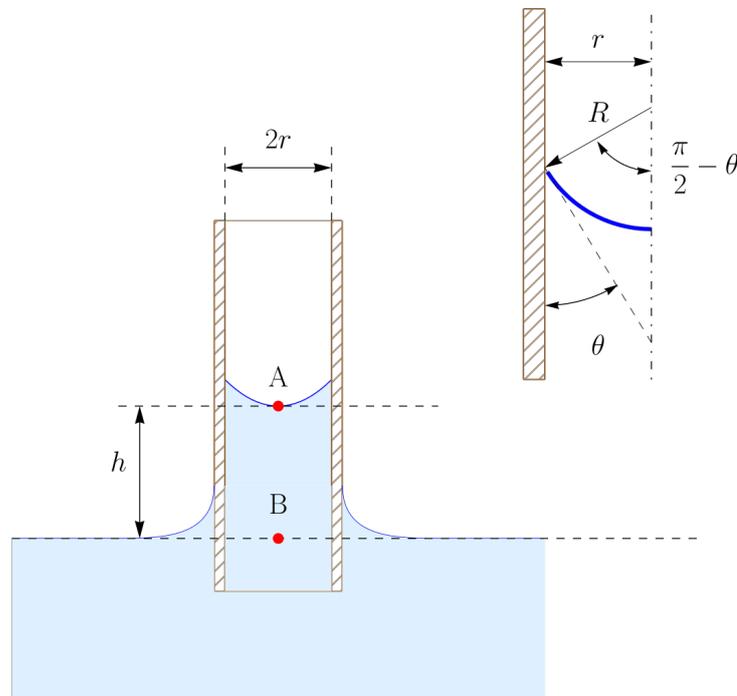


Figure 1.26 – Remontée capillaire le long d'un tube cylindrique. L'insert montre le détail du ménisque et la relation entre rayon de courbure R , rayon du capillaire r et angle de contact θ .

Ce rayon de courbure peut être relié au diamètre du tube et à l'angle de contact de la façon suivante: $r = R \cos \theta$. Au point B, la loi de l'hydrostatique montre que la pression est liée à la différence d'altitudes entre les points A et B (voir chapitre 3):

$$P_B = P_A + \rho gh,$$

or le point B étant à la même altitude que la surface libre non perturbée du liquide, la pression doit être égale à la pression atmosphérique p_a . On en déduit donc la remontée capillaire

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}. \quad (1.10)$$

C'est la *loi de Jurin*⁹.

On peut démontrer la loi de Jurin en considérant non pas l'égalité des pressions, mais en faisant un bilan des forces sur le volume de contrôle V représentant le volume de fluide qui a été aspiré dans le tube (voir figure 1.27). En se servant du principe d'action et de réaction, on peut calculer la composante verticale de la force capillaire élémentaire exercée par un élément $d\ell$ de la paroi du tube sur le fluide :

$$dF_c = \gamma \cos \theta d\ell.$$

Compte tenu de la symétrie radiale du problème, le calcul de la composante horizontale n'est pas ici utile. L'intégration donne $F = 2\pi r \cos \theta$. Le volume de contrôle est soumis à l'action de la pesanteur. Le poids est

$$F_p = \rho g V = \rho g \pi r^2 h.$$

Au repos, il y a équilibre des forces $F_c = F_p$, et on en déduit immédiatement la loi de Jurin (1.10).

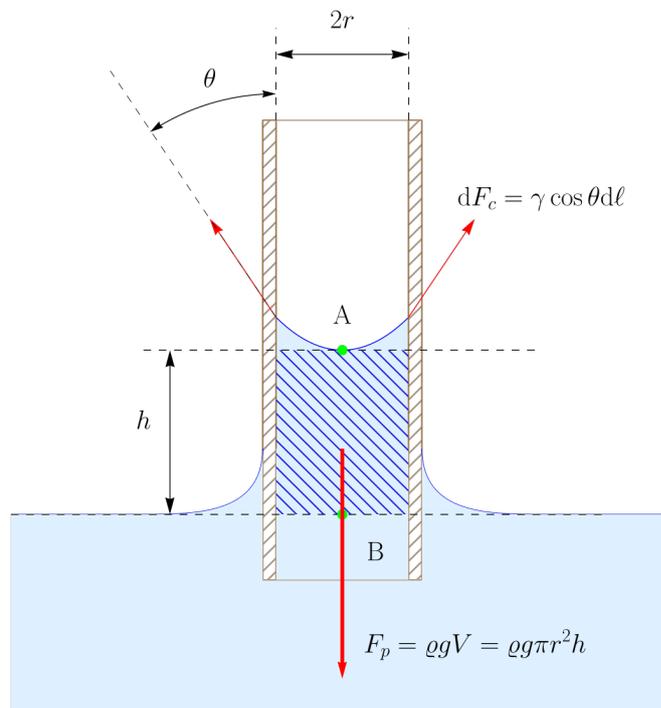


Figure 1.27 – Équilibre des forces de tension de surface et de pesanteur pour un volume de contrôle V (en hachures bleues) compris entre les points A et B. On néglige le volume de volume contenu dans le ménisque (au-dessus du point A).

9. James Jurin (1684-1750) était un médecin anglais, également versé dans la mécanique. On lui doit notamment les premières études épidémiologiques sur la variole et les moyens de s'en prémunir par la « variolisation » (inoculation de substance suppurant des plaies d'un malade peu atteint chez un patient sain), une technique venue d'Asie et qui est l'ancêtre de la vaccination. Fervent défenseur de Newton, il s'est beaucoup intéressé à la mécanique, et en particulier à la remontée des liquides dans les tubes capillaires. La loi expérimentale porte son nom.



CHAPITRE 2

Similitude

2.1 Théorie de la similitude

2.1.1 Objet de la théorie de la similitude

LAR THÉORIE de la similitude, on entend aussi bien l'analyse des dimensions (unités physiques) des paramètres d'un problème, l'usage de nombres sans dimension que le support théorique permettant d'interpréter les expériences réalisées à petite échelle et visant à reproduire des phénomènes complexes (à grande échelle). La « théorie de la similitude » est donc un ensemble de règles qui vise à :

- proposer des nombres sans dimension¹ tels que le nombre de Reynolds ou le nombre de Froude ;
- simplifier les équations de base en supprimant les termes négligeables ;
- diminuer le nombre de paramètres pertinents nécessaires à l'étude expérimentale (mais également numérique ou théorique) des phénomènes ;
- établir les critères à respecter pour qu'une expérience à échelle réduite soit représentative d'un phénomène en grandeur réelle (on dit alors que l'expérience est en *similitude* avec le phénomène) ;
- fournir les relations de changement d'échelle entre expériences.

♣ **Exemple.** – Il est souvent très difficile de calculer numériquement ou théoriquement le fonctionnement d'un ouvrage hydraulique ou le comportement d'un écoulement. Si cela est possible, il peut être très coûteux (en temps, en argent) de faire une étude complète. Il peut alors être intéressant de procéder à des essais à échelle réduite en laboratoire sur des maquettes. La question est comment utiliser les données obtenues à échelle réduite pour déduire les caractéristiques du phénomène en grandeur réelle. □

Par exemple, une avalanche de neige ou de rochers peut provoquer, en cas d'impact avec une étendue d'eau, une vague dite d'impulsion. Le phénomène est difficile à étudier, notamment à cause du couplage complexe entre l'écoulement gravitaire et l'eau. Si dans le cadre d'une étude d'ingénierie, par exemple pour dimensionner une hauteur de barrage suffisante, on souhaite calculer les caractéristiques de la vague, une façon de procéder est de réaliser un modèle réduit (voir figure 2.1). Ainsi, pour évaluer la vitesse v et la hauteur η d'une vague d'impulsion créée par une avalanche entrant avec une vitesse u

1. c'est-à-dire qui n'ont pas de dimension (unité) physique.



Figure 2.1 – (a) Vague d’impulsion créée par un éboulement rocheux de $300\,000\text{ m}^3$ dans un lac morainique sous le glacier de Grindelwald (BE) le 22 mai 2009. (b) Vue du lac d’accumulation du barrage du Vajont en Italie ; le 9 octobre 1963, peu de temps après la mise en eau du barrage, une masse d’environ 300 Mm^3 de terre glissa dans le lac, provoquant une vague d’impulsion qui passa par-dessus le barrage et s’engouffra dans défilé. Cette vague dévasta plusieurs villages, dont le gros bourg de Longarane, et fit environ 2000 morts. C’est la plus grosse catastrophe récente impliquant un barrage en Europe. Sources : [Tages Anzeiger](#) et ([Paronuzzi et al., 2021](#)).

dans un lac d’altitude et impliquant une masse m de neige, on peut être amené à réaliser des expériences à petite échelle qui permettent de mesurer vitesse v et hauteur η en fonction des caractéristiques de l’avalanche (u , m , etc.) et des conditions hydrauliques (θ , h_0 , etc.) (voir figure 2.2). L’expérience est d’autant plus longue à réaliser qu’il existe de variables dont dépendent les caractéristiques de la vague d’impulsion. Deux questions se posent alors :

- Comment passer des mesures en laboratoire aux valeurs représentant ce qui passe en grandeur un ?
- Si on tient compte de toutes les variables du problème, il faudrait réaliser un grand nombre d’expériences. Existe-t-il un moyen de déterminer le degré de liberté du problème en connaissant le nombre total de variables du problème ?

2.1.2 Invariance d’échelle

En filigrane, il existe une notion essentielle en physique : la notion d’*invariance*. C’est parce que les lois de la physique sont invariantes par rapport à tout changement d’unité qu’elles peuvent se mettre sous des formes sans dimension ou bien qu’elles peuvent être valables pour une large plage d’échelles de temps et d’espace. Cette notion d’invariance permet de déboucher sur l’*auto-similarité* de certains phénomènes physiques. Un phénomène qui varie au cours du temps est dit *auto-similaire* si les variations spatiales de ses propriétés à différents moments se déduisent les unes des autres par une simple transfor-

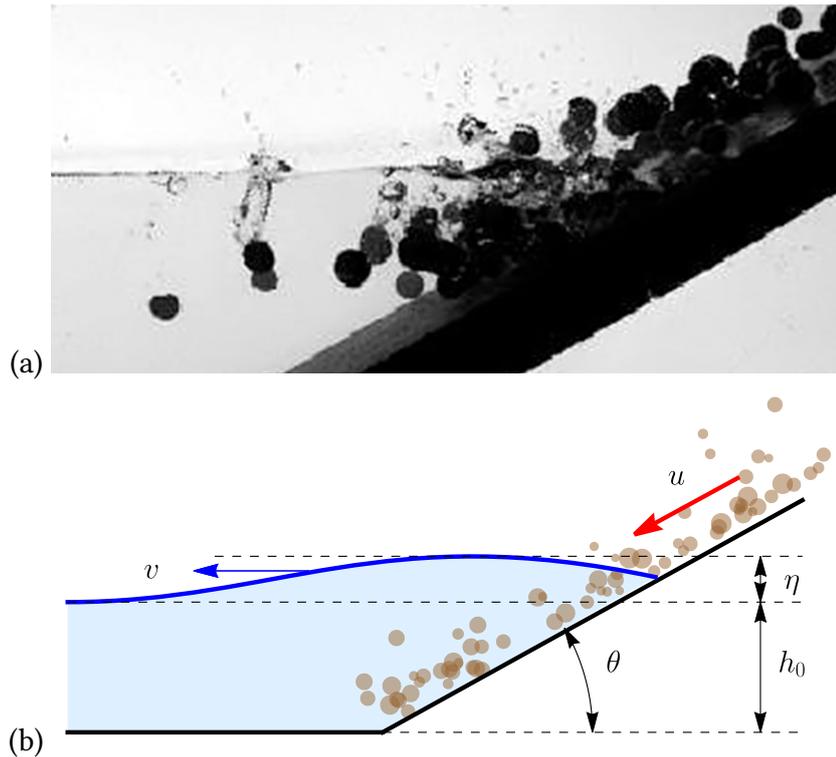


Figure 2.2 – (a) Vague d'impulsion créée dans le laboratoire du LHE en laissant glisser une masse granulaire composée de billes en argile expansée. Avec une caméra à grande cadence de prise d'images, on peut suivre le mouvement des particules et la formation de la vague d'impulsion. (b) Schéma de principe.

mation similaire. En bref, si par simple translation, rotation, et étirement, toutes les courbes peuvent être ramenées à une seule courbe maîtresse, alors le phénomène est auto-similaire.

Les solutions auto-similaires sont intéressantes à plus d'un titre :

- l'existence d'une solution auto-similaire permet de comprendre analytiquement un processus physique complexe, notamment le comportement à court/long terme d'une solution ;
- la mise en évidence de l'auto-similarité fournit un moyen pratique de représenter une fonctions à plusieurs variables d'une façon simple et riche en interprétation physique ;
- expérimentalement, les données issues de conditions expérimentales différentes tombent sur une courbe unique si on choisit de les représenter à l'aide des variables auto-similaires ;
- il est possible de réduire une équation aux dérivées partielles en différentielle ordinaire et/ou de réduire l'ordre de l'équation différentielle, ce qui permet parfois d'arriver à des solutions analytiques.

Pour bien comprendre cette notion d'invariance, on peut se servir des connaissances acquises en géométrie. Par exemple, des triangles sont dits *similaires* géométriquement si

le rapport de leurs longueurs reste identique (voir figure 2.3)

$$\lambda = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

avec λ le rapport de similitude, le facteur d'échelle, ou l'échelle. On parle de *transformation isomorphe* quand on transforme un triangle en un autre par élongation de ses côtés d'un facteur identique λ .

Il est possible de généraliser cette notion en considérant des rapports de longueur différents selon les axes du plan. Ainsi, une transformation affine conserve les rapports de longueur, avec des rapports différents selon les axes (voir figure 2.3)

$$\lambda_x = \frac{a'}{a} \text{ et } \lambda_y = \frac{b'}{b},$$

avec λ_x et λ_y les rapports selon l'horizontale et la verticale. Lors d'une transformation affine, on note que

- certaines quantités sont conservées. On parle d'*invariant*. Par exemple le rapport de la surface S et du produit des demis axes :

$$s = \frac{S}{ab} = \frac{S'}{a'b'} = \pi.$$

- d'autres quantités ne le sont pas. Par exemple le périmètre n'est pas invariant

$$P = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

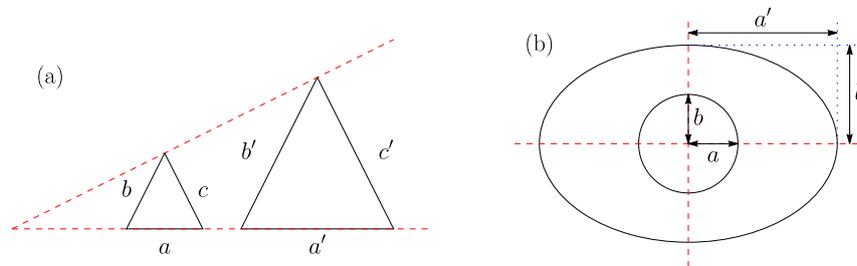


Figure 2.3 – (a) Transformation isomorphe de triangles. (b) transformation affine d'une ellipse.

Pourquoi certaines quantités se conservent et d'autres non ? On parle de *loi d'échelle* pour définir la relation de proportionnalité entre une certaine grandeur et l'échelle (ici géométrique) du problème :

- le périmètre $P \propto \ell$,
- la surface $S \propto \ell^2$,
- le volume $V \propto \ell^3$,

avec ℓ une *échelle caractéristique* de l'objet (voir figure 2.4). Selon la dimension de la grandeur et le degré de liberté de la transformation, il est possible d'obtenir plus ou moins

simplement la relation qui lie cette grandeur à l'échelle ou bien aux rapports de changement d'échelle. Par exemple, dans le cas de la transformation cercle (rayon $a = b$) en ellipse (de demis grand et petit axes a et b) par une transformation affine (avec deux degrés de liberté λ_x et λ_y), on trouve que le périmètre de l'ellipse vaut

$$P' = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \lambda_x^2 \cos^2 \theta + a^2 \lambda_y^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

En introduisant $r = \lambda_y/\lambda_x$ et $P = 2\pi a$, on peut écrire ce périmètre sous la forme d'un rapport :

$$\frac{P'}{P} = f(\lambda_x, \lambda_y) = \frac{2\lambda_x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{2\lambda_x}{\pi} E(1 - r^2),$$

avec E une fonction spéciale dite *intégrale elliptique complète*. Le périmètre P' est donc proportionnel à P via un coefficient f qui dépend des deux paramètres d'échelle λ_x et λ_y . Dans ce cas-ci, il n'est pas possible de relier simplement par un simple argument dimensionnel la grandeur (périmètre) aux échelles de transformation.

↪ La théorie de la similitude cherche à prédéterminer la structure des dépendances entre variables et paramètre(s) d'échelle du problème.

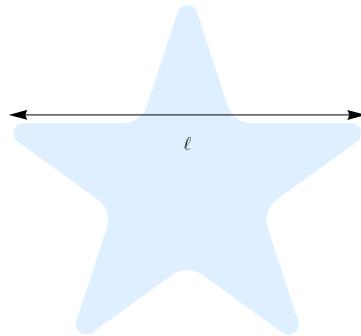


Figure 2.4 – Longueur caractéristique d'un objet.

2.2 Unités de mesure

Dans ce cours, on utilise les unités du système international ou système métrique décimal². Ce système repose sur 7 unités fondamentales :

- longueur : le mètre [m];
- masse : le kilogramme [kg];
- temps : la seconde [s]

2. Le système métrique fut instauré sous la Révolution française pour remplacer les unités employées sous l'Ancien Régime (poise, pied, etc.). La définition et l'usage des mesures ont été fixés à la fin du XIX^e siècle et au XX^e siècle par la Conférence générale des poids et mesures. Seuls quelques pays, dont le Royaume-Uni et les États-Unis, n'ont pas encore adopté le système métrique.

- intensité électrique : l'ampère [A];
- température : le kelvin [K];
- intensité lumineuse : le candela [cd];
- quantité de matière : la mole [mol].

Chaque mesure est associée à un symbole, dont la typographie a été fixée. On se sert soit de noms propres (le symbole commence alors par une majuscule), soit des unités de base. Par exemple :

- force : le newton [N] ($1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$);
- pression : le pascal [Pa] ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$);
- vitesse : [m/s];
- masse volumique : [kg/m^3];
- accélération : [m/s^2];
- surface : [m^2];
- débit : [m^3/s];
- énergie : le joule ($1 \text{ J} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$);
- puissance : le watt ($1 \text{ W} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3$).

On introduit des puissances de 10 pour pondérer l'unité. Les plus usuelles en mécanique sont données dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1 – Nom des puissances de 10 et symbole associé.

Nom	Puissance de 10	symbole
micro	10^{-6}	μ
milli	10^{-3}	m
centi	10^{-2}	c
déci	10^{-1}	d
déca	10^1	da
hecto	10^2	h
kilo	10^3	k
mega	10^6	M

Quelques rappels :

- les unités sont en caractère roman et non en italique : 12 m et non *12m* ;
- les unités sont séparées par un espace du nombre qui les précède : 12 m et non 12m ;
- les noms propres qui ont servi à fabriquer des unités deviennent des noms ordinaires et s'accordent en conséquence. Il faut ainsi noter qu'il n'y a pas de majuscule pour la première lettre du nom. La seule exception concerne les degrés : on écrit « degré Celsius » et « degré Fahrenheit » ;
- on écrit 0°C (0 degrés Celsius³) et 273 K (273 kelvins);

3. Anders Celsius (1701–1744) est un savant suédois, professeur d'astronomie à l'université d'Uppsala. Il est à l'origine d'une échelle relative des températures dont l'unité, le degré Celsius ($^\circ\text{C}$), honore son nom. Il participa également à une expédition dirigée par l'astronome français Pierre Louis Maupertuis dans la vallée de la Torne, dans le nord de la Suède (Laponie). L'objectif était de mesurer la longueur d'un arc de méridien de 1° afin de savoir si la terre était aplatie ou non au niveau des pôles ; il fut montré que, conformément aux prédictions de Newton, la terre était bien un sphéroïde aplati.

- certains noms d'unité coïncident avec leur symbole ; c'est le cas du bar par exemple. Dans ce cas-là, il est possible d'écrire 10 bar ou bien 10 bars selon que bar est pris comme un symbole (invariable) ou un nom (à accorder en conséquence).

Dans la vie courante, on emploie souvent des unités différentes : le litre [ℓ , l, ou L] pour les volumes, le bar [bar] pour la pression atmosphérique, etc. À noter que pour le litre admet plusieurs symboles. Initialement, le symbole était la lettre « l » minuscule, mais pour la plupart des polices de caractères, elle se distingue mal du chiffre 1. Aussi, on lui substitue souvent la lettre L majuscule ou la lettre ℓ rond. Certaines unités qui n'appartiennent pas au système international restent d'un emploi courant. Par exemple, pour la quantité d'énergie absorbée ou dépensée par des êtres vivants, on parle plus souvent en *calories* (symbole cal) qu'en joules. Initialement, la calorie a été introduite comme la quantité de chaleur qu'il faut apporter pour élever de 1 °C la température d'un gramme d'eau. Toutefois, cette définition est peu rigoureuse car la quantité de chaleur nécessaire dépend en fait de la pression et de la température initiale de l'eau. Aujourd'hui, il est courant d'employer la définition suivante

$$1 \text{ cal} = 4,184 \text{ joules.}$$

On considère que la ration alimentaire d'un homme sédentaire de 70 kg est voisine de 2800 kcal (11,7 kJ) s'il veut couvrir ses besoins journaliers. Pour les unités de puissance, principalement des véhicules automobiles, on parle souvent en *chevaux-vapeur* (CV)⁴, dont l'origine remonte au XIX^e siècle quand les machines à vapeur ont commencé à être substituées aux chevaux pour la traction des véhicules. Le taux de conversion est :

$$1 \text{ CV} = 736 \text{ W.}$$

On peut utiliser un petit moyen mnémotechnique pour décomposer une unité physique quelconque en unités fondamentales. Prenons l'exemple du joule ; le joule sert comme unité pour l'énergie et le travail. Le travail d'une force, c'est une force multipliée par une distance, donc on a :

$$\text{travail} = \text{force} \times \text{longueur} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

2.3 Principaux nombres adimensionnels

En mécanique des fluides, on est souvent amené à manipuler des groupes de variables sans dimension, appelés « nombre adimensionnel » ou « rapport de similitude ». Ces groupes sont construits en faisant des rapports entre des termes apparaissant dans les équations du mouvement, ce qui permet de les interpréter physiquement. On distingue ainsi

- le *nombre de Reynolds*

$$\text{Re} = \frac{\rho u \ell}{\mu}, \quad (2.1)$$

avec ℓ une échelle de longueur, u une échelle de vitesse, μ la viscosité du fluide, et ρ sa masse volumique. Le nombre de Reynolds est le plus souvent interprété comme

4. En France et en Belgique, il existe un cheval-vapeur fiscal, qui sert à établir une grille de taxation en fonction de la puissance et du rejet en CO₂ des véhicules. Les Anglais emploient le « horse power » (hp), avec 1 hp = 746 W.

le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité. Il sert notamment à classer le régime d'écoulement en distinguant les écoulements laminaires ($Re \ll 1$) et les écoulements turbulents ($Re \gg 1$). Si on introduit ν la viscosité cinématique du fluide ($\nu = \mu/\rho_f$ avec ρ_f la masse volumique du fluide), alors on a aussi: $Re = u\ell/\nu$;

- le *nombre de Stokes*

$$St = \frac{t_p}{t_f},$$

avec t_p le temps de relaxation de la particule (le temps typique de variation de la vitesse quand on perturbe l'état d'équilibre de la particule) et le temps caractéristique du fluide (l'échelle de temps sur laquelle le fluide s'ajuste à tout changement de la particule). Ce nombre sert dans l'étude des écoulements biphasiques (par exemple, une suspension de particules) à quantifier les effets biphasiques, c'est-à-dire le couplage entre phases. Lorsque $St \ll 1$, la phase solide est entièrement gouvernée par la phase fluide tandis que pour $St \gg 1$, les deux phases sont découplées. Notons que dans bien des problèmes d'intérêt pratique (sédimentation de particules par exemple), le nombre de Stokes est trouvé être proportionnel au nombre de Reynolds. Par exemple, pour une particule de rayon a , de masse m et de masse volumique ρ_p , sédimentant à la vitesse u_s dans un fluide newtonien au repos, on a $t_f = a/u_s$ et $t_p = mu_s/F_v$, où $F_v = 6\pi a\mu u_s$ est la force de frottement visqueux. On aboutit alors à :

$$St = \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{u_s a}{\nu} = \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} Re ;$$

- le *nombre de Froude*

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad (2.2)$$

avec h une échelle de hauteur, u une échelle de vitesse, g l'accélération de la gravité. Le nombre de Froude est le plus souvent interprété comme le rapport de l'énergie cinétique sur l'énergie potentielle. Il sert notamment en hydraulique à classer le régime d'écoulement en distinguant les écoulements supercritiques ($Fr > 1$) et les écoulements subcritiques ($Fr < 1$);

- le *nombre de Mach*

$$M = \frac{u}{c},$$

avec u une échelle de vitesse et $c = \sqrt{dp/d\rho}$ la célérité du son (ou célérité des ondes dans l'air). Le nombre de Mach sert en aérodynamique à évaluer la compressibilité de l'air. On distingue ainsi les écoulements supersoniques ($M > 1$) et subsoniques ($M < 1$);

- le *nombre de Péclet*

$$Pe = \frac{u\ell}{D},$$

où ℓ est une échelle caractéristique du système étudié (taille de la particule ou libre parcours moyen), u une échelle de vitesse, et D un coefficient de diffusion. Le nombre de Péclet sert en rhéologie et dans l'étude de la diffusion à évaluer l'effet respectif de la convection et de la diffusion. Lorsque $Pe \gg 1$, la convection l'emporte sur la diffusion. Les particules sont donc transportées (advectées) par le fluide. Dans le cas contraire, lorsque $Pe \ll 1$, la diffusion l'emporte sur la convection. En diffusion turbulente ou bien thermique, on emploie le nombre de Schmidt et le nombre de Prandtl;

– le nombre de capillarité ou nombre capillaire

$$\text{Ca} = \frac{\mu u}{\gamma},$$

avec u une échelle de vitesse, μ la viscosité du fluide, et γ la tension de surface. Ce nombre sert à évaluer les effets de tension de surface, par exemple lorsqu'on étale un fluide ou bien dans un milieu poreux. Lorsque $\text{Ca} \ll 1$, les effets de tension l'emportent sur les forces visqueuses et réciproquement quand $\text{Ca} \gg 1$, la viscosité est tellement grande que les effets de tension de surface à la surface libre sont négligeables. Le nombre de Bond, de Weber, et de Kapitza sont également des variantes courantes du nombre de capillarité.

Dans ces différentes expressions, les échelles sont en général des grandeurs macroscopiques caractérisant le système étudié. Par exemple, le nombre de Reynolds d'un écoulement d'eau dans une rivière est $\text{Re} = \bar{u}h/\nu$, avec \bar{u} la vitesse moyenne de l'eau, h la profondeur d'eau, et ν la viscosité cinématique. On parle de « nombre de Reynolds macroscopique » ou bien de « nombre de Reynolds de l'écoulement ». Si maintenant dans cette rivière, on étudie la sédimentation de particules fines de rayon moyen a , on introduit un « nombre de Reynolds local » appelé encore « nombre de Reynolds particulière » : $\text{Re} = u_s a/\nu$, avec u_s la vitesse de sédimentation. Notons que le nombre de Reynolds de l'écoulement peut être très grand (écoulement turbulent) alors que le nombre de Reynolds particulière peut être petit (écoulement localement laminaire dans le proche voisinage de la particule).

Les échelles sont généralement des grandeurs constantes, c'est-à-dire des grandeurs qui ne varient pas significativement au cours du temps ou dans l'espace. On peut parfois être amené à introduire des nombres adimensionnels dont les échelles varient. Par exemple, dans l'étude de la couche limite le long d'une paroi, on introduit un nombre de Reynolds $\text{Re} = uy/\nu$, avec y la distance par rapport à la paroi, qui varie avec la distance.

Généralement tout nombre sans dimension peut être interprété comme un rapport soit de longueurs, soit de forces (contraintes), soit de temps. Un même nombre peut souvent s'interpréter de différentes façons. Par exemple le nombre de Reynolds est :

$$\text{Re} = \frac{\rho u \ell}{\mu} = \frac{\rho u^2}{\mu \frac{u}{\ell}} \propto \frac{\text{inertie}}{\text{contrainte de cisaillement}},$$

on peut donc définir le nombre de Reynolds comme le rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses. On peut également, dans le cas particulier du nombre de Reynolds, interpréter le nombre sans dimension comme un rapport de temps caractéristiques :

$$\text{Re} = \frac{\rho u \ell}{\mu} = \frac{u \ell^2}{\ell \nu} = \frac{t_{\text{turb.}}}{t_{\text{ec.}}},$$

avec $t_{\text{ec.}} = \ell/u$ le temps de relaxation de la particule ou de la structure turbulente (temps représentatif mis par la particule pour parcourir une distance égale à son diamètre) et $t_{\text{turb.}} = \ell^2/\nu$ un temps caractéristique de diffusion de la turbulence. Toujours avec le nombre de Reynolds, on peut montrer qu'il s'agit aussi d'un rapport de longueurs caractéristiques :

$$\text{Re} = \frac{\rho u \ell}{\mu} = \ell \frac{u}{\nu} = \frac{\ell_{\text{part.}}}{\ell_{\text{turb.}}},$$

avec $\ell_{\text{part.}} = \ell$ la longueur caractéristique de la particule et $\ell_{\text{turb.}} = \nu/u$ la taille caractéristique des tourbillons de la turbulence.

2.4 Théorème de Vaschy–Buckingham

Le théorème de Vaschy–Buckingham (appelé aussi théorème II) est fondamental dans la théorie de la similitude. Il permet de dire combien de nombres sans dimension indépendants peuvent être construits dans un problème physique qui implique n variables. Son énoncé est un peu technique et sa mise en œuvre laisse croire qu’il s’agit d’une procédure mathématique qu’il suffit d’appliquer méthodiquement. En fait, son utilisation à l’aveugle peut conduire à de graves erreurs et il faut de la pratique pour éviter les nombreux pièges. Son application est relativement aisée quand on a déjà une idée du résultat, c’est-à-dire de la nature des nombres adimensionnels qui peuvent jouer un rôle dans le problème étudié. Avant d’aborder ce théorème, on présente la méthode de Rayleigh qui permet d’obtenir la structure (dimensionnelle) du résultat recherché dans un grand nombre de cas simples.

2.4.1 Méthode de Rayleigh

Lord Rayleigh⁵ a proposé une variante plus simple d’emploi. Supposons qu’on souhaite exprimer une variable x en fonction de n paramètres y_i . On écrit que dimensionnellement on a :

$$[x] = [y_1]^a [y_2]^b \cdots [y_n]^s,$$

où a, b, \dots, s sont des coefficients à déterminer de telle sorte que le produit des unités des a_i soit cohérent avec l’unité de x .

♣ **Exemple.** – Un exemple commun est le calcul de la période des oscillations d’un pendule de longueur ℓ et de masse m dans un champ de gravité g (voir figure 2.5). On pose

$$T \propto \ell^a m^b g^c,$$

soit en termes de dimensions :

$$[T] = [\ell]^a [m]^b [g]^c \Rightarrow s = m^a \text{kg}^b (\text{m/s}^2)^c.$$

On déduit pour chaque unité fondamentale :

- masse (kg) : $0 = b$;
- longueur (m) : $0 = a + c$;
- temps (s) : $1 = -2c$.

Soit $c = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, et $b = 0$. Donc :

$$T \propto \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

5. John William Strutt, plus connu sous son titre de Lord Rayleigh, était un physicien anglais (1842–1919). Il a étudié plusieurs branches de la physique et la mécanique (acoustique, optique, électrodynamique, électromagnétisme, viscosité des fluides, photographie). On lui doit notamment la découverte d’un gaz rare, l’argon, pour laquelle le prix Nobel lui a été décerné en 1904. La méthode dimensionnelle qui porte aujourd’hui son nom a été élaborée dans son livre « Theory of Sound » publié en 1878 où il note que la solution à l’équation du ressort (une masse reliée à un ressort en oscillation libre) peut être déterminée à une constante multiplicative près en regardant simplement les dimensions physiques. On reprend ici son exemple, mais avec un pendule.

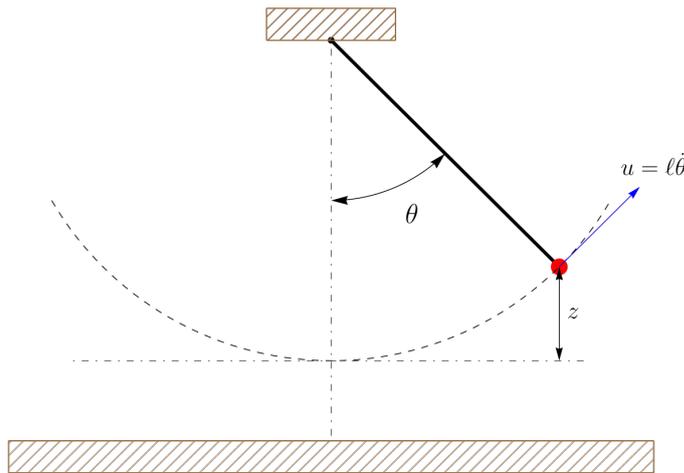


Figure 2.5 – Pendule en oscillation.

Si l'on résout l'équation du mouvement pour un pendule, on trouve $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, ce qui est cohérent avec le résultat trouvé ci-dessus. En effet, l'équation du mouvement s'obtient à partir de la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}mu^2 + mgz = \text{cste},$$

avec $u = \ell\dot{\theta}$, et $z = \ell(1 - \cos\theta)$, $\dot{\theta} = d\theta/dt$. En différentiant par rapport au temps et simplifiant par m et $\dot{\theta}$, on trouve :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta.$$

L'adimensionalisation de l'équation du mouvement permet de passer d'une équation dimensionnelle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta$$

à une équation sans dimension physique et donc invariante :

$$\frac{d^2\theta}{d\hat{t}^2} = -\Pi \sin\theta \text{ avec } \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \text{ et } \Pi = \frac{gT^2}{\ell},$$

et où l'on a introduit le temps adimensionnel : $\hat{t} = t/T$. Le paramètre Π est une constante qui ne peut dépendre ici que de θ_0 . Posons $\Pi = f^2(\theta_0)$, ce qui montre que :

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}} f(\theta_0).$$

Dans la limite $\theta \ll 1$, on peut trouver une solution approchée en posant $\sin\theta \sim \theta$, soit

$$\frac{d^2\theta}{d\hat{t}^2} = -\Pi\theta \text{ avec } \theta(0) = \theta_0, \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0,$$

soit encore :

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\Pi}\hat{t}\right) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\Pi}\frac{t}{T}\right) = \theta_0 \cos\left(f(\theta_0)\frac{t}{T}\right),$$

or par définition de la période $\theta = \theta_0 \cos(2\pi t/T)$, on trouve que :

$$f(\theta_0) = 2\pi \text{ quand } \theta \rightarrow 0,$$

et

$$T_0 = \lim_{\theta_0 \rightarrow 0} T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

L'expression analytique exacte de la période d'oscillation est trouvée être

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} K\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right) \text{ avec } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

avec K une fonction spéciale dite *intégrale elliptique complète de première espèce*. On retrouve que lorsque $\theta_0 \rightarrow 0$, alors la période T tend vers T_0 (voir figure 2.6).

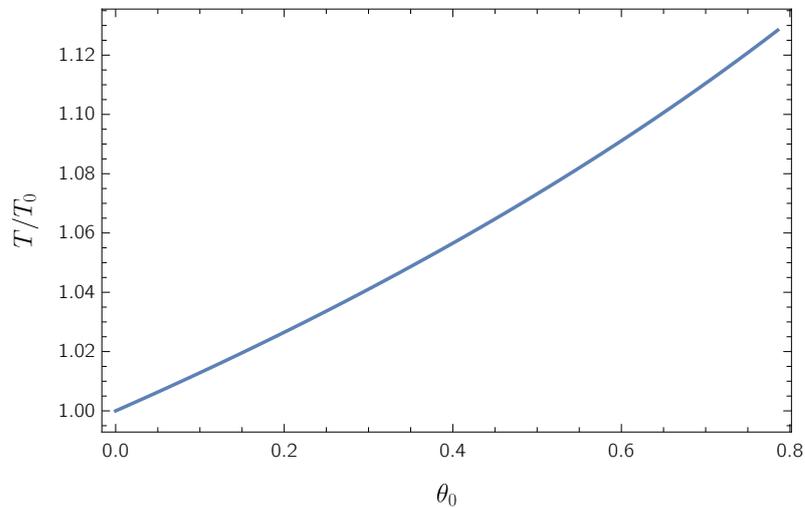


Figure 2.6 – Période d'oscillation d'un pendule en fonction de l'angle initial θ_0 .

2.4.2 Théorème de Vaschy-Buckingham

Nous cherchons à calculer une variable a_1 dépendant de $n - 1$ autres variables indépendantes a_k . On doit résoudre un problème implicite

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

ou bien explicite

$$a_1 = \phi(a_2, a_3, \dots, a_n),$$

ces variables sont définies dans un système de m mesures faisant appel à p unités fondamentales D_i (en général, $p = 3$ avec comme unités fondamentales : le mètre, la seconde, le kilogramme). Chaque variable a_j est dimensionnellement homogène à un produit de monômes des unités de base

$$[a_j] = D_1^{\alpha_j} D_2^{\beta_j} \dots D_p^{\gamma_j}.$$

Par exemple, lorsque $p = 3$, on a en général une longueur $D_1 = L$, une masse $D_2 = M$, et un temps $D_3 = T$ comme unités de base $[a] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$, ce qui donne pour les n variables

$$\begin{aligned} [a_1] &= M^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1}, \\ [a_2] &= M^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{\gamma_2}, \\ &\vdots \\ [a_n] &= M^{\alpha_n} L^{\beta_n} T^{\gamma_n}, \end{aligned}$$

avec α_j, β_j , et γ_j des coefficients déterminés à l'avance en examinant la dimension des variables. Il est possible de former des nombres sans dimension en faisant des produits de monômes

$$\Pi_i = a_1^{k_1^i} a_2^{k_2^i} \dots a_n^{k_n^i}.$$

La question qui se pose est : si ces nombres sans dimension existent, de combien en a-t-on besoin pour représenter la solution du problème ?

Énoncé

Le théorème de Vaschy-Buckingham⁶ ou théorème Π répond à cette question en affirmant que $k = n - r$ nombres sans dimension indépendants sont nécessaires, avec r le rang de la matrice dimensionnelle associée au problème⁷. Au lieu d'étudier un problème de dimension n : $a_1 = \phi(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$, on peut se ramener à un problème de dimension $k < n$ exprimé en termes de nombres sans dimension :

$$\Pi_1 = \psi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_k).$$

☞ **Démonstration.** La dimension de Π_j est

$$[\Pi_j] = \left(D_1^{\alpha_1} D_2^{\beta_1} \dots D_p^{\gamma_1} \right)^{k_1^j} \left(D_1^{\alpha_2} D_2^{\beta_2} \dots D_p^{\gamma_2} \right)^{k_2^j} \dots \left(D_1^{\alpha_n} D_2^{\beta_n} \dots D_p^{\gamma_n} \right)^{k_n^j}.$$

Or on veut que $[\Pi_j] = 0$. On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{aligned} \text{Pour } D_1 : 0 &= \alpha_1 k_1^j + \alpha_2 k_2^j + \dots + \alpha_n k_n^j, \\ \text{Pour } D_2 : 0 &= \beta_1 k_1^j + \beta_2 k_2^j + \dots + \beta_n k_n^j, \\ &\vdots \\ \text{Pour } D_m : 0 &= \gamma_1 k_1^j + \gamma_2 k_2^j + \dots + \gamma_n k_n^j. \end{aligned}$$

6. Aimé Vaschy (1857–1899) naquit à Thônes, juste en face de Lausanne. Ingénieur polytechnicien, il s'intéressa principalement à la transmission télégraphique. Il avait d'autres marottes telles que la physique ou l'histoire de la Savoie. Il publia son article sur la similitude en physique en 1892. L'article resta inaperçu pendant presque 20 ans. Les physiciens russe et américain Dimitri Riabouchinsky et Edgar Buckingham redécouvrirent les résultats au début des années 1910 (Vaschy, 1892; Buckingham, 1914; Macagno, 1971).

7. Rappel : en algèbre linéaire, le rang d'une matrice est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants ; c'est aussi la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes (ou colonnes).

Ces équations définissent un système d'équations linéaires de p équations et n inconnues k_i^j ($1 \leq i \leq m$). Si le déterminant

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \vdots & & & \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{bmatrix}$$

est différent de 0 et le rang de cette matrice est r , alors il existe $n - r$ solutions linéairement indépendantes. \square

Mise en œuvre

En pratique, on procède ainsi :

1. isoler les quantités physiques du problème donné et leur nombre n ;
2. écrire les dimensions de chaque variable dans le système de base (en général, $p = 3$ unités de base sont nécessaires en mécanique) ;
3. déterminer le rang r de la matrice dimensionnelle associée (on a souvent $r = 2$ ou $r = 3$) ;
4. rechercher les $n - r$ nombres sans dimension.

On prendra soin de définir des nombres sans dimension ayant une signification physique. À noter que ces nombres sans dimension peuvent être obtenus sans passer par le théorème Π en examinant les équations du mouvement et en les rendant sans dimension, c'est typiquement ce qui sera fait au § 6.4.1 pour les équations de Navier–Stokes. C'est très souvent préférable car cela permet d'identifier et définir proprement les nombres sans dimension pertinents.

2.4.3 Application n° 1 du théorème Π : force de traînée

On veut calculer la force dite de traînée exercée par un fluide newtonien (incompressible) sur une particule sphérique de diamètre $2r$ et de masse volumique ρ_p ; voir figure 2.7. La force se calcule comme :

$$\mathbf{F} = \int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} dS,$$

avec \mathbf{n} la normale à la surface \mathcal{S} de la particule et $\boldsymbol{\Sigma}$ le tenseur des contraintes du fluide, c'est-à-dire $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}$, avec p la pression, \mathbf{D} le tenseur des taux de déformation, μ la viscosité dynamique. C'est un problème complexe à résoudre puisqu'il faudrait résoudre en même temps les équations de Navier–Stokes pour décrire la phase fluide animée d'une vitesse \mathbf{u}_f :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \mathbf{u}_f \nabla \mathbf{u}_f \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

et l'équation de la quantité de mouvement pour la particule :

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = m_p \mathbf{g} + \mathbf{F},$$

avec m_p la masse la particule et \mathbf{u}_p sa vitesse. Les conditions aux limites sont de plus : $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_p + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ sur la surface \mathcal{S} de la particule, avec $\boldsymbol{\omega}$ la vitesse de rotation de la particule donnée par l'équation de conservation du moment cinétique :

$$J_p \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n}) dS.$$

avec $J_p = 2mr^2/5$ le moment d'inertie.

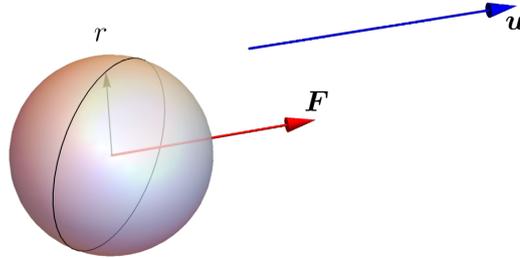


Figure 2.7 – Écoulement d'un fluide autour d'une sphère.

On a 5 variables : la force F que l'on cherche à calculer, la viscosité dynamique μ , la masse volumique ρ de l'eau, le rayon de la particule r , et sa vitesse relative par rapport au fluide $u = |\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_f|$. On ne prend pas en compte la masse volumique de la particule car la force exercée par le fluide ne peut pas être influencée par cette variable, mais elle l'est par les dimensions géométriques de la sphère (d'où le fait que l'on retienne r et non ρ_p).

La première chose à faire est de déterminer les unités de ces grandeurs physiques dans le système international en ne faisant appel qu'aux grandeurs fondamentales, à savoir :

- unité de distance : le mètre [m],
- unité de temps : la seconde [s],
- unité de masse : la masse [kg].

Les unités ou dimensions physiques sont reportées dans le tableau suivant.

Tableau 2.2 – Tableau des unités.

variable	F	u	ρ	μ	r
unité (SI)	kg m s^{-2}	m s^{-1}	kg m^{-3}	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$	m
exposant	a	b	c	d	e

On recherche la force F en fonction de r, μ, u , et ρ : $F = \phi(u, \rho, \mu, r)$ s'il existe une relation univoque ou bien, de façon plus générale, $\psi(F, u, \rho, \mu, r) = 0$. Il semble évident, sans même faire de physique, qu'on ne peut pas prendre n'importe quelle fonction ϕ pour des raisons d'homogénéité des dimensions physiques. Par exemple :

$$F = u\rho\mu r,$$

n'est pas possible car cela n'est pas homogène : $[\text{kg m s}^{-2}] \neq [\text{kg}^2 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2}]$! Il faut donc que la combinaison des différentes unités donne un résultat cohérent du point de vue dimensionnel. L'analyse dimensionnelle n'est, d'une certaine façon, que la recherche des combinaisons possibles entre variables physiques respectant les contraintes d'homogénéité dimensionnelle.

Quelles sont les possibilités? Pour cela, recherchons les paramètres a , b , c , d , et e permettant de former des combinaisons homogènes du point des dimensions physiques. Si on a une relation générale de la forme $\psi(F, u, \varrho, \mu, r) = 0$, cela veut dire que les combinaisons des unités doivent vérifier :

$$[F]^a [u]^b [\varrho]^c [\mu]^d [r]^e = 0,$$

soit encore en se servant des unités des variables (voir tableau ci-dessus) :

$$a + c + d = 0,$$

$$a + b - 3c - d + e = 0,$$

$$-2a - b - d = 0.$$

On a 3 équations pour 5 inconnues ; on ne peut donc en déterminer que 3 et les 2 inconnues restantes doivent être considérées comme des variables libres (ou ajustables). Prenons par exemple a et d comme variables libres⁸ et déterminons les autres paramètres b , c , et e . On trouve :

$$b = -(2a + d), c = -(a + d), e = b = -(2a + d).$$

Une implication de cette analyse est également que la relation générale $\psi(F, u, \varrho, \mu, r) = 0$ de dimension 5 peut en fait se réduire à une relation de dimension 2 (puisque l'on n'a que 2 variables libres a et d) que l'on note génériquement sous la forme $\psi(\Pi_1, \Pi_2) = 0$. Les nombres Π_1 et Π_2 sont des *nombre sans dimension* ; on a une infinité de choix selon la valeur de a et d , mais deux critères doivent nous aider dans ce choix :

- trouver des nombres avec une signification physique ;
- trouver des nombres indépendants⁹.

Pour Π_1 , considérons par exemple $a = 1$ et $d = 0$, on a alors $b = -2$, $c = -1$, $e = -2$, soit :

$$\Pi_1 = \frac{F}{\varrho r^2 u^2}.$$

Pour Π_2 , considérons par exemple $a = 0$ et $d = 1$ (on est sûr que les nombres sont indépendants), on a alors $b = -1$, $c = -1$, $e = -1$, soit :

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\varrho r u} = 2 \frac{1}{\text{Re}}.$$

On a reconnu le *nombre de Reynolds particulière* $\text{Re} = (2r)u/\nu$ avec $\nu = \mu/\varrho$ la viscosité cinématique.

Toute fonction de Π_1 et/ou Π_2 peut être utilisée pour définir des nombres sans dimension. Ainsi, arbitrairement du point de vue mathématique (mais cela a un sens physique), on définit les nombres sans dimension utiles pour notre problème :

$$\Pi_1 = \frac{F}{\pi \varrho r^2 u^2} \text{ et } \Pi_2 = \text{Re} = \frac{2 \varrho r u}{\mu}.$$

Attention, la forme exacte de toute formule liant Π_1 et Π_2 dépend de la définition précise de

8. Ce choix n'est justifié ici que par notre désir de disposer de deux nombres sans dimension, l'un relatif à la force de traînée, l'autre à la viscosité.

9. Si (a, d) représente les coordonnées d'un vecteur de dimension 2, alors on doit choisir des vecteurs non colinéaires. Par exemple le choix $(a, d)=(0, 1)$ et $(a, d)=(1, 0)$ est correct ; le choix $(a, d)=(0, 1)$ et $(a, d)=(0, 2)$ est incorrect.



ces nombres ; il convient tout de vérifier à chaque fois comment ils sont définis (il n'est pas ainsi rare que l'on définisse C_d comme $C_d = F / (\rho r^2 u^2)$ sans facteur $\frac{1}{2}$ au dénominateur).

La relation recherchée doit nécessairement s'écrire sous la forme :

$$\psi(\Pi_1, \Pi_2) = 0,$$

ou encore

$$\frac{F}{\frac{1}{2}\pi \rho r^2 u^2} = \phi(\text{Re}).$$

On appelle ϕ le *coefficient de traînée* et on le note le plus souvent C_d ; F est la force de traînée¹⁰. On montre théoriquement en résolvant les équations de Navier–Stokes dans le cas $\text{Re} \ll 1$ (c'est-à-dire lorsque les termes inertiels sont négligeables¹¹):

$$\frac{F}{\frac{1}{2}\pi \rho r^2 u^2} = \phi(\text{Re}) = \frac{24}{\text{Re}} \text{ quand } \text{Re} \rightarrow 0.$$

Cette relation est appelée *loi de Stokes* et elle est utile par exemple pour calculer une vitesse de sédimentation de particules fines (il faut que $\text{Re} \ll 1$). Mise sous forme dimensionnelle, on tire :

$$F = 6\pi\mu r u.$$

À grand nombre de Reynolds ($\text{Re} \gg 1$), les expériences montrent que :

$$C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi \rho r^2 u^2} = \phi(\text{Re}) \approx 0,4 - 0,5 \text{ quand } \text{Re} \rightarrow \infty.$$

La figure 2.8 montre la variation du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds particulaire.

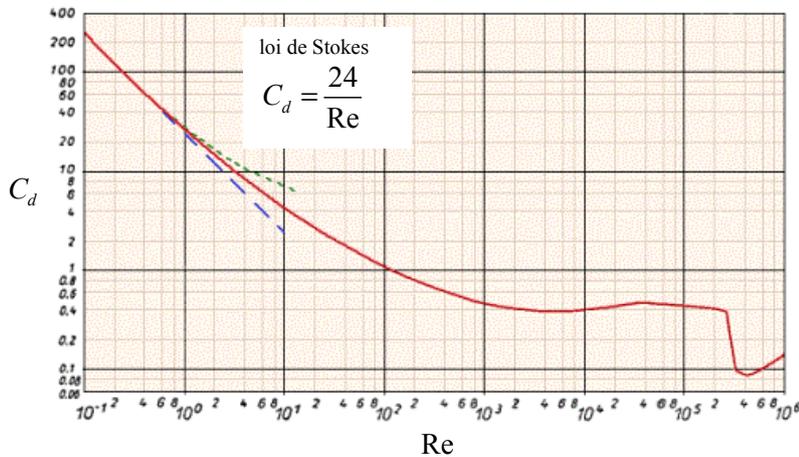


Figure 2.8 – Variation du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds particulaire avec $C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi \rho r^2 u^2}$ et $\text{Re} = \frac{2\rho r u}{\mu}$.

Ces résultats ne sont valables que pour des particules sphériques. Dès que la forme change, le coefficient de traînée change. Il faut souvent plus de paramètres pour décrire ce coefficient. La figure 2.9 montre le fort sillage créé par une plaque et un prisme. Ce sillage augmente notablement la force de traînée.

10. Il existe d'autres types de forme d'interactions entre un fluide et une particule.

11. On verra que les équations de Navier–Stokes s'appellent « équations de Stokes » dans ce cas-là.

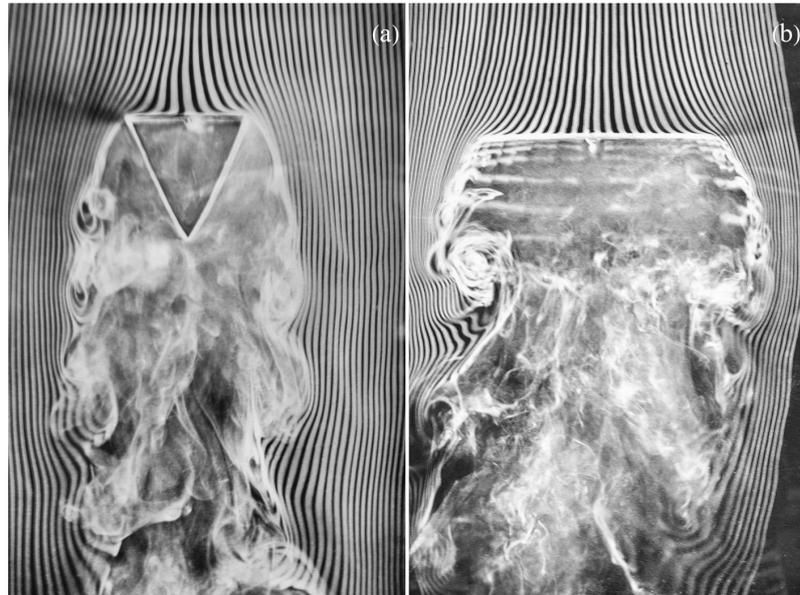


Figure 2.9 – Visualisation d'un écoulement d'air autour d'un obstacle par le photographe Étienne Jules Marey (1902).

2.4.4 Application n° 2 du théorème Π : puissance d'une explosion nucléaire

Il s'agit d'un exemple célèbre d'application de l'analyse dimensionnelle réalisée par Taylor en 1950. Après la seconde guerre mondiale, les autorités américaines ont levé le « secret défense » concernant des séries de clichés d'une explosion atomique car elles les jugeaient inexploitable par des puissances étrangères. Pourtant, Taylor par un simple raisonnement dimensionnel parvint à calculer la puissance de l'explosion (donnée qui, elle, était restée confidentielle) !

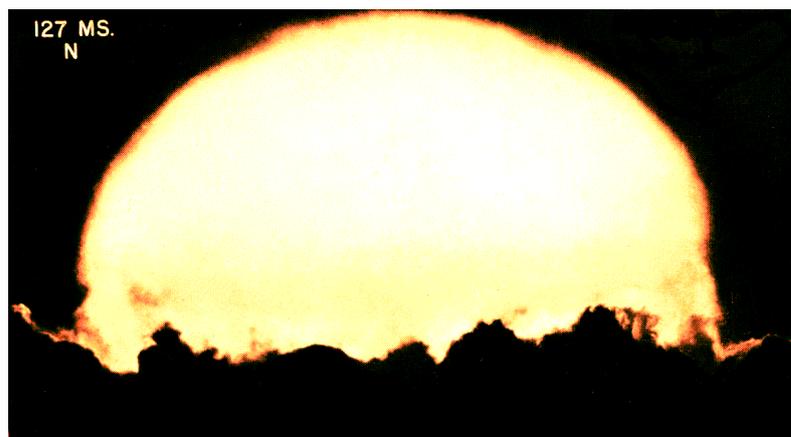


Figure 2.10 – Extrait des séries de photographies d'une explosion atomique par Mack.

D'après Taylor, l'effet premier d'une explosion atomique est l'onde de pression précédant la boule de feu (voir figure 2.10) et dont l'ordre de grandeur est de plusieurs centaines

d’atmosphères. Trois paramètres gouvernent ce processus : la quantité d’énergie injectée (la puissance) E [$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$], la masse volumique de l’air ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$], le rayon r_f de la boule [m], et le temps t depuis l’explosion [s].

On a 4 variables et 3 unités fondamentales. On peut donc former un nombre adimensionnel :

$$\Pi = \frac{r_f}{E^{1/5}t^{2/5}\rho^{-1/5}}.$$

Pour une explosion donnée, ce nombre doit être constant, ce qui implique que : $r_f \propto E^{1/5}t^{2/5}$ au cours du temps. La connaissance expérimentale (voir figure 2.11) de la relation $r_f(t)$ a permis à Taylor de calculer l’énergie libérée par l’explosion atomique.

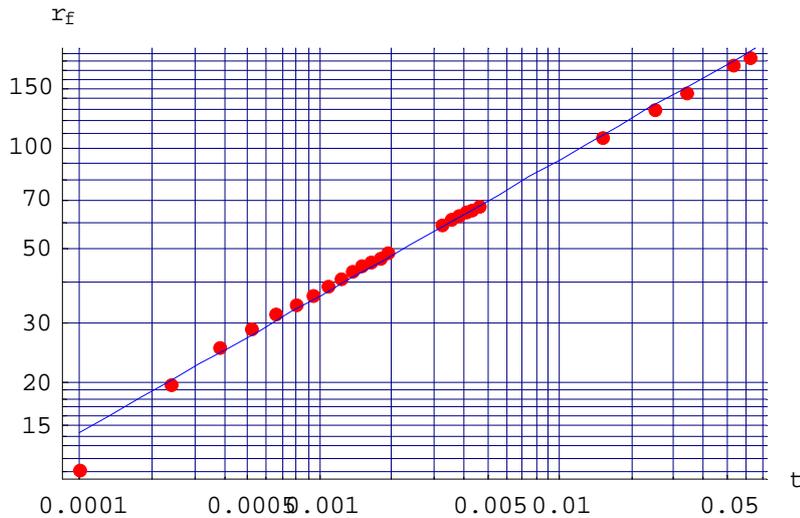


Figure 2.11 – Comparaison entre la loi de similitude de Taylor et le rayon r_f calculé à partir des séries de photographies d’une explosion atomique prises par Mack.

2.4.5 Application n° 3 du théorème Π : loi de Manning-Strickler

Essayons de voir si on est capable de retrouver à l’aide de l’analyse dimensionnelle la loi empirique de Manning-Strickler, qui relie la vitesse moyenne dans un canal d’eau à la profondeur h d’eau dans ce canal :

$$\bar{u} = K\sqrt{\sin\theta}h^{2/3}, \quad (2.3)$$

avec K le coefficient de Manning-Strickler (que l’on verra au chap. 5) et θ l’angle d’inclinaison du canal.

Initialement quand on s’intéresse à décrire un écoulement d’eau dans une rivière, on part avec quatre paramètres, dont un est sans dimension : \bar{u} [m/s], h [m], g [m/s^2], et θ [-]. Pour simplifier on met g et θ ensemble (car on sait que c’est le produit $\rho g \sin\theta$ qui intervient dans le mouvement), ce qui fait qu’en pratique on ne dispose que $n = 3$ variables physiques. Il y a $r = 2$ unités fondamentales : m et s. On peut former $n - r = 1$ groupe sans dimension. On trouve immédiatement qu’il s’agit du nombre de Froude $\text{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh \sin\theta}$. La relation serait donc

$$\text{Fr} = cst \Rightarrow \bar{u} \propto \sqrt{gh \sin\theta}.$$

On aboutit donc à la loi de Chézy (avec ici un coefficient de Chézy $C \propto \sqrt{g}$) et non celle de Manning-Strickler. Quel(s) paramètre(s) manquera(en)t pour que l'on retombe sur la loi de Manning-Strickler? La masse volumique? La rugosité du lit?

Il semble naturel de considérer que la rugosité du lit est un paramètre clé du problème car plus le lit est lisse, plus l'écoulement va vite. Introduisons donc k_s [m] l'échelle de rugosité. En refaisant l'analyse dimensionnelle du problème, on a maintenant $n = 4$ et toujours $r = 2$ unités. On peut donc former 2 nombres sans dimension, par exemple : $\Pi_1 = Fr = \bar{u}/\sqrt{gh \sin \theta}$ et $\Pi_2 = k_s/h$. Il existe une relation entre ces deux nombres de la forme :

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \Rightarrow \bar{u} = f(k_s/h) \sqrt{gh \sin \theta}.$$

Dans la plupart des cas, la hauteur d'eau est grande par rapport à la taille des rugosités du lit, donc $k_s/h \rightarrow 0$ et on s'attend à ce que la fonction $f(k_s/h)$ tende vers une constante (un peu comme pour l'exemple d'application n° 1, où le coefficient de traînée tend vers une constante quand $Re \rightarrow \infty$). Ce type de comportement asymptotique est très classique et s'appelle une *similitude complète* (Barenblatt, 1996). Malheureusement ici on voit que ce comportement nous ramène à la loi de Chézy : $\bar{u} \propto \sqrt{gh \sin \theta}$. Une autre possibilité est que la fonction f se comporte comme une loi puissance

$$f(\zeta) = \alpha \zeta^n,$$

avec $\zeta = k_s/h$, α un nombre sans dimension, et n un exposant. Ce comportement est une *similitude incomplète*¹² car f varie de façon quelque peu arbitraire sans que l'analyse dimensionnelle ne permette de préciser *a priori* la valeur de n . Avec cette hypothèse, on aboutit à

$$\Pi_1 = \alpha \Pi_2^n \Rightarrow \bar{u} = \alpha k_s^n h^{1/2-n} \sqrt{g \sin \theta}.$$

Dans ce cas-là, on note qu'en prenant $n = -1/6$, on retombe sur l'équation de Manning-Strickler (2.3). Il s'ensuit que le coefficient de Strickler K est relié à la rugosité par

$$K = \alpha \sqrt{g} k_s^{-1/6}.$$

L'hypothèse de similitude incomplète est cohérente avec les données expérimentales (notamment $K \propto k_s^{-1/6}$) et une analyse phénoménologique de la dissipation turbulente dans un canal rugueux (Gioia & Bombardelli, 2002).

2.5 Analyse dimensionnelle et équations du mouvement

L'analyse dimensionnelle offre des techniques efficaces pour obtenir une idée générale de la solution d'un problème même dans des cas complexes. L'idée est de chercher les termes prédominants dans les équations du mouvement; en négligeant les autres termes et en écrivant des ordres de grandeur pour estimer les termes différentiels, on peut généralement aboutir à des estimations du comportement de la solution.

Prenons un exemple concret : vous devez optimiser la carrosserie d'un véhicule en travaillant sa forme pour diminuer sa résistance à l'air, donc sa consommation. Pour cela vous

12. Attention, cette notion de similitude incomplète a un sens différent en ingénierie (quand on ne peut pas vérifier tous les critères de similitude).

souhaitez étudier la résultante des forces de frottement exercées par l'air sur la carrosserie à l'aide des équations de Navier–Stokes. Pour simplifier le problème, vous devez introduire les ordres de grandeur des variables du problème (vitesse, longueur de la voiture, etc.). Ces ordres de grandeur s'appellent des *échelles* ou facteurs d'échelle. Par exemple, pour un

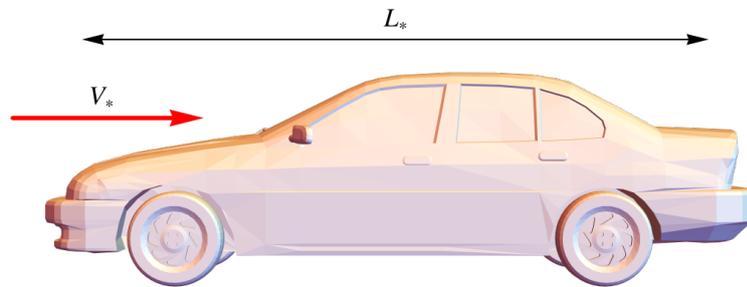


Figure 2.12 – Échelles de longueur et de vitesse pour le mouvement d'une voiture.

véhicule, l'ordre de grandeur de la longueur est $L_* \sim 4$ m tandis que celui de la vitesse est $V_* \sim 100$ km/h, soit encore $V_* \sim 30$ m/s. On emploie ici l'indice $*$ pour désigner une échelle de grandeur. Le symbole \sim veut dire « à peu près égal à ». Il n'est en effet pas très différent de considérer que la voiture mesure 4 ou 5 m en longueur ; ce qui est important, c'est que l'ordre de grandeur est de quelques mètres.

Une fois les échelles introduites pour chaque type de variable, on va pouvoir introduire des *variables sans dimension*. Par exemple, on écrit

$$\underbrace{x}_{\text{variable dimensionnelle}} = \underbrace{L_*}_{\text{facteur d'échelle}} \times \underbrace{X}_{\text{variable sans dimension}},$$

où le caractère majuscule X désigne une variable sans dimension d'espace (X n'a pas de dimension physique) et si l'ordre de grandeur a été correctement fixé pour L_* , alors on a X qui doit être compris entre 0 et 1 ou bien proche de 1. On écrit que $X = O(1)$, ce qui veut dire que X est de l'ordre de 1. Grâce à ce changement de variable, l'unité physique et l'ordre de grandeur sont portés par l'échelle L_* tandis que X ne représente que la variation relative de x . Si l'on fait cela avec les autres variables, on peut alors comparer membre à membre les termes des équations même si ceux-ci sont relatifs à des processus physiques différents.

♣ **Exemple.** – Pour illustrer la procédure, prenons l'exemple d'une masse m frottant sur un sol horizontal (frottement visqueux) et reliée à un ressort de raideur k . L'équation du mouvement est donc :

$$m\ddot{x} = -kx - 2fm\dot{x}, \tag{2.4}$$

avec x la position de la masse. On a adjoint une condition initiale de la forme $x(0) = \ell$ et $\dot{x}(0) = 0$. Cette équation se résout à la main. Pour $f > \omega$, on a :

$$x(t) = e^{-ft} \left(\cosh \left(\frac{1}{2} \sqrt{f^2 - \omega^2} t \right) + f \frac{\sinh \left(\frac{1}{2} \sqrt{f^2 - \omega^2} t \right)}{\sqrt{f^2 - \omega^2}} \right),$$

avec $\omega = \sqrt{k/m}$. Pour $f < \omega$, on obtient

$$x(t) = e^{-ft}\ell \left(\cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{f^2 - \omega^2} t \right) + f \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{f^2 - \omega^2} t \right)}{\sqrt{f^2 - \omega^2}} \right),$$

Étudions l'équation (2.4) en l'adimensionnalisant et en faisant comme si nous ne connaissons pas la solution au problème posé. Il est naturel de prendre $L_* = \ell$ comme échelle d'espace. La période d'un ressort libre est $\sqrt{m/k} = 1/\omega$, ce qui nous incite à poser $T_* = 1/\omega$. On continue en introduisant les variables sans dimension X et T suivantes :

$$x = \ell X \text{ et } t = T/\omega,$$

L'équation (2.4) sous une forme adimensionnelle est

$$\frac{m\ell}{(1/\omega)^2} \frac{d^2 X}{dT^2} = -k\ell X - 2fm \frac{\ell}{1/\omega} \frac{dX}{dT},$$

soit encore

$$\frac{d^2 X}{dT^2} = -X - \frac{2f}{\omega} \frac{dX}{dT}.$$

On voit donc que l'on fait apparaître un nombre sans dimension

$$\Pi = \frac{2f}{\omega},$$

qui permet de simplifier le problème pour les cas limites $\Pi \ll 1$ et $\Pi \gg 1$. Le cas $\Pi \gg 1$ correspondant à un amortissement visqueux très fort; on peut négliger la tension du ressort. L'équation du mouvement est alors :

$$\ddot{X} = -\Pi \dot{X},$$

avec $\dot{X}(0) = 0$ et $X(0) = 1$. La solution est $X(T) = 1$: la masse ne bouge pas tellement l'amortissement est grand. Le cas $\Pi \ll 1$ correspondant à un amortissement visqueux très faible; on peut négliger la force de frottement visqueuse. L'équation du mouvement est alors :

$$\ddot{X} = -X,$$

avec $\dot{X}(0) = 0$ et $X(0) = 1$. La solution est $X(T) = \cos T$: il s'agit d'une oscillation sans amortissement. Dans le cas général où $\Pi = O(1)$, on ne peut négliger aucune des composantes et il faut résoudre l'équation du mouvement complète :

$$\ddot{X} = -X - \Pi \dot{X},$$

avec $\dot{X}(0) = 0$ et $X(0) = 1$. Cette équation peut se résoudre simplement à la main ou numériquement. On reporte sur la figure 2.13 la solution au problème pour $\Pi = \frac{1}{2}$, $\Pi = 2$, et $\Pi = 10$, ainsi que les solutions asymptotiques correspondant à $\Pi \rightarrow 0$ et $\Pi \rightarrow \infty$.

Comme on le voit la mise sous forme adimensionnelle d'un problème (ici à trois paramètres m, k, f) peut se simplifier grandement car :

- on peut explorer la forme de la solution à l'aide d'un seul paramètre adimensionnel Π (au lieu des trois paramètres physiques m, k, f);
- on peut obtenir des solutions analytiques ou numériques plus facilement en omettant les termes négligeables dans les équations;
- on peut comparer facilement les solutions sous forme graphique puisque toutes les solutions $X(T)$ sont à la même échelle.

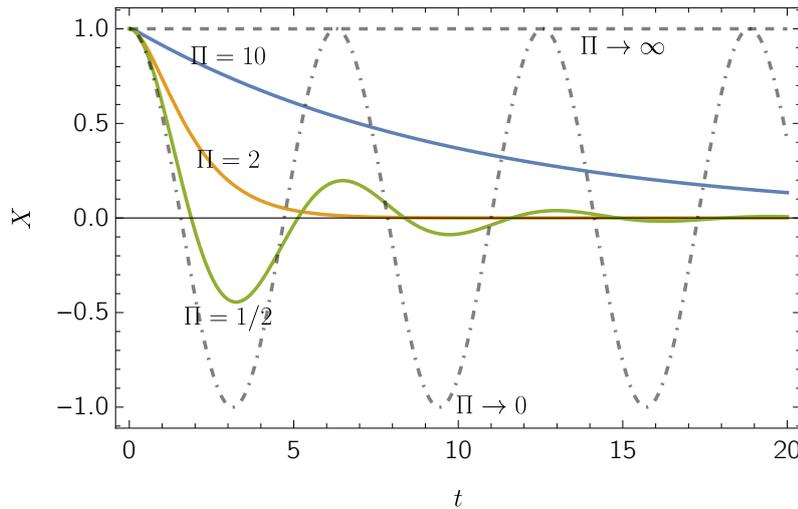


Figure 2.13 – Oscillation d'un ressort amorti. Les solutions au problème correspondant à $\Pi = \frac{1}{2}$, $\Pi = 2$, et $\Pi = 10$ sont reportées. Les traits discontinus représentent les solutions asymptotiques $X = 1$ pour $\Pi \rightarrow \infty$ et $X = \cos t$ pour $\Pi \rightarrow 0$.

2.6 Similitude en ingénierie

2.6.1 Généralités

En ingénierie on utilise souvent des modèles réduits présentant la même forme que le modèle en grandeur réelle (similitude géométrique) et on recherche des matériaux et des conditions d'écoulement en laboratoire pour créer des écoulements en similitude (dynamique). La figure 2.14 montre l'exemple d'une étude menée par le bureau de consultants Sogreah (devenu Artelia) pour établir l'impact des ouvrages et des travaux de correction dans la gestion des sédiments de la baie du mont Saint-Michel en France.

La similitude du modèle réduit avec le phénomène à étudier est assurée quand tous les paramètres de similitude (c'est-à-dire les nombres sans dimension introduits lors de l'*analyse dimensionnelle*, par exemple en utilisant le théorème II) sont identiques aux deux échelles.

Il n'est pas toujours possible de respecter strictement les critères de similitude. Cela n'a pas les mêmes conséquences selon le problème en question :

- par exemple en aérodynamique, la similitude se fonde sur le nombre de Reynolds. On observe que le coefficient de traînée $C_d(\text{Re})$ tend vers une constante quand $\text{Re} \gg 1$ (voir figure 2.8). La valeur exacte de Re n'est donc pas très importante ;
- dans d'autres cas, cela a des répercussions. En sédimentologie, la force de traînée est en Re^{-1} , donc la vitesse peut être très sensible au nombre de Reynolds !

Dans certains cas, il est possible de contourner la difficulté en modifiant le rapport de similitude géométrique. On parle de *distorsion géométrique* par exemple quand, pour modéliser une rivière, on emploie une échelle de largeur différente de l'échelle de longueur. On parle de *similitude incomplète* quand seuls quelques-uns des critères sont satisfaits. C'est souvent le cas en transport solide où il est difficile de satisfaire la similitude dynamique (nombre

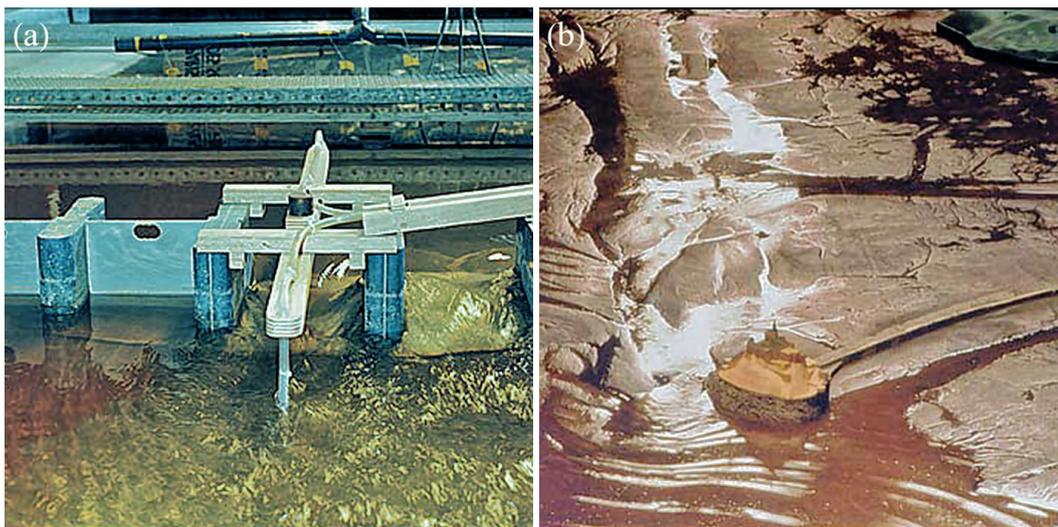


Figure 2.14 – Étude sédimentologique du bassin du mont Saint-Michel (France) à l'aide d'un modèle réduit. Source : Sogreah (Grenoble).

de Froude) de la phase liquide et celle de la phase solide.

Enfin il faut prendre garde au fait que la diminution d'échelle peut donner lieu à de nouveaux phénomènes comme la capillarité : par exemple dans le cas de la simulation d'une rivière, si l'on diminue trop l'échelle d'observation au laboratoire, il y a de fortes chances qu'un écoulement d'eau soit influencé par les tensions de surface à la surface libre, qui modifie la forme des vagues, des ressauts, les vitesses d'écoulement, etc. (Malverti *et al.*, 2008; Heller, 2011).

2.6.2 Similitude en hydraulique

En hydraulique à surface libre, les modèles réduits sont construits sur la base d'une similitude dynamique fondée sur le nombre de Froude. Pour que des écoulements à des échelles différentes soient dynamiquement similaires, il faut que les nombres de Froude soient égaux

$$\left(\frac{\bar{u}^2}{gh}\right)_1 = \left(\frac{\bar{u}^2}{gh}\right)_2,$$

où les indices 1 et 2 désignent les échelles. Quand cela est possible, il est également souhaitable que les nombres de Reynolds soient également égaux

$$\left(\frac{\bar{u}h}{\nu}\right)_1 = \left(\frac{\bar{u}h}{\nu}\right)_2.$$

Une fois connu le rapport de réduction, c'est-à-dire le rapport (h_2/h_1) entre le modèle réduit et la réalité, on peut en principe déterminer les relations existant entre paramètres du problème. Cela n'est pas sans poser des problèmes pratiques.

Par exemple, considérons que pour modéliser un écoulement d'eau dans un canal, on réalise des essais sur un canal à échelle réduite (facteur 1/10); on souhaite employer de l'eau comme fluide pour le modèle réduit, comme c'est le cas dans la réalité (donc $\nu_1 = \nu_2$).

L'égalité des nombres de Reynolds entraîne

$$\frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} = \frac{h_1}{h_2},$$

tandis que l'égalité des nombres de Froude nécessite de prendre

$$\frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

On voit immédiatement qu'il n'est possible de vérifier simultanément les deux égalités ci-dessus... Il conviendrait donc de prendre un fluide avec une viscosité différente pour le modèle réduit. On tire alors de l'égalité des nombres de Froude et de Reynolds la relation entre les viscosités :

$$\nu_1 = \nu_2 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{3/2},$$

Donc avec un rapport de réduction $h_1/h_2 = 1/10$, on devrait prendre une viscosité cinématique 1000 fois inférieure à celle de l'eau, soit $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$... ce qui est très difficile à faire ! En pratique, on s'en tire en ne se fondant que sur une similitude dynamique basée sur le nombre de Froude et on tolère le non-respect du nombre de Reynolds ; en effet, pour certains problèmes de turbulence, les processus (le coefficient de traînée par exemple) tendent vers une limite aux très grands nombres de Reynolds, ce qui fait que le non-respect du nombre de Reynolds n'entraîne pas d'erreur significative. Il convient toutefois d'être toujours prudent avec ce type d'argument.

2.6.3 Courbe maîtresse

En ingénierie, quand on fait des essais en laboratoire ou bien des simulations, il est fréquent de tracer la variation d'un paramètre du problème en fonction d'un autre ou de plusieurs autres. On obtient alors des réseaux de courbes qu'il est plus ou moins difficile d'interpréter ou de synthétiser. Lorsque les courbes expérimentales présentent la même allure, il est possible de jouer sur cette « similitude d'apparence » pour synthétiser l'information sous la forme d'une courbe maîtresse. Cela a pour avantage de faciliter la manipulation des résultats expérimentaux et, éventuellement, d'ouvrir la voie à une analyse physique des phénomènes observés.

♣ **Exemple.** – Par exemple, supposons que l'on mesure dans un canal incliné à une pente $\tan \theta$ la vitesse moyenne d'écoulement \bar{u} en fonction de sa hauteur en régime permanent uniforme. On obtient alors des courbes comme celles montrées sur la figure 2.15(a). On note que toutes ces courbes ont sensiblement la même allure quelle que soit la pente du canal. On se demande alors comment transformer les variables pour que les courbes se superposent sur une courbe maîtresse. L'idée est :

- de rechercher des corrélations de la forme $\bar{u} = K \sin^n \theta h^p$ (avec n et p des exposants à déterminer et K un facteur de proportionnalité). Cela se fait assez simplement avec des programmes comme Mathematica ou Matlab ;
- si l'on reporte sur un graphique $K = \bar{u} \sin^{-n} \theta h^{-p}$, tous les points expérimentaux doivent (si la corrélation est bonne) tomber sur une même courbe ;
- en général, pour ce type de problèmes expérimentaux, ce qu'on cherche à déterminer si une loi de frottement de la forme $\tau_b = f(\bar{u}, h)$, où τ_b est la contrainte au fond

du canal. On sait que la contrainte au fond est définie par $\tau_b = \rho gh \sin \theta$; on déduit donc la relation entre τ_b et le couple (\bar{u}, h) en notant que d'après la corrélation établie ci-dessus : $\sin \theta = (\bar{u}/K/h^p)^{1/n}$, donc

$$\tau_b = \rho gh \sin \theta = \rho gh^{1-p/n} \bar{u}^{1/n} K^{-1/n}.$$

Donc si l'on trace $J = h^{1-p/n} \bar{u}^{1/n}$ en fonction de τ_b , on doit observer que tous les points de mesure tombent sur une courbe maîtresse.

Dans l'exemple de la figure 2.15, on trouve que $p = 1,427$ et $n = 5,789$; on pose donc (pour simplifier) $n = 6$ et $p = 3/2$. Comme le montre la figure 2.15(b) où l'on a tracé $J = h^{1-p/n} \bar{u}^{1/n} = h^{3/4} \bar{u}^{1/6}$, les points expérimentaux sont bien sur une même courbe.

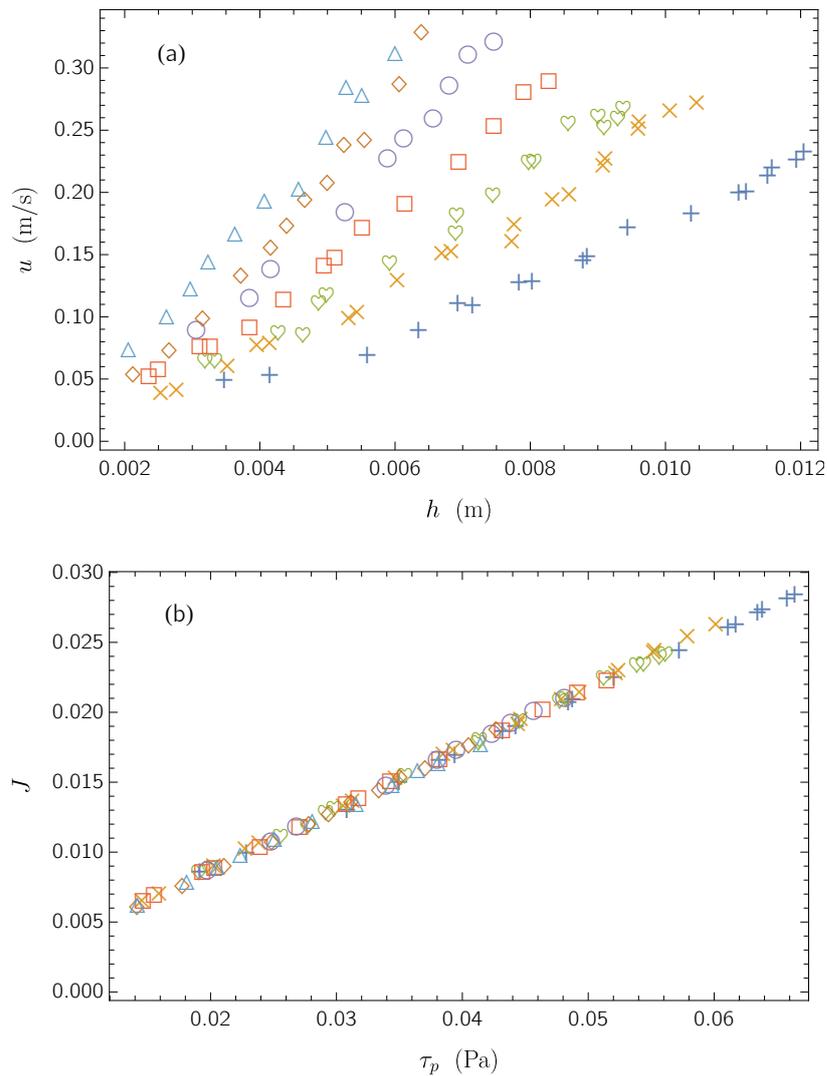
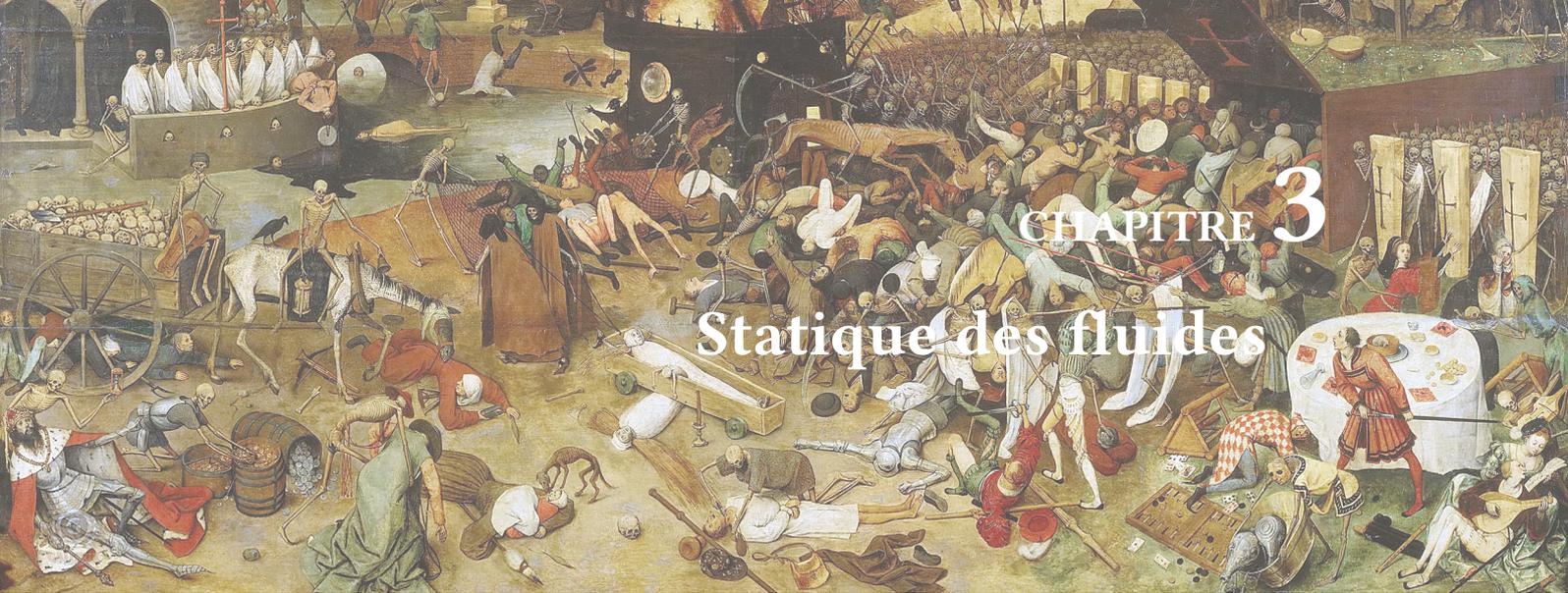


Figure 2.15 – (a) Vitesse d'un écoulement granulaire en fonction de la hauteur dans un canal incliné de θ . (b) courbe maîtresse $J = J(\tau_p)$. Données tirées de mesures en canal granulaire (Pouliquen, 1999).



3.1 Origine physique de la pression dans les fluides

AL'ÉCHELLE moléculaire, on a vu qu'un fluide au repos est composé de molécules qui, si leur vitesse moyenne \bar{u} est nulle, sont quand même animées d'une vitesse aléatoire v résultant des interactions entre elles (collisions, répulsions de Van der Waals, etc.). Pour comprendre la notion de pression au sein d'un fluide au repos, il faut examiner de plus près le comportement des molécules qui composent ce fluide (voir 3.1).

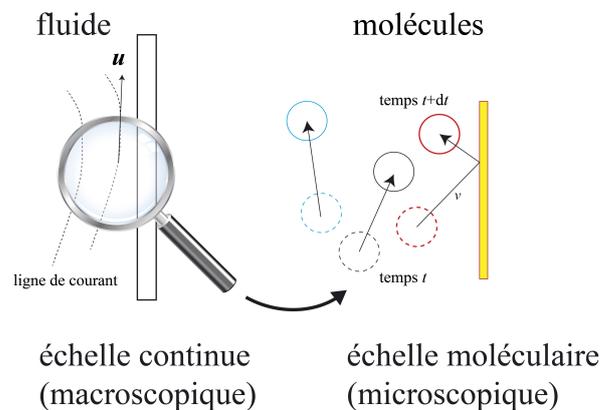


Figure 3.1 – La pression contre une paroi reflète à l'échelle macroscopique la multitude de chocs entre molécules et paroi à l'échelle microscopique.

La vitesse des particules est fluctuante au gré des interactions et elle est d'autant plus grande que la température est grande. En fait, du point de vue thermodynamique, la température n'est qu'une mesure de cette agitation moléculaire. Lorsqu'on place une paroi solide (voir figure 3.2), les molécules vont entrer en collision avec cette paroi et donc, si on moyenne au cours du temps ces différentes impulsions, il en résulte une force moyenne dite *force de pression*.

Ainsi, on montre que pour un gaz dilué la pression est définie comme :

$$p = \frac{1}{3}nmv^2,$$

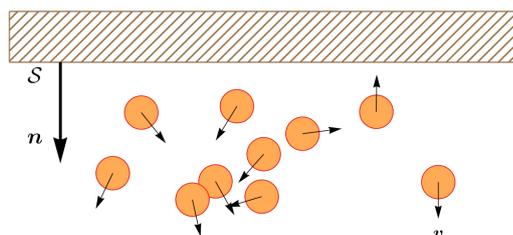


Figure 3.2 – Pression contre une paroi. Pour mesurer la force de pression exercée par un fluide sur une paroi S (de surface S), il faut utiliser la normale \mathbf{n} orientée de l'intérieur vers l'extérieur (donc en direction du fluide): $\mathbf{F} = -p S \mathbf{n}$.

avec n le nombre de molécules par unité de volume, v la vitesse d'agitation thermique, et m la masse d'une molécule. La force exercée sur la paroi est donc

$$\mathbf{F} = p S \mathbf{n}, \quad (3.1)$$

avec \mathbf{n} la normale à la surface solide, orientée vers l'intérieur du volume fluide (voir figure 3.2) et S la surface de la paroi. Le principe d'action et de réaction impose que la force exercée par la surface sur le fluide est (attention au signe selon la convention employée):

$$\boxed{\mathbf{F} = -p S \mathbf{n}.} \quad (3.2)$$

L'unité de pression est le pascal [Pa]. **Attention** : par la suite, on introduira des « facettes » c'est-à-dire des surfaces infinitésimales réelles ou virtuelles. Pour ces facettes, la normale sera, par convention en mécanique, orientée de l'intérieur (de la facette) vers l'extérieur (en direction du fluide), donc le contraire de ce qui est indiqué ici à la figure 3.2. Il s'agit juste d'une convention; l'important est de se souvenir que l'action de la pression est de pousser (compresser), pas de tracter.

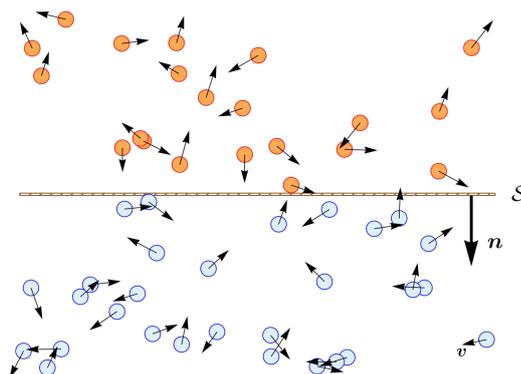


Figure 3.3 – Pression au sein d'un fluide. Pour mesurer la force de pression exercée au sein d'un fluide, il faut imaginer une surface virtuelle S (d'aire S), dont la normale \mathbf{n} est orientée de l'intérieur vers l'extérieur (donc en une direction ou l'autre du fluide): $\mathbf{F} = -p S \mathbf{n}$.

On peut généraliser cette notion en remplaçant la paroi solide par une surface virtuelle (voir figure 3.3). La pression est alors le flux de quantité de mouvement fluctuante transportée par les molécules franchissant la surface S . Lorsqu'un fluide est au repos sous l'action

de la gravité, les molécules situées à une tranche d'altitude z doivent supporter le poids de la colonne au-dessus pour maintenir l'équilibre. La pression est donc d'autant plus forte qu'on a beaucoup de fluide au-dessus de soi. Une propriété remarquable de la pression est qu'elle est nécessairement *isotrope*, c'est-à-dire quelle que soit la facette considérée d'un volume de contrôle infinitésimal, la pression est la même. En effet, compte tenu de l'origine de la pression à l'échelle moléculaire, l'isotropie des fluctuations de vitesses entraîne l'isotropie de la force résultante de pression.

3.2 Loi de l'hydrostatique

3.2.1 Loi de Pascal

Considérons maintenant l'équilibre mécanique d'une tranche de fluide de surface S et d'épaisseur dz , située entre les altitudes z et $z + dz$ (voir figure 3.4).

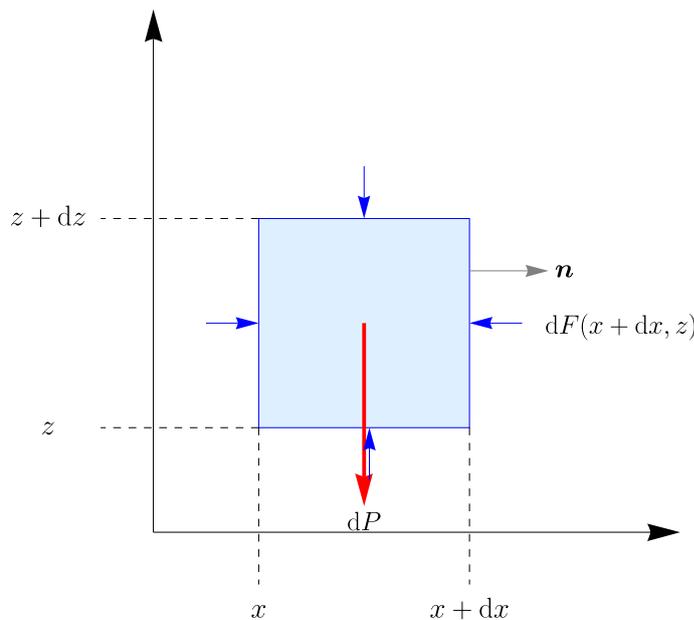


Figure 3.4 – Équilibre d'une colonne de fluide.

Il y a équilibre si la somme des forces projetées sur l'axe z est nulle. La différence de pression doit donc contrebalancer exactement l'action de la pesanteur (la somme des forces appliquées au volume de contrôle doit être nulle) :

$$(-p(z + dz) + p(z))S - \rho g S dz = 0,$$

soit encore $dp = -\rho g dz$ ou bien :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g.} \quad (3.3)$$

C'est la loi de Pascal¹ ou loi de statique des fluides. Cette loi se généralise à des repères quelconques :

$$\boxed{-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0.} \quad (3.4)$$

Dans un fluide au repos, le gradient de pression contrebalance l'effet de la pesanteur.

Lorsque la masse volumique du fluide est constante, on peut intégrer très simplement l'équation de Pascal. Ainsi la différence de pression Δp entre deux points distants verticalement d'une distance h est

$$\Delta p = \rho g h.$$

Cette relation n'est évidemment pas valable si le fluide est compressible. La pression dans un fluide homogène ne dépend donc que de la différence de hauteur et de la masse volumique ; elle est notamment indépendante de la taille ou de la forme du récipient recueillant le fluide. Cela a des conséquences importantes :

- pour une altitude donnée la pression est la même ;
- la surface libre d'un fluide est plane (sauf si la tension de surface joue un rôle).

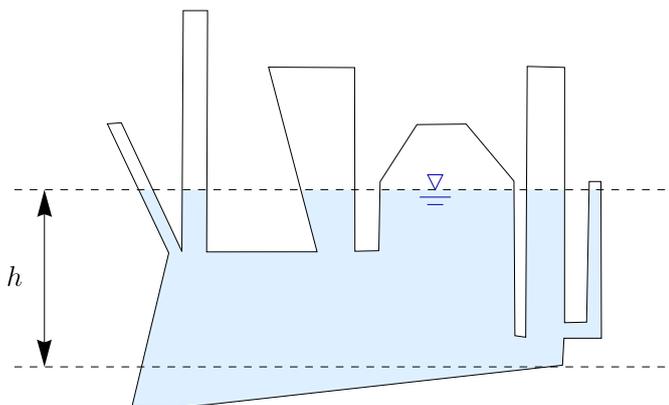


Figure 3.5 – La pression au sein d'un fluide est indépendante de la forme du récipient. La pression en tout point situé à une distance h de la surface libre est $p = \rho g h$.

♣ **Exemple.** – Une application directe de ce résultat est la pression dans l'atmosphère supposée à température T constante (champ isotherme). L'équilibre des pressions doit vérifier d'après la loi de gaz parfaits : $p = \rho R' T$ (où $R' = R/M$ avec $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$) la constante des gaz parfaits et $M = 0,02896 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ la masse molaire de l'air), donc en couplant avec la loi de Pascal, on tire :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{RT}g,$$

dont l'intégration donne

$$\ln p = -\frac{gz}{RT} + \text{constante.}$$

1. Blaise Pascal (1623–1662) a été un scientifique majeur et universel du XVII^e siècle. En mécanique des fluides, il reprit les travaux de Torricelli et réalisa un certain nombre d'expériences d'hydrostatique et de pompage, qui lui permirent d'établir sa loi. En mathématiques, il travailla sur les probabilités. On lui doit un certain nombre d'inventions comme la calculatrice mécanique, la seringue, et la presse hydraulique. Il s'est également intéressé à différents aspects de la littérature, de la méthodologie scientifique, et de la théologie.

En appelant P_a la pression atmosphérique au niveau de la mer, on obtient finalement :

$$p = P_a \exp\left(-\frac{gz}{RT}\right).$$

Cette équation s'appelle équation du *nivellement barométrique*. □

3.2.2 Principe d'Archimède

Le principe d'Archimède² s'énonce ainsi. Tout corps immergé dans un fluide au repos est soumis de la part du fluide à une poussée verticale, opposée à la force de gravité, égale au poids du volume de fluide déplacé et appliquée au centre de masse de ce fluide (centre appelé *centre de carène* pour les bateaux; voir figure 3.6).

Ce principe se déduit assez aisément de l'équation de Pascal. Considérons le volume \mathcal{V} occupé par le corps immergé et intégrons l'équation de Pascal

$$-\int_{\mathcal{V}} \nabla p d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g} d\mathcal{V} = 0,$$

d'où l'on déduit par utilisation du théorème de Green-Ostrogradski

$$\underbrace{-\int_{\mathcal{S}} p \mathbf{n} d\mathcal{S}}_{\text{résultante des forces de pression}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g} d\mathcal{V}}_{\text{poids propre}} = 0.$$

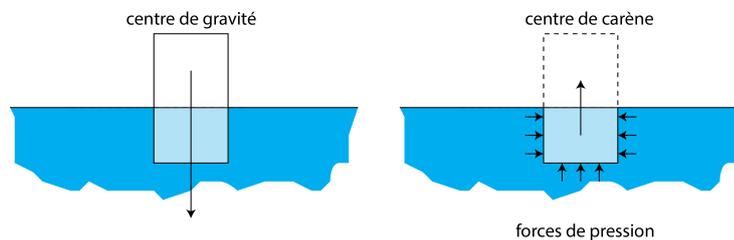


Figure 3.6 – La résultante des forces de pression s'appelle force d'Archimède.

3.2.3 Calcul des forces de pression en pratique

La force de pression exercée sur une paroi de surface \mathcal{S} est :

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{S}} (-p\mathbf{n}) d\mathcal{S} \quad (3.5)$$

avec \mathbf{n} normale à la surface élémentaire $d\mathcal{S}$, orientée de l'intérieur vers l'extérieur (ici l'intérieur signifie l'intérieur de la paroi; l'extérieur indique le fluide). Le calcul de la force se fait en plusieurs étapes :

1. calculer la pression;

2. Archimède de Syracuse (287–212 avant Jésus-Christ) est l'archétype du grand savant de l'Antiquité, à la fois physicien, mathématicien, et ingénieur. Il vécut en Sicile à l'époque où Rome commençait à prendre une place croissante en Méditerranée. On lui doit de nombreuses avancées en géométrie, en mécanique (principe d'Archimède, bras de levier), et en ingénierie (vis sans fin).

2. identifier les surfaces où la pression p est constante (en général, surface à altitude constante);
3. déterminer la surface infinitésimale dS compte tenu de la géométrie de la surface S (voir complément de cours);
4. calculer les composantes de \mathbf{n} (on vérifie s'il n'y a pas un axe privilégié de projection de la résultante des forces);
5. on intègre $\mathbf{F} = \int_S (-p\mathbf{n})dS$.

Il y a des astuces de calcul (utilisation du théorème d'Archimède), mais il vaut mieux maîtriser la démarche du calcul intégral.

♣ **Exemple.** – Considérons un barrage rempli d'eau, avec une hauteur h et une largeur ℓ (voir figure 3.7). On veut calculer la force totale de pression \mathbf{F} (par unité de largeur) qui s'exerce sur le mur du barrage.

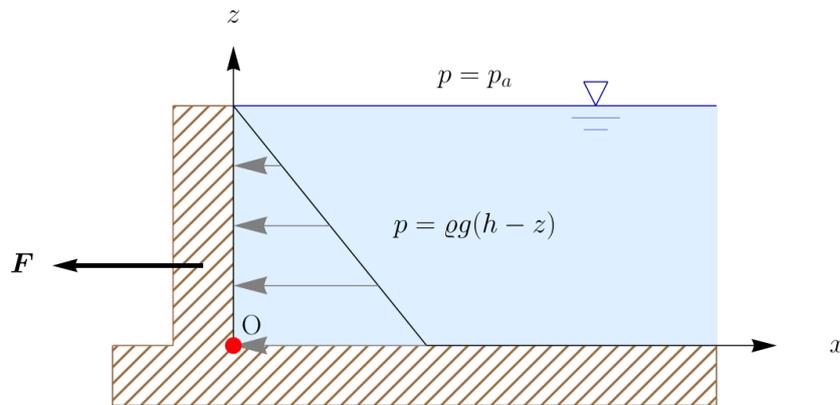


Figure 3.7 – Barrage de hauteur h retenant un volume d'eau.

L'équation de Pascal s'intègre facilement $p'(z) = -\rho g \Rightarrow p(z) = p_a + \rho g(h-z)$. La distribution est linéaire avec la profondeur : on parle de *distribution hydrostatique*. Pour simplifier on pose $p_a = 0$. La surface infinitésimale est $dS = \ell dz$. La normale à cette surface est $\mathbf{n} = (1,0)$ (voir figure 3.8). La force de pression est donc :

$$\mathbf{F} = \int_S (-p\mathbf{n})dS = -\ell\mathbf{n} \int_0^h \rho g(h-z)dz = -\rho g\ell \frac{h^2}{2}\mathbf{n}.$$

Le moment de force en O est

$$\mathbf{M} = \int_S (-p\mathbf{r} \times \mathbf{n})dS = -\ell\mathbf{e}_z \int_0^h \rho g z(h-z)dz = -\rho g\ell \frac{h^3}{6}\mathbf{e}_z$$

avec $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$. En résumé, on trouve que la distribution de pression est linéaire (*distribution hydrostatique*). Comme $M = Fh/3$, le point d'application de la force est situé au tiers de la hauteur du barrage (depuis O).

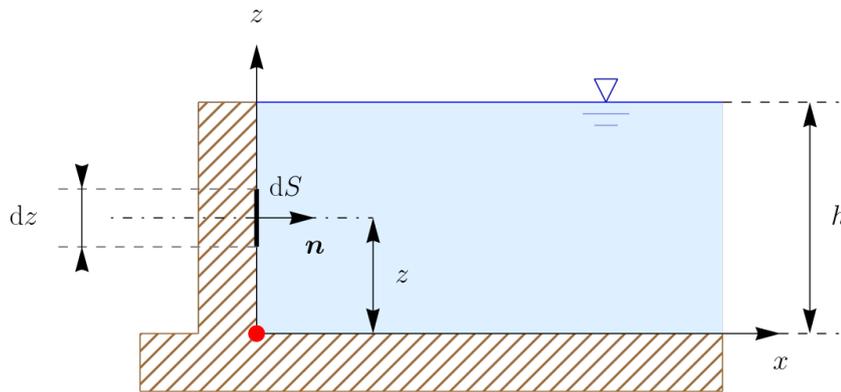


Figure 3.8 – Surface infinitésimale pour le calcul de la résultante des forces de pression.

3.3 Mesure de la pression

Il existe plusieurs appareils pour mesurer la pression.

- *Baromètre* : il s'agit d'un tube contenant un fluide lourd (en général du mercure) dont le niveau varie en fonction de la pression atmosphérique (voir fig. 3.9). Le premier baromètre à mercure date de 1644 (c'est une invention de Torricelli³). Le baromètre ne sert qu'à mesurer une pression atmosphérique.
- *Manomètre à liquide* : c'est un appareil qui mesure la pression statique au sein d'un fluide (donc le baromètre est une variété de manomètre). On distingue le tube piezométrique au fonctionnement similaire au baromètre, les tubes en U droits ou inclinés, etc.
- *Manomètre mécanique ou électronique* : une structure élastique se déforme linéairement avec la pression. Donc si l'on est capable de mesurer la déformation, on dispose d'un moyen de mesurer la pression. Les tubes de Bourdon sont des exemples historiques (1848) de manomètre mécanique : un tube fin élastique est enroulé sur lui-même et contenu dans une boîte rigide hermétique. L'intérieur du tube est relié à l'extérieur (pression du fluide ambiant) ; sous l'effet de la pression extérieure, le tube va se recroqueviller ou bien se raidir. La faible déformation qui en résulte met en mouvement une aiguille qui permet d'indiquer la déformation. Il existe de nos jours des appareils électroniques qui estiment la pression en mesurant le courant électrique qui est généré par une substance cristalline déformée sous l'effet de la pression du fluide ambiant (jauge piézoélectrique). Un manomètre nécessite un étalonnage.

3. Evangelista Torricelli (1608–1647) était un physicien et mathématicien italien, contemporain de Galilée. Il est principalement connu pour l'invention du baromètre et la formule qui porte aujourd'hui son nom. Il a également travaillé sur des problèmes de géométrie et d'optique.

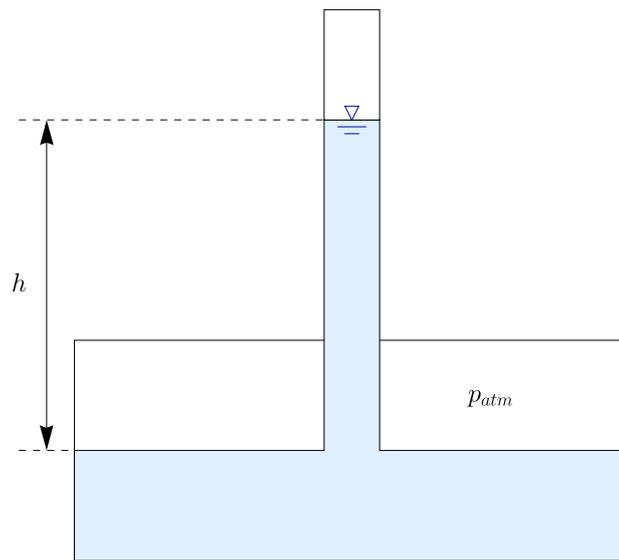


Figure 3.9 – Principe d'un baromètre. Un tube trempe dans un bain de mercure de masse volumique $\rho_m = 13\,546 \text{ kg/m}^3$. Si la pression atmosphérique augmente, le mercure remonte dans le tube (ce dernier ne contient que du mercure liquide et un gaz constitué de vapeur de mercure dont la pression est négligeable). La pression atmosphérique est obtenue en mesurant la hauteur de la colonne de mercure : $P_{atm} = \rho_m g h$. La pression atmosphérique standard (au niveau de la mer) est 1 atm, soit très précisément $1,0133 \times 10^5$ Pa ou bien 1,0133 bar, soit 762 mm de mercure (760 mm à 0°C).



CHAPITRE 4

Équations de bilan

4.1 Théorèmes de transport

ON va chercher à exprimer les principes de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) pour des systèmes fluides. On va voir qu'il existe une multitude de représentations possibles du même principe :

- formulation sur un volume de contrôle (formulation dite *globale* ou *intégrale*) ou bien pour un volume infinitésimal (équation dite *locale*);
- formulation sur des volumes de contrôle ouverts ou fermés.

Cette multitude est au début perçue par l'étudiant comme une complexité supplémentaire de la mécanique des fluides, mais à l'usage, elle s'avère fort pratique car cela permet une meilleure compréhension physique et une résolution plus simple des problèmes.

4.1.1 Vue générale

Les lois de la mécanique s'écrivent différemment selon le type de description choisie, mais elles expriment les mêmes principes. Ces principes sont au nombre de trois :

- la masse se conserve ;
- la variation de quantité de mouvement (masse \times vitesse) est égale à la somme des forces appliquées¹ ;
- l'énergie totale se conserve : c'est le premier principe de la thermodynamique.

1. Il existe des formulations alternatives qui expriment la conservation de l'énergie cinétique. Rappelons que la variation d'énergie cinétique (masse \times carré de la vitesse) est égale à la différence entre la puissance fournie et la puissance dissipée. Rappelons que l'on peut travailler aussi bien en termes de *puissance* (force \times vitesse) ou de *travail* (force \times déplacement), ce sont les mêmes concepts ; la seule différence est que la puissance représente la variation du travail par unité de temps. Dans la majorité des cas, cette équation de conservation de l'énergie cinétique est équivalente à l'équation de la quantité de mouvement et, dans la résolution des problèmes, il faut choisir l'une ou l'autre des formulations. Dans certains cas, il n'y a pas une équivalence directe ; on en verra un exemple avec le ressaut hydraulique. Enfin il y a des quantités déduites de l'énergie cinétique (l'énergie cinétique fluctuante par exemple en turbulence), qui sont gouvernées par des équations spécifiques.

En mécanique des fluides, on se sert le plus souvent d'une description eulérienne du mouvement, c'est-à-dire qu'on ne suit pas les particules dans leur mouvement individuel, mais on se examine le mouvement du fluide à un endroit donné. Le mécanicien des fluides est comme un passant accoudé au garde-fou d'un pont et regardant les mouvements du fluide en contrebas. La description eulérienne introduit deux notions-clés, souvent difficiles à appréhender :

- la notion de *volume ouvert*, *volume matériel* et de *volume de contrôle*;
- la notion de *dérivée matérielle* ou particulaire.

Les *volumes ouverts* sont des ensembles de points contenus dans une enveloppe (la surface de contrôle \mathcal{S}) à travers laquelle ils peuvent échanger avec l'extérieur (le fluide environnant ou bien une paroi) de l'énergie, de la matière, etc. Cette surface de contrôle peut être fixée (c'est-à-dire elle ne varie pas au cours du temps) ou bien bouger à une vitesse différente ou égale à celle du fluide ; sa forme peut également être constante (c'est-à-dire indéformable) ou bien varier.

♣ **Exemple.** – Pour reprendre l'exemple précédent, on peut se placer à un nœud autoroutier, créer une surface de contrôle fictive, et compter les véhicules qui entrent dans le système, ceux qui en sortent, et ceux qui s'arrêtent sur le bas-côté ou une aire d'autoroute. L'évaluation du trafic se fait en faisant un décompte de ces différentes catégories au cours du temps. □

♣ **Exemple.** – Une fusée est un système ouvert puisqu'elle émet des gaz afin de se propulser dans l'espace. □

Par opposition, un *volume matériel* est un volume fermé qui n'échange pas avec l'extérieur et qui contient le même ensemble fini de parcelles de fluide au cours du mouvement. Il est donc astreint à épouser fidèlement le mouvement du fluide.

♣ **Exemple.** – Un ballon de baudruche matérialise l'enveloppe imperméable (cela sera la surface de contrôle) qui comprend le même volume de gaz. On peut déformer le ballon, le comprimer ou le détendre, mais dans tous les cas de figure, le volume contenu dans le ballon est le même. En théorie, on peut créer des ballons virtuels qui contiennent un volume de fluide. □

♣ **Exemple.** – Il est possible de considérer le volume de gaz dans le turboréacteur d'un avion comme un volume matériel lorsque ce volume englobe les gaz rejetés par le réacteur, mais en pratique, cela ne serait pas très utile puisque ce qui nous intéresse c'est l'avion et non le centre de masse du système avion + gaz. Le plus souvent, pour modéliser ce qui se passe dans un réacteur, on considère un volume de contrôle ouvert et fixé aux parois intérieures du réacteur. □

Afin de faciliter la compréhension des équations de transport, on va tout d'abord examiner ce qui se passe pour un milieu idéal, qui serait unidimensionnel² au § 4.1.2. Pour ce cas idéal, on va tout d'abord faire un rappel de calcul intégral pour comprendre comment les équations sont obtenues. On va voir trois équations de transport : conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie. Au § 4.1.3, on va s'intéresser à des

2. Cette idéalisation peut servir à étudier des problèmes réels, par exemple des pipelines, lorsque la longueur est bien supérieure à la largeur d'écoulement.

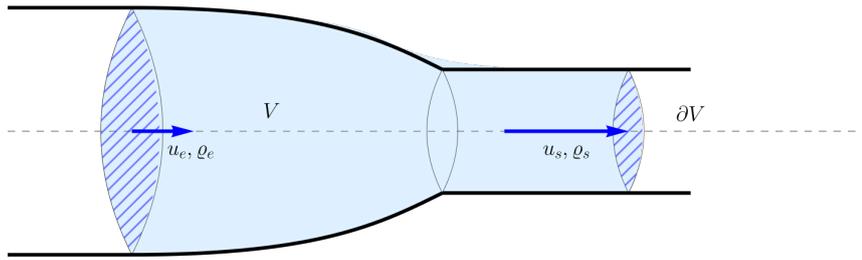


Figure 4.1 – Volume de contrôle (en aplat bleu) dans une tuyère d'un réacteur. Le symbole ∂V est parfois employé pour désigner la surface de contrôle, c'est-à-dire l'enveloppe du volume de contrôle V ; cette enveloppe comprend ici une paroi solide (trait noir) et une surface fluide arbitraire (en hachuré). Le fluide entre avec une certaine vitesse u_e et une masse volumique ρ_e . Il sort de la tuyère avec une vitesse u_s et une masse volumique ρ_s .

problèmes quelconques en dimension 2 ou 3; tout ce qui a été dit pour la dimension 1 sera extrapolé pour la dimension 2 ou 3.

4.1.2 Théorème de transport en dimension 1

Bases mathématiques

Rappelons quelques formules classiques d'analyse :

- dérivée d'une primitive (définition d'une primitive) :

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\xi) d\xi = f(t).$$

- dérivée d'une primitive avec borne variable :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{a(t)} f(\xi) d\xi = f(a(t)) \dot{a}(t).$$

- dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

- formule de Leibniz :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t)) \frac{db}{dt} - f(a(t)) \frac{da}{dt}. \quad (4.1)$$

☞ **Démonstration.** Ce résultat se démontre simplement en introduisant $F = \int f(x, t) dx$ la primitive de f par intégration par rapport à x . On a ainsi :

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = F(b(t), t) - F(a(t), t).$$

En différentiant par rapport à t et en se servant de la relation des dérivées composées $((f \circ g)' = g' \times f' \circ g)$, on déduit la relation de Leibniz³. Notons que l'on peut transformer cette équation de telle sorte que tout le membre de droite soit placé sous le même signe intégral. Pour cela il suffit de remarquer que

$$f(b(t))\frac{db}{dt} - f(a(t))\frac{da}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x}(f(\xi, t)u(\xi, t))d\xi,$$

avec u la vitesse.

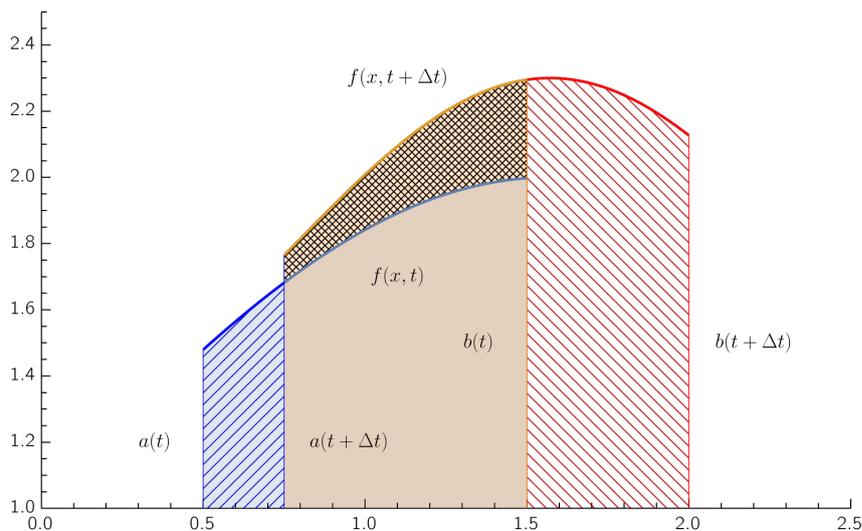


Figure 4.2 – Interprétation de la variation de $f(x, t)$ sur un intervalle $[a(t), b(t)]$ entre les temps t et $t + \Delta t$.

On peut interpréter la formule de Leibniz (4.1) à l'aide du schéma de la figure 4.2 :

$$\text{taux de variation de } M = \int_a^b f(x, t)dx = \frac{\text{intégrale de } \partial f(x, t)}{\partial t \text{ sur } [a, b]} + \text{flux de } f \text{ en } b - \text{flux de } f \text{ en } a$$

Les frontières du domaine $a(t)$ et $b(t)$ bougent au cours du temps, et donc l'intégrale de f perd le « volume⁴ » incrémental

$$(a(t + \Delta t) - a(t)) \times f(a, t) \approx a'(t)\Delta t.$$

C'est le volume hachuré en bleu qui est compris entre $a(t)$ et $a(t + \Delta t) = a(t) + a'(t)\Delta t$ sur la figure 4.2. L'intégrale M gagne le volume hachuré $f(b, t)b'(t)\Delta t$ en rouge (entre

3. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) était un philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, et juriste allemand. Il a jeté les bases du calcul intégral et différentiel. Il a également eu un rôle important en mécanique en énonçant le principe de l'action et de la réaction et celui des forces vives (énergie cinétique).

4. Par abus de langage, on parle ici de volume car on va juste après cela généraliser l'expression aux trois dimensions de l'espace, mais naturellement en dimension 1, il s'agit ici d'une surface.

$b(t)$ et $b(t + \Delta t)$). Dans le même temps, sur la partie de l'intervalle initial $[a, b]$ qui n'a pas bougé, la fonction f a évolué en sorte que l'intégrale de f a également varié de la quantité

$$(f(x, t + \Delta t) - f(x, t)) \times (b - a) \approx \frac{\partial f}{\partial t} \times \Delta t \times (b - a).$$

Conservation de la masse

Considérons un volume de contrôle *matériel* \mathcal{V} entre les points A et B, dont la position peut varier en fonction du temps : $x_A = a(t)$ et $x_B = b(t)$. La masse M de ce « volume » est constante, donc si ρ désigne la masse par unité de volume (ici une masse linéaire puisqu'on est en dimension 1), **le principe de conservation de la masse impose** :

$$\frac{dM}{dt} = 0,$$

or par définition on a :

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x, t) dx$$

ce qui donne d'après la formule de Leibniz :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx + \rho_B \dot{b} - \rho_A \dot{a} = 0.$$

On a introduit ρ_A et $u_A = \dot{a}$ la masse volumique et la vitesse au point A (on fait de même avec le point B). En se servant de l'identité $\int_a^b \partial f / \partial x dx = f(b) - f(a)$, on peut transformer cette égalité en

$$\frac{dM}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right) dx = 0,$$

ce qui permet de tout passer sous le signe intégral. L'intégrale est nulle si l'intégrand est nul, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0. \quad (4.2)$$

Cette équation est appelée *forme locale de la conservation de la masse* ou *équation de continuité*. Un cas particulier important est le cas du fluide incompressible pour lequel on a $\rho = \text{cste}$, soit

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Théorème de Reynolds

De cette équation, on peut également montrer un théorème dit de Reynolds, qui permet d'intervertir les opérateurs intégration et dérivation temporelle lorsque l'intégrand s'écrit sous la forme ρf , avec f une fonction quelconque. Considérons en effet une quantité macroscopique (c'est-à-dire définie sur le volume de contrôle) :

$$I(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho f(x, t) dx = \int_a^b \rho f(x, t) dx,$$

avec a et b des bornes pouvant prendre des valeurs quelconques, et différentions la par rapport à t :

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_a^b \varrho(x, t) f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial \varrho f}{\partial t} dx + \varrho_B f(b, t) u_B - \varrho_A f(a, t) u_A, \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial \varrho f}{\partial t} + \frac{\partial \varrho f u}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_a^b \left(f \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \varrho u \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx.\end{aligned}$$

En regroupant les termes en ϱ , puis en se servant de l'équation de continuité (4.2), on transforme cette dernière équation:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \int_a^b \left(-f \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \varrho \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \varrho u \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_a^b \left(\varrho \frac{\partial f}{\partial t} + \varrho u \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_a^b \varrho \frac{df}{dt} dx,\end{aligned}$$

avec $df/dt = \partial f/\partial t + u \partial f/\partial x$ la dérivée matérielle (puisque f est une fonction de x et t), ce qui permet d'aboutir à l'égalité suivante, appelée *théorème de Reynolds*:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \varrho(x, t) f(x, t) dx = \int_a^b \varrho(x, t) \frac{d}{dt} f(x, t) dx. \quad (4.3)$$

On prendra garde ici que le terme d/dt dans le membre de gauche porte sur une fonction qui ne dépend que du temps t – c'est donc une dérivée classique⁵ – alors que dans le second membre, il porte sur une fonction à deux variables $f(x, t)$, donc il signifie une dérivée matérielle: $df/dt = \partial f/\partial t + u \partial f/\partial x$.

Conservation de la quantité de mouvement; équation d'Euler

L'application de ce théorème de Reynolds nous permet d'établir la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, dont une forme parmi les plus intéressantes est le théorème de Bernoulli. Par définition, la quantité de mouvement d'un volume de contrôle (unidimensionnel) est

$$Q = \int_V \varrho(x, t) u(x, t) dx = \int_a^b \varrho u dx,$$

et le principe de Newton ou principe fondamental de la mécanique (ou bien encore principe de conservation de la quantité de mouvement) nous enseigne que la variation de quantité de mouvement résulte des forces appliquées au volume, soit:

$$\frac{dQ}{dt} = \text{forces appliquées.}$$

Admettons ici que les seules forces appliquées au système soient la force de gravité (et supposons que le sens de la gravité soit dans le sens des x) et la force de pression sur le

5. On a notamment $df/dt = \partial f/\partial t$.

pourtour du domaine (ici en dimension 1, ce pourtour se résume aux points A et B), alors on a :

$$\frac{dQ}{dt} = \bar{\rho}gV + p_A - p_B,$$

avec p_A et p_B la pression exercée sur le volume de contrôle par le fluide environnant (sur les points A et B), $V = b - a$ le volume de \mathcal{V} , et $\bar{\rho}$ la masse volumique moyenne ($\bar{\rho} = \int_{\mathcal{V}} \rho dx / V$). On a donc d'après le théorème de Reynolds :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_a^b \rho \frac{du}{dt} dx = \int_a^b \left(\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{accélération convective}} \right) dx = \bar{\rho}gV + p_A - p_B.$$

On peut transformer le membre de droite de telle sorte qu'il puisse être interprété comme une intégrale :

$$\bar{\rho}gV + p_A - p_B = \int_a^b \left(\rho g - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx,$$

d'où

$$\int_a^b \rho \frac{du}{dt} dx = \int_a^b \left(\rho g - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx,$$

ce qui impose que localement, on doit avoir :

$$\boxed{\rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x}.} \quad (4.4)$$

Rappelons que cette formule n'est valable qu'en dimension 1 et en l'absence de frottement visqueux. Une telle équation de conservation de la quantité de mouvement couplée à l'équation de continuité est appelée *équation d'Euler* ou bien équation du mouvement pour les fluides parfaits (appelés encore fluides non visqueux). C'est la relation de la quantité de mouvement la plus simple que l'on puisse imaginer et malgré sa simplicité, elle permet de résoudre un grand nombre de cas concrets.

Conservation de l'énergie cinétique ; équation de Bernoulli

Toujours par application du théorème de Reynolds, on peut déduire le théorème de conservation de l'énergie cinétique et sa forme dérivée dite théorème/équation de Bernoulli

Appelons $k = \rho u^2 / 2$ l'énergie cinétique locale et K l'énergie cinétique macroscopique. D'après le théorème de Reynolds, on a :

$$K = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho(x, t) u^2(x, t) dx = \int_a^b k(x, t) dx.$$

Le **principe de conservation de l'énergie cinétique s'énonce :**

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \int_a^b \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} u^2(x, t) dx = \text{puissance des forces appliquées,} \\ &= \bar{\rho}gV u_G + p_A u_A - u_B p_B, \end{aligned}$$

car la puissance des forces appliquées est égale au produit des forces et des vitesses au point d'application. Ici, u_G désigne la vitesse au centre de gravité ($\bar{\rho}u_G = \int_{\mathcal{V}} \rho u dx / V$ ou

moyenne massique de la vitesse). Comme précédemment, on peut transformer le membre de droite en un terme intégral :

$$\begin{aligned}\bar{\rho}gVu_G + p_A u_A - u_B p_B &= \int_{\mathcal{V}} \left(\rho g u - \frac{\partial p u}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(-u \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial p u}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} (\psi + p) - p \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx,\end{aligned}$$

où ψ désigne le *potentiel gravitaire*, c'est-à-dire l'énergie potentielle dont dérive la force de gravité : $\rho g = -\partial\psi/\partial x$, avec ici $\psi = -\rho g x$. On arrive à

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= \int_a^b \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} u^2(x, t) dx \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} (\psi + p) - p \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx,\end{aligned}$$

puis après quelques manipulations algébriques et en utilisant l'équation de continuité (4.2), on montre que les deux formes suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= \int_a^b \left(\rho \frac{\partial u^2/2}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u^2/2}{\partial x} \right) dx, \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u k}{\partial x} \right) dx,\end{aligned}$$

ce qui aurait pu être obtenu également en appliquant directement la formule de Leibniz. On en déduit la formule macroscopique de conservation de l'énergie cinétique

$$\int_a^b \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u k}{\partial x} \right) dx = \int_{\mathcal{V}} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} (\psi + p) - p \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx,$$

ainsi que la forme locale

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} (k + \psi + p) + (k + p) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.5)$$

Cette formule peut considérablement se simplifier quand

- l'écoulement est incompressible $\rho = cste \Rightarrow \partial u/\partial x = 0$ d'après l'équation de continuité (4.2);
- l'écoulement est permanent : les dérivées temporelles disparaissent. On a ainsi $\partial k/\partial t = 0$.

On aboutit alors à

$$\frac{\partial}{\partial x} (k + \psi + p) = 0,$$

soit

$$\boxed{k + \psi + p = cste.} \quad (4.6)$$

La somme de l'énergie cinétique k , du potentiel gravitaire (ou énergie potentielle) ψ , et de la pression p doit rester constante. Cette relation est appelée *équation de Bernoulli*. Elle est remarquable car il s'agit d'une relation purement scalaire, sans opérateur intégral ou différentiel, ce qui la rend très facile d'emploi.

4.1.3 Généralisation et théorème de Reynolds

La formule de Leibniz (4.1) se généralise à des intégrales multiples (c'est-à-dire intégrales sur des volumes au lieu d'intégrales sur des intervalles). On obtient la relation suivante appelée « théorème de transport » :

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.7)$$

où V est un volume de contrôle quelconque contenant une certaine masse de fluide, S est la surface de contrôle enveloppant ce volume, et \mathbf{n} est la normale à la surface S ; la normale \mathbf{n} est unitaire ($|\mathbf{n}| = 1$) et orientée vers l'extérieur. Cette relation écrite ici pour une fonction scalaire f s'étend sans problème à des vecteurs \mathbf{f} quelconques. Ce théorème est vrai quel que soit le volume de contrôle. Si ce volume est matériel, alors la vitesse \mathbf{u} de la frontière du domaine S coïncide avec la vitesse du fluide sur cette frontière. Si le volume de contrôle est arbitraire, alors \mathbf{u} désigne la vitesse de la surface contrôle et peut différer notablement de la vitesse du fluide sur cette frontière.

La relation (4.7) est fondamentale car elle permet d'obtenir toutes les équations fondamentales de la mécanique. Elle peut s'interpréter de la façon suivante :

La variation temporelle d'une quantité f définie sur un volume de contrôle V est égale à la somme de :

- la variation de f au cours du temps au sein du volume de contrôle (variation dite locale);
- le flux de f à travers la surface S enveloppant le volume de contrôle. Quand $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$, le flux est entrant, et inversement quand $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$, le flux est sortant. On pourrait généraliser dans l'espace le cas des fonctions $f(x, t)$ illustré par la figure 4.2.

Lorsque que le volume de contrôle est matériel, on peut relier la vitesse de la surface de contrôle à celle au sein du volume de contrôle en se servant du théorème de Green-Ostrogradski. Dans ce cas, le théorème de transport peut également s'écrire sous la variante suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} f dV = \int_{V_m} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right) dV. \quad (4.8)$$

Ce résultat est très important puisqu'il permet d'inclure tous les contributions sous la même intégrale de volume. Ce théorème n'est pas vrai pour un volume de contrôle arbitraire.

Un corollaire important du théorème de transport est le « théorème de Reynolds »⁶ qui s'applique à des fonctions f massiques, c'est-à-dire que l'on peut écrire sous la forme ϱf , avec ϱ la masse volumique du fluide :

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho f dV = \int_V \varrho \frac{d}{dt} f dV. \quad (4.9)$$

6. Osborne Reynolds (1842–1912) était un mécanicien britannique, dont le nom est associé au nombre sans dimension qui sert à départager les écoulements laminaires et turbulents. Expérimentateur et théoricien, Reynolds a étudié les équations de Navier–Stokes et a proposé de nombreux développements théoriques (théorie de la lubrification, décomposition des vitesses, et moyenne des équations de Navier–Stokes).

☞ **Démonstration.** La démonstration est relativement simple :

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho f dV = \int_V \left(\frac{\partial \varrho f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho f \mathbf{u}) \right) dV = \int_V \left(\varrho \frac{\partial f}{\partial t} + \varrho \mathbf{u} \nabla f + f \frac{\partial \varrho}{\partial t} + f \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) \right) dV$$

Compte tenu de l'équation de continuité [voir éq. (4.16) ci-dessous] et en identifiant la forme $df/dt = \partial f/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla f$, on tire le théorème de Reynolds. \square

Ce résultat est utile en ce qu'il permet d'aller un peu plus rapidement dans l'énoncé des principes de conservation.

4.1.4 Volume de contrôle fixe, matériel et arbitraire

On a vu précédemment au § 4.1.3 que si le volume de contrôle est matériel (notons le V_m , et sa surface de contrôle S_m), c'est-à-dire qu'il est composé du même volume de fluide et se déplace à la même vitesse que le fluide alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} f dV = \int_{V_m} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S_m} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.10)$$

avec \mathbf{u} la vitesse du fluide. Il en est de même si le volume de contrôle V_a est arbitraire, mais il faut alors prendre en compte que ses frontières se déplacent à une vitesse \mathbf{w} qui est différente de celle du fluide :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} f dV = \int_{V_a} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S_a} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.11)$$

Le problème est que cette expression est peu pratique puisqu'il n'existe aucun principe de conservation qui s'applique à des volumes arbitraires. Pour contourner cela on considère un volume matériel V_m qui coïncide avec le volume arbitraire au temps t : on a $S_a = S_m$ au temps t . Les relations (4.10) et (4.11) sont donc vraies à ce temps. Donc en retranchant ces équations, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} f dV - \frac{d}{dt} \int_{V_a} f dV = \int_{S_a} f (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.12)$$

Un cas particulier important concerne les volumes de contrôle fixes (stationnaires). Si le volume de contrôle V_a est fixe, alors $\mathbf{w} = 0$ le long de S_a et donc l'équation (4.11) donne

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} f dV = \int_{V_a} \frac{\partial f}{\partial t} dV, \quad (4.13)$$

tandis que l'équation (4.12) dit que pour le volume matériel V_m coïncidant avec V_a au temps t , on a

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} f dV = \int_{V_a} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S_a} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.14)$$

qui ne diffère pas de l'équation (4.10) dans la structure générale de l'équation, mais en diffère quant à sa dérivation et signification.

Soulignons une fois encore que le problème principal est que les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ne sont valables que pour des volumes matériels. L'application à des volumes de contrôle arbitraires en dehors des volumes fixes demande de la vigilance.

4.1.5 Conservation de la masse

On applique le théorème de transport (4.7) à la fonction scalaire $f = \rho$. On déduit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.15)$$

avec V un volume matériel et S la surface enveloppant ce volume. En utilisant le théorème de la divergence (ou Green-Ostrogradski), on tire :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV$$

On a égalé la dérivée de la masse avec 0 car dans la plupart des cas, la masse se conserve au cours du temps s'il n'y a pas de création de masse ou de perte au sein d'un volume matériel. De plus, si ρ est continue (pas « d'onde de choc » par exemple), alors on peut écrire :

$$\boxed{\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.} \quad (4.16)$$

Cette équation s'appelle l'équation de conservation locale de la masse ou bien encore *équation de continuité*. On peut encore l'écrire :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Si le fluide est incompressible ou l'écoulement isochore : $\rho = \text{constante}$, donc l'équation de continuité devient :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.}$$

C'est l'équation dont on se servira le plus dans la suite de ce cours. Écrite sous forme algébrique, cette équation s'écrit en dimension 2 :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,}$$

et en dimension 3

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

avec $\mathbf{u} = (u, v, w)$ le champ de vitesse.

♣ **Exemple.** – Considérons comme exemple d'application l'écoulement d'un fluide dans une tuyère qui subit un rétrécissement de sa section (voir figure 4.3). On prend un volume de contrôle fixe V (donc arbitraire) qui se situe de part et d'autre de la constriction (reporté en bleu sur la figure 4.3). La surface de contrôle comprend la section d'entrée A_e , la paroi latérale A_l et la section de sortie A_s .

Le bilan de masse pour ce volume de contrôle sous forme intégrale est décrit par l'équation (4.15). En décomposant la surface de contrôle $S = A_e + A_l + A_s$ et en considérant que la paroi latérale est imperméable (et donc que la vitesse \mathbf{u} vérifie $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$) et qu'elle n'est donc associée à aucun flux, on obtient en servant de l'identité (4.14) entre volumes de contrôle matériel et fixe (V_m et V , respectivement) qui permet d'écrire le principe de conservation sur le volume de contrôle V_m qui coïncide avec le volume fixe V au temps t :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{A_e + A_s} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

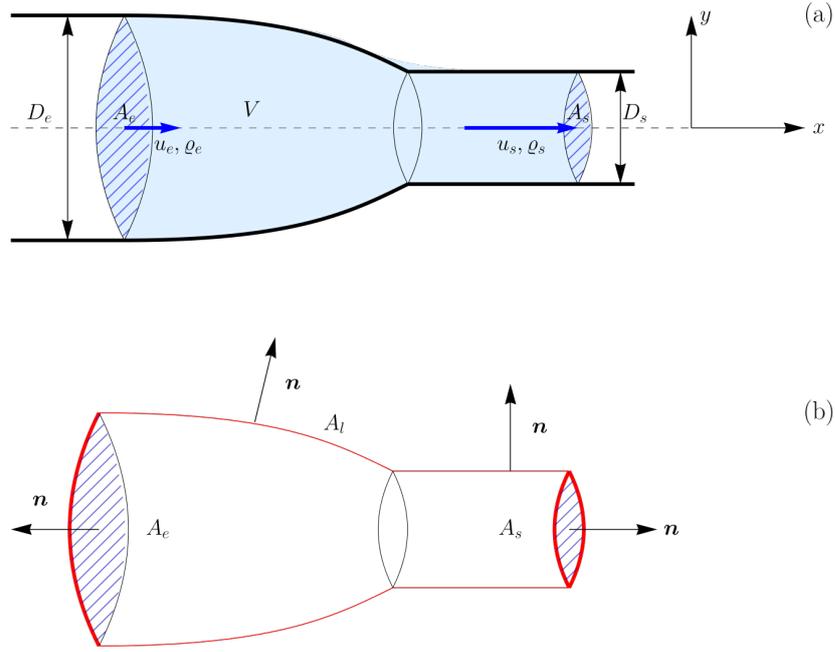


Figure 4.3 – Tuyère avec rétrécissement de section avec passage d’un diamètre D_e à un diamètre D_s . (a) Schéma de principe et notation. Le fluide entre dans le volume de contrôle (en bleu) par la section d’entrée A_e et en sort par la section de sortie A_s . Les vitesses d’entrée et de sortie sont notées u_e et u_s , respectivement, et sont supposées uniformément constantes pour chacune des deux sections. Les masses volumiques du fluide à l’entrée et à la sortie sont notées ρ_e et ρ_s . (b) Volume de contrôle V avec normale \mathbf{n} orientée de l’intérieur vers l’extérieur. La surface de contrôle S enveloppant le volume V peut être décomposée en trois surfaces : surface d’entrée A_e , surface latérale A_l , et surface de sortie A_s ($S = A_e + A_l + A_s$).

Comme par ailleurs, on a la relation (4.13) pour un volume fixe, on peut aussi écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_{A_e + A_s} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

et donc la variation de masse au sein du volume de contrôle fixe V est

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{A_e + A_s} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

(Contrairement au volume matériel pour lequel la masse se conserve, la masse d’un volume arbitraire peut varier au cours du temps). Compte tenu du sens de l’écoulement et de l’orientation de la normale \mathbf{n} , on peut aussi écrire :

$$\frac{dM}{dt} = \rho_e A_e u_e - \rho_s A_s u_s.$$

La variation de masse M reflète la différence entre flux massique entrant $\rho_e A_e u_e$ et sortant $\rho_s A_s u_s$.

Un cas particulier important est le cas où l’écoulement est permanent. Il n’y alors aucune variation de masse dans le volume fixe V :

$$\rho_e A_e u_e = \rho_s A_s u_s.$$

Si l'écoulement est isochore ($\rho_e = \rho_s$), alors on a :

$$A_e u_e = A_s u_s.$$

L'action du fluide sur la conduite se calcule donc assez simplement : c'est la différence d'énergie totale entre l'entrée et la sortie. \square

4.1.6 Conservation de la quantité de mouvement

Formulation (macroscopique) sur un volume de contrôle

On applique le théorème de transport (4.7) à la fonction vectorielle représentant la quantité de mouvement locale $f = \rho \mathbf{u}$ pour un volume de contrôle matériel V_m (et sa surface de contrôle S_m):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \underbrace{\int_{V_m} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\int_{S_m} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{accélération convective}}.$$

Il existe d'autres variantes permettant d'exprimer la dérivée matérielle de $\rho \mathbf{u}$. Ainsi, en utilisant le théorème de la divergence, on tire une variante où toutes les contributions se retrouvent sous l'intégrale de volume :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_m} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \right) dV,$$

ou bien en servant en plus de l'équation de continuité

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_m} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} \right) dV.$$

Attention dans ces deux équations, le terme $\mathbf{u} \mathbf{u}$ représente un tenseur d'ordre 2 (voir complément de cours, § 1.1). Cette formulation a l'avantage de présenter le terme d'advection convective comme étant similaire au divergence d'un champ de contraintes, ce qui sera utile au chap. 6 pour expliquer pourquoi les fluctuations turbulentes de vitesse impliquent une plus grande dissipation d'énergie. 

Le principe fondamental de la dynamique veut que toute variation (temporelle) de quantité de mouvement résulte de l'application de forces. Donc, on peut écrire une relation générale de la forme

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \text{forces appliquées au volume } V. \quad (4.17)$$

Les forces appliquées comprennent les forces de volume (poids) et les forces de surface agissant à la surface du volume. Il s'ensuit que la forme macroscopique complète des équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \underbrace{mg}_{\text{poids}} + \underbrace{\int_{S_m} \boldsymbol{\sigma} dS}_{\text{force de surface}}, \quad (4.18)$$

$$= \int_{V_m} \rho g dV + \int_{S_m} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.19)$$

où $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$ désigne la contrainte, $\boldsymbol{\Sigma}$ le tenseur des contraintes. On rappelle que le tenseur des contraintes se décompose en tenseur des pressions $-p\mathbf{1}$ et un tenseur des extra-contraintes⁷ \mathbf{T} :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}. \quad (4.20)$$

Le tenseur \mathbf{T} dépend de la nature du fluide étudié ou du niveau d'approximation :

- $\mathbf{T} = 0$ correspond au cas des fluides parfaits (ou non visqueux) et les équations du mouvement qui en résultent sont appelées *équations d'Euler* ;
- $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$ correspond au cas des fluides newtoniens et les équations du mouvement qui en résultent sont appelées *équations de Navier–Stokes*. Elles sont examinées en détail au chapitre 6 ;
- $\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{D})$ correspond au cas des fluides non newtoniens, avec \mathcal{F} la *loi de comportement du fluide*. Les équations du mouvement résultantes sont appelées *équations de Cauchy*⁸.

♣ **Exemple.** – Reprenons l'exemple de la tuyère vu au § 4.1.5 (voir figure 4.4).

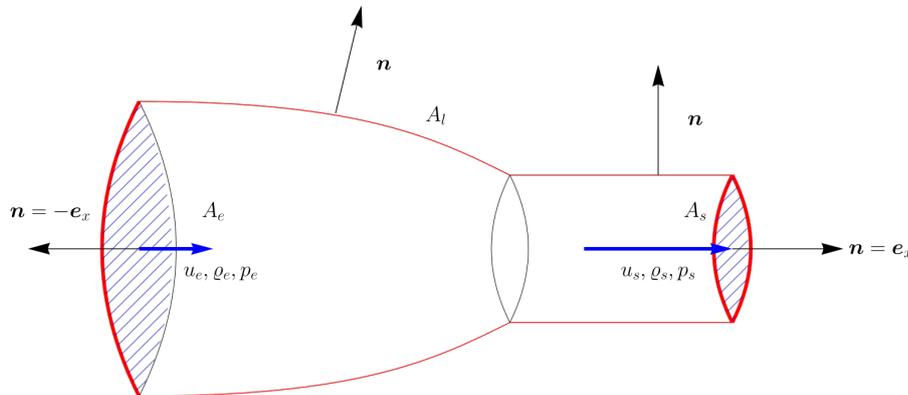


Figure 4.4 – Tuyère avec rétrécissement de section avec passage d'un diamètre D_e à un diamètre D_s . Reprise de la figure 4.3(b).

De même que pour la conservation de la masse, on considère un volume fixe V et on fait coïncider un volume matériel V_m au temps t pour pouvoir appliquer le principe (4.17) de conservation de la quantité de mouvement. On va poser quatre hypothèses supplémentaires :

- Le fluide se comporte comme un fluide parfait et le tenseur des contraintes se réduit à un tenseur isotrope de pression

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1}.$$

- Pour simplifier la notation et sans restreindre la généralité du résultat, on va introduire une pression généralisée p_* qui comprend la pression p au sein du fluide et le

7. Le tenseur des extra-contraintes est également « déviateur des contraintes » ou partie déviatorique des contraintes car il représente l'écart – la déviation – à l'état d'équilibre au repos où les contraintes sont isotropes.

8. Il n'y a pas de consensus sur l'appellation de cette équation dans la littérature technique.

potentiel gravitaire ψ tel que $\rho \mathbf{g} = -\nabla \psi$:

$$p_* = p + \psi.$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet en effet d'écrire que

$$\int_{V_m} \rho \mathbf{g} dV = - \int_{V_m} \nabla \psi dV = - \int_{S_m} \psi \mathbf{n} dS,$$

ce qui permet de traiter le poids comme une force surfacique et de regrouper la résultante des forces sous une unique intégrale de surface.

- On note \mathbf{R} l'action du fluide sur la paroi A_l de la tuyère:

$$\mathbf{R} = + \int_{A_l} p_* \mathbf{n} dS.$$

On fera attention ici au changement de signe qui résulte de l'application du principe d'action et de réaction de Newton. L'intégrale $-\int_{A_l} p_* \mathbf{n} dS$ avec la normale \mathbf{n} orientée telle qu'elle est représentée sur la figure 4.4 représente l'action de la paroi solide sur le fluide.

- Le champ de pression totale p_* est constant sur toute section A en travers de la conduite. Cette hypothèse peut se démontrer en développant par la suite les calculs, mais on admettra ici l'hypothèse. Cette pression totale vaut p_e^* sur la section A_e , et p_s sur la section A_s .

On note \mathbf{e}_x le vecteur unitaire dans la direction x . On a donc $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$ sur A_e , et $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ sur A_s (voir figure 4.2).

Avec ces hypothèses, le principe (4.18) de conservation de la quantité de mouvement sur V_m s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \int_V \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_{A_e+A_s} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = -\mathbf{R} - \int_{A_e+A_s} p_* \mathbf{n} dS.$$

Comme par ailleurs, on a la relation (4.13) pour un volume fixe et la paroi latérale est imperméable ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$), on peut aussi écrire

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_{A_e+A_s} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = -\mathbf{R} + (p_e^* A_e - p_s^* A_s) \mathbf{e}_x,$$

et donc la variation de quantité de mouvement \mathbf{Q} au sein du volume de contrôle fixe V_m est

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = - \int_{A_e+A_s} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS - \mathbf{R} + (p_e^* A_e - p_s^* A_s) \mathbf{e}_x.$$

On peut simplifier le terme de flux de quantité de mouvement

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \underbrace{(\rho_e A_e u_e^2 - \rho_s A_s u_s^2) \mathbf{e}_x}_{\text{différence des flux entrant et sortant}} + \underbrace{\frac{(p_e^* A_e - p_s^* A_s)}{\mathbf{e}_x}}_{\text{différence des forces de pression}} + \underbrace{-\mathbf{R}}_{\text{résultante des efforts sur la paroi}}.$$

Un cas particulier important est le cas où l'écoulement est permanent. Il n'y alors aucune variation de quantité de mouvement dans le volume fixe V . Dans la direction \mathbf{e}_x de l'écoulement, on a

$$\rho_e A_e u_e^2 + p_e^* A_e = \rho_s A_s u_s^2 + p_s^* A_s + \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{R}.$$

Si l'écoulement est isochoire ($\rho_e = \rho_s = \rho$), alors on peut déduire que la force de pression exercée sur la conduite représente la différence de ce qu'on va interpréter plus loin comme l'énergie totale $\Psi = \rho u^2/2 + p + \psi$ (voir le théorème de Bernoulli au § 4.1.7)

$$R = A_e \Psi_e - A_s \Psi_s.$$

avec $R = e_x \cdot \mathbf{R}$ la composante de la résultante des forces de pression sur la paroi selon la direction x . Le débit (volumique) est constant à travers toute section de la conduite. \square

Formulation locale

Une application du théorème de Green-Ostrogradski permet d'aboutir à la *formulation locale* des équations de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T},} \quad (4.21)$$

car $\nabla \cdot (p\mathbf{1}) = p\nabla \cdot (\mathbf{1}) + \mathbf{1} \cdot \nabla p = \nabla p$. Comme précédemment on a supposé pour passer de la formulation macroscopique à la forme locale que les différents champs (vitesse et masse volumique) étaient continus. L'équation locale n'est pas valable pour une onde de choc ou bien un ressaut hydraulique; dans un tel cas, il faut appliquer

- soit les formulations intégrales de la conservation de quantité de mouvement pour éviter d'avoir à traiter la discontinuité;
- soit ajouter des conditions supplémentaires qui viennent compléter les équations locales qui restent valables de part et d'autre de la discontinuité. De telles relations sont appelées *relations de Rankine-Hugoniot* ou bien conditions de choc.

On verra un exemple de traitement au chap. 5 avec le ressaut hydraulique qui est une discontinuité de la vitesse et de la hauteur dans un écoulement d'eau.

On peut encore écrire cette équation sous une forme condensée :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p_* + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

où comme dans l'exemple précédent, on associe le terme gravitaire $\rho \mathbf{g}$ au terme du gradient de pression et, ce faisant, on a introduit la *pression généralisée* $p_* = p + \psi$ et ψ le *potentiel gravitaire* tel que $\rho \mathbf{g} = -\nabla \psi$. Cette formulation est par exemple utilisée en hydraulique en charge pour traiter les effets de la gravité en termes de pression généralisée, ce qui permet d'inclure l'effet dans la gravité dans le terme de pression et de simplifier les équations.

Si on développe le terme d'accélération, on peut écrire les équations locales de différentes façons :

- une façon de faire est d'écrire l'accélération convective sous la forme d'un divergence de champ de contrainte $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$, ce qui sera utilisé au chap. 6 pour modéliser l'effet de la turbulence sur l'écoulement

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (4.22)$$

- Une autre formulation vectorielle de l'équation de conservation de quantité de mouvement est obtenue en faisant remarquer que $\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ peut s'écrire $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} =$

$\nabla|\mathbf{u}|^2/2 + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$. On a alors :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla |\mathbf{u}|^2 + \rho (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla |\mathbf{u}|^2 + \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

avec $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ la *vorticité*. Cette équation est parfois appelée *équation de Gromeka-Lamb*. Elle est utile quand on veut étudier la *vorticité* du fluide, c'est-à-dire les tourbillons et structures similaires qui se créent dans un fluide. L'équation de Gromeka-Lamb nous sera utile dans le chapitre sur l'hydraulique à surface libre quand on calculera des écoulements d'eau sur une protubérance du lit.

- une façon plus commune est d'écrire l'accélération convective sous la forme $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$:

$$\boxed{\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}}, \quad (4.23)$$

où l'on prendra bien garde à la position de la masse volumique ρ dans les termes différentiels.

Attention à la notation $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Cela ne signifie pas qu'il s'agit du produit entre le vecteur \mathbf{u} et le tenseur (matrice) $\nabla \mathbf{u}$. En fait, en toute rigueur, il faudrait écrire : $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, les parenthèses servant à indiquer que l'opérateur différentiel $\mathbf{u} \cdot \nabla$ est appliqué au vecteur \mathbf{u} . Il s'agit d'une commodité d'écriture qui n'est pas sans ambiguïté de sens. 

La dernière équation (4.23) sera la plus employée dans ce cours (et ailleurs). La principale différence entre les équations (4.23) et (4.22) est liée à la place de la masse volumique ρ . Si l'écoulement est isochore ou le matériau incompressible, ces deux équations sont trivialement obtenues puisque ρ est constante. L'équation (4.23) et ses variantes s'appellent équations de conservation de la quantité de mouvement ou bien équations de Newton ou bien encore *équation fondamentales de la dynamique*.

Projection de l'équation locale

En dimension 2, l'équation de conservation (4.23) peut être projetée de la façon suivante dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y) .

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y}, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{u} = (u, v)$ les composantes du vecteur vitesse, (g_x, g_y) les composantes du vecteur gravité. On se reportera au Complément du cours pour la formulation dans d'autres systèmes de coordonnées.

Cas particulier du fluide parfait (Euler)

Le cas particulier où $\mathbf{T} = 0$ correspond aux équations d'Euler, qui comme on l'a précisé plus haut, constituent le jeu d'équations du mouvement le plus simple qu'on puisse

imaginer et qui permettent de résoudre un grand nombre de problèmes pratiques en ingénierie (dynamique des gaz, écoulements à grande vitesse, etc.) lorsque le fluide est sans viscosité (on parle de fluide non visqueux, de fluide d'Euler, ou de fluide parfait) :

$$\boxed{\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p,} \quad (4.24)$$

Ce sont les équations d'Euler⁹.

Interprétation du terme de divergence des contraintes

On peut interpréter le termes $-\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}$ qui apparaît dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.23) en considérant un « volume » infinitésimal, ce qui permet notamment d'expliquer pourquoi les contraintes apparaissent sous la forme d'une divergence. Le raisonnement est classique et a déjà été appliqué dans le chapitre du complément du cours pour expliquer le sens physique de l'opérateur divergence. Tout d'abord, il faut se demander quelles sont les forces appliquées à un volume de contrôle infinitésimal, dont le « volume¹⁰ » par unité de largeur est $dx dy$ (voir figure 4.5).

- force de volume : action de la pesanteur $\rho \mathbf{g}$;
- forces à la surface du volume de contrôle : elles sont calculées à l'aide de Σ .

Considérons un repère cartésien en dimension 2. La représentation de Σ dans ce repère est donnée par la matrice symétrique :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix}.$$

Les contraintes sur la face orientée par la normale $\mathbf{n} = (-1, 0)$ sont :

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \Sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\Sigma_{xx} \\ -\Sigma_{xy} \end{bmatrix}.$$

tandis que sur la facette opposée orientée par la normale $\mathbf{n} = (1, 0)$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \Sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} + \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} dx \\ \Sigma_{xy} + \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial x} dx \end{bmatrix}.$$

On fait de même pour les normales orientées par $\mathbf{n} = (0, 1)$ et $\mathbf{n} = (0, -1)$. La projection des efforts sur l'axe x s'écrit donc (contrainte \times surface par unité de largeur) :

$$\left(-\Sigma_{xx} + \Sigma_{xx} + \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy + \left(-\Sigma_{xy} + \Sigma_{xy} + \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial y} dy \right) dx = \left(\frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial y} \right) dx dy.$$

De même, sur l'axe y , on trouve que la projection des efforts s'exprime comme :

$$\left(\frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{yy}}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ces petits calculs montrent que les efforts exercés sur la surface de contrôle d'un volume infinitésimal peuvent se calculer de façon générique à l'aide de l'expression $\nabla \cdot \Sigma$.

9. Leonhard Euler (1707-1783) a été l'un des plus grands mathématiciens et mécaniciens suisses. On lui doit de nombreuses avancées en mathématiques, optique, mécanique des fluides, et en astronomie. Il passe l'essentiel de sa vie hors de Suisse, principalement en Prusse et en Russie. Ses apports à la dynamique des fluides sont considérables. On lui doit notamment le premier jeu d'équations différentielles décrivant le mouvement d'un fluide.

10. On a vu précédemment qu'il s'agit abus de langage, on parle ici de volume pour désigner une surface, mais notre propos est généralisable aux trois dimensions de l'espace.

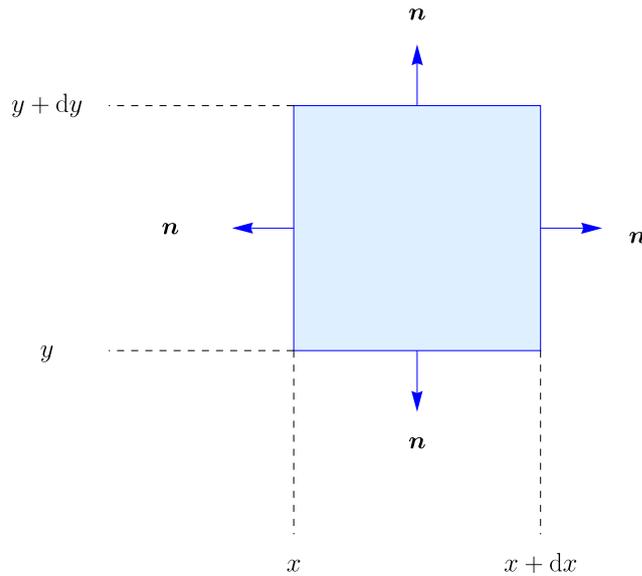


Figure 4.5 – Projection de la relation d'équilibre des contraintes sur un volume élémentaire. La normale \mathbf{n} de la surface contrôle est orientée de l'intérieur du volume de contrôle vers l'extérieur.

4.1.7 Conservation de l'énergie, théorème de Bernoulli

Premier principe de la thermodynamique

Rappelons que le premier principe de la thermodynamique énonce que l'énergie totale E , varie à cause du travail des forces extérieures et du flux de chaleur

$$\delta E = \delta W + \delta Q,$$

avec δE la variation d'énergie totale, c'est-à-dire l'intégrale sur le volume de contrôle de l'énergie cinétique k et l'énergie interne ρe (e étant l'énergie interne massique), δW le travail des forces extérieures au sein du volume de contrôle, δQ le flux de chaleur à travers la surface de contrôle S . Au lieu de parler en termes de travail, on peut parler en termes de puissance puisque si l'on divise l'équation précédente par un petit incrément de temps δt

$$\frac{\delta E}{\delta t} = \frac{\delta W}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta t},$$

et en faisant tendre δt vers 0, on obtient

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V (k + \rho e) dV}_{\text{taux de variation de l'énergie totale } E} = \underbrace{\int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV}_{\dot{W}} + \underbrace{\int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dS}_{\dot{Q}} - \underbrace{\int_S \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{n} dS}_{\dot{Q}},$$

avec \mathbf{j}_Q le flux de chaleur (voir complément de cours, chap. 1), \dot{W} le taux de variation du travail (ou puissance) des forces extérieures, \dot{Q} le flux de chaleur qui passe par unité de temps à travers la surface S , et $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte exercée par le milieu extérieur sur le volume de contrôle sur une facette dS orientée par \mathbf{n} .

Examinons maintenant de plus près la puissance des forces extérieures. Cette puissance comprend des termes positifs (puissance fournie au volume de contrôle) et négatifs (puissance dissipée au sein du volume ou aux frontières). La puissance fournie au volume comprend généralement la puissance apportée par la force de gravité et les forces de pression (ce n'est pas une règle absolue) tandis que la dissipation d'énergie résulte généralement des extra-contraintes (dissipation visqueuse dans le cas d'un fluide newtonien). Comme précédemment pour les contraintes, il est plus sage de faire une décomposition entre puissances dues à des forces de volumes et puissances dues à des forces de surface sans se soucier du signe de ces contributions :

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \text{puissance fournie au volume } V + \text{puissance dissipée aux frontières et dans } V, \\ &= \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dS,\end{aligned}$$

Par définition de la contrainte via le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$ (voir complément de cours, chap. 2), on a

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{1} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{n},$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{u} \cdot (-p\mathbf{n} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS, \\ &= \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS,\end{aligned}\quad (4.25)$$

car \mathbf{T} est symétrique. La formulation macroscopique du premier principe de la thermodynamique est donc le suivant

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V (k + \rho e) dV = \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q) \cdot \mathbf{n} dS.} \quad (4.26)$$

On souhaite disposer d'une formulation locale de ce principe. L'étape suivante consiste donc à écrire les intégrales de surface apparaissant dans le membre de droite de l'équation (4.26) sous forme d'intégrales de volumes.

L'application du théorème de Green-Ostrogradski fournit immédiatement

$$\int_S (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q) dV.$$

En substituant cette dernière relation dans l'équation (4.26), on arrive finalement à l'équation locale de conservation de l'énergie totale

$$\boxed{\frac{d}{dt}(k + \rho e) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}_Q).} \quad (4.27)$$

Conservation de l'énergie cinétique

Il est possible d'obtenir une relation locale pour le taux de variation de l'énergie cinétique en multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.23) par la vitesse \mathbf{u}

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T},$$

et de là, en remplaçant les termes de la forme $\mathbf{u}\partial\mathbf{u}$ par $\partial|\mathbf{u}|^2/2$, on arrive à

$$\frac{1}{2}\rho\frac{\partial|\mathbf{u}|^2}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\mathbf{u}\cdot\nabla(|\mathbf{u}|^2) = \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{g} - \mathbf{u}\cdot\nabla p + \mathbf{u}\cdot\nabla\cdot\mathbf{T}.$$

En se servant de l'équation de continuité (4.16) et de l'identité $2\nabla\cdot(k\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla|\mathbf{u}|^2$, on peut transformer cette équation et obtenir une dérivée matérielle de l'énergie cinétique locale

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla\cdot(k\mathbf{u}) = \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{g} - \mathbf{u}\cdot\nabla p + \mathbf{u}\cdot\nabla\cdot\mathbf{T}. \quad (4.28)$$

Cette équation est appelée *équation de conservation de l'énergie cinétique*. Dans cette équation, le terme $\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{g}$ représente la puissance de la force de gravité, $-\mathbf{u}\cdot\nabla p$ la puissance des forces de pression, et $\mathbf{u}\cdot\nabla\cdot\mathbf{T}$ la puissance des extra-contraintes (dissipation d'énergie).

Fonction de dissipation

En comparant les équations (4.28) et (4.27), on note certaines similitudes dans les termes apparaissant dans le membre de droite, similitudes que l'on va exploiter pour fournir différentes expressions des énergies cinétique et interne. Pour cela, on va se livrer à quelques manipulations algébriques. Tout d'abord, en servant des propriétés de composition de l'opérateur divergence, on peut écrire :

$$\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}:\nabla\mathbf{u}.$$

Compte tenu de la symétrie de \mathbf{T} , on a la relation $\mathbf{T}:\nabla\mathbf{u} = \mathbf{D}:\mathbf{T}$ ¹¹. En effet (voir complément de cours, chap. 2), le tenseur « gradient de vitesse » se décompose en une partie symétrique (le tenseur des taux de déformation \mathbf{D}) et une partie antisymétrique (le tenseur des taux de rotation \mathbf{W})

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{W}.$$

On peut montrer (voir complément de cours, chap. 1) que la trace du produit de tout tenseur symétrique \mathbf{S} et de tout tenseur antisymétrique \mathbf{A} est nulle. On en déduit donc que

$$\mathbf{T}:\nabla\mathbf{u} = \mathbf{T}:(\mathbf{D} + \mathbf{W}) = \mathbf{T}:\mathbf{D}.$$

La quantité $\Phi = \text{tr}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}) = \mathbf{T}:\mathbf{D}$ s'appelle la *fonction de dissipation* et représente la puissance dissipée par les extra-contraintes \mathbf{T} .

On écrit finalement

$$\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla\cdot\mathbf{T} + \Phi.$$

Avec cette relation en main et en retranchant membre à membre les équations (4.28) et (4.27), on déduit

$$\boxed{\frac{d}{dt}\rho e = -p\nabla\cdot\mathbf{u} + \Phi - \nabla\cdot\mathbf{j}_Q}. \quad (4.29)$$

Cela montre que dans le cas général, l'énergie interne du volume de contrôle varie au cours du temps sous l'effet

- de la puissance dissipée par les extra-contraintes (visqueuses dans le cas newtonien) Φ ;

11. Rappelons la signification du symbole « : ». Il s'agit de la notation abrégée de l'opérateur trace : $\text{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{S}) = \mathbf{A}:\mathbf{S}$. On l'appelle également produit doublement contracté (voir complément de cours, chap. 1).

- de la puissance dissipée ou fournie par la dilatation/compression du matériau $-p\nabla \cdot \mathbf{u} = p(d\rho/dt)/\rho$ [d'après l'équation de continuité (4.16)];
- de la puissance calorifique $-\nabla \cdot \mathbf{j}_Q$.

On appelle cette équation l'équation de conservation de l'énergie interne.

Un cas particulier important est celui des fluides incompressibles ($\rho = cte$) dans un écoulement isotherme ($\mathbf{j}_Q = 0$). Dans ce cas précis, l'équation de l'énergie interne se simplifie grandement

$$\frac{d}{dt}\rho e = \Phi.$$

Cela montre que l'énergie interne est dissipée via les extra-contraintes. Ce cas particulier se rencontre très fréquemment en pratique puisque la plupart des écoulements d'intérêt pratique sont isochores et isothermes. La fonction de dissipation $\Phi = \mathbf{T} : \mathbf{D}$ nous renseigne alors complètement sur la façon dont le système dissipe son énergie.

Équation générale de Bernoulli

Une autre formulation intéressante est obtenue par manipulation de l'équation de conservation de l'énergie cinétique (4.28) dans le cas où on peut considérer le fluide comme incompressible : ρ est une constante. On note $\psi = \rho g z$ le potentiel gravitaire ($\rho \mathbf{g} = -\nabla \psi$) et $p_* = p + \psi$ la pression généralisée. On tire donc que : $\rho \mathbf{g} - \nabla p = -\nabla p_*$. On peut donc écrire du fait de l'incompressibilité

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k\mathbf{u}) \\ &= \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}. \end{aligned}$$

De même, on peut écrire

$$\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p_* - \Phi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}).$$

Avec ces relations en main, on écrit l'équation de conservation de l'énergie cinétique (4.28) sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) &= \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_*, \\ &= \frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (k + \psi + p). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Cette équation s'interprète ainsi :

- Φ représente la puissance dissipée par unité de volume ;
- $\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T})$ représente l'énergie dissipée ou produite aux frontières du domaine. Pour s'en convaincre, il suffit d'intégrer ce terme sur \mathcal{V} , puis d'utiliser le théorème de Green-Ostrogradski ;
- $\partial k / \partial t$ est la variation locale d'énergie cinétique ;
- $\mathbf{u} \cdot \nabla (k + \psi + p)$ représente le transport ou *advection* d'une quantité $\Psi = k + \psi + p$ qui est la somme de l'énergie cinétique k , de l'énergie potentielle ψ , et de la pression p . Cette quantité est l'énergie totale en un point. C'est le pendant de l'énergie mécanique pour la mécanique du point (qui est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle). Pour un fluide, il existe donc un terme supplémentaire qui est le terme de pression.

Rappelons que, comme en mécanique du point ou du solide, le théorème de l'énergie cinétique est une représentation alternative de la relation fondamentale de la dynamique. Pour un problème régulier, on peut employer l'une ou l'autre, c'est-à-dire les relations (4.23) ou (4.28); le choix de l'une ou de l'autre tient le plus souvent à la rapidité du calcul ou bien à la commodité du raisonnement, mais quel que soit le choix opéré, le résultat final est identique. Dans certains problèmes plus complexes, on ne peut en pratique utiliser qu'une ou l'autre des formes. Par exemple, dans l'étude des chocs ou des ressauts hydrauliques, il faut travailler avec des équations macroscopiques (sur des volumes de contrôle) car les champs peuvent être localement discontinus; en outre, on ne peut pas utiliser facilement l'équation de l'énergie à cause de dissipation localisée de l'énergie au niveau de la discontinuité. Dans ce cas-là, seule l'équation de la quantité de mouvement doit être utilisée.



Théorème de Bernoulli

Un cas particulier important est le cas d'un écoulement permanent d'un fluide non visqueux. Dans ce cas-là, on a

- écoulement permanent $\Rightarrow \partial k / \partial t = 0$;
- viscosité nulle $\Rightarrow \mathbf{T} = 0$ et $\Phi = 0$.

Sous ces conditions, l'équation (4.30) devient

$$\mathbf{u} \cdot \nabla (k + \psi + p) = 0,$$

ce qui veut dire que \mathbf{u} est normal au vecteur $\nabla \Psi$ en tout point, or d'après l'interprétation géométrique de l'opérateur gradient (voir complément de cours, chap. 1), $\nabla \Psi$ est un vecteur normal aux surfaces isopotentielles $\Psi = cte$, donc \mathbf{u} doit être tangent à ces surfaces isopotentielles. On peut montrer (voir complément de cours, chap. 2) que le lieu des points où le vecteur vitesse est tangent est appelé une ligne (resp. une surface) de courant. Il s'ensuit que le long d'une ligne de courant, la quantité Ψ est constante.

En résumé, le *théorème de Bernoulli*¹² énonce que si

- l'écoulement est permanent;
- l'écoulement est isochore ou bien le matériau incompressible;
- les dissipations d'énergie sont négligeables;

alors le long de toute ligne de courant, la quantité $\Psi = k + \psi + p$ se conserve. Dans le cas fréquent où l'énergie potentielle s'écrit $\psi = \rho g z$, alors on a :

$$\boxed{\Psi = \rho g z + \rho \frac{u^2}{2} + p = cte,} \quad (4.31)$$

avec $u = |\mathbf{u}|$.

12. Daniel Bernoulli (1700–1782) est l'un des plus éminents scientifiques suisses du XVIII^e siècle avec Euler. Il fait partie d'une illustre famille qui a donné de grands scientifiques en médecine, mathématiques, et physique. Son oncle Jacques (1654–1705) a eu d'importantes contributions en mathématiques (équations différentielles, séries, probabilité, géométrie, etc.). Après des études de médecine à Bâle, il est obligé de quitter la Suisse faute de poste. Sa contribution principale est contenue dans l'ouvrage «Hydrodynamica» publié en 1738. Il y développe le principe qui porte son nom ainsi que les premières explications du comportement des gaz en tenant de raisonner à l'échelle moléculaire (un concept alors inconnu).

Ce théorème est remarquable car il s'agit d'une relation purement algébrique (pas de différentielle ou d'intégration) qui permet de relier vitesse, pression, et position du fluide. Ce théorème a de nombreuses applications. Il est très apprécié des ingénieurs (et des étudiants) pour résoudre rapidement des problèmes pratiques. Toutefois, dans bien des cas pratiques, on ne peut pas négliger la dissipation d'énergie et il faut alors utiliser des formules plus complexes que l'équation de Bernoulli (4.31).

4.2 Quelques applications du théorème de Bernoulli

4.2.1 Formule de Torricelli

La formule de Torricelli permet de calculer la vitesse de vidange d'un récipient contenant une hauteur h d'un liquide (de masse volumique ρ). Cette formule s'établit facilement à l'aide de l'équation de Bernoulli.

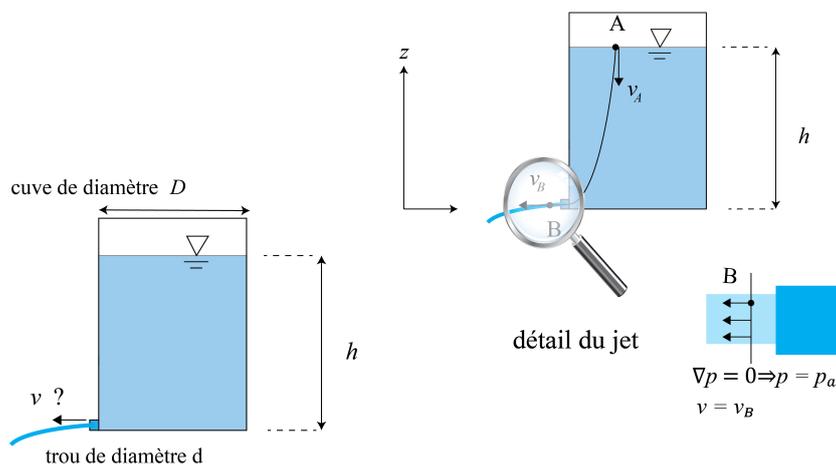


Figure 4.6 – Vidange d'un réservoir.

Considérons une ligne de courant entre un point A à la surface libre du liquide dans le récipient et un point B au niveau de l'orifice. On suppose que la pression atmosphérique p_a s'applique à ces deux points (le gaz contenu dans le réservoir n'est pas sous pression). D'après l'équation (4.31), on a

$$\rho g z_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + p_A = \rho g z_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + p_A,$$

avec z_A et z_B la position de A et B, v_A et v_B les vitesses en A et B, et p_A et p_B la pression aux points A et B. Si le diamètre du réservoir est suffisamment grand par rapport au diamètre de l'orifice, la vidange est lente et, dans un premier temps, on peut supposer que l'écoulement est permanent; de plus, la vitesse en A doit alors être très faible, donc on pose $v_A \approx 0$. De plus on a $p_A = p_B = p_a$ et $z_A = z_B + h$, ce qui permet de simplifier l'équation ci-dessus

$$\rho g h = \rho \frac{v_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}.$$

4.2.2 Intrusion d'un courant de gravité

La formule de von Kármán¹³ permet de calculer la vitesse du front d'un fluide lourd dans un fluide plus léger. Ce problème a été résolu par von Kármán au moment de la seconde guerre mondiale, quand les Alliés lui demandaient de calculer la vitesse de propagation d'un gaz toxique dans l'atmosphère. Cette formule a de nombreuses applications en météorologie (avancement d'un front froid), en océanographie (propagation d'un courant de turbidité), et dans les problèmes de mélange.

On considère l'intrusion d'un fluide lourd de masse volumique ϱ dans un fluide ambiant, plus léger ($\varrho_a < \varrho$), au repos, et faiblement visqueux de telle sorte qu'on néglige la dissipation d'énergie. On souhaite calculer la vitesse du front (u) en fonction de sa hauteur et des masses volumiques.

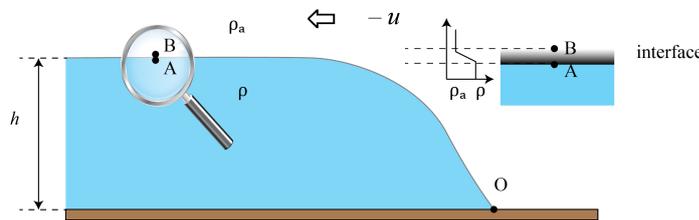


Figure 4.7 – Propagation d'un front à vitesse constante.

Pour cela, von Kármán admet que la vitesse du front est constante. Il se place dans le repère attaché au front. Dans ce repère, le front est fixe et c'est le fluide ambiant qui en mouvement avec une vitesse $-u$. Comme l'écoulement est permanent, la ligne de la surface libre est également une ligne de courant et on peut appliquer le théorème de Bernoulli entre un point B situé à l'interface entre fluides lourd et léger (B est dans le fluide ambiant) et le point O situé au front (point fixe situé à la fois dans le fluide lourd et dans le fluide ambiant)

$$P_B + \frac{1}{2}\varrho_a(-u)^2 + \varrho_a gh = P_0 + 0 + 0.$$

Il considère aussi un point A situé juste sous l'interface (A est dans le fluide lourd). Puisque dans le repère attaché au front, le fluide lourd est au repos, la loi de l'hydrostatique s'applique et on a notamment $P_0 = P_A + \varrho gh$. Si on prend maintenant A et B infiniment voisins, la différence de pression (en l'absence d'effet de tension de surface) doit être nulle : $P_A = P_B$, d'où

$$u = \sqrt{2\frac{\varrho - \varrho_a}{\varrho_a}gh},$$

ou encore

$$\frac{u}{\sqrt{g'h}} = \sqrt{2},$$

avec $g' = (\varrho - \varrho_a)/\varrho_a$ la gravité réduite. La dernière équation montre que le nombre de Froude $u/\sqrt{g'h}$ est constant au front. Expérimentalement, cette formule donne de bons

13. Theodore von Kármán (1881–1963) a été l'un des plus grands mécaniciens des fluides du xx^e siècle. Né en Hongrie (alors province de l'Empire Austro-Hongrois), il émigra par la suite en Allemagne, puis aux États-Unis. Ses travaux portèrent essentiellement sur la couche limite logarithmique, les instabilités derrière les obstacles (les fameuses allées de von Kármán), les écoulements supersoniques, etc. Comme Thomson et Reynolds avant lui, il a été aussi un exemple de mécanicien, avec des intérêts tout à la fois sur les points fondamentaux de la mécanique et les applications (principalement militaires).

résultats, mais il faut souvent ajouter un facteur correctif car on travaille avec des fluides ambiants qui ne sont pas infiniment épais. La démonstration apportée par von Kármán est considérée de nos jours comme fautive. Notamment, Benjamin (1968) a montré qu'on ne pouvait pas utiliser l'équation de Bernoulli le long d'une interface et que la résolution correcte du problème nécessitait d'employer des volumes de contrôle et de faire des bilans de quantité de mouvement sur ces volumes. Toutefois, le résultat final reste inchangé (mais pourrait-il en être autrement d'un point de vue dimensionnel?).

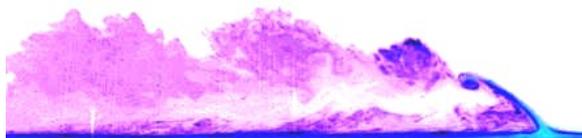


Figure 4.8 – Courant de densité en laboratoire. Le courant intrusif a été produit en employant un fluide lourd (eau salée et colorée) dans un fluide plus léger (eau).

4.2.3 Tube de Pitot

Le tube Pitot¹⁴ sert à mesurer la vitesse locale d'un fluide en le reliant à la différence de pression d'un manomètre à liquide.

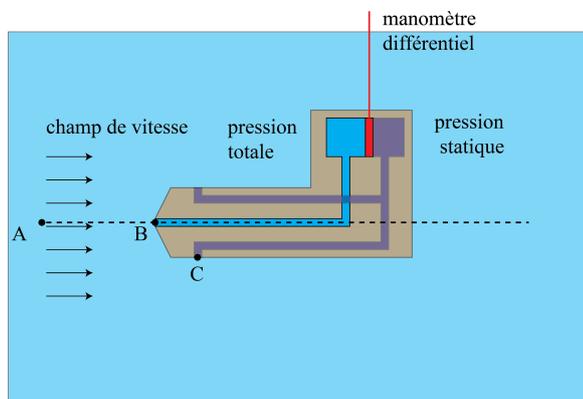


Figure 4.9 – Tube de Pitot.

L'idée est la suivante : on considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant. À son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'y a plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un *point d'arrêt* de la ligne de courant.

14. Henri Pitot (1695–1771) était un hydraulicien français. Il fut nommé surintendant du Canal du Midi et construisit un aqueduc pour l'alimentation en eau de Montpellier. Afin de pouvoir mesurer les vitesses de l'eau dans les rivières et canaux, il inventa un appareil qui porte aujourd'hui son nom.

Considérons une ligne de courant A-B. En A, on a $p = P_A$ (par exemple une pression hydrostatique), $v = v_A = v_\infty$, et $z = z_A$. En B, on a $p = p_B$, $u_B = 0$, et $z = z_A = z_B$. Le théorème de Bernoulli donne donc

$$\begin{aligned} p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A &= p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B \\ &= p_B + \rho g z_A, \end{aligned}$$

d'où

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_B - p_A)}.$$

Comme la différence de pression $p_B - p_A$ peut être déterminée si on utilise un manomètre (tube en U), on peut déduire la vitesse v_∞ .



CHAPITRE 5

Écoulement à surface libre

5.1 Introduction

5.1.1 Généralités

L'HYDRAULIQUE à surface libre se distingue de l'hydraulique en charge par l'existence d'une *surface libre*, c'est-à-dire d'une surface où l'écoulement est en contact direct avec l'atmosphère¹ : le gradient de pression ne peut plus être le moteur de l'écoulement, c'est la gravité qui devient l'agent moteur. Le domaine d'application est large :

- cours d'eau naturels : rivières, fleuves, etc. ;
- canaux de navigation, d'irrigation, etc. ;
- systèmes d'évacuation : réseaux d'assainissement pluvial ;
- aménagements : retenues d'eau, usines de production d'électricité, ports, etc.

Dans ce chapitre, on va voir comment le théorème de Bernoulli généralisé nous permet de calculer les caractéristiques d'un écoulement d'eau sur une pente en régime permanent. La figure 5.1 montre une simulation numérique qui correspond au cas traité au § 5.6.3 (voir figure 5.55) : on ouvre une vanne, et un débit constant $q = 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (par unité de largeur) est établi à l'entrée d'un coursier raide. L'eau suit ce coursier et arrive dans un long canal à faible pente ($i = 0,2 \%$), qui s'achève sur un muret (seuil) haut de 50 cm. L'eau remplit tout le canal jusqu'à ce que la hauteur dépasse le muret, puis une fois que le débordement a commencé, le muret se comporte comme un simple obstacle. Notons les ondes qui remontent le courant et une variation brutale (qui apparaît comme un mur d'eau) tout à l'entrée du canal, variation qu'on appellera ressaut hydraulique. Au bout de plusieurs centaines de secondes, la hauteur d'eau $h(x, t)$ n'évolue plus ; elle s'est stabilisée autour d'un profil asymptotique $h(x)$. Dans ce chapitre, on va voir comment on peut calculer ce profil asymptotique en fonction des caractéristiques du canal et du débit. Dans le cours de master, on verra comment on peut calculer la variation temporelle de $h(x, t)$ à l'aide d'un jeu d'équations appelées « équations de Saint-Venant ».

1. La pression du fluide à cette interface est égale à celle de l'atmosphère.

Figure 5.1 – Simulation numérique montrant l'évolution de la hauteur d'eau $h(x, t)$. Les simulation se fondent sur la résolution des équations de Saint-Venant à l'aide de la méthode numérique des volumes finis (solveur geoclaw étendu à l'ordre 2, limiteur du flux de type superbe) (George, 2008); le code est disponible ici: [//github.com/cancey/hydraulics](https://github.com/cancey/hydraulics). La géométrie étudiée est celle montrée à la figure 5.55, avec un lit dont la pente est $i = 0,2\%$; le frottement de type Chézy avec $C = 50 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$. On ouvre une vanne (de hauteur $h = 2 \text{ m}$), et un débit constant $q = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ est établi. L'eau s'écoule sur un coursier à forte pente ($i = 5\%$), puis sur un radier à pente douce ($i = 0,2\%$), qui se termine par un seuil haut de 50 cm. Notons la formation d'un ressaut hydraulique à l'amont du radier. La hauteur d'eau tend vers un profil constant, dont une portion correspond à la hauteur normale $h_n = 2,71 \text{ m}$. Une durée de 900 s a été simulée. On pourra comparer cette simulation avec la figure 5.56, qui montre le calcul du profil asymptotique $h(x)$ (c'est-à-dire à des temps suffisamment grands pour que l'écoulement atteigne un régime stationnaire) pour le cas étudié. Dans le cadre de ce cours, on va voir comment on peut calculer cette hauteur $h(x)$ du régime stationnaire une fois que la dépendance vis-à-vis du temps est devenue négligeable.

5.1.2 Un peu de vocabulaire et des notations

- *bief*: tronçon homogène en termes de pente moyenne et de section d'écoulement (on emploie parfois aussi le mot *bisse*, notamment dans le Valais, mais le contexte est un peu différent);
- type de cours d'eau: il existe plusieurs classifications. Selon Bernard (1927), une distinction des cours d'eau peut se faire en fonction de la pente i :
 - $i < 3\%$ on parle de *rivière*,
 - $3 < i < 6\%$, on parle de *rivière torrentielle*,

- $i > 6\%$, on parle de *torrent*.

On distingue également les rivières naturelles (sans intervention humaine ou avec peu de modifications), les canaux (cours d'eau artificiels), et les rivières aménagées. Voir figures 5.2 et 5.3.



Figure 5.2 – Typologie simplifiée des cours d'eau : (a) torrent (ici la Navisence à Zinal, VS); (b) rivière torrentielle (ici le Doubs à Saint-Ursanne, JU); (c) fleuve (la Loire à Langeais, France); (d) canal (canal de Bourgogne à Vandenesse, France).

- *largeur au miroir B* : largeur de la section d'écoulement au niveau de la surface libre ;
- *périmètre mouillé χ* : longueur de la surface d'écoulement en contact avec le lit (fond + berges), c'est-à-dire le périmètre de la section d'écoulement auquel on retranche la largeur au miroir B . La figure 5.4 montre une coupe typique d'un cours d'eau et la notation employée.
- *section d'écoulement* (ou section mouillée) S : partie de la section du canal limitée par les parois et la surface libre ;



Figure 5.3 – Beaucoup de cours d'eau de plaine ont été aménagés pour limiter leur expansion, lutter contre les crues, et assurer un certain débit dans la rivière. Ici le Rhône à l'aval de Saint-Maurice (VS) depuis la cabane de la Tourche.

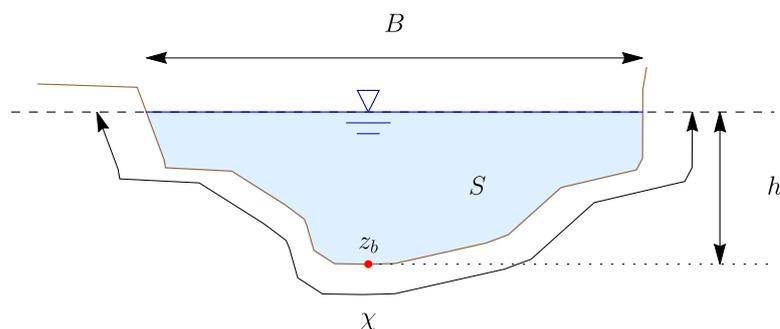


Figure 5.4 – Coupe d'une rivière avec définition des grandeurs caractéristiques : χ périmètre mouillé, S section mouillée, h profondeur ou tirant d'eau, et B largeur au miroir.

- *hauteur d'écoulement*. On distingue la hauteur moyenne d'eau et la profondeur maximale. Par définition, la hauteur moyenne est

$$h = \frac{S}{B}.$$

La désignation peut varier selon les auteurs : $h = S/B$ peut être appelée la *hauteur hydraulique* ou la *profondeur hydraulique*. La hauteur d'écoulement peut désigner la profondeur maximale (appelée aussi le *tirant d'eau*). Ces définitions ne posent pas de problème pour des canaux rectangulaires, mais elles peuvent en poser pour des canaux de section quelconque (attention donc aux définitions et conventions);

- *hauteur normale* h_n : c'est la hauteur atteinte asymptotiquement par un écoulement en régime permanent uniforme dans un bief. Ici, « asymptotiquement » signifie que

cette hauteur est atteinte uniquement si le bief est de longueur suffisante. La hauteur normale est fonction du débit Q , de la rugosité, et de la pente moyenne i ;

- *hauteur critique* h_c : c'est la hauteur associée à la valeur critique du nombre de Froude $Fr = 1$;
- *rayon hydraulique*: c'est une longueur caractéristique définie par

$$R_H = \frac{S}{\chi}$$

Pour un écoulement dans un canal rectangulaire infiniment large ($B \gg h$), le rayon hydraulique correspond à la hauteur d'écoulement h ;

- *courbe de remous*: la courbe de remous est la courbe décrivant la variation de la hauteur d'eau dans un bief. Pour un écoulement graduellement varié, l'équation de cette courbe est appelée équation de la courbe de remous [voir équation (5.2)];
- *régime*: il s'agit d'une caractérisation de l'écoulement en fonction de la variabilité spatiale ou temporelle de la hauteur d'écoulement. On distingue :
 - régime *uniforme*: régime d'écoulement le long d'un bief où les caractéristiques d'écoulement (hauteur et vitesse) sont constantes quelle que soit la position le long de la direction d'écoulement. On a ainsi $\partial h / \partial x = 0$;
 - régime *permanent*: régime où l'écoulement ne dépend pas du temps. On a ainsi $\partial h / \partial t = 0$;
 - régime *graduellement varié*: régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très faible, typiquement si L désigne une longueur d'écoulement et Δh une variation de hauteur, on a $\Delta h / L \ll 1$.
- **Le théorème de Bernoulli, qui nous sert à obtenir l'équation (différentielle) de la courbe de remous² n'est valable que pour ce régime;** 
- régime *rapidement varié*: régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très importante, typiquement si L désigne une longueur d'écoulement et Δh une variation de hauteur, on a $\Delta h / L = O(1)$. À l'approche d'une singularité ou bien en cas de ressaut hydraulique, l'écoulement peut entrer dans un régime rapidement varié;
- régime *supercritique* (ou *torrentiel*): régime pour lequel $Fr > 1$, qui se caractérise par de fortes vitesses et de faibles hauteurs;
- régime *subcritique* (ou *fluvial*): régime pour lequel $Fr < 1$, qui se caractérise par des vitesses faibles et de grandes hauteurs;
- *ressaut hydraulique*: variation brutale de hauteur d'eau (passage d'un régime torrentiel à un régime fluvial);
- *pente moyenne*: pente moyenne longitudinale $i = \tan \theta$ d'un bief exprimé en % ou en ‰;
- *débit* Q : flux d'eau par unité de temps à travers la surface d'écoulement;
- *vitesse moyenne* \bar{u} (appelée parfois aussi *vitesse débitante*): c'est la vitesse moyenne au sein de la section d'écoulement:

$$\bar{u} = \frac{Q}{S};$$

2. Cela est vrai aussi pour les équations de Saint-Venant que l'on utilisera dans le cours de master « ondes de crue et rupture de barrage ».

- coefficient de *rugosité*: coefficient traduisant la rugosité des parois (coefficient de Chézy noté C ou de Manning–Strickler noté K). La rugosité reflète en premier lieu la granulométrie du lit. Par exemple, un lit torrentiel est composé d'éléments grossiers couvrant une large plage granulométrique allant de la taille millimétrique à métrique (voir figure 5.5), alors que les rivières de plaine s'écoulent sur un lit alluvial composé de gravier fin à granulométrie resserrée ou bien de sable (voir figure 5.6). La granulométrie est décrite à l'aide de courbes granulométriques, qui fournit la proportion en masse ou en volume de grains selon la taille des grains. On introduit des quantiles de taille: le diamètre médian d_{50} est la taille pour laquelle 50 % des grains ont une taille supérieure ou égale à d_{50} , et 50 % ont une taille plus petite. De même, d_{84} correspond au quantile de 84 %: 84 % des grains ont une taille plus grande que d_{84} ;



Figure 5.5 – Dans les rivières torrentielles (ici la Navisence, val d'Anniviers, VS), le lit est composé de matériaux grossiers allant des éléments fins aux blocs de taille métrique.

- *rivière alluviale*: c'est un cours d'eau dont le lit est creusé dans des dépôts de sédiments qui ont été transportés et déposés antérieurement par cette même rivière. La section du lit est donc le fruit d'un ajustement entre le transport de sédiment et le débit. La plupart des rivières sont alluviales, mais certains cours d'eau comme les torrents de montagne dans des gorges sur des lits rocheux (bedrock) ou coulant sur des dépôts morainiques ne font pas partie des écoulements alluviaux (voir figure 5.7).
- lit *mineur*: lit occupé ordinairement par un cours d'eau par opposition au lit *majeur* qui correspond à l'emprise maximale historique d'un cours d'eau ou à la plaine inondable (voir figure 5.8). On parle aussi de *niveau des plus hautes eaux* (PHE) pour désigner la cote maximale atteinte par la surface libre d'un cours d'eau;
- *berge* ou *rive*: c'est le talus qui sépare le lit mineur du lit majeur. Lorsque la berge est couverte par la végétation, on parle de *ripisylve*;
- *étiage*: ce terme fait référence aux plus basses eaux d'un cours d'eau, généralement durant l'été (voir figure 5.10). Le débit d'étiage est donc le débit minimal d'un cours d'eau

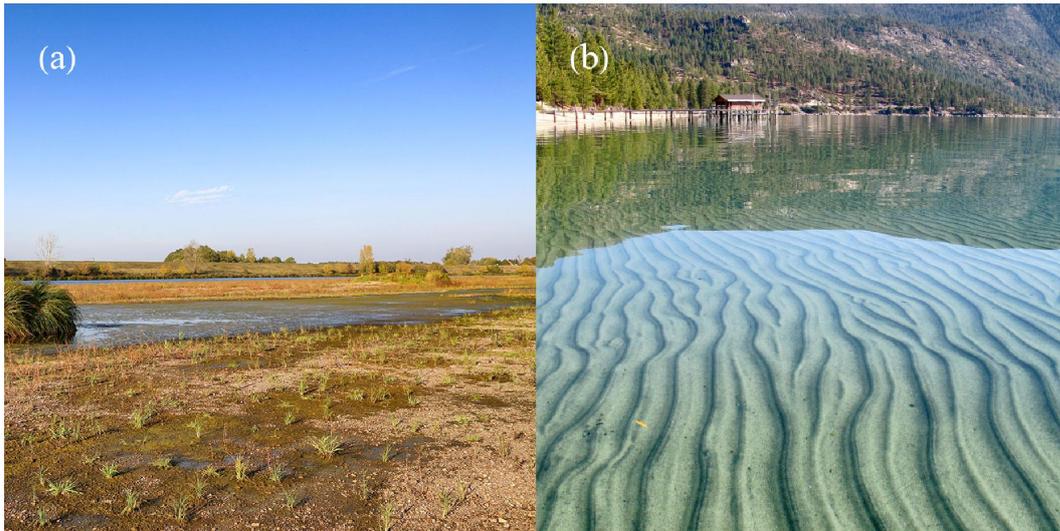


Figure 5.6 – Dans les rivières de plaine, le lit est composé d’éléments plus fins et avec une granulométrie plus resserrée. (a) La Loire à Amboise (Indre-et-Loire) s’écoulant sur un lit de gravier. (b) Lac Tahoe (Nevada, États-Unis).

- *débit de plein bord*: c’est le débit atteint lorsque la rivière sort de son lit mineur et inonde son lit majeur. Durant une crue, on parle de débit de pointe pour désigner le débit maximal atteint. Pour les crues, on peut relier le débit de pointe à la *période de retour* T^3 . Le *débit dominant* est le débit de la crue ordinaire qui permet de façonner un cours d’eau. Pour les rivières à sable, le débit dominant correspond au débit de pointe d’une crue de période 1–2 ans alors que pour un lit à gravier, il correspond à crue de période de retour de quelques dizaines d’années.

3. La période de retour T est définie par rapport à la probabilité d’observer la crue (ou une crue supérieure) P : $T = 1/P$; c’est aussi l’intervalle de temps moyen entre deux crues ayant dépassant un certain seuil.



Figure 5.7 – Différents types de lit. (a) Lit rocheux (bedrock) de l’Orbe au-dessus de la ville éponyme (VD). (b) Lit morainique sur lequel le torrent de la Reuse de l’A Neuve s’est frayé un chemin (La Fouly, VS). (c) L’Arc à Bessans (vallée de la Maurienne, Savoie, France) s’écoulant sur un lit alluvial. (d) Le Rhône à Fully (VS) canalisé de Sierre au Léman, et s’écoulant dans la plaine alluviale qu’il a façonnée.

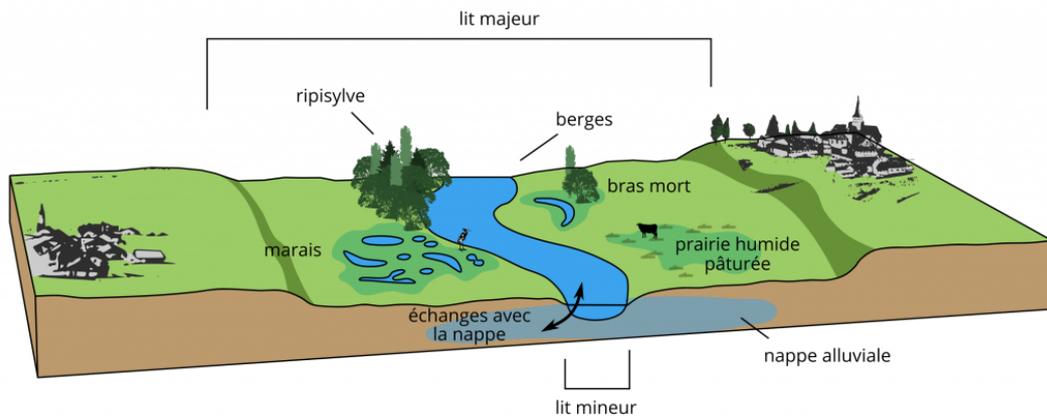


Figure 5.8 – Schéma des lits mineur et majeur. Source : [OiEau](#).



Figure 5.9 – Exemples d'inondation et crue. (a) Inondations de Berne en août 2005. (b) Crue de l'Ouvèze à Vaison-la-Romaine (Vaucluse, France) en septembre 1992 à la suite d'abondantes précipitations, qui dit 47 victimes. Source : [Reuters](#) et [M. J. Tricart](#)

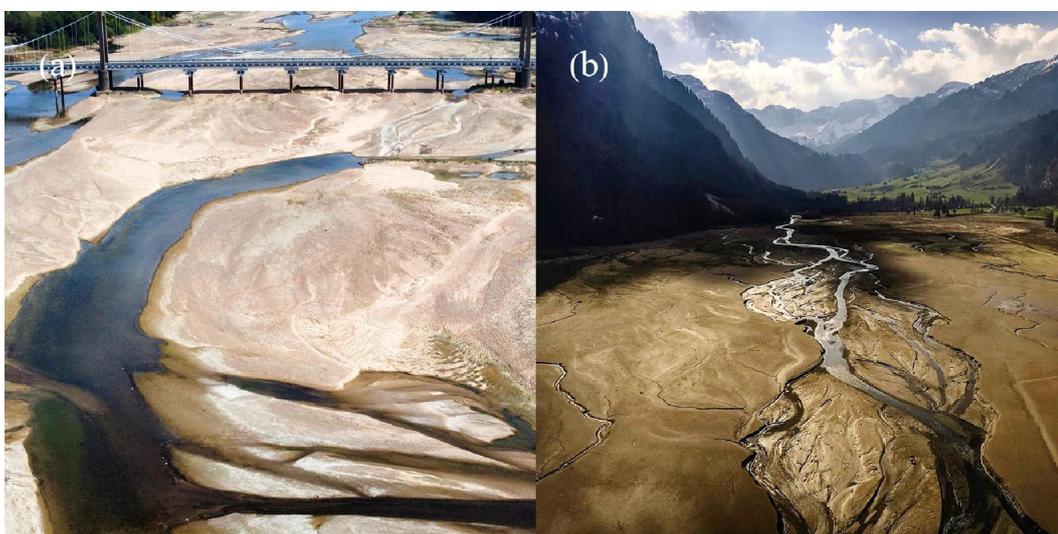


Figure 5.10 – Exemples d'étiage. (a) La Loire en août 2022 (France). (b) lac de Klontal, canton de Glarus en avril 2023. Source : Stéphane Mahé, Reuters, cité par [Le Monde](#) et Gian Ehrenzeller, Keystone, cité par [Tages Anzeiger](#)

5.1.3 Terminologie dans d'autres langues

Le tableau 5.1 fournit une correspondance entre termes en français, anglais, allemand, italien, et espagnol.

Tableau 5.1 – Terminologie française, allemande, anglaise et espagnole.

<i>français</i>	<i>allemand</i>	<i>anglais</i>	<i>italien</i>	<i>espagnol</i>
bief	Gewässerabschnitt	reach	tronco	tramo
rivière	Fluss, Bach	river	fiume	río
rivière torrentielle	Gebirgsfluss	torrential river	torrente	torrente
torrent	Wildbach	torrent	torrente	torrente
périmètre mouillé	benetzter Umfang	wetted perimeter	perimetro bagnato	perímetro mojado
lit majeur	Hochwasservorland	flood plain	letto maggiore	llanura de inundación
lit mineur	Niederwassergerinne	low water channel	letto minore	lecho menor
ripisylve	Ufervegetation	riparian vegetation	vegetazione fluviale	vegetación fluvial
géométrie du lit	Gerinnegeometrie	bed geometry	geometria del letto	geometría del lecho
rugosité	Rauigkeit, Rauheit	roughness	scabrezza	rugosidad
section d'écoulement	Abflussquerschnitt	flow section	sezione	sección transversal
section mouillée	benetzter Querschnitt	wetted section	sezione idrica	sección mojada
rayon hydraulique	hydraulischer Radius	hydraulic radius	raggio idraulico	radio hidráulico
largeur au miroir	Gerinnebreite	flow width	larghezza del pelo libero	ancho de flujo
pente du lit	Gerinnegefälle	bed gradient	pendenza del letto	pendiente del lecho
hauteur d'eau moyenne	mittlere Wassertiefe	mean flow depth	altezza media d'acqua (tirante idrico medio)	tirante promedio, altura pro- medio
hauteur critique	kritische Tiefe	critical flow depth	altezza critica (tirante critico)	tirante crítico, altura crítica
étiage	Niederwasser	low water	profilo estivo	estiaje
niveau des plus hautes eaux	höchster Hochwasserstand	maximum flood stage	altezza massimale	altura máxima
crue	Hochwasser	flood	piena	crecida, avenida
régime uniforme	gleichförmige Strömung	uniform flow	régime uniforme	flujo uniforme, régimen uni- forme

Tableau 5.1 – Terminologie française, allemande, anglaise et espagnole.

<i>français</i>	<i>allemand</i>	<i>anglais</i>	<i>italien</i>	<i>espagnol</i>
régime (graduelle-ment) varié	ungleichförmige Strömung	(gradually) varied flow	regime gradualmente variato	flujo (gradualmente) variado
régime (fluvial) sous-critique	(strömender Strömungszustand) sub-kritische Strömung	(fluvial) subcritical flow	regime subcritio (fluviale)	flujo fluvial o subcrítico
régime (torrentiel) supercritique	(schießender) superkritische Strömung	(torrential) supercritical flow	regime supercritico (torrentizio)	flujo torrencial o supercrítico
nombre de Froude	Froude-Zahl	Froude number	numero di Froude	número de Froude
débit	Durchfluss	flow rate, discharge	portata	gasto volumétrico, caudal
vitesse moyenne (débitante)	mittlere Geschwindigkeit	mean flow	velocita media	velocidad media
ressaut hydraulique	Wechselsprung	hydraulic jump	salto idraulico	resalto hidráulico

5.1.4 Morphologie du lit

Équilibre du lit

Pour un cours d'eau naturel, la géométrie du lit n'est pas quelconque, mais semble obéir à certaines règles. Un cours d'eau doit laisser transiter un débit, qui varie en fonction du temps. En général, il existe des cycles annuels, mais au gré des précipitations et de la fonte des neiges, le débit peut évoluer d'une année sur l'autre d'une façon extrêmement variable (voir Fig. 5.11). Le cours d'eau transporte également du sédiment soit en le charriant le long du lit (on parle alors de *transport par charriage*) ou en le maintenant en suspension dans l'eau (on parle de *transport par suspension*).

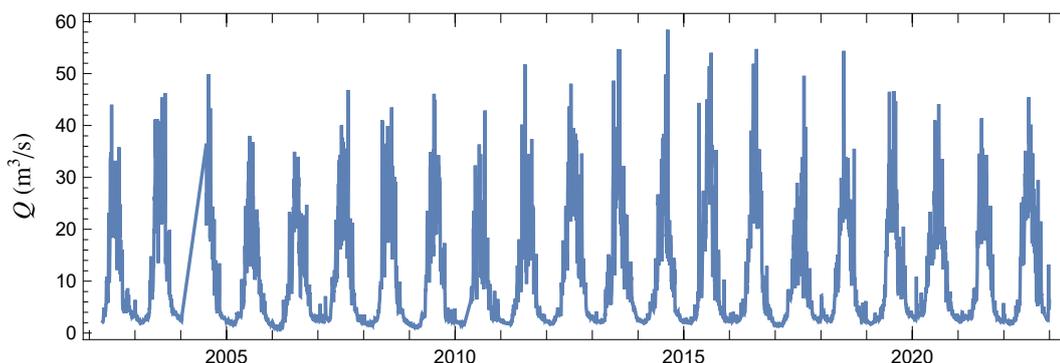


Figure 5.11 – Variation du débit de pointe journalier sur l'Arve à Chamonix (Haute-Savoie, France) sur la période 2002–2022. Chaque point représente le débit moyen journalier. Source : www.hydro.eaufrance.fr.

Les débits ordinairement rencontrés façonnent le cours d'eau : la géométrie du lit (section en travers, granulométrie, etc.) est calibrée par le cours d'eau de telle sorte qu'elle soit compatible avec le débit moyen transitant par ce cours d'eau. Pour cette raison, on trouve qu'il existe des corrélations fortes entre débit et dimensions de la section du cours d'eau. Ainsi, [Lacey \(1930\)](#) observa que pour les cours d'eau formés d'un seul chenal à travers un lit alluvial, le périmètre mouillé χ variait comme la racine du débit Q quelles que soient la pente du lit et la rugosité (dans les unités du système métrique) :

$$\chi = 4,83Q^{1/2}.$$

On considère que cette loi empirique est largement confirmée – même si l'exposant de la loi puissance peut s'éloigner un peu de la valeur 1/2 – et qu'elle s'applique à une large gamme d'écoulements allant des expériences de laboratoire aux grands fleuves ([Leopold & Maddock, 1953](#); [Richards, 1977](#); [Ferguson, 1986](#); [Li et al., 2015](#); [Métivier et al., 2017](#); [Phillips et al., 2022](#)). La figure 5.12 montre que la largeur au miroir B (employé ici comme substitut du périmètre mouillé, une approximation correcte pour les rivières larges) varie en loi puissance avec le débit pour les rivières naturelles à gravier : $B \propto Q^{0,65}$.

Une autre loi, plus qualitative⁴, a été proposée par [Lane \(1955\)](#) pour relier rugosité du lit, pente, débits solide et liquide :

$$Q_s d \propto Q i,$$

4. Il existe des formulations plus quantitatives comme celle proposée par [Julien \(2002\)](#) : $Q_s d^{0,28} = 9,1 Q^{1,11} i^{1,44}$.

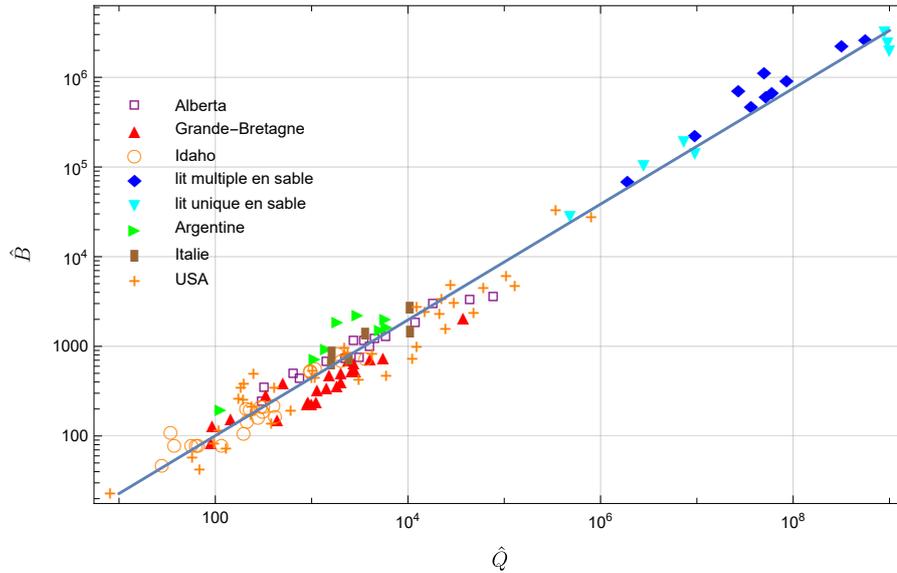


Figure 5.12 – Relation entre largeur miroir et débit de plein bord pour des rivières à travers le monde. Données collectées par Williams (1978), Parker *et al.* (2007) et Kaless *et al.* (2014). Le débit et la largeur au miroir ont été écrits sous forme adimensionnelle: $\hat{B} = B/d_{50}$ et $\hat{Q} = Q/(d_{50}^{5/2} \sqrt{g})$, avec d_{50} le diamètre médian des grains composant le lit. La courbe continue représente la tendance calée sur les données $\hat{B} = 4,9\hat{Q}^{0,65}$.

avec Q_s le débit solide, d le diamètre médian des alluvions composant le lit, i la pente du lit, et Q le débit liquide. Cette relation, parfois appelée « balance de Lane », est censée refléter sous une forme mathématique l'équilibre entre débits solide et liquide en fonction des caractéristiques morphologiques du lit, ce que Mackin (1948) disait plus prosaïquement :

« Une rivière gradée est un cours d'eau dans lequel, sur une période de plusieurs années, la pente est délicatement ajustée pour fournir, en fonction du débit disponible et des caractéristiques prépondérantes du chevelu, la vitesse nécessaire au transport des sédiments fournis par le bassin-versant. Une rivière gradée est un système en équilibre ; sa caractéristique principale est que toute changement dans l'un des facteurs-clés entraînera un déplacement de l'équilibre dans une direction qui tendra à absorber l'effet du changement. »

La loi de Lane est utile à prévoir la réponse de la rivière quand on modifie un des paramètres d'écoulement ; par exemple, si le diamètre d diminue, alors cette diminution doit être accompagnée d'une augmentation du débit solide si le débit liquide est constant, ou bien d'une diminution de pente si les débits demeurent inchangés. Elle permet aussi d'appréhender la façon dont la morphologie d'une rivière s'adapte pour permettre le transit de l'eau et de la charge sédimentaire. Ainsi, on peut interpréter le méandrement d'une rivière comme un moyen adopté par la rivière pour diminuer sa pente en allongeant le cheminement de l'eau (voir figure 5.1.4).

La loi de Lacey ou de Lane est un exemple de loi d'échelle, c'est-à-dire une loi qui est valable quelle que soit l'échelle d'observation ou quel que soit le débit. L'existence de telles lois a excité la curiosité des chercheurs (Ferguson, 1986; Singh & Nott, 2003; Gleason, 2015). Ainsi, certains chercheurs ont considéré que cette loi reflétait l'existence d'un état

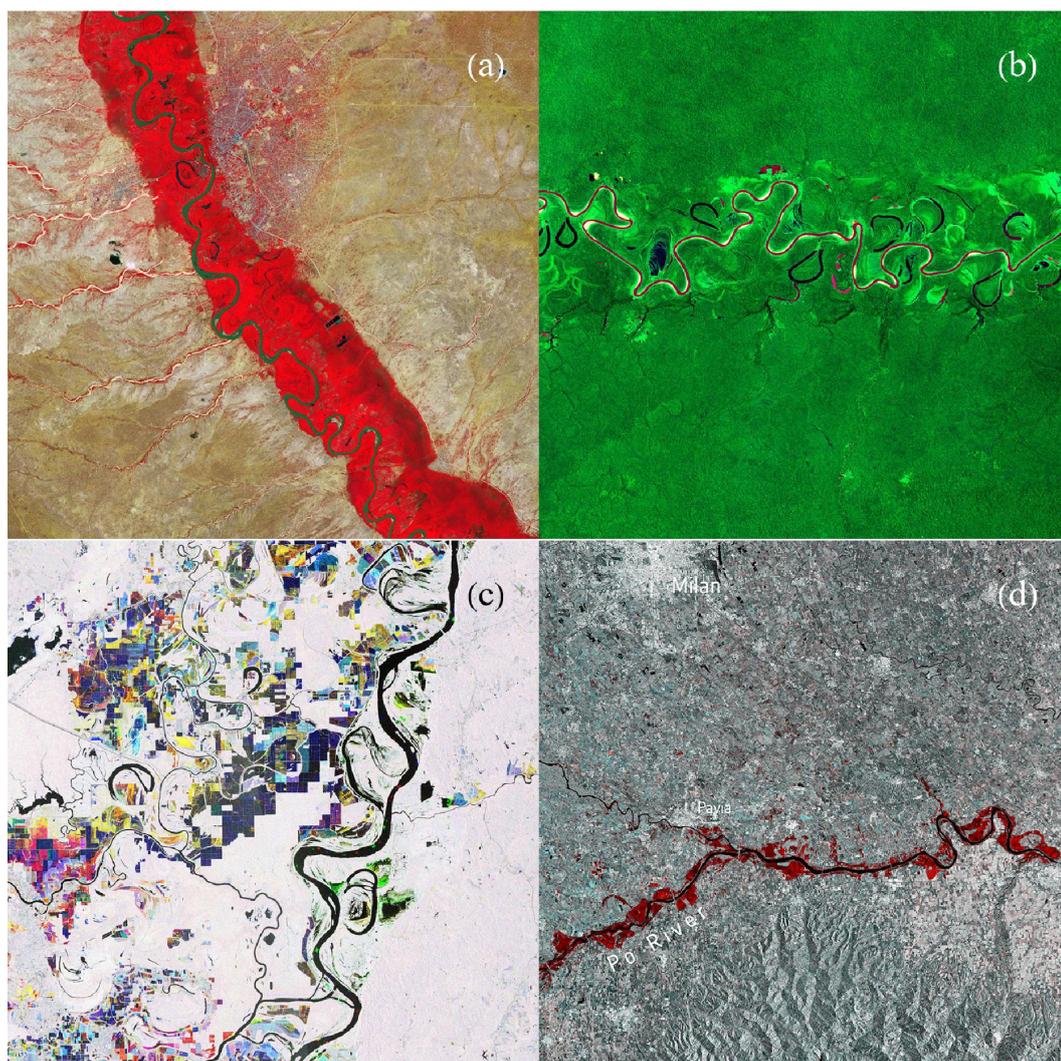


Figure 5.13 – Dans les rivières de plaine, le lit naturel est rarement droit, mais au contraire développe de nombreux méandres. (a) Image en fausses couleurs de la rivière Tana près de Nyeri, Kenya : les zones végétalisées apparaissent en rouge. (b) Image infrarouge de la rivière Amazone au Brésil près de la rivière Juruá ; les méandres morts sont encore visibles. (c). Image radar du Mississippi près du lac Catahoula. (d) Plaine du Pô en crue en novembre 2019. Source : [European Space Agency](#).

d'équilibre de la rivière, qui pourrait être décrit à l'aide de principes généraux de minimisation de l'énergie. Pour d'autres chercheurs, il n'est pas besoin de recourir à des principes énergétiques, dont le fondement est incertain, car d'une part, la rivière n'est pas une entité qui cherche à optimiser son fonctionnement, mais c'est un système complexe dans lequel interviennent de multiples agents et processus ([Phillips, 2010](#)) et, d'autre part, les processus géomorphologiques globaux peuvent s'expliquer en prenant en compte l'ensemble des processus physiques (résistance à l'écoulement, transport de sédiment, etc.) agissant localement dans un cours d'eau ([Parker, 1978a,b](#)). Ainsi, le méandrement est décrit comme un processus d'instabilité lorsque des courants secondaires et des différences de vitesse au sein d'une même section conduisent à un accroissement de la sinuosité du lit [Seminara \(2006, 2010\)](#).

Quoique ces débats autour des lois d'échelle n'aient abouti à aucun consensus autour de leur signification, elles ont joué un rôle important en ingénierie hydraulique :

- au cours du xx^e siècle, les ingénieurs ont aménagé les rivières et construit des canaux. Ils ont cherché à définir des lits stables (section et profil), c'est-à-dire des lits à l'équilibre qui optimisent le transit des débits liquides et des sédiments sans subir d'érosion ou de déposition au fil du temps ;
- à la fin du xx^e siècle, il y a un changement de paradigme : la rivière n'est plus vue comme un corridor, mais comme un écosystème complexe. Désormais, on entend redonner à la rivière un aspect naturel (on parle de renaturation des cours d'eau) et à promouvoir un équilibre dynamique entre écoulements d'eau (de surface et souterrains), le sédiment, et le milieu vivant.

Structures morphologiques

Compte tenu de la variation de la pente du cours d'eau et de la taille des sédiments, la géométrie du cours d'eau varie de façon très significative entre la source et le débouché (voir figure 5.14) :

- Dans la partie amont, où le sédiment est fourni à la rivière, la pente est généralement forte et le lit est droit (quand il est vu en plan). Le lit peut être incisé dans un matériau différent des sédiments qu'il transporte ou bien prendre place dans ses dépôts alluvionnaires.
- Au contraire, dans les zones de plaine, le cours d'eau coule exclusivement sur son propre alluvion généralement composé de matériaux fins (limons, sables, matériaux organiques). La sinuosité du lit croît le plus souvent de façon inverse à la pente du lit ; inversement, plus la pente est faible, plus le cours d'eau a tendance une section d'écoulement unique et bien calibrée (section homogène). La figure 5.14 montre de façon plus précise la forme prise par un cours d'eau et le rôle des dépôts de sédiments.

Le profil longitudinal d'une rivière montre également une très grande variabilité. En général, même à faible débit liquide (et transport solide), un lit initialement plan ne le reste jamais bien longtemps. Comme le schématise la figure 5.15, si l'on part d'un lit plan (régime hydraulique dit inférieur, « lower regime » en anglais) et que le débit liquide est faible, mais suffisant à transporter un peu de sédiment, on observe la formation d'ondulations (des ridules « ripples » en anglais), qui croissent, migrent, coalescent avec d'autres structures. Finalement, leur stade mature est une structure morphologique appelée *dune* quand celle-ci se déplace dans le sens du courant et *antidune* quand elle remonte le courant. Les antidunes s'observent principalement dans les écoulements supercritiques avec un seul chenal d'écoulement (Recking *et al.*, 2009; Kennedy, 1969). Ces structures morphologiques sont souvent interprétées comme une instabilité du lit quand la contrainte de cisaillement exercée par l'écoulement sur le lit excède un certain niveau (Seminara, 2010; Andreotti *et al.*, 2012; Charru *et al.*, 2013; Bohorquez *et al.*, 2019; Ali & Dey, 2021).

La figure 5.16 montre comment évolue le fond quand on augmente le nombre de Froude :

- (a) typiquement partant d'un état où le lit est plan, de petites ondulations apparaissent rapidement ;
- (b), (c) puis si le courant augmente, des structures telles que des dunes se forment.

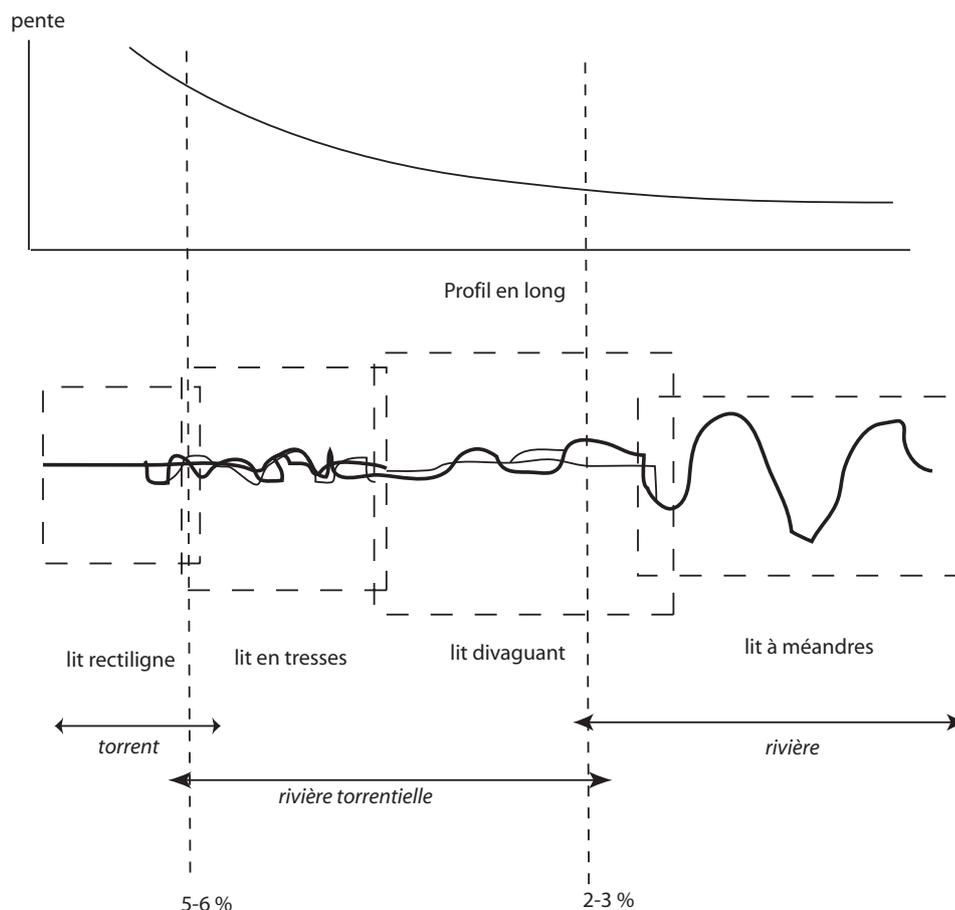


Figure 5.14 – Vue en plan du lit d’une rivière.

- (d), (e) Au cours d’une crue, ces structures peuvent être détruites, le lit redevenant plan, mais l’écoulement d’eau est fortement chargé en sédiment.
- (f), (g) Si le débit augmente encore, le lit développe de nouveau des structures, qui peuvent migrer à contre courant.
- (h) Pour les rivières torrentielles caractérisées par une valeur élevée du nombre de Froude, le lit présente souvent une alternance de *rapides* et de *mouilles*.

La figure 5.17 présente une classification des structures morphologiques du lit en fonction des nombres de Froude et de Reynolds. On voit ainsi que la limite entre régimes d’écoulement inférieur et supérieur varie fortement entre le domaine des rivières (faible nombre de Reynolds particulière car le lit est composé de sédiment fin) et celui des rivières torrentielles (valeur élevée de Re car le diamètre d_{50} des grains du lit est grand).

Ces structures morphologiques évoluent en permanence. Elles n’adoptent pas nécessairement une taille identique et ne sont pas régulièrement espacées (comme peut le laisser croire la figure 5.15), mais au contraire montrent une très grande variété de formes, de grandeurs, et de disposition. La figure 5.18 montre des alternances de seuils et mouilles dans des rivières aménagées ou naturelles. Ces structures – fréquentes pour les rivières torrentielles de pente supérieure à 3 % – permettent une dissipation d’énergie significative qui est généralement à la simple dissipation d’énergie sur la rugosité du lit. La figure 5.19 montre un écoulement tumultueux à travers un chaos de gros blocs pour le torrent de l’Avançon

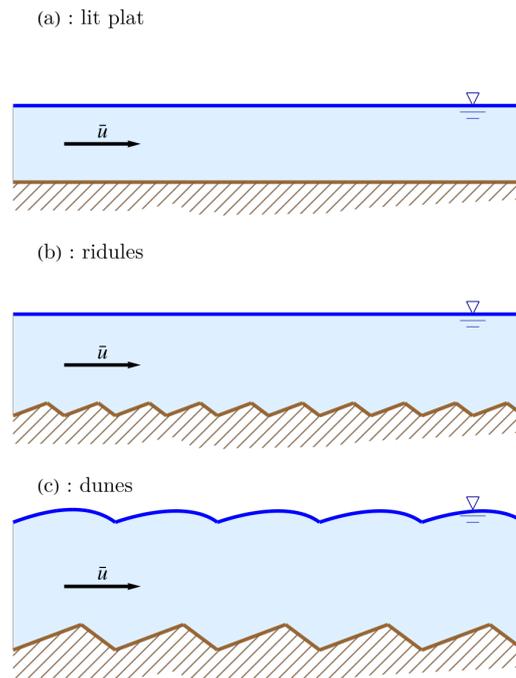


Figure 5.15 – Au cours du temps, des structures morphologiques se développent dans les lits de sable (ou de gravier): même soumis à faible débit liquide, un lit plan (a) forme au cours du temps des ridules (*ripples* en anglais), c'est-à-dire de petites intumescences du lit (b). Celles-ci croissent lorsque le débit augmente, se déplacent et coalescent avec d'autres ridules pour former des dunes (c). Ces dunes dissipent une part plus ou moins importante d'énergie. Les dunes atteignent une taille stable. Elles se déplacent dans le sens du courant. Si on augmente encore le débit, les dunes sont détruites par la force du courant (voir figure 5.16).

et des « rapides », c'est-à-dire des zones relativement planes, où l'écoulement est à peine plus épais sur les éléments grossiers du lit (souvent caractérisés par le diamètre d_{90}). Une des grandes difficultés dans l'étude hydraulique des rivières naturelles (sans canalisation marquée) est l'existence d'une multitude de processus tels que la formation de bancs de gravier ou le développement d'une végétation dans le lit qui modifient de façon appréciable la dynamique des écoulements (voir figure 5.20). À plus faible pente, d'autres structures morphologiques (lit en tresse, méandrement, delta) sont associées à une importante dissipation d'énergie (voir figures 5.1.4 et 5.21).

Singularités hydrauliques

On appelle *singularité hydraulique* un lieu où il se produit une modification importante de l'écoulement (hauteur, largeur, vitesse, etc.) sur une courte distance. L'écoulement est généralement en régime rapidement varié. Très souvent, les singularités sont des ouvrages de génie civil (aménagement hydraulique, pont, etc.); la figure 5.22 montre quelques exemples. Il existe aussi des singularités naturelles (cascade, changement de pente ou variation brutale de la largeur d'écoulement). Les singularités hydrauliques modifient l'écoulement en amont et/ou en aval. Elles sont aussi souvent associées à des dissipations d'énergie

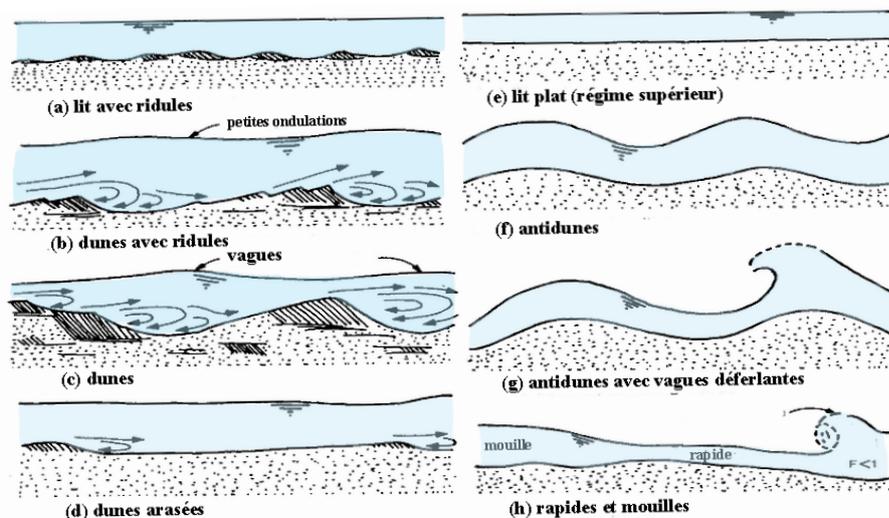


Figure 5.16 – Évolution des structures morphologiques du lit en fonction du régime. D’après Simons & Richardson (1966).

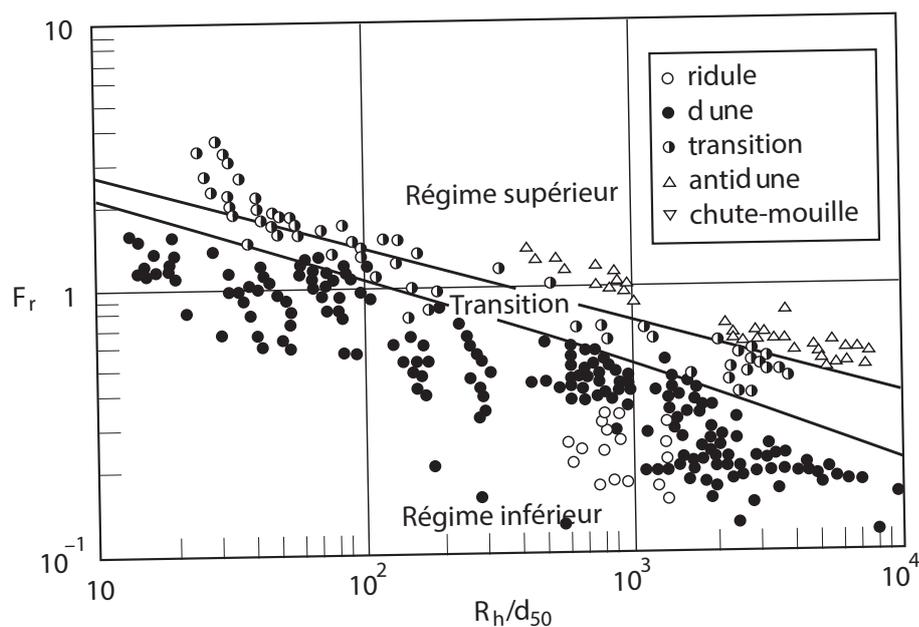


Figure 5.17 – Classification des structures en fonction du nombre de Froude et du nombre de Reynolds particulaire. D’après (Julien, 1994).

et des relations hauteur-débit spécifiques. Aussi sont-elles étudiées à part.



Figure 5.18 – L’alternance de seuils et de mouilles existe même pour les tout petits cours d’eau. (a) Sur la Saufla (val d’Illiez, VS), des seuils artificiels ont été construits pour stabiliser le lit et dissiper l’énergie. (b) Alternance de seuils et mouilles sur un bras de la Navisence à Zinal (VS).

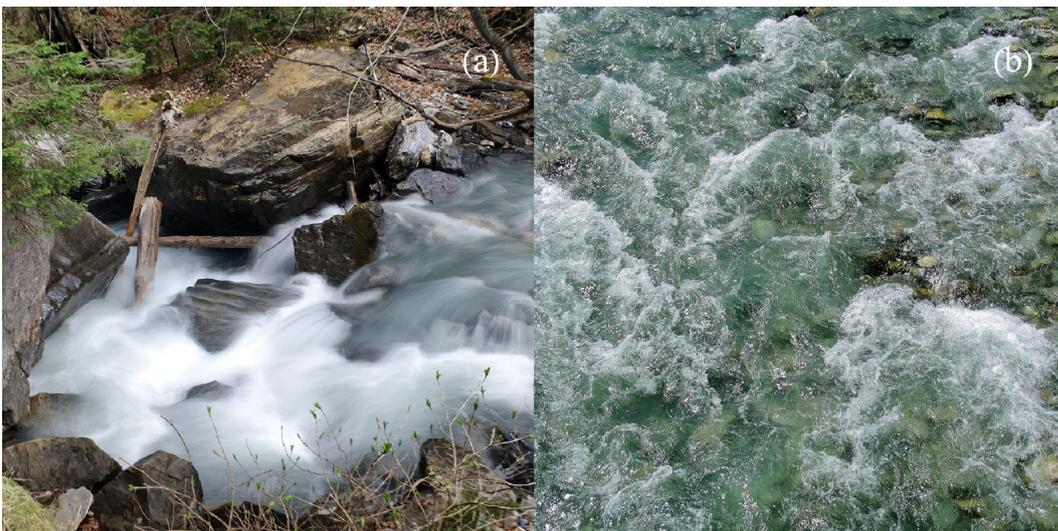


Figure 5.19 – Turbulence dans des rivières à gravier. (a) L’Avançon au-dessus des Plans-sur-Bex (VD). (b) La Navisence à Zinal (VS).

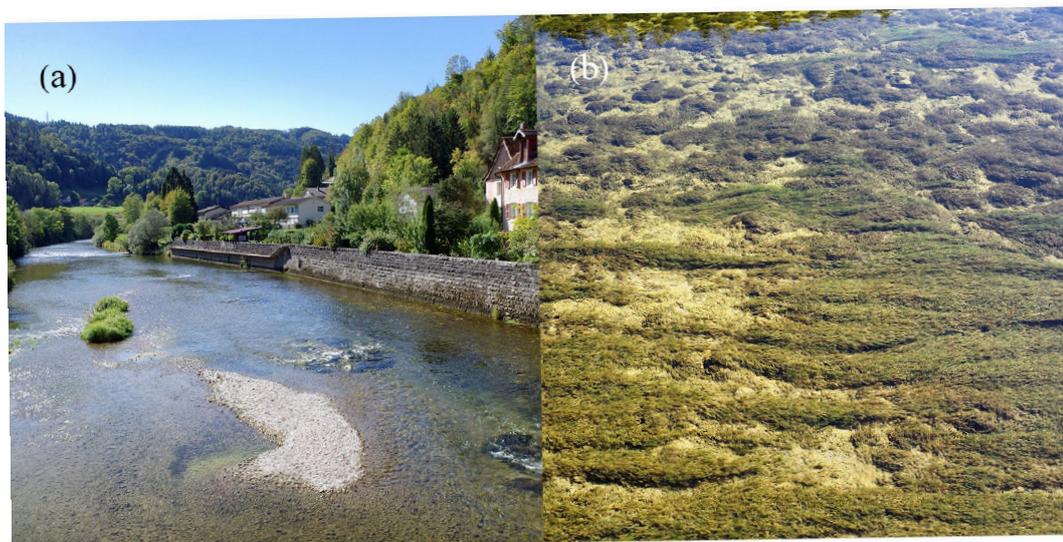


Figure 5.20 – Le Doubs à Saint-Ursanne (JU). (a) Les bancs de gravier servent à la fois de zone tampon dans laquelle la rivière peut stocker ou mobiliser du sédiment, mais également contribuent à dissiper l'énergie de l'écoulement en scindant le chenal principal en deux bras et en augmentant la sinuosité de la rivière. (b) Comme l'écoulement est peu profond, le lit est partie envahie par une végétation aquatique (algues) qui modifie la résistance à l'écoulement.

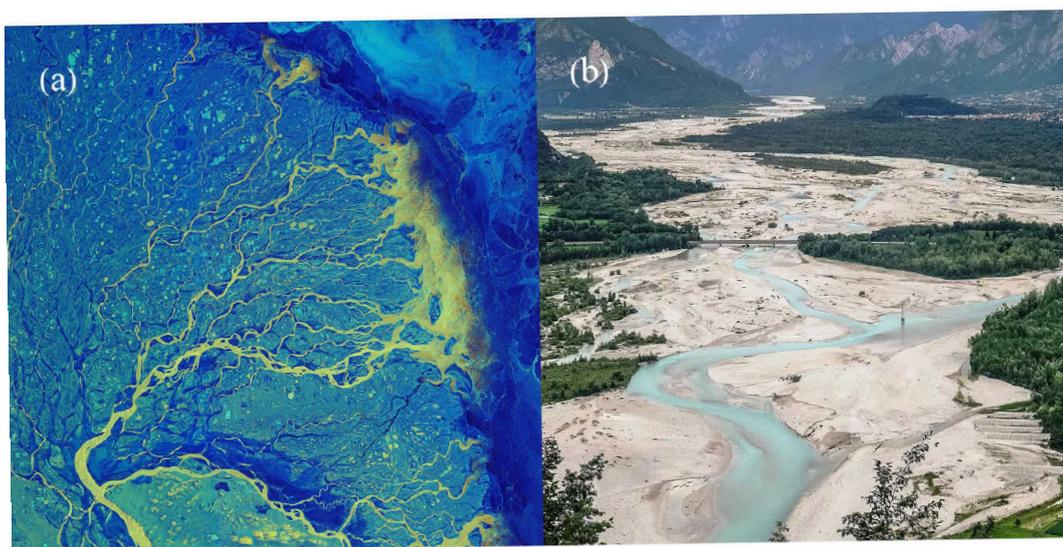


Figure 5.21 – (a) Delta de la rivière Léna (Sibérie, Russie). (b) Lit en tresse (Tagliamento, Italie). Source [European Space Agency](#) et [Wilderness Society](#).



Figure 5.22 – Exemples de singularité hydraulique. (a) Les barrages (ici le Vieux-Émosson au-dessus de Finhaut, VS) barrent le cours des rivières. Ils modifient les débits liquide et solide. (b) Les déversoirs et seuils latéraux (ici le Doubs à Besançon, France) sont des dispositifs permettant d'imposer une certaine cote d'eau et de dériver les eaux vers un canal ou une usine. (c) Les seuils (ici sur la Reuss à Lucerne) sont des ouvrages obstruant le cours de la rivière, ce qui permet de ralentir la vitesse et d'imposer un certain niveau d'eau. (d) Ponts et dalots (ici dalot de l'autoroute A43 en Maurienne enjambant le torrent du Claret) peuvent fortement modifier l'écoulement en limitant sa hauteur et sa largeur.

5.2 Hydraulique des canaux

Le théorème de Bernoulli offre une application intéressante pour étudier des écoulements permanents dans des canaux. Rappelons que ce théorème énonce que l'énergie $\Psi + p + k$ se conserve le long d'une ligne de courant pour un fluide non visqueux (avec p la pression, Ψ le potentiel gravitaire, et $k = \frac{1}{2}\rho\bar{u}^2$ l'énergie cinétique). Pour les fluides visqueux ou turbulents (ce qui est le cas en hydraulique), il faut tenir compte de la dissipation d'énergie, que l'on appelle *perte de charge*. Pour comprendre cette notion de dissipation, on peut faire une analogie utile avec le mouvement d'une bille le long d'un profil en forme de montagnes russes. Si la bille est non frottante (pas de dissipation d'énergie) et qu'on la lâche d'un point A, elle va rejoindre un point C à la même altitude que le point A. Tout le long du trajet, l'énergie totale E_t , c'est-à-dire la somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p se conserve : toute augmentation d'énergie cinétique se traduit par une diminution d'énergie potentielle et vice-versa. Dans le cas réel, le mouvement dissipe de l'énergie (sous forme de chaleur) et il s'ensuit que la bille remonte jusqu'à un point C dont l'altitude est inférieure à l'altitude initiale. La différence d'altitude traduit la perte d'énergie (perte de charge) subie par la bille. On a donc écrit

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_t,$$

où Δ représente la différence d'énergie entre l'instant final (lorsque la bille est en C) et l'instant initial (bille en A). Cette relation trouve son pendant en hydraulique (où l'on convertit les énergies et potentiels en équivalent d'hauteur en eau en divisant par ρg) :

$$\frac{1}{\rho g} \Delta(\Psi + p + k) = \Delta H,$$

avec ΔH la perte de charge.

On va commencer par définir la notion de charge.

5.2.1 Charge totale et charge spécifique

Considérons dans tout ce qui suit un canal ou une rivière de section rectangulaire de largeur B . Le débit total est noté Q ; le débit par unité de largeur est donc $q = Q/B$. La charge totale hydraulique s'écrit :

$$H = y_\ell + h + \underbrace{\frac{\bar{u}^2}{2g}}_{H_s},$$

avec y_ℓ la cote du fond, h la hauteur d'eau, et \bar{u} la vitesse moyenne de l'eau ($\bar{u} = q/h$). La charge totale représente l'énergie totale Ψ (énergie potentielle + énergie piézométrique + énergie cinétique) traduite en termes de hauteur (c'est-à-dire en divisant l'énergie par ρg). Comme le montre la figure 5.24, si on place un tube piézométrique (vertical) dans un écoulement permanent à surface libre, on n'observe aucune remontée (hormis capillaire) car la pression est hydrostatique au sein de l'écoulement ; en revanche, si l'on place un tube de Pitot, on observe une remontée de fluide, qui (en moyenne) est $\bar{u}^2/(2g)$. La charge spécifique H_s calculée en termes de hauteur est la somme de la hauteur d'écoulement h et de la hauteur $\bar{u}^2/(2g)$.

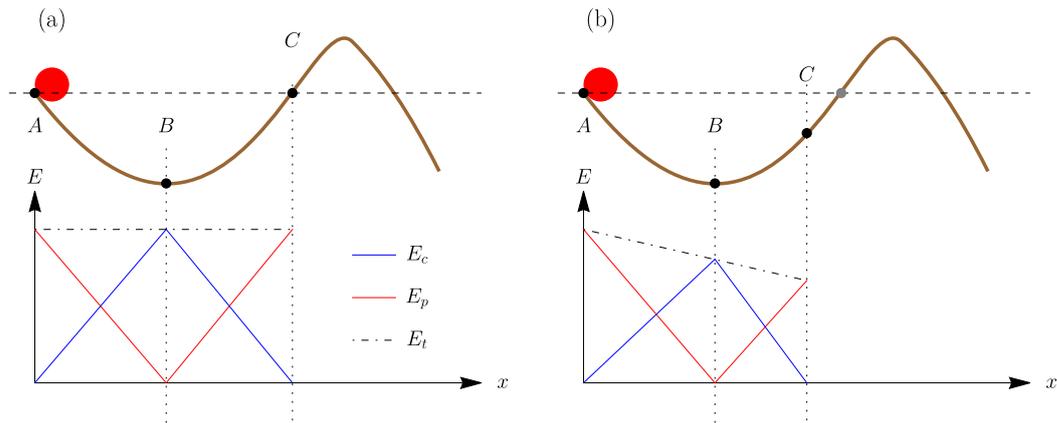


Figure 5.23 – Mouvement d’une bille sur un profil curviligne sous l’effet de la pesanteur. (a) Cas idéal où la bille est non frottante. La bille part de A (sans vitesse) et rejoint le point C, qui a la même altitude que A. (b) Cas réel, où le mouvement de la bille s’accompagne d’une dissipation d’énergie. Le point C a désormais une altitude moins élevée que A. La différence d’altitude entre A et C représente la dissipation d’énergie traduite en équivalent de hauteur. La ligne en tireté représente la variation de l’énergie totale E_t , la courbe bleue décrit la variation de l’énergie cinétique E_c au cours du mouvement de la bille, tandis que celle en rouge décrit la variation de l’énergie potentielle.

Pour simplifier, on a négligé le terme $\cos \theta$ devant h dans le terme de pression car le plus souvent on applique les calculs pour des canaux et rivières à faible pente ; il faut penser à réintégrer ce terme pour des calculs à forte pente. La quantité

$$H_s = h + \frac{\bar{u}^2}{2g}$$

s’appelle l’énergie spécifique et représente l’énergie du fluide à une cote donnée (pression + énergie cinétique) ; la charge totale est donc la somme de la charge spécifique H_s et de l’énergie potentielle y_ℓ . Pour une pente donnée, l’énergie spécifique est une fonction de la hauteur ou bien du débit.

Débit à charge spécifique constante

Si on écrit la charge spécifique comme une fonction de la hauteur, on a :

$$H_s(h) = h + \frac{\bar{q}^2}{2gh^2},$$

d’où l’on tire que le débit par unité de largeur $q = \bar{u}h$ vaut

$$q(h) = \sqrt{2gh^2(H_s - h)}.$$

ou sous forme adimensionnelle

$$q_* = \frac{q(h)}{\sqrt{gH_s^3}} = \sqrt{2\xi^2(1 - \xi)}, \quad (5.1)$$

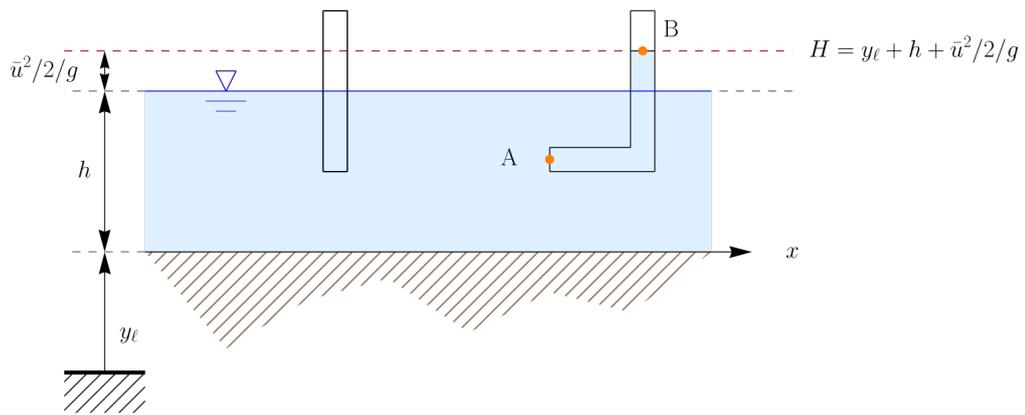


Figure 5.24 – Charge hydraulique dans un écoulement à surface libre. Si on place un tube verticalement dans l’écoulement, la surface du ménisque est à la même altitude $y_s = y_\ell + h$ que la surface libre, avec y_ℓ la cote du lit et h la hauteur d’eau. Si on place un tube Pitot, le niveau d’eau augmente dans le tube. La différence de hauteur rapport à la surface libre est égale à l’équivalent en hauteur d’eau de l’énergie cinétique $\bar{u}^2/(2g)$. On peut montrer cela en appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B: en A d’altitude y_a par rapport à un niveau de référence, la charge totale définie comme altitude + pression + énergie cinétique (en équivalent hauteur d’eau) est $H_a = y_a + (y_s - y_a) + \bar{u}^2/(2g) = y_\ell + h + \bar{u}^2/(2g)$. En B d’altitude z_b , la charge est $H_b = z_b + 0 + 0$. La conservation de la charge montre que la différence de hauteur $y_s - y_s$ vaut bien $\bar{u}^2/(2g)$.

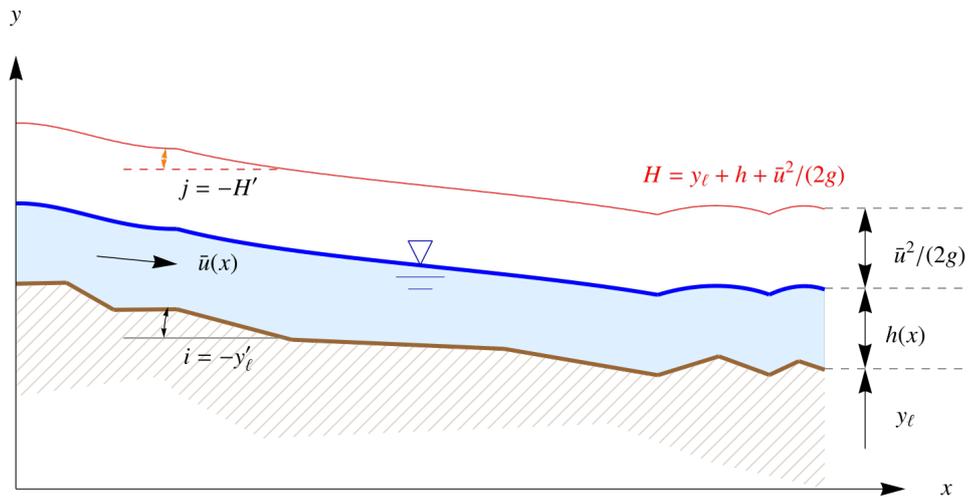


Figure 5.25 – Ligne d’eau dans un canal. La courbe de remous est la courbe $h(x)$ que forme la surface libre. La ligne d’énergie $H(x)$ est une courbe fictive qui représente l’énergie totale de l’écoulement d’eau. Sa pente $j = -H'$ est appelée pente de frottement.

avec $\xi = h/H_s$. Il s’agit d’une courbe en cloche asymétrique prenant sa valeur maximale en $\xi = 2/3$ ($h = 2H_s/3$) puisque

$$\frac{dq_*}{d\xi} = \frac{2 - 3\xi}{\sqrt{2 - 2\xi}} = 0 \text{ pour } \xi = \frac{2}{3}.$$

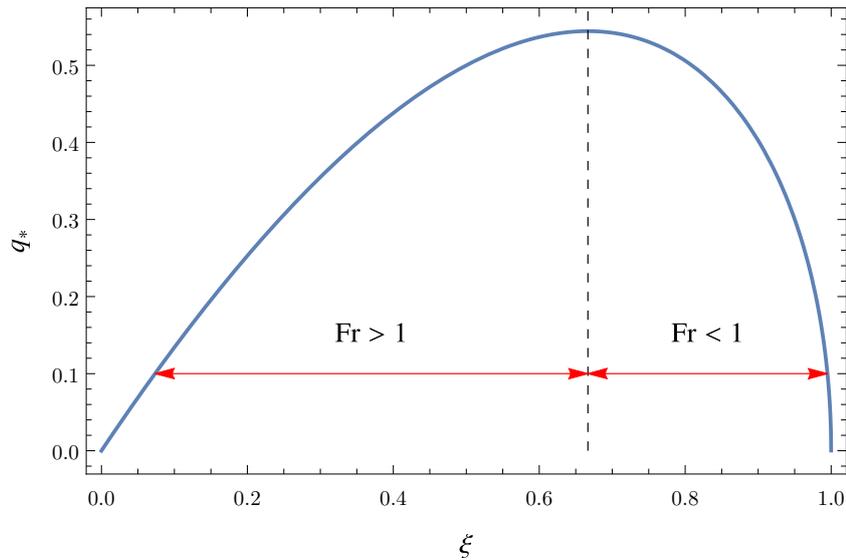


Figure 5.26 – Variation du débit (adimensionnel) q_* avec la hauteur d'écoulement (adimensionnelle) ξ pour une énergie spécifique H_s constante.

Il s'ensuit que le débit ne peut pas prendre n'importe quelle valeur, mais varie entre 0 et $q_{max} = \sqrt{gh^3} = \sqrt{8gH_s^3/27}$. On note que pour ce débit maximal, on a $Fr = 1$ avec $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh}$. Dans un cours d'eau, le débit maximal qui peut être atteint pour une charge spécifique donnée dans une section s'appelle le *débit critique* car il est associé à la condition $Fr = 1$, qui marque la transition entre deux régimes avec des comportements très distincts : les régimes *supercritique* et *subcritique*. La hauteur associée à ce débit s'appelle la hauteur critique h_c .

En résumé, il existe deux régimes possibles :

- un régime *supercritique* (régime appelé aussi *torrentiel*) : $h < h_c$;
- un régime *subcritique* (régime appelé *fluvial*) : $h > h_c$.

Hauteur à débit constant

Si l'on considère un canal rectangulaire avec un débit donné $0 < q < q_{max}$, l'énergie spécifique est une fonction de la hauteur :

$$H_s(h) = h + \frac{\bar{q}^2}{2gh^2},$$

que l'on peut écrire également sous forme adimensionnelle en divisant par la *hauteur critique*

$$h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$$

(rappelons que c'est la hauteur pour laquelle le nombre de Froude vaut 1)

$$H_s^* = \frac{H_s}{h_c} = \xi + \frac{1}{2\xi^2},$$

avec $\xi = h/h_c$. La courbe correspondante est reportée à la figure 5.27 ; le comportement de cette courbe est le suivant :

- quand $h \rightarrow 0$, $H_s \propto q^2 h^{-2} \rightarrow \infty$: la charge diverge aux faibles profondeurs. On est dans le régime supercritique ;
- quand $h \rightarrow \infty$, $H_s \propto h$: la charge spécifique tend asymptotique vers la droite $H_s = h$; on est dans le régime subcritique.

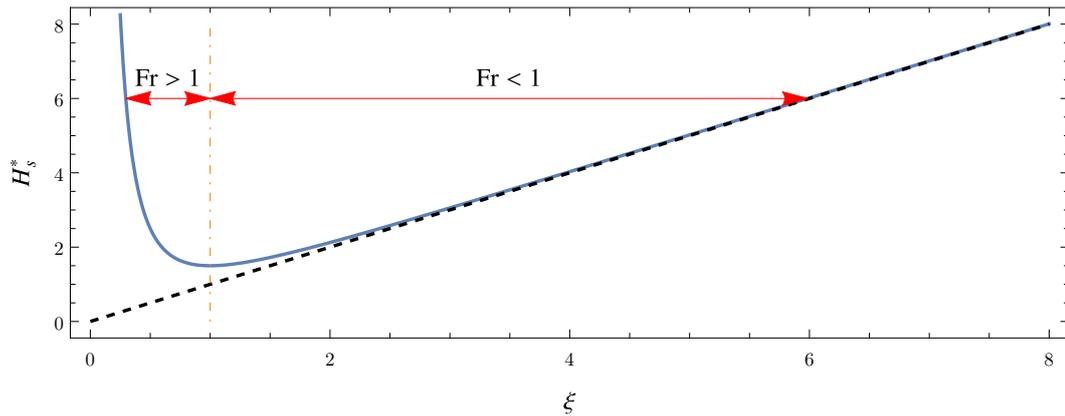


Figure 5.27 – Variation de l'énergie spécifique H_s^* avec la hauteur d'écoulement adimensionnelle ξ .

Le minimum de H_s est atteint pour la *hauteur critique* puisque

$$\frac{dH_s^*}{d\xi} = 1 - \frac{2}{2\xi^3} = 0 \text{ pour } \xi = 1.$$

Le diagramme $H_s = H_s(\xi)$ (voir figure 5.27) permet de raisonner qualitativement sur la forme des courbes de remous pour un tronçon de canal dont la pente moyenne est notée $i = \tan \theta$. Il faut pour cela bien distinguer le cas supercritique du cas subcritique. Considérons un régime subcritique sur une marche d'escalier de hauteur $p = z_b - z_a$.

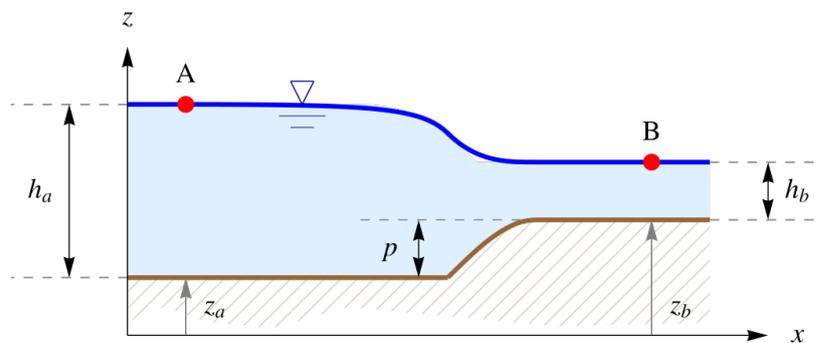


Figure 5.28 – Courbe de remous sur une marche d'escalier en régime subcritique.

La charge totale se conservant⁵, on doit avoir une diminution de la charge spécifique d'une valeur égale à p

$$H_A = H_B = z + h + \frac{\bar{u}^2}{2g} \Rightarrow H_s(B) = H_s(A) - p.$$

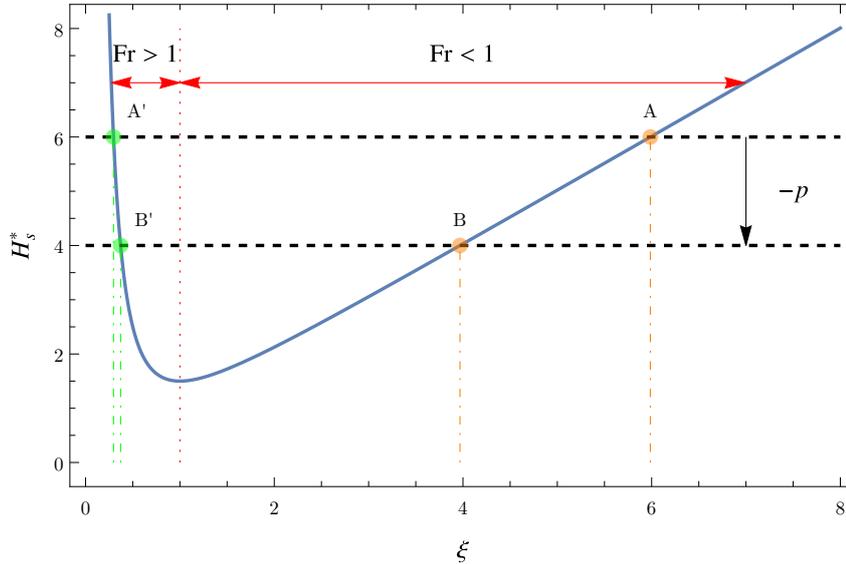


Figure 5.29 – Variation de l'énergie spécifique avec la hauteur d'écoulement. Au passage de la marche, l'altitude du lit diminue de p . La charge totale diminue d'autant. La charge spécifique H_s en B est donc : $H_s(B) = H_s(A) - p$. La hauteur en B peut être déterminée en lisant la courbe H_s^* : pour la branche supercritique, la hauteur croît très légèrement ; pour la branche subcritique, il y a une franche diminution de hauteur.

Sur la figure 5.29, on a représenté les états ($\xi = h/h_c$, H_s^*) correspondants aux points A et B. Le point B est obtenu en opérant une translation verticale $-p/h_c$. On note que la hauteur h_b en B est nécessairement plus faible qu'en A. On peut reproduire le raisonnement dans le cas d'un régime supercritique et on trouve un résultat opposé : au passage d'une marche ascendante, la courbe de remous est croissante (augmentation de la hauteur entre les points A' et B' sur la figure 5.29).

5.2.2 Courbes de remous obtenues par l'équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli permet également de trouver la variation de la cote de la surface libre pour un régime graduellement varié permanent. Cette équation s'appelle *équation de remous*. En différentiant la charge totale H par rapport à x et en introduisant la pente de frottement : $j = -dH/dx$, on a :

$$-j = -i + \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{q^2}{2gh^2},$$

5. Sur de courtes distances, les pertes de charge sont négligeables.

soit encore :

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{j - i}{Fr^2 - 1}} \quad (5.2)$$

On prendra garde qu'on a supposé ici qu'on avait un canal descendant dans la direction des x croissant : on a posé $i = -dz/dx > 0$. Si on change les axes ou les orientations du canal, il faut penser à veiller à ce que l'équation soit consistante avec ces changements.

La perte de charge j représente la dissipation d'énergie par la turbulence. On verra plus loin dans ce chapitre (voir § 5.3) qu'il existe plusieurs lois empiriques pour estimer j :

- loi de Chézy⁶ :

$$j = \frac{\bar{u}^2}{C^2 h},$$

avec C le coefficient de Chézy. Le plus souvent, on a C dans la fourchette $30 - 90 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$;

- loi de Manning⁷-Strickler⁸ :

$$j = \frac{\bar{u}^2}{K^2 h^{4/3}},$$

avec K le coefficient de Manning-Strickler. En pratique, K varie le plus souvent dans la gamme $10 - 100 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$. Il existe aussi des formules qui lient la valeur de K au diamètre des grains composant le lit. Par exemple, la formule de Jäggi donne $K = 23,2/d_{90}^{1/6}$ avec d_{90} le diamètre tel que 90 % des grains ont un diamètre inférieur.

On se référera au § 5.3.2 pour plus de détails.

6. Antoine de Chézy (1718-1798) était un ingénieur civil français. On lui doit la conception du canal de l'Yvette, qui alimentait Paris en eau potable. C'est à cette occasion que fut proposée la première formule connue reliant la pente d'un canal, la géométrie de la section en travers, et le débit. Il introduit également la notion de rayon hydraulique.

7. Robert Manning (1816-1897) était un ingénieur irlandais, travaillant tout d'abord dans l'administration irlandaise (drainage) avant de fonder sa propre société (travaux portuaires). Il est surtout connu pour la formule qu'il proposa en 1895 et qui synthétisait les données obtenues précédemment par le français Henry Bazin. La formule dite de Manning avait été obtenue en 1867 par Philippe Gauckler (1826-1905), un ingénieur français des Ponts et Chaussées, qui a notamment travaillé sur l'aménagement du Rhin en Alsace (Gauckler, 1867), puis en 1881 par Gotthilf Hagen (1797-1884), ingénieur hydraulicien prussien (Hagen, 1881). La postérité a retenu le nom de Manning pour des raisons obscures (Powell, 1962; Williams, 1970; Dooge, 1992) puisque la formule proposée par Manning est celle de Gauckler et si Manning cita la formule éponyme et montre son bon accord avec les données de Bazin, il l'écarta.

8. Albert Strickler (1887-1963) était un hydraulicien suisse. La première partie de sa carrière fut consacrée au développement de micro-centrales électriques ; il dirigea notamment la Société suisse de transmission électrique jusqu'à sa dissolution en 1939. Après 1939, il travailla comme consultant indépendant, principalement en Suisse alémanique. Le nom de Strickler est surtout connu grâce à l'important travail expérimental, qui permis d'établir la formule qui porte son nom et qui reprend la lois précédemment développée par Philippe Gauckler et Gotthilf Hagen, et citée par Robert Manning.

5.3 Régime permanent uniforme

5.3.1 Relation d'équilibre pour un régime permanent uniforme

Considérons un bief uniforme (section en travers uniforme, rugosité uniforme) de pente $i = \tan \theta > 0$ et un débit constant. Dans ces conditions, on peut observer un régime permanent uniforme où il y a équilibre parfait entre frottement aux parois et force motrice (gravité). La hauteur est appelée *hauteur normale*. Considérons une tranche de fluide le long du lit (sur un petit morceau de bief AB) et écrivons que toute la force de pesanteur du volume de fluide soit être entièrement repris par le frottement aux parois (voir figure 5.30).

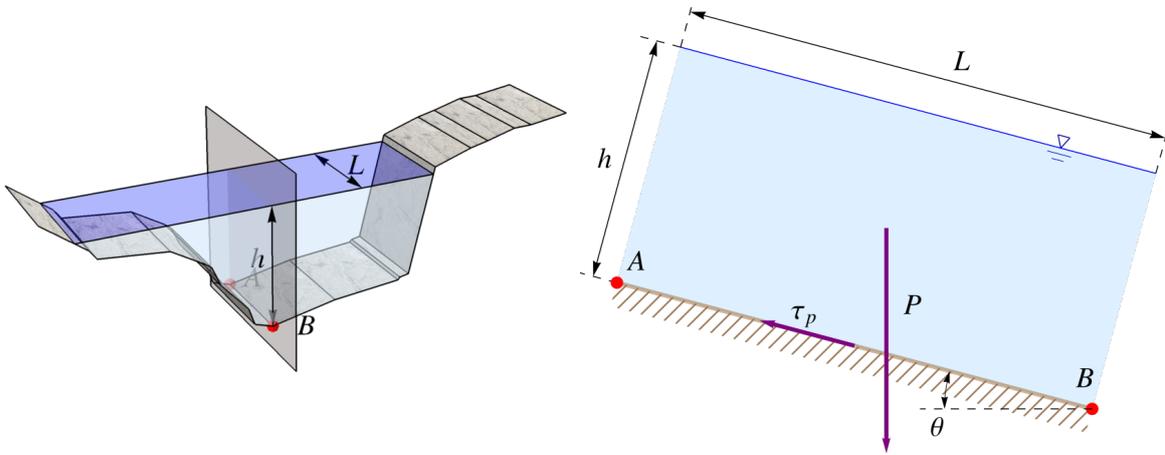


Figure 5.30 – Équilibre d'une tranche de fluide sur le tronçon AB. La hauteur h correspond à la hauteur maximale d'eau dans le cours d'eau. Le volume de fluide est soumis à une forme motrice (la composante motrice du poids $P \sin \theta$ et à une force de frottement $\tau_p L \chi$.

Pour un canal infiniment large, la contrainte à la paroi s'obtient à partir des équations de la conservation (locale) de la quantité de mouvement en régime permanent uniforme. On peut aussi l'obtenir en écrivant que le frottement au fond soit reprendre exactement le poids de la colonne d'eau au-dessus pour qu'il y ait équilibre, soit :

$$\tau_p = \rho g h \sin \theta,$$

De façon plus générale, pour un canal de section quelconque, le frottement le long du périmètre mouillé doit compenser la composante motrice du poids, soit

$$\chi \tau_p = S \rho g \sin \theta,$$

avec χ le périmètre mouillé, ce qui donne :

$$\tau_p = \rho g \sin \theta R_H \approx \rho g i R_H, \quad (5.3)$$

(canal de section quelconque). Pour des pentes faibles, on a $\sin \theta \approx \tan \theta = i$.

Relation avec le théorème de Bernoulli :

Le théorème de Bernoulli s'écrit sur une petite tranche du bief de longueur $\delta L = dx$ (voir figure 5.31)

$$y_\ell(A) + h(A) + \frac{\bar{u}^2(A)}{2g} = y_\ell(B) + h(B) + \frac{\bar{u}^2(B)}{2g} + \Delta H,$$

avec y_ℓ la côte du fond. Comme le régime est supposé permanent et uniforme ($\bar{u}(A) = \bar{u}(B)$ et $h(A) = h(B)$), on déduit que

$$y_\ell(A) = y_\ell(B) + \Delta H.$$

En introduit la pente $y_\ell(A) - y_\ell(B) = idx$ et la perte de charge $\Delta H \approx dH$, on tire $idx = dH$. On introduit la pente de la perte de charge appelée *pente de frottement* (voir ci-dessous l'utilisation du théorème de Bernoulli) : $j = dH/dx$, avec H la charge hydraulique. La condition d'écoulement permanent uniforme s'écrit alors :

$$i = j.$$

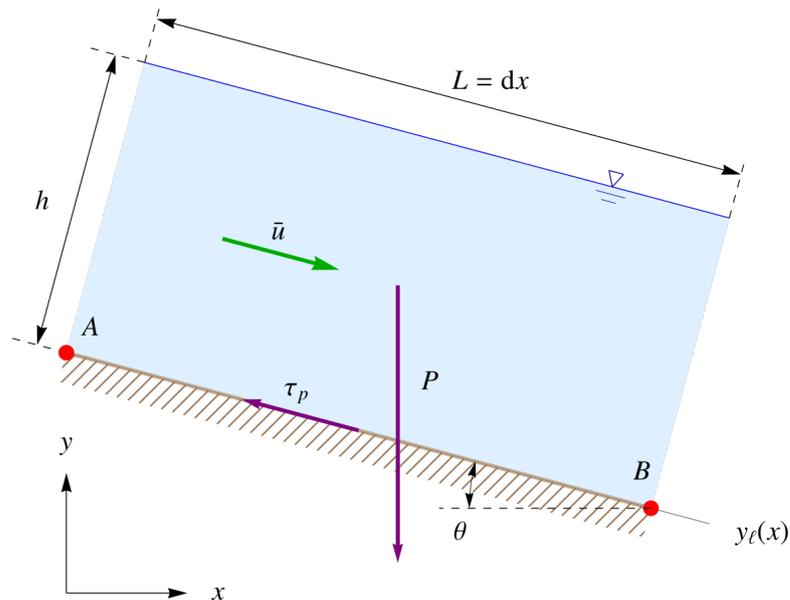


Figure 5.31 – Équilibre d'un volume de fluide de longueur $L = dx$ et de hauteur uniforme h .

5.3.2 Loi de frottement

Plusieurs lois empiriques ont été proposées pour établir la relation entre τ_p et les variables d'écoulement \bar{u} et h . Ces lois expriment les pertes de charge régulières dues aux frottements le long du lit (dissipation dans la couche limite) et par dissipation d'énergie turbulente.

Il existe également des pertes de charges singulières dues, par exemple, à la sinuosité du lit (provoquant des courants secondaires), à des obstacles (ponts, rochers, épis), à des changements de section. Il est possible de tenir compte de ces dissipations d'énergie localisées, mais c'est un exercice assez fastidieux et complexe qui est rarement entrepris en ingénierie. Assez souvent, ces pertes de charge singulières sont prises en compte en augmentant artificiellement les pertes de charge régulières.

Loi de Manning–Strickler

Certains proposent d'appeler la loi de Manning–Strickler loi de Gauckler–Manning–Strickler pour rétablir le rôle de Philippe Gauckler dans l'établissement de la formule (Powell, 1962; Dooge, 1992; Hager, 2001; Vischer, 1987), mais on conservera ici la désignation habituelle. C'est la loi la plus employée car valable pour une large gamme de débits et de rugosité; la contrainte pariétale s'écrit

$$\tau_p = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_H^{1/3}}, \quad (5.4)$$

avec K le coefficient de Manning–Strickler souvent relié à la rugosité du lit. Originellement, Strickler (1924) a relié ce coefficient à un diamètre typique de la rugosité du lit (sans le préciser, et par défaut on considère que ce diamètre est d_{50} :

$$K = \frac{21,1}{d_{50}^{1/6}}. \quad (5.5)$$

Meyer-Peter⁹ & Müller¹⁰ a considéré qu'il valait mieux prendre le diamètre d_{90} correspondant aux plus gros blocs (90 % des blocs ont un diamètre plus petit que d_{90}):

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}},$$

ou bien sa variante actuelle proposée par Jäggi (1984) :

$$K = \frac{26}{k_s^{1/6}} = \frac{21,1}{d_{90}^{1/6}}.$$

C'est presque la même formule que celle de Strickler, mais l'échelle de rugosité est d_{90} au lieu de d_{50} ; cette échelle implique que la taille caractéristique de la rugosité est $k_s = 3,5d_{90}$ en accord avec certaines données de terrain (Hey, 1979). D'autres auteurs comme Wong &

9. Eugen Meyer-Peter (1883–1969) commença sa carrière comme ingénieur pour la société Zschokke à Zürich. En 1920, il fut nommé professeur d'hydraulique de l'ETHZ et créa un laboratoire d'hydraulique pour étudier expérimentalement des écoulements graduellement variés, du transport solide, de l'affouillement de fondations, etc. Les travaux les plus connus de Meyer-Peter sont ceux relatifs au transport de sédiment dans les rivières alpines, notamment la formule dite Meyer-Peter-Müller (1948) obtenue par la compilation de données expérimentales obtenues pendant 16 années à l'ETHZ.

10. Robert Müller (1908–1987) était un ingénieur hydraulicien suisse spécialisé dans le transport de sédiment et les problèmes d'érosion. Il fit l'essentiel de sa carrière au VAW de l'ETH, où il travailla notamment avec Hans Einstein et Eugen Meyer-Peter. En 1957, il démissionna et exerça une activité de conseil en hydraulique. Il s'intéressa plus particulièrement à la correction des eaux dans le canton du Jura et à la liaison des lacs de Murten, Bienne, et Neuchâtel.

Parker (2006) recommandent de prendre plutôt $k_s = 2d_{90}$, ce qui est utilisée notamment dans la formule de Keulegan, et est cohérent avec des données de laboratoire (Kamphuis, 1974); dans ce cas, K est donné par

$$K = \frac{26}{k_s^{1/6}} = \frac{23,1}{d_{90}^{1/6}}.$$

Les valeurs de K sont aussi tabulées en fonction du type de cours d'eau:

- canal en béton lisse: $K = 55 - 80 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- canal en terre: $K = 40 - 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- rivière à galet, rectiligne, section uniforme: $K = 30 - 40 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- rivière avec méandre, sinuosité, etc.: $K = 20 - 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- rivière végétalisée ou torrent: $K = 10 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$.

Principalement dans les pays anglo-saxons, on écrit aussi K en fonction du *coefficient de Manning* n

$$K = \frac{1}{n}.$$

Notons que la formule de Manning–Strickler ne s'applique pas sur des fonds très lisses (béton lissé par exemple). On pose parfois la relation suivante 

$$K < 78\bar{u}^{1/6},$$

qui fournit la borne supérieure du coefficient K en fonction de la vitesse moyenne \bar{u} . En pratique, cette borne supérieure se situe entre 80 et 100 $\text{m}^{1/3}\text{s}^{-1}$.

↔ On se reportera à la publication « [Rauheiten in ausgesuchten schweizerischen Fließgewässern](#) » (en allemand) du Bundesamt für Wasser und Geologie (maintenant rattaché à l'Office fédéral de l'énergie) pour une analyse de 12 cours d'eau en Suisse pour différents débits. Cet ouvrage fournit une estimation du paramètre de Manning–Strickler K en fonction des conditions hydrologiques, morphologiques, granulométriques, et hydrauliques.

On pourra aussi se référer au site de l'[USGS](#) pour un catalogue de valeurs de $n = 1/K$ pour différentes rivières (américaines); le tableau fournit à la fois des photographies de biefs et les caractéristiques des sections mouillées.

Loi de Darcy–Weisbach

Pour les écoulements en charge, on emploie le plus souvent la formule de Darcy–Weisbach. Cette formule et ses variantes peuvent également s'appliquer à l'hydraulique à surface libre, surtout dans le cas de fond relativement lisse

$$\tau_p = \rho \frac{f}{8} \bar{u}^2, \quad (5.6)$$

avec:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{k_s}{14,8R_H} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} \right),$$

(formule de Colebrook-White où l'on remplace le diamètre hydraulique par $4R_H$). Cette équation non linéaire est complexe à résoudre et on lui préfère une forme approchée:

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 3,38 + 5,75 \log_{10} \frac{R_H}{d_{84}}. \quad (5.7)$$

On prendra garde que dans un certain nombre de formules de résistance (dont la loi de Darcy–Weisbach), le nombre de Reynolds est défini à partir du rayon hydraulique

$$\text{Re} = \frac{4R_H\bar{u}}{\nu},$$

car en hydraulique en charge, le nombre de Reynolds est défini à partir du diamètre hydraulique D_H et qu'on a $D_H = 4R_H$.

Loi de Chézy

La loi de Chézy est la formule historique, peu utilisée aujourd'hui si ce n'est pour obtenir des ordres de grandeur

$$\tau_p = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u}^2, \quad (5.8)$$

avec C le coefficient de Chézy variant dans la fourchette $30\text{--}90 \text{ m}^{1/2}\text{s}^{-1}$ (du plus rugueux au plus lisse).

Loi de Keulegan

Pendant longtemps, on a utilisé le profil de vitesse logarithmique (en principe valable uniquement près du fond) pour décrire tout le profil de vitesse d'un écoulement hydrauliquement turbulent dans un canal. Fondée sur cette approximation, la loi de Keulegan¹¹ est une formule bien adaptée pour les écoulements sur des lits à gravier. Elle revient à supposer que la contrainte à la paroi serait similaire à celle donnée par la formule de Chézy, mais avec un coefficient $C = \sqrt{g}\kappa^{-1} \ln(11h/k_s)$ fonction de la hauteur d'eau et de la rugosité, soit encore :

$$\tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2(11h/k_s)} \rho \bar{u}^2, \quad (5.9)$$

avec κ la constante de von Kármán et k_s une taille caractéristique des rugosités du lit ($k_s \approx 2d_{90}$) (Keulegan, 1938). La formule est valable tant que le fond est suffisamment rugueux, c'est-à-dire $h/k_s < 10$. Cette formule peut se généraliser à des géométries plus complexes en substituant la hauteur h par le rayon hydraulique R_H .

Notons que de nos jours, on préfère employer une loi puissance de type Manning–Strickler plutôt qu'une loi logarithmique pour relier le coefficient de Chézy aux paramètres hydrauliques. Par exemple, pour des lits à gravier (fond mobile), la formule de Parker donne

$$C = 8,10\sqrt{g} \left(\frac{h}{k_s} \right)^{1/6},$$

qui fournit des résultats bien meilleurs que la formule de Keulegan pour des lits très rugueux ($h/k_s < 5$).

11. Garbis Hvannes Keulegan (1890–1989) était un mécanicien américain d'origine arménienne. Il commença ses études en Turquie, puis émigra aux États-Unis pour les achever. Il fit l'essentiel de sa carrière dans le National Bureau of Standards (NBS), où il participa à la création du NBS National Hydraulic Laboratory. Ingénieur de recherche, il travailla principalement sur les écoulements turbulents stratifiés. La loi qui porte son nom date de 1938 et résultait d'une étude expérimentale des profils de vitesse pour des écoulements à surface libre dans des canaux rugueux.

Synthèse

On en déduit facilement les différentes formules du régime permanent uniforme; elle sont recensées dans le tableau 5.2. La relation $q = f(h)$ (ou bien $\bar{u} = f(h)$) est appelée *courbe de tarage* ou bien *loi d'écoulement* ou bien encore *débitance* du canal.

Tableau 5.2 – Vitesse moyenne, hauteur normale, et pente de frottement selon la loi de frottement utilisée.

<i>loi de frottement</i>	\bar{u}	h_n^a	j
Manning-Strikler	$\bar{u} = K\sqrt{i}R_H^{2/3}$	$h_n = \left(\frac{q}{K\sqrt{i}}\right)^{3/5}$	$j = \frac{\bar{u}^2}{K^2R_H^{4/3}}$
Darcy-Weisbach	$\bar{u} = \sqrt{\frac{8g}{f}}\sqrt{i}R_H^{1/2}$	$h_n = \left(q\sqrt{\frac{f}{8gi}}\right)^{2/3}$	$j = \frac{\bar{u}^2 f(R_H)}{2g 4R_H}$
Chézy	$\bar{u} = C\sqrt{i}R_H^{1/2}$	$h_n = \left(\frac{q}{C\sqrt{i}}\right)^{2/3}$	$j = \frac{\bar{u}^2}{C^2R_H}$

^a uniquement pour un canal infiniment large

5.3.3 Justification physique

Dans la majorité des cas, le régime d'écoulement est turbulent. On pourra consulter le chapitre 6, et plus particulièrement § 6.10, pour mieux comprendre la turbulence et la façon de la modéliser à l'aide de lois simples. On offre ici une première approche pour expliciter d'où viennent les résultats obtenus par Keulegan (Keulegan, 1938). Lorsqu'on écrit le tenseur des contraintes moyennées, :

$$\Sigma = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} + \langle \rho\mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$$

où \mathbf{u}' est la fluctuation de vitesse, $\langle \rangle$ désigne un opérateur moyenne. Dans cette expression, le premier terme représente les effets de pression du fluide (à cause de l'incompressibilité c'est un terme indéterminé qui doit être trouvé en résolvant les équations du mouvement). Le second terme (loi de Newton) représente les termes de viscosité. Le troisième terme, appelé *tenseur de Reynolds*, représente les effets des fluctuations de vitesse liées à la turbulence.

Une pratique courante consiste à négliger la contribution visqueuse (compte tenu du nombre de Reynolds) et à supposer que les fluctuations de vitesse \mathbf{u}' sont du même ordre de grandeur que la vitesse moyenne $\langle \mathbf{u} \rangle$. Si U désigne une échelle de vitesse et L une échelle d'écoulement, alors on peut adimensionnaliser de la façon suivante le tenseur des contraintes

$$\Sigma = -p\mathbf{1} + 2\mu\frac{U}{L}\tilde{\mathbf{D}} + \rho U^2 \langle \tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}}' \rangle = -p\mathbf{1} + \rho U^2 \left(\frac{2}{\text{Re}}\tilde{\mathbf{D}} + \langle \tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}}' \rangle \right),$$

où $\text{Re} = \rho UL/\mu$ est le nombre de Reynolds, $\tilde{\mathbf{D}}$ est le tenseur des taux de déformation adimensionnelle et $\tilde{\mathbf{u}}'$ la fluctuation de vitesse adimensionnelle. À grand nombre de Reynolds, les contraintes visqueuses deviennent négligeables par rapport aux contraintes turbulentes.

On ne sait pas calculer de façon simple les contraintes turbulentes, mais on peut utiliser des lois empiriques qui permettent de les relier à la vitesse moyenne du fluide. Par exemple, une loi empirique pour décrire la turbulence près d'une paroi énonce que la fluctuation de vitesse est isotrope ($u'_x \approx u'_y$) et qu'elle varie de la façon suivante avec le gradient de vitesse moyen :

$$u' = \ell_m \frac{d\langle u \rangle}{dy} \quad (5.10)$$

Cette hypothèse, due à Prandtl, tire son origine d'une analogie avec le libre parcours moyen d'une particule dans la théorie cinétique des gaz de Boltzmann. Le coefficient de proportionnalité ℓ_m introduit dans l'équation est appelé *longueur de mélange*. La valeur de la longueur de mélange a été déduite expérimentalement. Une difficulté dans la détermination de ℓ_m est qu'elle n'a pas en général de caractère intrinsèque excepté dans des régions sous influence de parois (écoulements dits pariétaux).

Ainsi, pour des écoulements suffisamment épais ($h > 10k_s$ avec k_s l'échelle de rugosité), à surface libre et dans des canaux droits inclinés, il est possible de distinguer *grosso modo* trois zones turbulentes (voir figure 5.32) :

- près de la paroi, la turbulence est générée par la rugosité. On parle de *couche de rugosité*. Cette couche n'est pas totalement turbulente car très près de la paroi, là où la vitesse tend vers zéro, il existe une sous-couche visqueuse où l'écoulement est laminaire. Cette sous-couche étant de faible épaisseur, on la néglige, mais elle

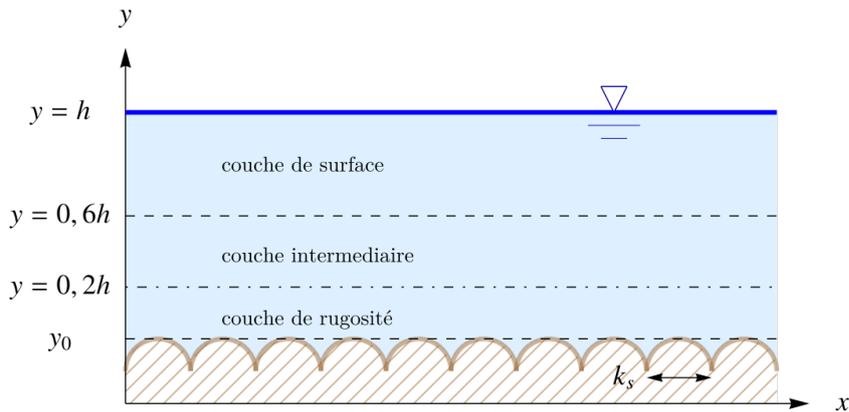


Figure 5.32 – Délimitation et typologie des zones turbulentes dans un écoulement à surface libre.

a son importance pour fixer la condition à la limite pour la vitesse. Une hypothèse usuelle tirée d'arguments dimensionnels est de relier la longueur de mélange à la profondeur de la manière suivante :

$$\ell_m = \kappa y$$

avec κ la constante de von Kármán ($\kappa = 0,41$). Dans cette zone qui s'étend sur environ 20 % de la hauteur d'écoulement, le profil de vitesse est logarithmique pour les raisons indiquées ci-après. On parle donc aussi de *couche logarithmique* ;

- près de la surface libre, la turbulence est fortement influencée par la surface libre. On parle de *couche de surface* ;
- entre les deux couches, se trouve une région dite intermédiaire où la turbulence résulte d'échanges entre les deux zones précédentes. La valeur de la longueur de mélange dans les deux couches supérieures peut être estimée de la manière suivante :

$$\ell_m \approx \beta h$$

avec β un paramètre empirique de valeur proche de 0,12.

Examinons ce qui se passe pour l'écoulement près de la paroi. En régime permanent uniforme, l'équation de conservation de la quantité de mouvement implique que la distribution de contrainte de cisaillement est linéaire avec la profondeur,

$$\tau(y) = \rho g \sin \theta (h - y).$$

On retrouve qu'au niveau du lit ($y = 0$), la contrainte à la paroi vaut $\tau_p = \tau(0) = \rho g h \sin \theta$ (voir la condition d'équilibre au § 5.3). En égalant cette distribution avec la loi de Prandtl (5.10), on déduit une équation différentielle pour la vitesse moyenne $\langle u \rangle$

$$\tau(y) = \rho g \sin \theta (h - y) = \rho \left(\kappa y \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2.$$

En définissant la vitesse de frottement

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} = \sqrt{g h \sin \theta},$$

on obtient :

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} = \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{y} \sqrt{1 - \frac{y}{h}}.$$

En se limitant aux termes du premier ordre en y/h , puis par intégration, on obtient le profil de vitesse à proximité de la paroi :

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0},$$

où y_0 est une profondeur à laquelle on admet que la vitesse s'annule (au niveau de la sous-couche visqueuse). On trouve donc que le profil des vitesses moyennes est logarithmique comme cela a été indiqué plus haut. Naturellement, cette expression, valable pour des parois lisses, doit être corrigée si l'on veut prendre en compte une rugosité du fond. Pour des surfaces rugueuses, deux types de condition aux limites sont mis en évidence en fonction de la taille typique des grains composant la rugosité (k_s) et de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse (δ) :

- les surfaces dites lisses ($k_s \ll \delta$);
- celles dites rugueuses ($k_s \gg \delta$).

Pour une surface rugueuse, les expériences en conduite indiquent que la distance y_0 vérifie : $y_0 = k_s/30$ (Keulegan, 1938). Dans ce cas, par intégration du profil des vitesses moyennes et en supposant que la hauteur d'écoulement h est bien plus grande que la distance y_0 , on déduit que la vitesse moyenne de l'écoulement est :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h \langle \bar{u} \rangle dy = \frac{u_*}{\kappa} \left(\ln \frac{30h}{k_s} - 1 \right) \approx 2,5u_* \ln \frac{11h}{k_s}.$$

Pour une surface plane (en pratique pour des rugosités de surface inférieures à 250 mm), les expériences montrent que la distance y_0 vérifie : $y_0 \approx \nu/9u_*$. On en déduit que le profil de vitesse près d'une paroi lisse :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{9u_*y}{e\nu},$$

avec $e = 2,718$.

Jusqu'à une époque récente, une pratique courante consistait à extrapoler à tout l'écoulement l'expression de la longueur de mélange valable à la paroi. À partir des années 1960, des termes de correction ont été rajoutés pour tenir compte de la modification de la turbulence loin des parois. Parmi les plus connues, la loi (empirique) de sillage de Coles donne de bons résultats pour de nombreuses classes d'écoulement. La méthode consiste à ajouter à la loi logarithmique un terme correctif de la forme suivante :

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} + \frac{\Pi}{\kappa} \sin \frac{\pi z}{2h},$$

avec Π un paramètre d'intensité, comprise entre $-0,1$ et $0,2$ lorsque le nombre de Reynolds $Re = \bar{u}h/\nu$ est supérieur à 2000, et proche de zéro lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 500 (pour un canal à surface libre). En pratique, la loi de Coles est peu utilisée en hydraulique car elle amène une correction de faible ampleur pour le profil de vitesse.

5.4 Hauteur normale selon la section d'écoulement

5.4.1 Hauteur normale et courbe de tarage

Lorsqu'on s'intéresse à un bief en particulier, on peut tracer le profil en travers et déduire les relations qui existent entre la hauteur h (profondeur maximale), la section mouillée S , le périmètre mouillé χ , le rayon hydraulique $R_h = A/\chi$, la largeur au miroir B , et la hauteur moyenne $\bar{h} = S/B$. La figure 5.33 montre un exemple de profil en travers, et la figure 5.34 montre les relations entre variables hydrauliques.

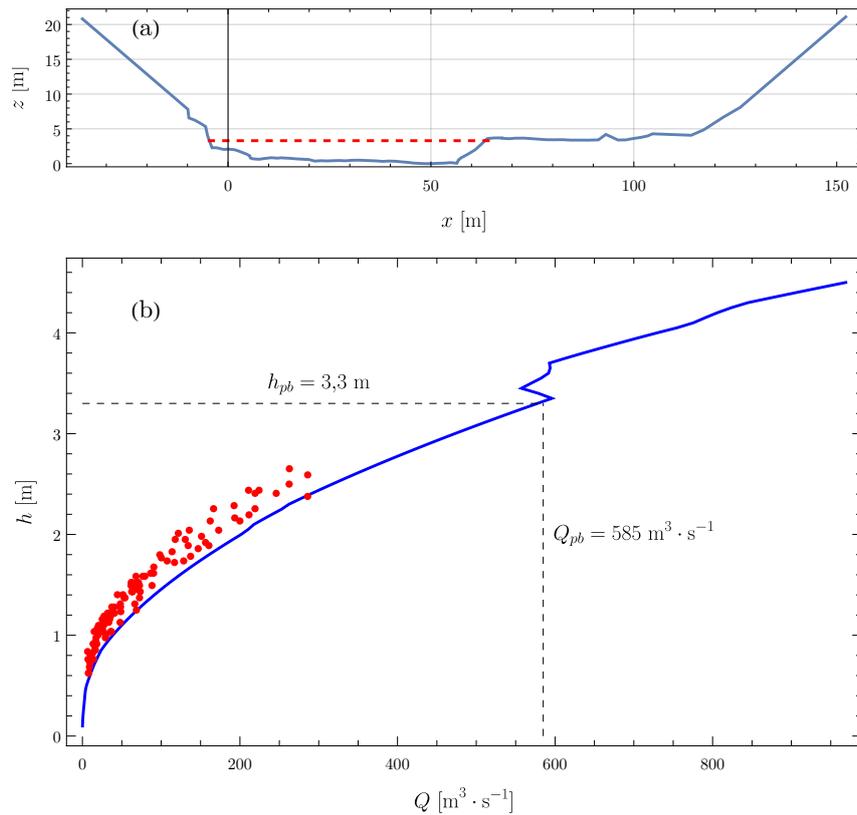


Figure 5.33 – (a) Section en travers de la rivière Boise dans l’Idaho (États Unis). (b) Courbe de tarage; le débit de plein bord est $Q_{pb} = 585 \text{ m}^3/\text{s}$; les points rouges représentent les mesures alors que la courbe continue fournit la prédiction du modèle de Manning–Strickler avec $K = 23/d_{90}^{1/6} = 31 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ où $d_{90} = 174 \text{ cm}$. Données obtenues par [Boise Adjudication Team](#) (King, 2004; Whiting *et al.*, 1999)

Hauteur normale

La hauteur normale est la profondeur d’eau en régime permanent uniforme. Elle se calcule en égalant contrainte pariétale et contrainte motrice. Par exemple, si l’on applique une loi de type Manning–Strickler, on obtient une équation implicite pour h_n

$$Q = \bar{h}B\bar{u} = KR_H^{2/3}\sqrt{i}S,$$

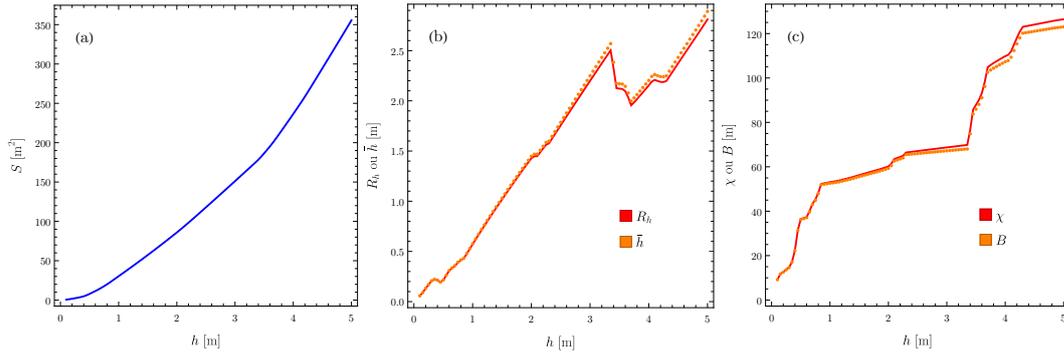


Figure 5.34 – (a) Section mouillée en fonction de la hauteur $S(h)$. (b) Rayon hydraulique $R_h(h)$ et hauteur moyenne $\bar{h}(h)$. (c) Périmètre mouillé $\chi(h)$ et largeur au miroir $B(h)$. Données obtenues pour la rivière Boise dans l’Idaho (États Unis) par [Boise Adjudication Team](#) (King, 2004; Whiting et al., 1999)

avec $S = \bar{h}B = f(h_n)$ la section d'écoulement, B la largeur au miroir, Q le débit total, \bar{h} la hauteur moyenne d'eau. Pour des canaux et rivières de section quelconque, cette équation est non linéaire, et nécessite des méthodes de résolution telles que la méthode de la dichotomie ou de Newton.

Dans le cas d'un canal infiniment large ($B \gg h$, soit $R_H \approx h$) ou bien rectangulaire, on peut trouver une expression explicite de la hauteur normale :

$$h_n = \left(\frac{q}{K\sqrt{i}} \right)^{3/5},$$

avec $q = Q/B$ le débit par unité de largeur. La hauteur normale est une fonction du débit et de la pente.

Si pour un canal rectangulaire ou un rivière de grande largeur (par rapport à la hauteur d'écoulement), profondeur et hauteur moyenne sont égales, cela n'est pas le cas dans le cas général, et il faut donc faire attention à quelle grandeur on calcule.

Caractéristiques hydrauliques en fonction de la section

Les géométries de canaux les plus courantes sont la section trapézoïdale (en terre pour la navigation et l'irrigation), rectangulaire (béton ou maçonnerie pour les aménagements hydrauliques), ou circulaire (en béton pour l'assainissement pluvial).

Tableau 5.3 – Hauteur, section, périmètre mouillé pour trois géométries usuelles. Voir figure 5.4.1 pour la notation.

type	circulaire	rectangulaire	trapézoïdal
h	$R(1 - \cos \delta)$	h	h
S	$R^2(\delta - \sin \delta \cos \delta)$	Bh	$(B + b)h/2$
χ	$2R\delta$	$B + 2h$	$2h/\cos \phi + b$

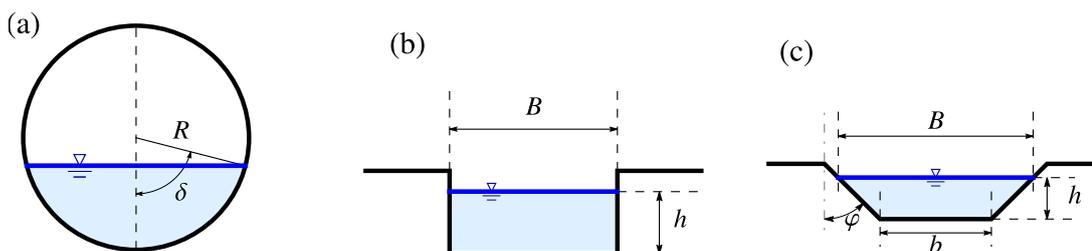


Figure 5.35 – Sections usuelles pour des canaux. (a) Buse circulaire. (b) Canal à section rectangulaire. (c) Canal à section trapézoïdale.

Courbe de tarage

À pente constante, la relation $h = f(q)$ est appelée *courbe de tarage* ou de *débitance*. Sa représentation graphique se présente souvent sous la forme d'une courbe avec deux branches :

- pour les petits débits, une augmentation rapide de la hauteur avec le débit ;
- quand le débit dépasse le débit de plein bord, le cours d'eau quitte son lit mineur, ce qui peut se traduire par une plus faible augmentation de la hauteur quand le débit croît.

Calcul numérique de la hauteur normale

De nos jours, la plupart des langages de programmation permettent de résoudre facilement des équations non linéaires simples. Par exemple, avec Mathematica on se sert de la fonction `FindRoot` et avec Python, on peut utiliser la librairie `fsolve`.

Voir un exemple traité sur la page :

github.com/cancey/introduction-hydraulique/blob/main/hauteur-normale.ipynb

5.4.2 Granulométrie et résistance à l'écoulement

La résistance à l'écoulement est en grande partie liée à la taille des grains. Par exemple, il existe des formules empiriques donnant le coefficient de Manning–Strickler en fonction de la granulométrie telle que la formule de Meyer-Peter & Müller (1948)

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}},$$

ou bien la formule plus récente de Jäggi (Smart & Jaeggi, 1983; Jäggi, 1984)

$$K = \frac{23,2}{d_{90}^{1/6}},$$

ou encore celle de Raudkivi (1990)

$$K = \frac{24}{d_{65}^{1/6}},$$

avec d_{65} le diamètre des particules tel que 65 % (en poids) des grains du lit aient un diamètre inférieur.

La morphologie d'un chenal varie en fonction de la pente de telle sorte qu'il y ait un certain équilibre entre la pente (terme gravitaire moteur dans les équations du mouvement), le débit liquide, et le débit solide :

- Pour les rivières (naturelles) de plaine, la sinuosité du lit, la possibilité de migration des méandres, et le développement de structures morphologiques (dunes, bancs de sable) permettent d'obtenir cet équilibre moyen.
- Pour les rivières torrentielles et les torrents, cet équilibre se manifeste principalement à travers un équilibre de la section en travers et il existe une relation entre granulométrie du lit, capacité de transport, et débit dominant ; la dissipation d'énergie est variable en fonction de la composition granulométrique du lit (plus le lit est grossier, plus la dissipation d'énergie est importante) et des *structures morphologiques* (distribution régulière de seuils et de mouilles, antidune). En général, les lits composés d'éléments granulométriques variés sont pavés (*armoring* en anglais), c'est-à-dire qu'il se forme une couche à la surface du lit, composée d'éléments grossiers, offrant une bonne résistance à l'érosion et permettant de dissiper suffisamment d'énergie. Le pavage est généralement stable (c'est-à-dire il n'est pas « affouillé » par les petites crues), mais il peut être détruit lors de grosses crues. Pavage et structures morphologiques évoluent sans cesse soit par ajustement local (petite crue), soit par déstabilisation massive, puis restructuration ; les échelles de temps associées varient fortement :

5.4.3 Limites des relations $\bar{u}(h, \theta)$

La résistance à l'écoulement traduit la résistance qu'exerce le fond (lit fixe ou mobile) sur l'écoulement d'eau. On considère qu'il existe principalement deux processus de résistance :

- une résistance à l'échelle des particules, dite « frottement de peau », c'est-à-dire le frottement exercé par les grains composant le lit, ce qui explique pourquoi beaucoup de formules empiriques font appel au diamètre des grains comme paramètre d'influence (voir § 5.4.2) ;
- une résistance à plus grande échelle, dite « frottement de forme », liée aux structures morphologiques (dunes, alternance de seuils et mouilles) qui accroissent la dissipation d'énergie au sein de l'écoulement.

La dissipation d'énergie due aux structures morphologiques est variable. Dans certaines configurations (écoulement sur des dunes, écoulement tumultueux dans des chaos de blocs), cette dissipation constitue l'essentiel de la dissipation d'énergie. Elle est difficile à évaluer en règle générale. Il existe quelques formules empiriques pour les géométries simples telles que les dunes (voir § 5.4.4), mais dans les autres cas, l'estimation des pertes de charge est très imprécise.

L'existence d'un frottement de forme a pour conséquence que le coefficient de rugosité du lit (C , f ou K selon la loi employée) peut varier avec le tirant d'eau de façon significative, non linéaire et hystérétique. En effet, les structures morphologiques du lit interagissent avec les grandes structures turbulentes de l'écoulement. Au cours d'une crue, ces structures morphologiques peuvent évoluer fortement, ce qui dans certains cas peut

aller jusqu'à leur destruction (voir figure 5.16). Dans ce cas-là, on assiste à une variation très importante de la résistance à l'écoulement; cela se manifeste par exemple par une modification significative de la valeur de K au cours de la crue. La figure 5.36 montre un exemple de modification de la valeur du coefficient de Manning $n = 1/K$ durant une forte crue. Pour les torrents (voir figure 5.37), la dissipation d'énergie est souvent due aux structures morphologiques tels que les seuils; lors des crues, ces seuils peuvent être détruits ou bien submergés, et dans les deux cas, il y a forte diminution de la rugosité.

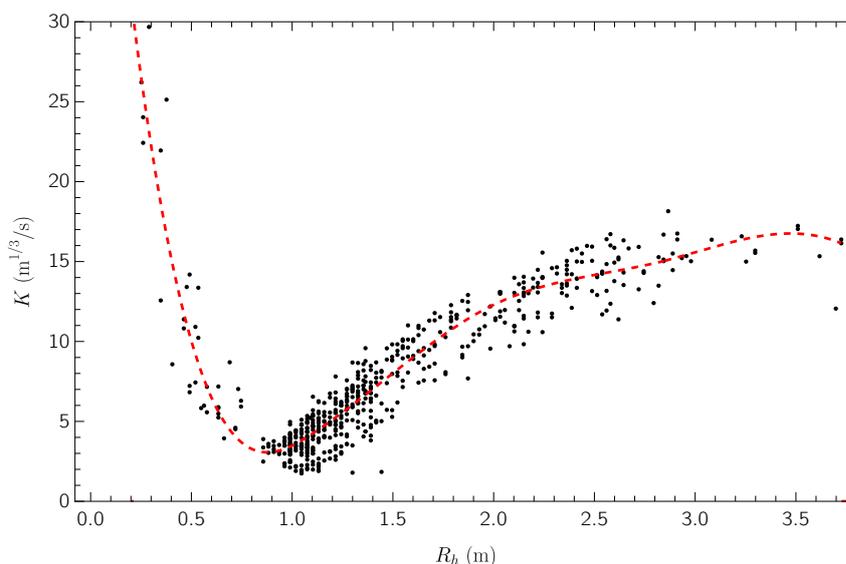


Figure 5.36 – Variation du coefficient de Manning–Strickler pour la rivière Lochsa près de Lowell (États-Unis, Idaho). Les valeurs de K ont été obtenues à partir des mesures de débit Q , de surface mouillée A , et de rayon hydraulique R_h : $K = Q/(AR_h^{2/3}\sqrt{i})$. La courbe en tireté rouge est une régression calée sur la valeur médiane de K . Source: [Sediment Transport in Idaho & Nevada \(Boise Adjudication Team\)](#); pente $i = 0,23\%$, $d_{50} = 126$ mm, et $d_{90} = 338$ mm.

À la dissipation due aux structures morphologiques du lit s'ajoutent d'autres mécanismes de dissipation :

- la rugosité du fond et des berges ne sont pas identiques (par exemple à cause de la végétation). Il faut alors employer des méthodes spécifiques pour calculer une rugosité équivalente. Il existe plusieurs de ces méthodes : méthode d'Einstein, des parallèles confondues, etc. (voir le cours de master);
- si le cours d'eau déborde de son lit mineur, il va rencontrer une rugosité très différente (terrains agricoles, routes, obstacles, etc.).

5.4.4 Structure morphologique: le cas des dunes

Toutes les relations vues précédemment ne sont valables que pour des cours d'eau à fond fixe et droit. Lorsque le lit présente des structures morphologiques (comme des dunes), une sinuosité (méandres), et un fond mobile, **la résistance à l'écoulement peut croître de façon notable.**



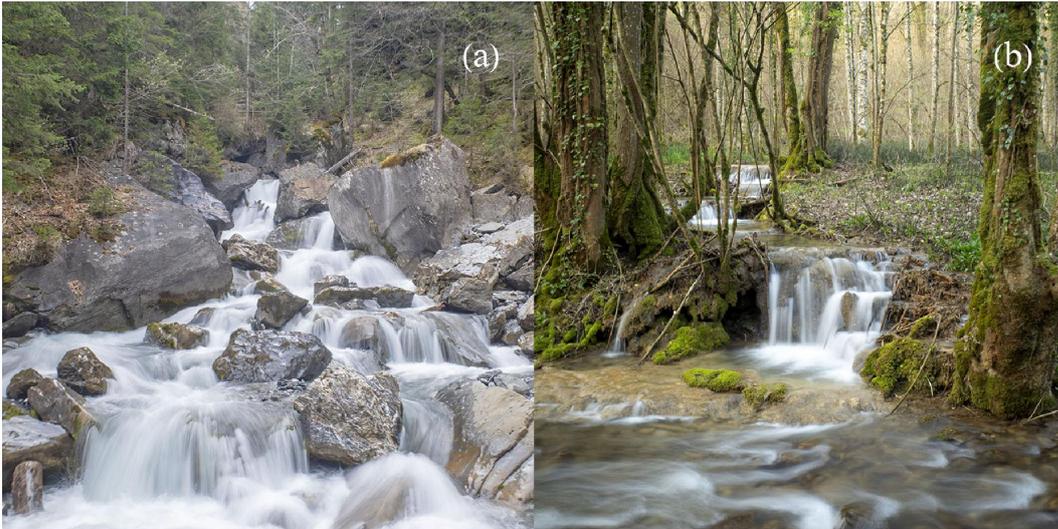


Figure 5.37 – Dans les torrents, il y a peu d'eau, mais la vitesse est élevée et la dissipation d'énergie est grande. (a) L'Avançon au-dessus des Plans-sur-Bex (VD). (b) Le Nozon au-dessus de Pommaples.

Ainsi lorsqu'il y a des structures morphologiques de type dune, il faut tenir compte des dissipations supplémentaires induites. La dissipation d'énergie due à la présence de ces structures peut être importante. Elle est due :

- à la création de tourbillons à grande échelle au sein du fluide (processus prédominant pour les dunes) ;
- au remous de la surface libre, avec parfois apparition de ressauts hydrauliques (processus prédominant pour les anti-dunes).

Le transport solide peut également induire de la dissipation d'énergie.

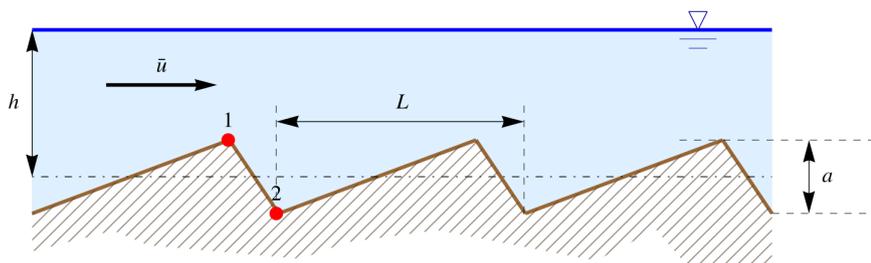


Figure 5.38 – Géométrie simplifiée d'une séquence de dunes.

Pour quantifier ces effets, considérons une alternance de dunes le long du lit, de hauteur caractéristique a et de longueur L . En première approximation, on peut admettre que l'on peut assimiler la dissipation d'énergie induite par les dunes à une perte de charge singulière : la dune se comporte comme un rétrécissement de la section d'écoulement, suivi d'un élargissement brusque. À l'aide d'une formule de perte de charge pour écoulements

divergents de type Borda, appliquée entre les points 1 et 2, on trouve :

$$\Delta H_1 = \alpha \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{2g} \approx \alpha \frac{\bar{u}^2}{2g} \left(\frac{a}{h}\right)^2,$$

où α est un coefficient de perte de charge. La profondeur d'eau h est calculée par rapport à une ligne fictive, qui représente l'altitude moyenne du fond (représentée par une ligne fine à la figure 5.38). La vitesse au point 1 est donc : $\bar{u}_1 = q/(h - a/2)$ tandis qu'en 2, on a $\bar{u}_2 = q/(h + a/2)$.

Cette perte de charge singulière s'ajoute à la dissipation d'énergie par frottement sur le fond

$$\Delta H_2 = L \frac{C_f}{R_H} \frac{\bar{u}^2}{2g} \approx L \frac{C_f}{h} \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

avec $C_f = f/4$ le coefficient de frottement qui peut être relié, par exemple, au coefficient de Strickler

$$\tau_p = \frac{1}{2} C_f \rho \bar{u}^2 = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_H^{1/3}} \Rightarrow C_f = \frac{2g}{K^2 R_H^{1/3}},$$

ou bien au coefficient de Chézy

$$\tau_p = \frac{1}{2} C_f \rho \bar{u}^2 = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u}^2 \Rightarrow C_f = \frac{2g}{C^2}.$$

La perte de charge totale est donc

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = \alpha \frac{\bar{u}^2}{2g} \left(\frac{a}{h}\right)^2 + L \frac{C_f}{R_H} \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

On peut calculer un coefficient de frottement équivalent C_f^* comme étant la somme des pertes de charge locale dues à la dune :

$$\Delta H = C_f^* \frac{L}{h} \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

soit encore

$$C_f^* = C_f + \alpha \frac{a^2}{Lh}.$$

On peut également en déduire un coefficient de Chézy équivalent : $C_{eq.} = \sqrt{2g/C_f^*}$. On en déduit une nouvelle loi d'écoulement similaire à l'équation (voir tableau 5.2) obtenue pour un régime uniforme sur fond plat :

$$\bar{u} = C \sqrt{\frac{Lh}{Lh + \alpha a^2 C^2 / (2g)}} \sqrt{\sin \theta} \sqrt{h}.$$

Ce petit calcul simple permet de montrer que, plus la taille de la dune augmente, plus la vitesse moyenne d'écoulement diminue. Il existe des formules empiriques comme celle de Sugio pour des cours d'eau naturels ($0,1 < d_{50} < 130$ mm) et des canaux ($0,2 < k_s < 7$ mm) :

$$\bar{u} = K R_H^{0,54} i^{0,27},$$

avec $K = 54 - 80$ pour des dunes, $K = 43$ pour une rivière à méandre. D'autres formules ont été développées, mais elles présentent à peu près toutes l'inconvénient de ne fournir que des tendances car les données expérimentales sont très dispersées.

5.5 Régime permanent non-uniforme

5.5.1 Canal large

On a vu au § 5.2.2 que pour un canal rectangulaire, l'équation de remous prenait la forme suivante :

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{j - i}{Fr^2 - 1}}, \quad (5.11)$$

où l'on a introduit $i = \tan \theta$ et la *pente de frottement*

$$j = \frac{\tau_p}{\rho g R_h \cos \theta},$$

et le nombre de Froude pour un canal rectangulaire

$$Fr = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh \cos \theta}}.$$

Comme précédemment au § 5.2.2, on rappelle qu'on a supposé ici qu'on avait un canal descendant dans la direction des x croissants : on a posé $i = -dz/dx > 0$. Si on change les axes ou les orientations du canal, il faut penser à veiller à ce que l'équation soit consistante avec ces changements.

Dans le cas d'un canal infiniment large sur faible pente ($R_h \sim h$ et $\cos \theta \sim 1$) et d'une rugosité de type Chézy, on peut également la mettre sous la forme suivante dite *équation de Bresse* :

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3}}, \quad (5.12)$$

où l'on a posé :

- la hauteur normale h_n , qui est solution de l'équation $\tau_p = \rho g h_n \sin \theta$ (solution : $h_n = (q^2/(C^2 i))^{1/3}$ pour un canal infiniment large);
- la hauteur critique $h_c = (q^2/g)^{1/3}$.

Si on choisit une loi de Manning-Strickler, l'équation de Bresse s'écrit alors

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^{10/3}}{1 - (h_c/h)^3}, \quad (5.13)$$

avec cette fois-ci $h_n = (q/(K\sqrt{i}))^{3/5}$.

Cette forme de Bresse est pratique car elle permet de rapidement déterminer le signe du numérateur N et dénominateur D . Par exemple, si $h > h_n$ et $h > h_c$, alors $N > 0$ et $D > 0$. Par ailleurs, on peut facilement déterminer le régime d'écoulement :

- si $h_n > h_c$, l'écoulement est subcritique ($Fr < 1$);
- si $h_n < h_c$, l'écoulement est supercritique ($Fr > 1$).

Pour s'en convaincre, il suffit de noter que si $h_n > h_c$, alors

$$h_n^3 > h_c^3 \Rightarrow h_n^3 > \frac{q^2}{g} \Rightarrow 1 > \frac{q^2}{gh_n^3} > Fr.$$

5.5.2 Canal quelconque

Relation avec la hauteur moyenne d'eau. Pour des canaux quelconques, on peut montrer que la définition du nombre de Froude est identique (si on prend comme définition de la hauteur la hauteur moyenne $h = S/B$). En revanche, l'équation de remous est plus complexe car (i) la définition de la charge hydraulique est plus malaisée, et (ii) il faut tenir compte des éventuelles variations de la largeur au miroir B dans la direction d'écoulement ; on montre qu'on aboutit à :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\rho g S \cos \theta} \frac{\chi \tau_p - \rho g S \sin \theta - \rho h \bar{u}^2 B'(x)}{\text{Fr}^2 - 1} = \frac{j - i - \text{Fr}^2 B' h / B}{\text{Fr}^2 - 1}, \quad (5.14)$$

avec $\text{Fr} = \bar{u} / \sqrt{g h} = Q \sqrt{B} / \sqrt{g S^3}$ et $h = S/B$. Notons que la formule du régime permanent se déduit de ces équations en prenant $h'(x) = 0$.

☞ **Démonstration.** La relation de Bernoulli donne

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{u}^2}{2g} + h + z \right) = -j,$$

avec j la pente de frottement. Comme $\bar{u} = Q/S$ et $S = Bh$, on en déduit :

$$\frac{d}{dx} \frac{\bar{u}^2}{2g} + \frac{dh}{dx} = i - j,$$

or

$$\frac{d}{dx} \frac{\bar{u}^2}{2g} = -2 \frac{Q^2 S'}{2g S^3} = -\frac{Q^2 B' h + h' B}{g S^3} = -\text{Fr}^2 \frac{B' h + h' B}{B}.$$

On tire après réarrangement

$$h'(x) = \frac{j - i - \text{Fr}^2 B' h / B}{\text{Fr}^2 - 1}$$

Relation avec le tirant d'eau. On touche ici une limite de la courbe de remous déduite de l'application du théorème de Bernoulli. Pour un canal quelconque, il faut savoir comment définir la charge hydraulique et la relier à des variables de l'écoulement. Plutôt que la hauteur moyenne $h = S/B$, on peut préférer utiliser la profondeur maximale (tirant d'eau) dans la définition de la charge (Graf & Altinakar, 1993; Hager & Schleiss, 2009). Pour un canal quelconque, la surface S est alors une fonction de h et x . On pose

$$\frac{\partial S}{\partial h} = B.$$

La courbe de remous est alors

$$h'(x) = \frac{j - i - \frac{Q^2}{g S^3} \frac{\partial S}{\partial x}}{\text{Fr}^2 - 1}, \quad (5.15)$$

avec la définition suivante du nombre de Froude

$$\text{Fr}^2 = \frac{Q^2}{g S^3} \frac{\partial S}{\partial h} = \frac{Q^2 B}{g S^3}. \quad (5.16)$$

☞ **Démonstration.** La relation de Bernoulli donne

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2gS^2} + h + z \right) = -j,$$

or Q est constant et on peut décomposer $S(h, x)$

$$dS(h, x) = \frac{\partial S}{\partial h} dh + \frac{\partial S}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{d}{dx} S = \frac{\partial S}{\partial h} \frac{dh}{dx} + \frac{\partial S}{\partial x} = B \frac{dh}{dx} + \frac{\partial S}{\partial x}.$$

En substituant dans la relation de Bernoulli, on a

$$-\frac{Q^2}{gS^3} \left(Bh' + \frac{\partial S}{\partial x} \right) + h' - i = -j,$$

et après réarrangement des termes et en servant de la définition du nombre de Froude (5.16), on trouve l'équation de la courbe de remous (5.15).

Cas particulier des canaux prismatiques. Un cas particulier important est le canal *prismatique*, c.-à-d. un canal dont le profil en travers reste identique à lui-même le long de l'axe x . La section d'écoulement S ne dépend que de la profondeur h et donc $\partial_x S = 0$, l'équation (5.15) devient alors

$$\boxed{h'(x) = \frac{j - i}{\text{Fr}^2 - 1}}. \quad (5.17)$$

tandis que l'équation (5.14)

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\rho g S \cos \theta} \frac{\chi \tau_p - \rho g S \sin \theta - \rho h \bar{u}^2 B'(x)}{\text{Fr}^2 - 1} = \frac{j - i}{\text{Fr}^2 - 1}. \quad (5.18)$$

La structure des équations est similaire, mais la définition de h (et du nombre de Froude) diffère.

Pour des canaux de forme plus complexe, il vaut mieux utiliser les équations de Saint-Venant (voir cours de master).

5.5.3 Courbes de remous: forme générale

En pratique, on cherche à résoudre l'équation de la courbe de remous sur un certain intervalle $[0, L]$ pour un canal rectangulaire:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{j - i}{\text{Fr}^2 - 1}.$$

avec, par exemple ici dans le cas la loi de Manning–Strickler, $j = \bar{u}^2 / (K^2 h^{4/3})$, $h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$, et $h_n = (q / (K \sqrt{i}))^{3/5}$. Comme indiqué plus haut (voir § 5.5.1), il est souvent préférable d'employer l'équation de Bresse:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{j - i}{\text{Fr}^2 - 1} = \frac{N(h)}{D(h)} = i \frac{(h_n/h)^{10/3} - 1}{(h_c/h)^3 - 1}$$

afin de déterminer rapidement la nature du régime d'écoulement et les signes du numérateur N et dénominateur D .

C'est une équation différentielle non linéaire du premier ordre. Pour résoudre cette équation différentielle, il faut une seule condition aux limites (voir § 5.5.6). À noter en premier lieu le comportement quand le numérateur ou le dénominateur s'annule :

- quand $N = 0$ c'est le régime permanent uniforme ;
- quand $D = 0$ la tangente de la courbe $h(x)$ est verticale : variation brutale de hauteur d'eau. On est alors en dehors du cadre de nos hypothèses... Lorsque $Fr = 1$, l'écoulement ne peut être décrit par l'équation de la courbe de remous.

De ce fait, quand on veut tracer la courbe de remous, on a intérêt à calculer tout d'abord les hauteurs normale et critique, puis à les tracer. Cela permet de déterminer le régime d'écoulement (on rappelle si $h_n > h_c$, alors le régime est subcritique, et inversement), et donc de placer (voir § 5.5.6). Une fois que la condition aux limites est placée par rapport aux hauteurs normale et critique, la forme l'équation de Bresse permet de déterminer les signes du numérateur N et dénominateur D . Par exemple, si $h > h_n$, alors $N > 0$. On peut donc facilement savoir si la hauteur est croissante ou décroissante.

Asymptotiquement pour x suffisamment grand, on a $h(x) \rightarrow h_n$. Si la longueur de l'intervalle est suffisamment grande, on doit donc trouver que la hauteur tend vers la hauteur normale. Comme le montre la figure 5.39, la forme de la solution dépend du signe de N et D ainsi que de la position de la condition aux limites (placée à l'aval ou à l'amont) vis-à-vis des hauteurs normale et critique h_n et h_c .

À noter enfin que la courbe $h(x)$ tend toujours vers h_n (mais pas nécessairement dans le domaine d'intégration !), mais si elle rencontre $h = h_c$, un ressaut hydraulique (ou bien une chute) se produit. Le passage transcritique produit une discontinuité de la solution. Il faut alors recourir à une résolution de l'équation de part et d'autre de la discontinuité (ressaut ou chute), et relier les deux arcs de solution par une relation de conjugaison (voir § 5.6.2) ou un calcul de charge hydraulique au voisinage de la singularité (voir § 5.6.4). Pour les solutions continues, on peut proposer une classification de la forme des courbes de remous (voir § 5.5.5).

5.5.4 Résolution numérique de l'équation de la courbe de remous

La plupart des langages actuels possèdent des solveurs d'équation différentielle ordinaire.

Voir un exemple traité sur la page :

github.com/cancey/introduction-hydraulique/blob/main/solveur-courbe-remous.ipynb

5.5.5 Classification des régimes d'écoulement

Auparavant on opérait une classification des courbes de remous en fonction des valeurs respectives de h , h_n , et h_c . Quand la pente est positive ($i > 0$), on a :

- profil de type M (« mild ») pour pente douce quand $h_n > h_c$;
- profil de type S (« steep ») pour pente forte quand $h_n < h_c$.

Il faut ajouter les profils critiques C quand $h = h_c$. Lorsque la pente est nulle, la hauteur normale devient infinie, la courbe de remous devient horizontale ; on parle de profil H.

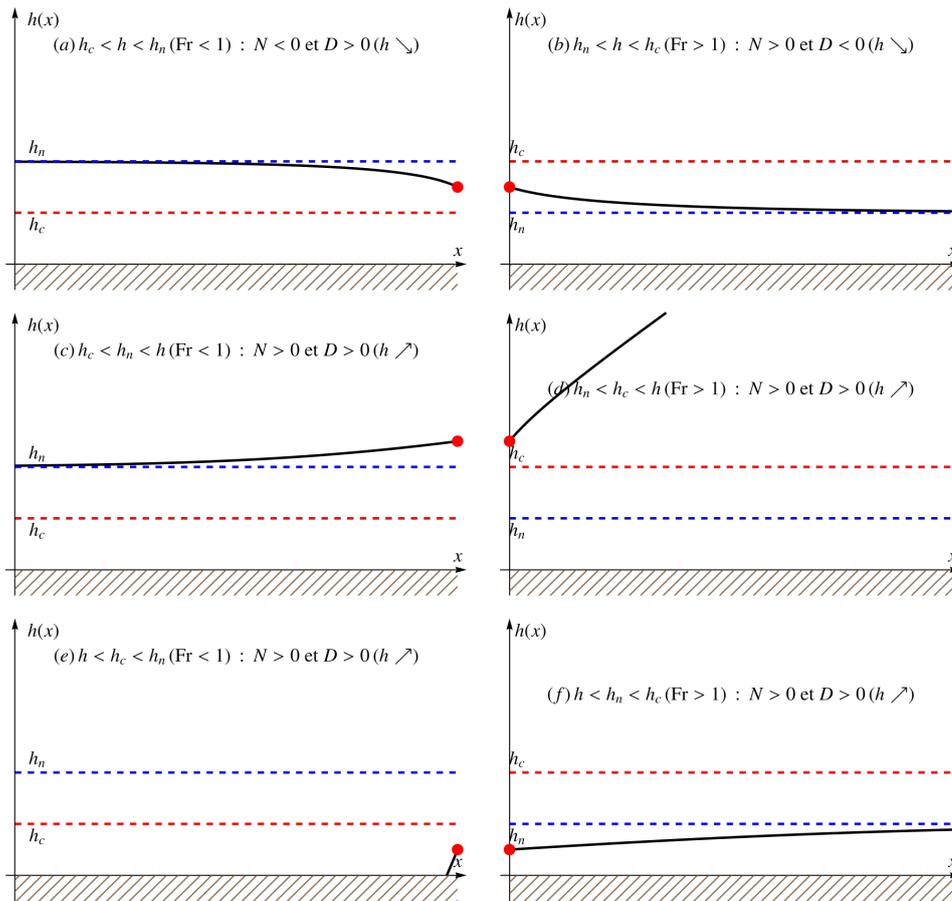


Figure 5.39 – Comportement de la solution de l'équation de la courbe de remous en fonction de la position de la condition aux limites vis-à-vis de h_n et h_c . Le point rouge montre la position de la condition aux limites qui est placée en fonction du régime d'écoulement.

Lorsque la pente est négative, on parle de profil adverse A. Notons qu'il n'y a pas de hauteur normale dans ce cas-là.

Canaux à faible pente : courbes M1–M3

Ce sont les courbes observées pour un canal descendant ($i > 0$) à pente faible ($h_n > h_c$). On distingue trois branches :

- $h > h_n > h_c$: la courbe est tangente à h_n à l'amont et sa tangente devient horizontale à l'aval. On rencontre ce type de courbe à l'amont d'un barrage, d'un lac, ou d'un obstacle. Le profil est croissant ($h' > 0$).
- $h_n > h > h_c$: la courbe est tangente à h_n à l'amont. Le profil est décroissant ($h' < 0$). Sa tangente aurait tendance à devenir verticale à l'aval car la courbe de remous croise la hauteur critique. On rencontre ce type de courbe à l'amont d'une chute ou de toute variation brutale de la pente, où il y a passage d'un écoulement fluvial à torrentiel.
- $h_n > h_c > h$: la courbe est tangente à h_n à l'amont. Le profil est croissant ($h' > 0$). À l'aval il se forme un ressaut. On rencontre ce type de profil à la sortie d'une vanne

lorsque la pente du radier à l'aval est faible.

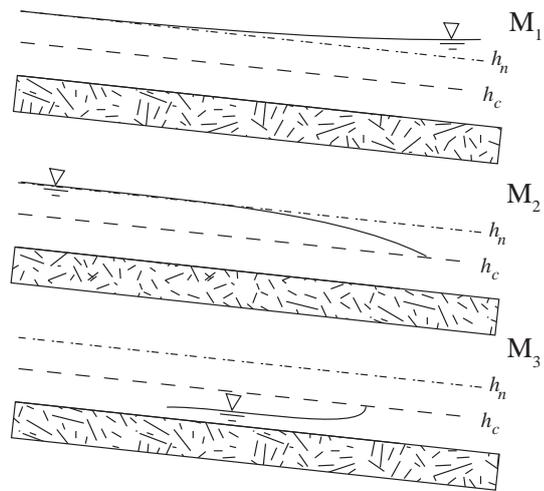


Figure 5.40 – Allure des courbes.

Canaux à forte pente : courbes S1–S3

Ce sont les courbes observées pour un canal descendant ($i > 0$) à pente forte ($h_n < h_c$). On distingue là encore trois branches :

- $h > h_c > h_n$: la courbe est tangente à h_n à l'aval et sa tangente tendrait à devenir verticale à l'amont car la courbe de remous croise la hauteur critique. On rencontre ce type de courbe à l'amont d'un barrage ou d'un changement de pente. Le profil est croissant ($h' > 0$).
- $h_c > h > h_n$: la courbe est tangente à h_n à l'aval. Le profil est décroissant ($h' < 0$). Sa tangente aurait tendance à devenir verticale à l'amont. On rencontre ce type de courbe à l'aval d'une augmentation brutale de la pente, où il y a passage d'un écoulement fluvial à torrentiel, ou bien lors d'un élargissement brutal de la section d'écoulement.
- $h_c > h_n > h$: la courbe est tangente à h_n à l'aval. Le profil est croissant ($h' > 0$). À l'aval il se forme un ressaut. On rencontre ce type de profil à la sortie d'une vanne dénoyée lorsque la pente du radier à l'aval est forte.

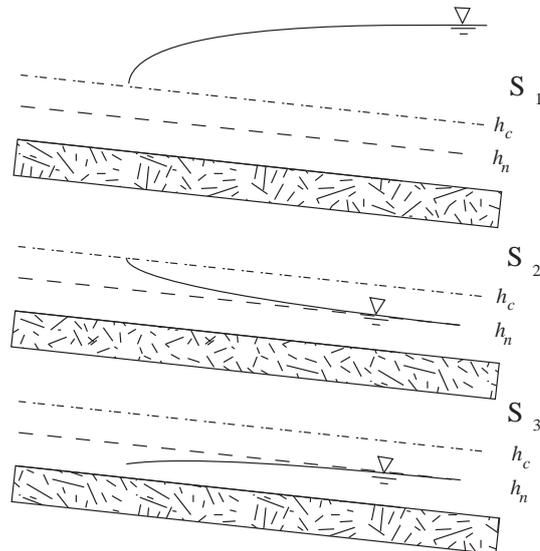


Figure 5.41 – Allure des courbes.

5.5.6 Conditions aux limites

De nos jours, on résout numériquement l'équation de remous. Comme il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, il suffit de connaître une seule condition aux limites. En pratique, on ne peut pas choisir n'importe comment la position amont/aval de cette condition. Elle est fixée par la possibilité qu'a « l'information » de se propager. Par *information*, il faut comprendre le déplacement d'une perturbation de l'écoulement, qui se présente sous la forme d'une petite variation locale de hauteur (intumescence ; voir figure 5.42). Cette perturbation se propage à la vitesse $u' = u \pm c$ avec $c = \sqrt{gh}$ la vitesse de propagation des ondes en eau peu profonde. Cette vitesse peut s'écrire aussi en fonction du nombre de Froude

$$u' = u \pm \sqrt{gh} = \sqrt{gh}(\text{Fr} \pm 1),$$

ce qui montre que pour un régime supercritique ($\text{Fr} > 1$), les deux vitesses de propagation sont positives et donc l'information ne se propage que de l'amont vers l'aval alors qu'en régime subcritique ($\text{Fr} < 1$), elle se propage dans les deux sens. Cela veut aussi dire qu'une modification d'un écoulement en un endroit donné produit une perturbation qui remonte le cours d'eau et peut donc modifier ce que se passe à l'amont.

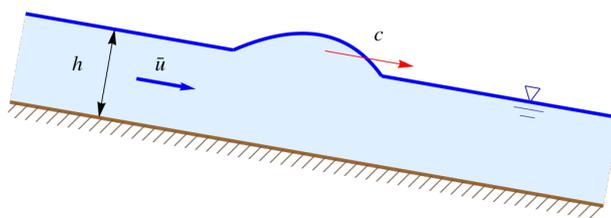


Figure 5.42 – Propagation d'une petite intumescence à la vitesse $c = \sqrt{gh}$ le long de la surface libre d'un écoulement de vitesse moyenne u .

En conséquence, on retient que :

- pour un régime subcritique (fluvial), la condition aux limites pourrait en principe être choisie à l'amont ou à l'aval, mais en pratique comme ce qui se passe à l'aval se propage vers l'amont et modifie ce qui s'y passe, c'est une condition aux limites placée à l'aval que l'on considère ;
- pour un régime supercritique (torrentiel), il faut placer la condition aux limites à l'amont.

L'imposition d'une condition aux limites dans un cours d'eau peut se faire à l'aide de singularités où le débit et/ou la hauteur sont imposés (vanne, seuil, chute).

En pratique, les écoulements fluviaux sont calculés dans la direction inverse de celle de l'écoulement (condition à la limite à l'aval) tandis qu'en régime torrentiel, la condition à la limite est placée à l'amont.

Conditions	$\frac{h_n}{h}$	Signe num.	$\frac{h_c}{h}$	Signe dén.	Signe $\frac{dh}{dx}$	Changement de profondeur	Nom	Figures <i>échelle verticale exagérée</i>
$J_f > 0$ $J_f < J_c$ $h_n > h_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	M1	
	< 1	+	> 1	-	-	pas possible	M2	
	> 1	-	< 1	+	-	décroît	M3	
	> 1	-	> 1	-	+	croît	M3	
$J_f > 0$ $J_f > J_c$ $h_n < h_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	S1	
	< 1	+	> 1	-	-	décroît	S2	
	> 1	-	> 1	-	+	croît	S3	
$J_f > 0$ $J_f = J_c$ $h_n = h_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	C1	
	> 1	-	> 1	-	+	croît	C3	
$J_f = 0$ $h_n = \infty$	-	-	< 1	+	-	décroît	H2	
	-	-	> 1	-	+	croît	H3	
$J_f < 0$ $h_n < 0$	< 1	-	< 1	+	-	décroît	A2	
	< 1	-	> 1	-	+	croît	A3	

Figure 5.43 – Tableau récapitulatif des courbes.

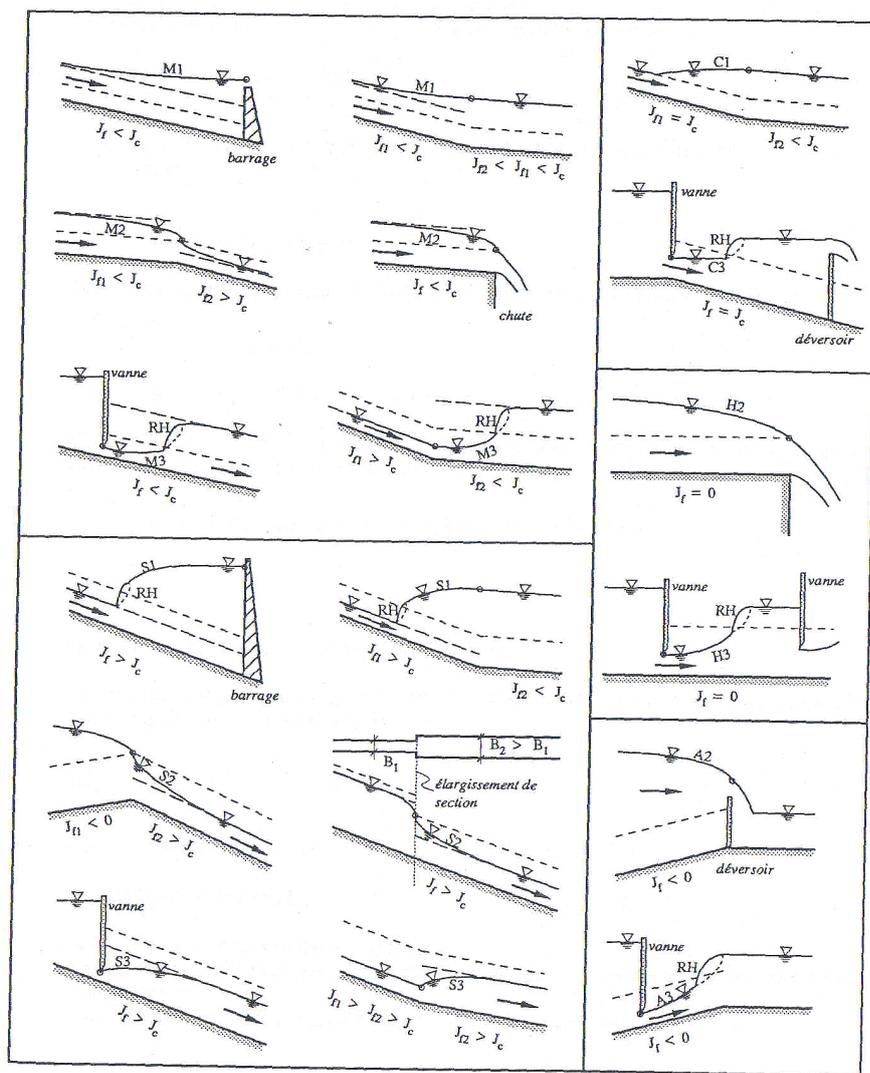


Figure 5.44 – Quelques exemples des courbes de remous en fonction des aménagements.

5.6 Courbes de remous et écoulement critique

5.6.1 Hauteur critique et régimes associés

La hauteur croît ou décroît selon le signe respectif du numérateur et du dénominateur dans l'équation différentielle (5.11), ce qui donne différentes formes de courbes de remous (voir figure 5.43). Notons ce point important : lorsque le nombre de Froude prend la valeur 1, le dénominateur est nul et en ce point la dérivée devient infinie, ce qui est physiquement impossible. En fait au voisinage de ce point, il se forme

- soit une discontinuité de la surface libre appelée *ressaut* qu'il faut étudier avec des outils spécifiques (cf. § 5.6.2) lorsqu'on passe d'un régime super- à subcritique ;
- soit une « chute » d'eau, c'est-à-dire une accélération brutale et un raidissement de la surface libre (passage d'un seuil par exemple, avec transition d'un régime sub- à supercritique).

La pente du canal et/ou la hauteur pour lesquelles on a $Fr = 1$ s'appelle la *pente critique* et la *hauteur critique* h_c . On distingue deux régimes selon la valeur du nombre de Froude :

- $Fr < 1$, régime sub-critique plus couramment appelé *régime fluvial* pour lequel on a $h > h_c$;
- $Fr > 1$, régime super-critique plus couramment appelé *régime torrentiel* pour lequel on a $h < h_c$.

La hauteur critique étant définie comme étant $Fr(h_c) = 1$, on tire que pour un canal rectangulaire :

$$h_c = \left(\frac{1}{g \cos \theta} \frac{Q^2}{B^2} \right)^{1/3},$$

avec Q le débit total et B la largeur au miroir. Dans le cas d'un canal rectangulaire, en introduisant le débit par unité de largeur $q = Q/B$, on tire :

$$\boxed{h_c = \left(\frac{q^2}{g \cos \theta} \right)^{1/3}}. \quad (5.19)$$

Dans la plupart des ouvrages, le terme $\cos \theta$ est omis car la pente est faible et donc $\cos \theta \approx 1$. Le débit critique ne dépend pas (fortement) de la pente, mais uniquement du débit liquide. Pour un canal de section quelconque, on prendra garde que le nombre de Froude se définit comme

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{gS^3} \frac{\partial S}{\partial h},$$

et si le canal est prismatique (c.-à.d. il garde la même section), alors on simplifie cette expression :

$$\boxed{Fr = \frac{Q}{S \sqrt{g \frac{S}{B}}}}, \quad (5.20)$$

avec S la section mouillée et $B = \partial_h S$ la largeur au miroir. La hauteur critique est celle qui vérifie $Fr = 1$, donc la solution de l'équation non linéaire

$$g \frac{S^3(h_c)}{B(h_c)} = Q^2. \quad (5.21)$$

5.6.2 Ressaut hydraulique

Définition

Un ressaut hydraulique est une variation rapide du niveau d'eau lors du passage d'un écoulement supercritique à subcritique.

Le ressaut stationnaire est le cas le plus fréquent : il correspond à une vague stationnaire au sein de laquelle le régime d'écoulement passe de supercritique à subcritique. Les ressauts hydrauliques stationnaires sont souvent observés au pied d'aménagements hydrauliques tels que les évacuateurs de crue des barrages ou les seuils. La photographie 5.45 montre un ressaut au pied du seuil, qui sert à alimenter le laboratoire d'hydraulique Saint-Anthony Falls (SAFL) à Minneapolis. La photographie 5.46 montre le ressaut formé au pied du barrage de Grangent (sur la Loire, France) lors du passage d'une crue.



Figure 5.45 – Ressaut hydraulique stationnaire sur le Mississippi au pied du seuil du Saint-Anthony Falls Laboratory de Minneapolis (États-Unis). Source : [Wikimedia](#).

Il existe aussi des ressauts mobiles. C'est le cas par exemple lors du déferlement de vagues sur une plage ou bien lorsque le front d'une onde de crue devient très raide et prend l'apparence d'un mur d'eau (voir photographie 5.47). Pour les fleuves qui n'ont pas été trop perturbés par l'homme, les grandes marées peuvent provoquer une augmentation rapide du niveau des eaux au niveau de l'embouchure ou du delta. Comme le fleuve est en régime subcritique, cette montée des eaux provoque la formation d'une vague qui se remonte le courant : on l'appelle *mascaret*. Le front du mascaret peut se déformer et déferler, ce qui donne naissance à un ressaut mobile. La photographie 5.48 montre un mascaret, avec son front déferlant, dans la Nith en Écosse.

Équation du ressaut stationnaire

Dans un ressaut, il y a une variation brutale du champ de vitesse sur une courte distance. La figure 5.49 montre la coupe d'un ressaut ; on note la forte vorticité dans les couches supérieures du ressaut qui accompagne l'augmentation de hauteur. Au niveau d'un ressaut, la courbure de la ligne d'eau est trop importante, et la dissipation d'énergie devient significative. Il s'ensuit que les conditions d'application du théorème de Bernoulli et l'équation (5.11) de la courbe de remous cessent d'être valables.

On utilise alors le théorème de quantité de mouvement de part et d'autre du ressaut (sur un volume de contrôle V , dont la surface est S) pour simplifier le problème et déduire



Figure 5.46 – Crue de la Loire de novembre 2008 et passage de la crue au niveau de l'évacuateur de crue du barrage de Grangent. Source : DIREN.



Figure 5.47 – Arrivée du front (ressaut mobile) d'une crue sur la rivière Zavragia (Tessin) en juillet 1987 ; les deux clichés sont pris à 15 mn d'intervalle. Source : [Toni Venzin](#).

les caractéristiques du ressaut. Pour cela on considère un volume de contrôle (par unité de largeur) de part et d'autre du ressaut (voir figure 5.50). Notons que l'écoulement va de la gauche vers la droite et il faut se souvenir que dans ce sens d'écoulement, un ressaut provoque une augmentation de hauteur, jamais une diminution (en effet le ressaut est associé à une dissipation d'énergie, donc à un ralentissement de l'écoulement). La tranche amont (resp. aval) est référencée par l'indice 1 (resp. 2). La longueur du volume de contrôle est L .



Figure 5.48 – Mascaret (ressaut mobile) la Nith, un fleuve écossais qui connaît des mascarets lors des grandes marées. Source : [The Caerlaverock Community](#).

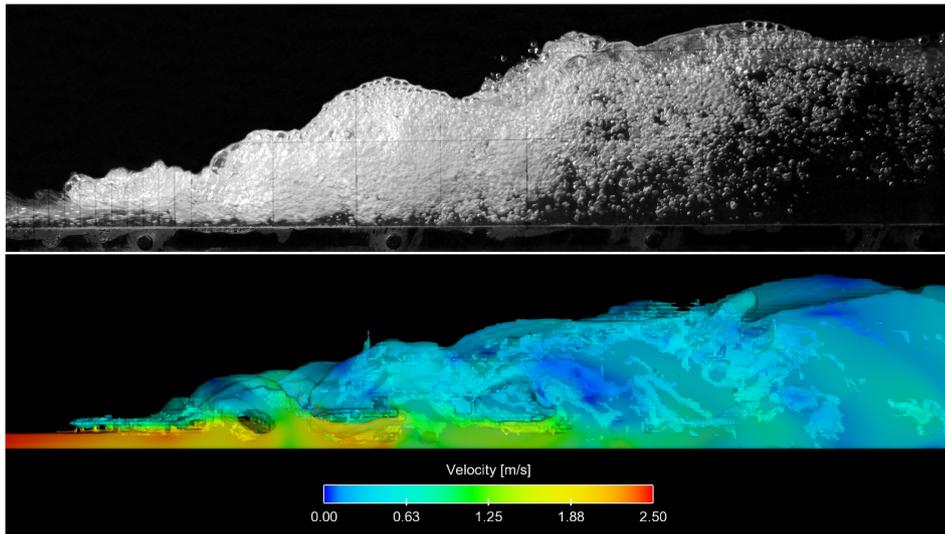


Figure 5.49 – Ressaut hydraulique ($Fr_1 \approx 6$). L'écoulement va de la gauche vers la droite. En haut : vue de côté d'un canal expérimental ; en bas : simulation numérique. ([Viti et al., 2018](#)).

On fait les hypothèses de calcul suivantes :

- (H1) l'écoulement est permanent. Le débit par unité de largeur se conserve donc, et il vaut q ;
- (H2) l'écoulement est unidirectionnel ;
- (H3) le ressaut est immobile (sa vitesse de déplacement est nulle) ;
- (H4) la distribution de pression est hydrostatique loin du ressaut : $p = \rho g(h - y)$;
- (H5) le profil de vitesse est uniforme loin du ressaut ;
- (H6) le fond est peu rugueux, et donc en première approximation on peut négliger le frottement sur le fond par rapport aux pertes de charge singulières (dues à la vorticité) ;
- (H7) la pente du lit est faible.

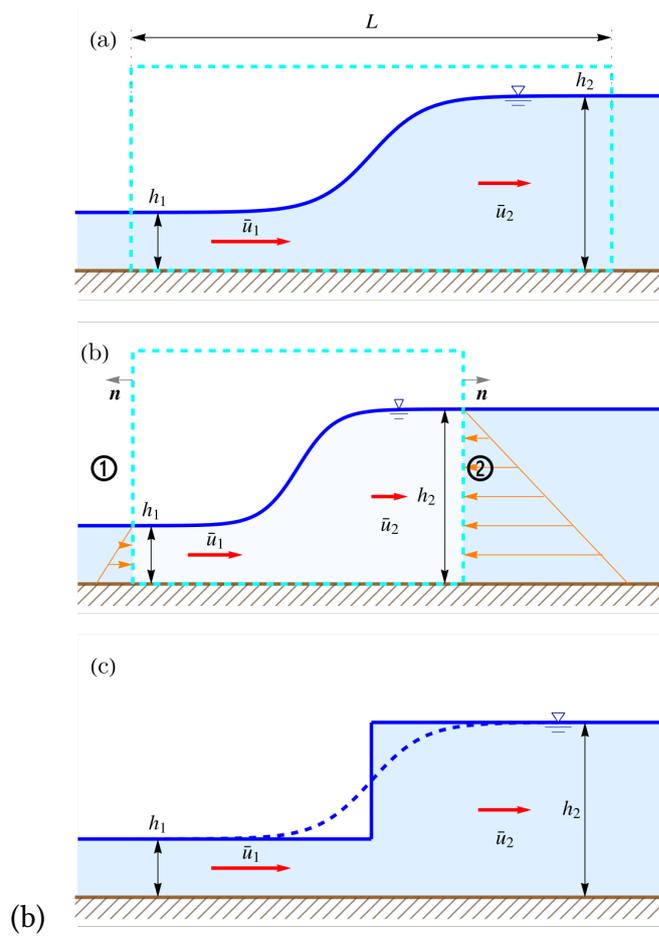


Figure 5.50 – Schématisation d’un ressaut. (a) Pour étudier le ressaut hydraulique, on considère un volume de contrôle (cadre tireté de couleur cyan). (b) Sur ce volume de contrôle, on fait un bilan de quantité de mouvement et de forces. Le profil de pression est linéaire (distribution hydrostatique des pressions reportée en orange), et le profil de vitesse est uniforme à travers la hauteur d’écoulement. Sur la face amont ①, la force de pression pousse le fluide, alors que pour la face aval ②, la force de pression retient le fluide. (c) La variation brutale du niveau d’eau sur une courte est remplacée par une discontinuité de la hauteur d’eau (et de la vitesse). Le traitement permet de simplifier grandement la variation du profil de hauteur en le remplaçant par un profil discontinu.

On considère un volume de contrôle arbitraire fixe dont les frontières englobent le ressaut. L’équation de continuité donne :

$$q = \bar{u}_1 h_1 = \bar{u}_2 h_2.$$

L’équation de quantité de mouvement est obtenue en prenant l’équation (4.14) avec $f = \mathbf{u}$:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{u} dV = \int_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_S \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \text{somme des forces appliquées},$$

ce qui donne l’équation suivante compte tenu de l’hypothèse de régime permanent

$$\int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dont la projection le long de la direction d'écoulement donne :

$$-\int_0^{h_1} \rho u_1^2 dS + \int_0^{h_2} \rho u_2^2 dS = \int_0^{h_1} p dy - \int_0^{h_2} p dy$$

puisque la pente est négligeable (H7), le frottement négligeable (H6), la vitesse orientée positivement ($\bar{u}_i > 0$), $\mathbf{n} = (-1, 0)$ sur la face amont ① et $\mathbf{n} = (1, 0)$ sur la face aval ②.

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\rho q(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) = \frac{1}{2} \rho g(h_1^2 - h_2^2). \quad (5.22)$$

On suppose que l'on connaît les conditions à l'amont et on veut déduire ce qui se passe à l'aval. On déduit la relation donnant le rapport h_2/h_1 :

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right)}. \quad (5.23)$$

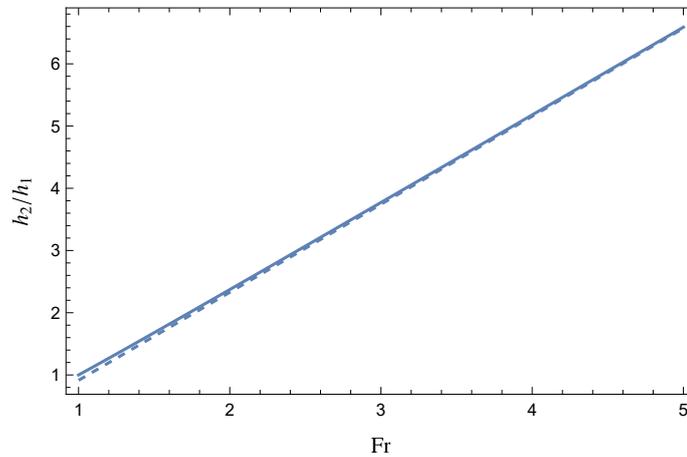


Figure 5.51 – Variation du rapport h_2/h_1 en fonction du nombre de Froude amont (trait continu). La courbe en tireté montre l'approximation linéaire $h_2/h_1 = \text{Fr}\sqrt{2} - 1/2$.

La figure 5.51 montre que le rapport h_2/h_1 varie de façon à peu près linéaire avec le nombre de Froude amont Fr_1 .

L'équation (5.23) s'appelle *équation de conjugaison* et les hauteurs h_1 et h_2 sont dites *conjuguées*. La perte de charge associée se calcule en calculant la différence de charge entre les points 1 et 2, et en éliminant le débit q à l'aide de la relation (5.22) :

$$\boxed{\Delta H = H_2 - H_1 = h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = -\frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} = -h_1 \frac{\left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 3 \right)^3}{16 \left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right)}}. \quad (5.24)$$

La longueur du ressaut n'est en général pas très élevée, ce qui permet de justifier notre approximation H6. Expérimentalement, [Hager et al. \(1990\)](#) ont trouvé par exemple que l'on peut relier la longueur du ressaut et le nombre de Froude à l'amont :

$$\boxed{\frac{L}{h_1} = 160 \tanh \frac{\text{Fr}_1}{20} - 12}, \quad (5.25)$$

pour $2 < Fr_1 < 16$. Il existe une grande variété de formes des ressauts hydrauliques (voir figure 5.52).

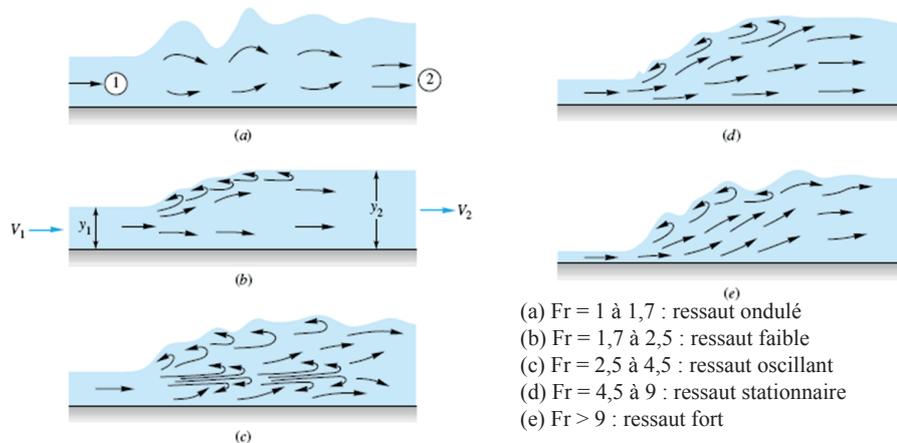


Figure 5.52 – Classification des ressauts hydrauliques en fonction du nombre de Froude (Chow, 1959).

Application en ingénierie

Parmi les applications importantes des formules du ressaut, on peut par exemple citer le dimensionnement des bassins d'amortissement placés au pied des évacuateurs de crue. Il est important de bien dimensionner le bassin pour dissiper le plus possible d'énergie. La perte de charge (dissipation locale due à la turbulence très importante au sein du ressaut) peut être estimée à l'aide de la formule (5.24). Si l'énergie n'est pas correctement dissipée, les ressauts hydrauliques ont une action érosive très importante. La figure 5.53 montre l'évacuateur de crue du barrage d'Oroville dans son fonctionnement normal (noter les blocs au pied de l'évacuateur de crue qui servent à briser l'énergie de l'eau) et après la rupture du coursier en février 2017, qui a laissé redouter une rupture du barrage en remblai. On notera l'action érosive de l'eau sur le cliché (b).

5.6.3 Conjugaison d'une courbe de remous

Principe

Un ressaut stationnaire se caractérise par le passage d'un régime supercritique à un régime subcritique sur une courte distance. En pratique, on remplace une surface libre de forme complexe par un profil de hauteur idéalisé qui se présente sous la forme d'une discontinuité – voir figure 5.50(c). Comment positionner ce ressaut le long du bief? Deux réponses auxquelles on pourrait songer sont des impasses.

- La position du ressaut n'est en général pas fixée par une singularité (p. ex. un changement de section), donc rien dans la géométrie du bief ne peut a priori nous aider à fixer la position du ressaut.



Figure 5.53 – Évacuateur de crue du barrage d'Oroville (Californie) avant (a) et après (b) la crue de février 2017. Source : [California Department of Water Resources](#).

- On pourrait penser que la position du ressaut est fournie par l'équation de la courbe de remous (5.11), à l'endroit où le dénominateur s'annule ($h \rightarrow h_c$ ou bien $Fr \rightarrow 1$). Mais singularités mathématique et hydraulique ne coïncident pas (l'équation de la courbe de remous se fonde sur l'hypothèse d'écoulement avec de faibles gradients de la surface libre, elle n'est donc pas valide lorsque le gradient de hauteur varie fortement).

Pour déterminer la position du ressaut, il faut appliquer la méthode dite de « conjugaison ». Cette méthode repose sur l'équation de conjugaison (5.23). Cette équation fournit les hauteurs de part et d'autre du ressaut, $h_2(x)$ (branche aval du profil de hauteur) et $h_1(x)$ (branche amont). Chacune de ces hauteurs doit également se trouver sur la courbe de remous : comme le montre la figure 5.54(a), les points B (hauteur h_1) et C (hauteur h_2) localisent le ressaut hydraulique, qui apparaît comme discontinuité. La branche AB est la courbe de remous du régime supercritique (elle se calcule en résolvant (5.11) avec une condition à la limite en A); la branche CD est la courbe de remous du régime subcritique (elle se calcule en résolvant (5.11), qui se résout avec une condition à la limite en D). Positionner le ressaut c'est donc positionner le segment vertical BC de telle sorte que la hauteur h_D vérifie la courbe de remous de la branche subcritique et que la hauteur h_C fasse de même pour la branche supercritique.

Ce problème peut se résoudre simplement en traçant la conjuguée d'une des branches et en cherchant son intersection avec l'autre branche. Par exemple, comme le montre la figure 5.54(b), admettons que l'on ait calculé la courbe de remous subcritique $h = h_2(x)$ partant du point D en résolvant (5.11); on peut calculer la courbe conjuguée D'E' $h = h_1'(x)$

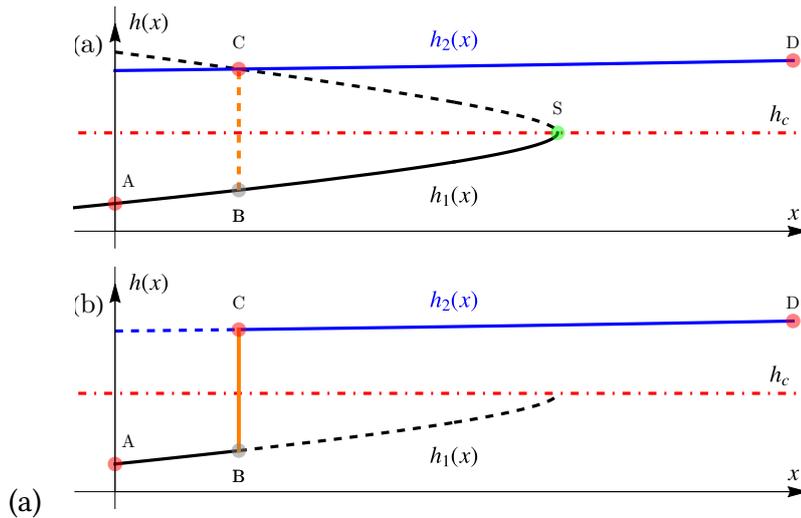


Figure 5.54 – (a) Ressaut stationnaire entre deux courbes de remous, l’une en régime subcritique à l’aval, l’autre en régime supercritique à l’amont. (b) Forme de la surface libre.

(le prime désignant la hauteur conjuguée) en se servant de (5.23) :

$$\frac{h_2}{h_1'} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right) \quad (5.26)$$

avec $\text{Fr}_1 = q/\sqrt{gh_1'^3}$. L’intersection de la courbe conjuguée $h = h_1'(x)$ avec la branche supercritique $h = h_1(x)$ se fait au point B. Comme ce point appartient à la courbe de remous supercritique et qu’il vérifie la relation de conjugaison (5.23), il nous fournit la position du ressaut.

On aurait pu procéder avec l’autre branche, ce qui conduit strictement au même résultat. Il faut noter au passage que c’est même une stratégie plus efficace car on note que dans la précédente méthode, l’inconnue $h_1'(x)$ apparaît à la fois dans le dénominateur du membre de gauche et dans la définition du nombre de Froude, ce qui demande un peu plus de travail numérique pour trouver la solution.

Exemple de conjugaison d’une courbe de remous

On considère un aménagement composé (voir figure 5.55) :

- d’un réservoir avec une vanne de $h_0 = 2$ m de hauteur laissant passer un débit $q = 10$ m²/s en O ;
- d’un coursier en pente raide ($i_1 = 5$ %) et moyennement rugueux (coefficient de Chézy $C = 50$ m^{1/2} s⁻¹), d’une longueur de 10 m entre O et A ;
- d’un canal de pente douce ($i_1 = 0,2$ %) et de même rugosité rugueux que le coursier $C = 50$ m^{1/2} s⁻¹, d’une longueur de 1000 m entre A et B ;
- d’un seuil d’une pelle $p = 0,5$ m en B.

Le coursier et le canal sont très larges.

La page suivante

<https://github.com/cancey/introduction-hydraulique/blob/main/courbe.ipynb>

fournit les méthodes de calcul numérique avec python pour résoudre l'exemple présenté ici.

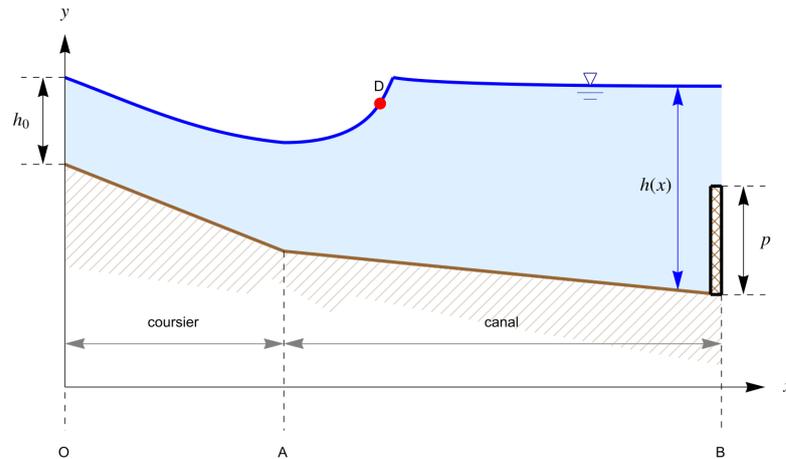


Figure 5.55 – Aménagement étudié (échelle de longueur non respectée).

On souhaite calculer la courbe de remous et notamment la position et les caractéristiques du ressaut. Pour cela on calcule les caractéristiques de l'écoulement :

- pour le coursier, on est en régime supercritique (torrentiel) : $h_n = 0,92$ m, $Fr_0 = 1,12$, $Fr_n = 3,6$;
- pour le canal, on est en régime subcritique (fluvial) : $h_n = 2,71$ m, $Fr_n = 0,71$.

Pour l'ensemble de l'aménagement, la hauteur critique est la même et vaut :

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 2,17 \text{ [m]},$$

Connaissant la hauteur d'écoulement à l'amont du coursier ($h = 2$ m), on peut calculer la courbe de remous en résolvant l'équation (5.27) numériquement :

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3}, \quad (5.27)$$

On trouve qu'en A, la hauteur vaut $h_A = 1,54$ m. On peut ensuite commencer à intégrer l'équation (5.27) pour le canal. Sans surprise, on trouve qu'il y a une transition critique au point C. On trouve numériquement $x_C = 90$ m. Pour calculer la position du ressaut, on commence par calculer l'autre branche reliant le point C à l'exutoire B. Au niveau du seuil le débit est « contrôlé » par la hauteur de p :

$$q = \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}(H - p) \right)^{3/2} \text{ [m}^2\text{/s]},$$

ce qui implique que la charge totale H doit s'adapter à l'amont du seuil pour laisser transiter le débit q . On trouve qu'au voisinage de B, la charge H doit valoir $H = 3,73$ m, d'où l'on déduit que la hauteur avant le seuil doit être de $h_B = 3,25$ m. On calcule alors la courbe de remous entre A et B en résolvant l'équation (5.27) avec la condition à l'aval $h = h_B$ en B.

La position du front est trouvée en recherchant l'intersection de la courbe conjuguée (tracée en tireté sur la figure) de la courbe de remous AC avec la courbe de remous émanant de D. On trouve que l'intersection se fait en D' de coordonnée: $x_D = 24$ m. On relie les deux courbes de remous émanant de A et celle venant de B en considérant qu'elle se rejoignent au point D et qu'en ce point elles subissent un saut représenté par le segment DD' sur la figure 5.56. □

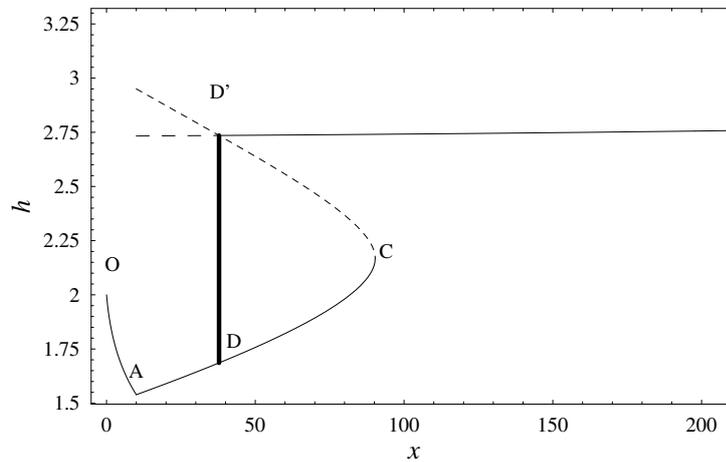


Figure 5.56 – Courbes de remous : solution donnée par l'équation (5.12) (courbe continue), courbe conjuguée (trait discontinue), et position du ressaut (courbe en gras).

5.6.4 Effet d'un obstacle

Écoulement sur une topographie

Considérons un écoulement permanent de profondeur h_0 et de vitesse \bar{u}_0 à la cote de référence $z_0 = 0$. Le nombre de Froude associé à cet écoulement est $F_0 = u_0/\sqrt{gh_0}$. Sur le fond, il existe une protubérance de hauteur z_m ; la cote du fond est donnée par une équation de la forme $y = z(x)$.

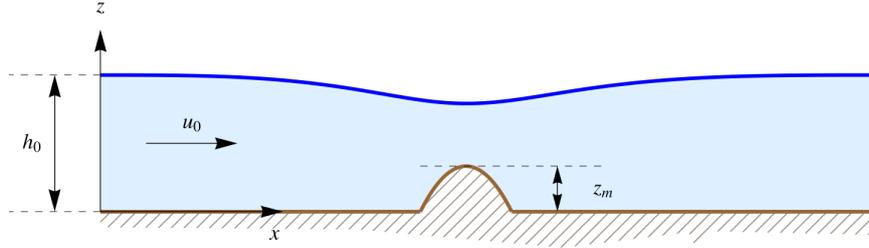


Figure 5.57 – Variation d'une ligne d'eau le long d'une protubérance du lit.

La conservation de la charge implique d'après le théorème de Bernoulli :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{u}^2}{2g} + h + z \right) = 0,$$

tandis que la conservation du débit entraîne

$$\frac{d}{dx} (h\bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{u}h = u_0h_0. \quad (5.28)$$

En tout point x , on a donc :

$$\frac{\bar{u}^2}{2g} + h + z = \frac{\bar{u}_0^2}{2g} + h_0 + z_0,$$

qui peut se transformer en divisant par h_0 (et puisque $z_0 = 0$ et $\bar{u} = \bar{u}_0h_0/h$) :

$$\frac{1}{2} \left(F_0 \frac{h_0}{h} \right)^2 + \frac{h}{h_0} + \frac{z}{h_0} = \frac{1}{2} F_0^2 + 1. \quad (5.29)$$

Il existe certaines contraintes quant à l'utilisation de cette équation pour déterminer la ligne d'eau dans des cas concrets. En effet si on différencie (5.29) par x , on obtient

$$\left(\frac{\bar{u}^2}{gh} - 1 \right) \frac{dh}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

ce qui montre que sur la crête de l'obstacle ($z = z_m, z' = 0$) on doit avoir $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh} = 1$ (écoulement critique) ou bien $h' = 0$. Notons aussi que si localement le nombre de Froude vaut 1, alors $z' = 0$, ce qui veut dire que le nombre de Froude ne peut pas dépasser la valeur critique 1 (ou bien passer au-dessous de 1 si $F_0 > 1$) quand $F_0 < 1$. Un écoulement subcritique reste subcritique (et inversement pour un écoulement supercritique). En effet, si $F_0 < 1$, alors h décroît au fur et à mesure que l'on s'approche de l'obstacle et Fr augmente en conséquence. Quand on est au sommet de la bosse, z est maximal ($z' = 0$) et F peut

éventuellement prendre la valeur critique (si ce n'est pas le cas $Fr < 1$ et $h' = 0$ au sommet de la bosse). Ensuite quand on s'éloigne de l'obstacle, h augmente et Fr diminue. Cette condition implique également qu'il existe une hauteur maximale d'obstacle associée à un nombre de Froude $Fr = 1$; de l'équation (5.29) et de l'équation (5.28), on tire en posant $Fr = 1$ que

$$\frac{z_{max}}{h_0} = 1 - \frac{3}{2}F_0^{2/3} + \frac{1}{2}F_0^2. \quad (5.30)$$

Lorsque $z_m > z_{max}$, on ne peut appliquer aussi simplement le théorème de Bernoulli et l'écoulement prend une forme beaucoup plus complexe, notamment avec la formation de ressaut et d'onde de part et d'autre de l'obstacle.

Dune

À partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

on déduit qu'en régime permanent ($\partial_t \mathbf{u} = 0$) et pour un écoulement irrotationnel (ce qui implique que $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = 0$), la contrainte de cisaillement au fond (en $y = 0$) vérifie l'équation de bilan suivante

$$g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = g \frac{\partial H_s}{\partial x}, \quad (5.31)$$

où on a introduit l'énergie spécifique :

$$H_s = h \cos \theta + \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

et on a supposé que la pression était hydrostatique (ce qui se montre en considérant la projection selon y de la quantité de mouvement et en supposant que les variations de hauteur sont faibles) : $p = \rho g h \cos \theta$.

En régime permanent et uniforme, l'énergie spécifique est constante et on retrouve que la contrainte de cisaillement varie selon l'expression déjà vue dans le chapitre consacré au régime permanent uniforme

$$\tau = \tau_p \left(1 - \frac{y}{h}\right),$$

avec la contrainte au fond $\tau_p = \rho g h \sin \theta$. On a reporté sur la figure 5.59 la variation de l'énergie spécifique en fonction de la hauteur d'écoulement à débit constant. L'effet d'une protubérance sur la contrainte de cisaillement dépend du régime d'écoulement. La protubérance du fond a modifié la surface libre de l'eau (voir fig. 5.58). Elle induit donc le passage à un régime non uniforme. Recherchons comment varie la contrainte de cisaillement de part et d'autre de la protubérance. On se placera dans le cas d'un régime fluvial (le traitement du régime torrentiel est similaire).

En régime fluvial, en admettant que l'énergie totale ($H_s + y_\ell$, avec y_ℓ la cote du fond) se conserve, l'énergie spécifique au droit de la protubérance (point 3) doit être plus faible que l'énergie spécifique du régime uniforme (point 1). La différence entre les deux énergies vaut a . Comme l'indique la figure 5.59, cela conduit aux deux observations suivantes :

- sur la face amont de la protubérance, la contrainte de cisaillement près du fond est plus forte qu'en régime uniforme ;

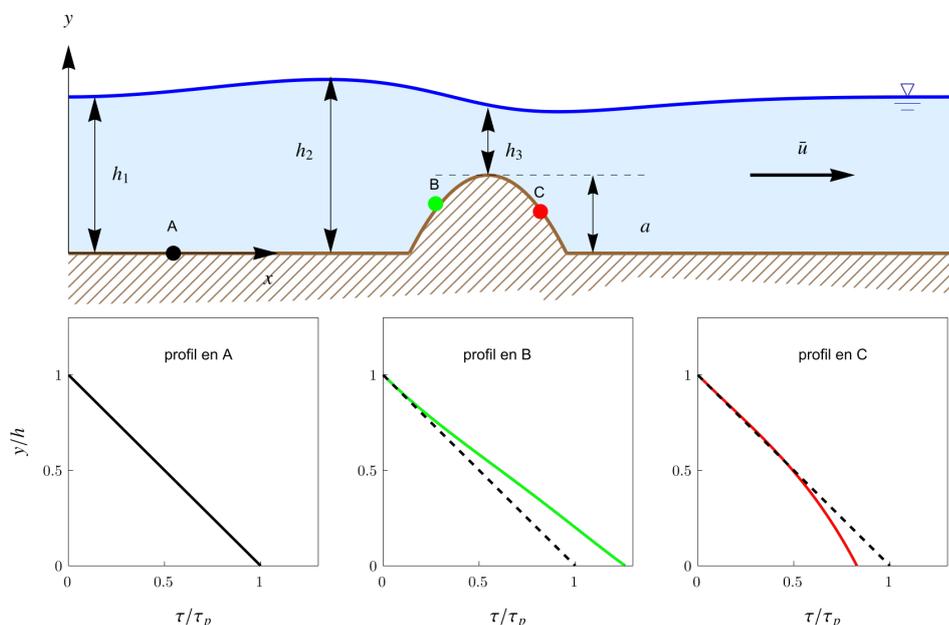


Figure 5.58 – Variation d’une ligne d’eau le long d’une protubérance. On a également reporté les variations de la contrainte de cisaillement selon que l’on est à l’amont ou à l’aval de la protubérance. La variation de la contrainte de cisaillement en régime non uniforme est calculée à partir de l’équation (5.31).

- sur la face aval, la contrainte de cisaillement est plus faible près du fond que celle déterminée en régime uniforme.

Lorsqu’on est près des conditions critiques d’érosion pour le régime uniforme, on en déduit que la face amont sera le lieu d’une érosion plus importante et qu’inversement, la face aval sera le siège d’un dépôt (si la contrainte pariétale est suffisamment faible). Lorsque le processus d’érosion et dépôt de part et d’autre de la protubérance est opérant, on assiste au déplacement de la structure ainsi créée. On désigne en général par *dune* le nom de telles structures morphologiques, qui se déplace de l’amont vers l’aval.

Passage d’un seuil ou d’un déversoir

Les *déversoirs* sont des ouvrages aux formes variées: déversoir à paroi mince pour mesure un débit (plaque mince verticale), barrage-déversoir (barrage au fil de l’eau avec évacuation du trop plein), déversoir mobile (vanne à clapet, vanne à batardeaux, etc.) qui permet d’ajuster la pelle, et déversoir à seuil épais (ouvrage souvent profilé). Un seuil permet de « contrôler » un débit (voir figure 5.60), par exemple pour créer un plan d’eau, pour augmenter les hauteurs d’eau à l’étiage, ou alimenter des prises d’eau. Les seuils peuvent aussi avoir une fonction de protection contre les crues, par exemple avec un évacuateur de crue sur les barrages de production hydroélectrique et un écrêteur de crue sur les cours d’eau (voir figure 5.61).

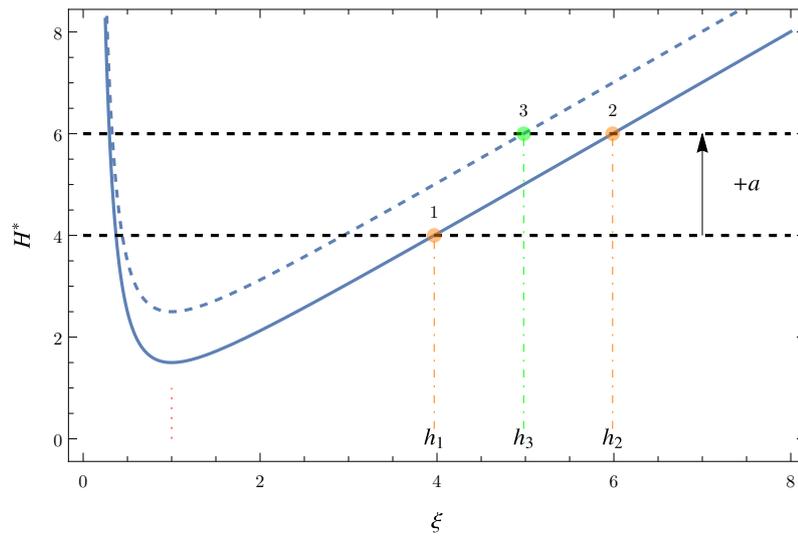


Figure 5.59 – Variation de la charge totale en fonction de la hauteur (à débit constant) pour le régime permanent uniforme établi loin de la protubérance. La courbe en pointillé correspond à la charge totale au droit de la protubérance (déduite d’une translation verticale de a de la courbe précédente). Les points 1, 2, 3 renvoient aux indices des hauteurs d’écoulement sur la figure 5.58. Dans le diagramme $H(h)$, les courbes sont toutes parallèles et la distance entre deux courbes correspond à la différence d’énergie potentielle (la cote du lit y_ℓ). On a supposé ici qu’il n’y avait pas de changement de régime (on reste en subcritique), donc sur la mêmes branche. Le passage d’une courbe de charge H à une autre se produit continûment (sans ressaut hydraulique ou chute). S’il y a changement de régime – par exemple si, lors du passage de l’obstacle, l’écoulement initialement subcritique accélère et subit une transition supercritique – alors on passe d’une branche subcritique ($\xi > 1$) à une branche supercritique ($\xi < 1$), et le passage d’une courbe à l’autre se fait de façon discontinue (ressaut).

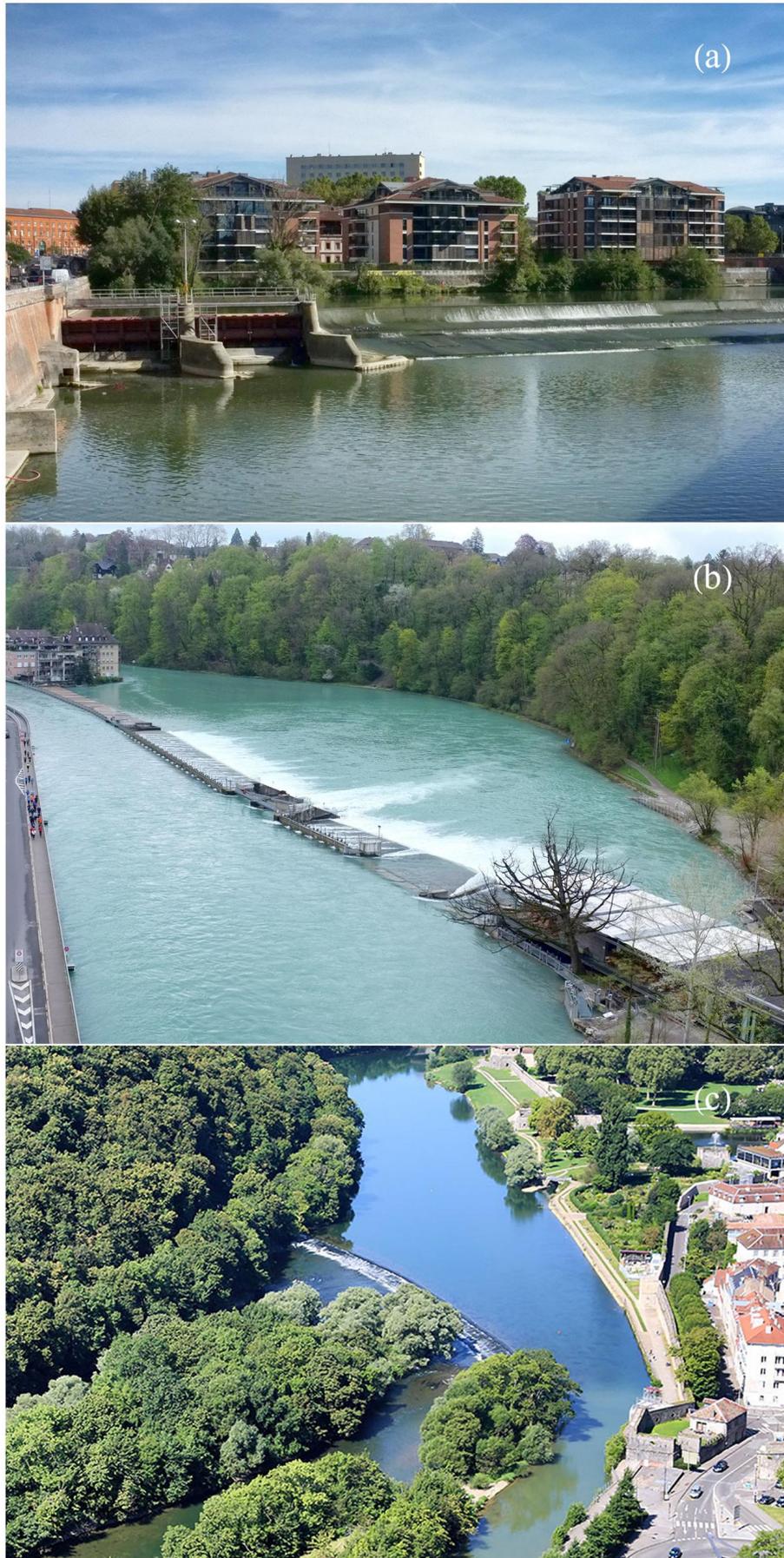


Figure 5.60 – (a) Seuil droit sur la Garonne à Toulouse (France). (b) Déversoir latéral sur l’Aar à Berne. (c) Seuil sur le Doubs à Besançon (France).

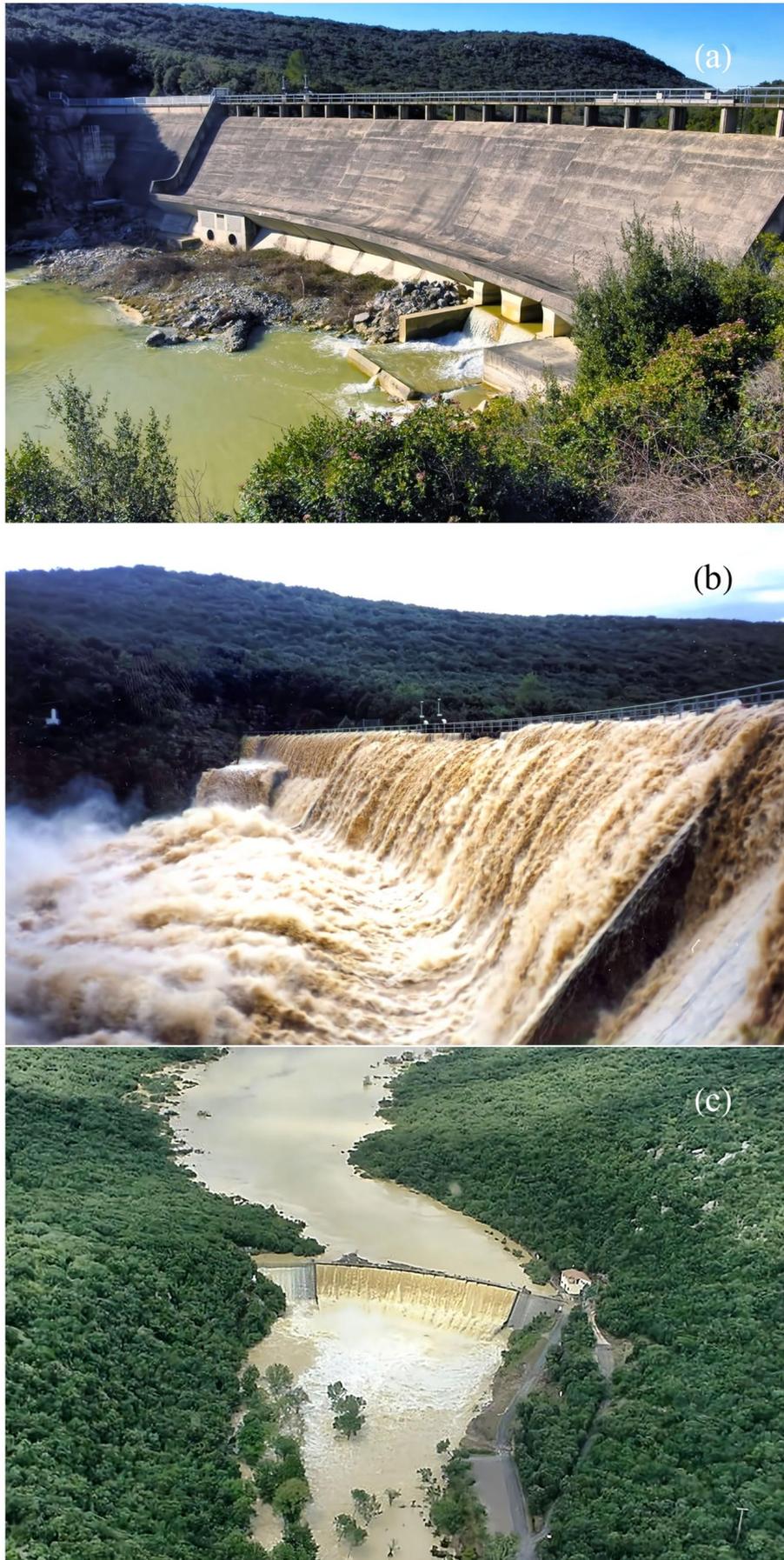


Figure 5.61 – Barrage de la Rouvière (Gard, France). Ce barrage est un barrage écrêteur de crue de type « pertuis vanné », qui sert à contrôler le débit sur le Crieulon. (a) vue sur le barrage à l'étiage (cliché [J. Fontanelli](#)). (b) et (c) vues de l'ouvrage lors de la crue exceptionnelle de septembre 2002 (source : Conseil Général du Gard)

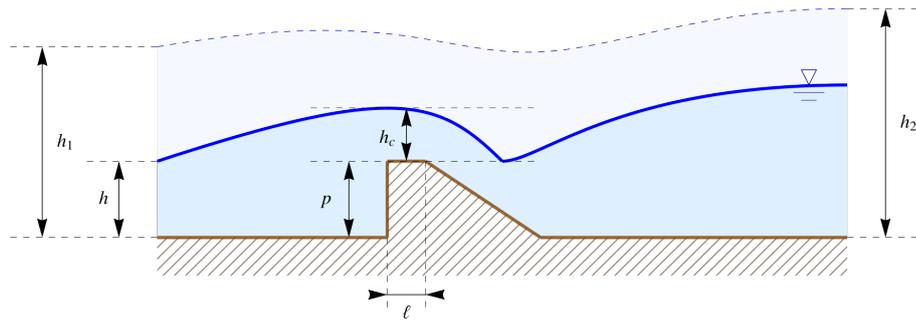


Figure 5.62 – Passage d'un seuil. Trait continu: seuil dénoyé; trait pointillé: seuil noyé. Attention les échelles de longueur ne sont pas respectées.

Si le seuil est suffisamment épais¹², on a vu précédemment que la hauteur d'écoulement au niveau de la crête du seuil est nécessairement égale à la hauteur critique (voir figure 5.62), c'est-à-dire

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \Leftrightarrow q = \sqrt{gh_c^3}, \quad (5.32)$$

avec q le débit par unité de largeur à l'amont du seuil. La charge totale au niveau du seuil vaut donc :

$$H = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} + p = \frac{3}{2}h_c + p, \quad (5.33)$$

avec p la « pelle » (hauteur de seuil). Dans le cas d'un fluide parfait, la charge au niveau du seuil est égale à la charge calculée à l'amont $H = \bar{u}^2/(2g) + h$, avec $\bar{u} = q/h$ la vitesse moyenne (sur de courtes distances, la charge totale H se conserve). En égalant les deux charges totales, on déduit la hauteur d'eau juste à l'amont du seuil, ce qui permet de résoudre l'équation de la courbe de la courbe de remous (5.2) sans avoir la singularité $h = h_c$ au niveau du seuil; en effet, on ne peut pas intégrer cette équation en prenant comme condition limite aval $h = h_c$ puisque le dénominateur du terme de droite dans (5.2) serait nul. En se servant des équations (5.32) et (5.33), on déduit que le débit par unité de largeur est en fonction de la charge totale H :

$$q = \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}(H - p) \right)^{3/2}. \quad (5.34)$$

Cette formule permet en pratique de :

- déterminer le débit si l'on connaît la charge totale H par application directe de la formule (5.34). Cette formule est par exemple utile pour évaluer le débit transitant par un déversoir d'évacuateur de crue d'un barrage. ;
- calculer la charge totale H connaissant le débit q par inverse de la formule (5.34) :

$$H = \frac{3}{2}h_c + p = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} + p \quad (5.35)$$

- estimer la hauteur d'eau équivalente juste à l'amont du seuil soit en résolvant (5.35) avec $H = \bar{q}^2/(2gh^2) + h$ (il faut donc résoudre une équation de degré 3) soit en

12. Un seuil épais a une épaisseur de crête ℓ telle que $\ell > 3(H - p)$.

supposant que la vitesse de l'eau est faible à l'amont du déversoir $u^2/(2g) \ll h$ et donc

$$h \approx \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} + p.$$

Cette façon de procéder est utile quand on doit résoudre une équation de courbe de remous (5.11) en présence d'une chute d'eau (au passage du seuil). Si l'écoulement est subcritique à l'aval de l'ouvrage hydraulique, il faut résoudre (5.11) d'aval vers l'amont en partant du seuil. Or, la seule condition à la limite que l'on ait au niveau du seuil est $h = h_c$ et cette relation est incompatible avec (5.11) (dénominateur infini). On fixe alors une nouvelle condition aux limites juste à l'amont du seuil. Comme la distance est faible entre ce point et le seuil, on peut négliger la perte de charge. La charge hydraulique (5.33) est calculée au niveau du seuil. Puis, de cette valeur, on déduit quelle doit être la hauteur d'eau juste à l'aval du seuil.

En pratique, l'approximation de fluide parfait n'est pas très bonne et on emploie à la place la formule empirique pour un seuil *dénoyé*¹³ :

$$q = C_D \sqrt{g} \left(\frac{2}{3} (H - p) \right)^{3/2}, \quad (5.36)$$

avec C_D le coefficient de débit. Ce coefficient dépend de la géométrie du seuil (épais, à paroi mince), de sa largeur, et de la géométrie d'écoulement (contraction ou non de la lame). Attention, il existe d'autres approches pour aboutir à la formule du seuil dénoyé, qui aboutissent à des équations structurellement identiques, mais avec des facteurs de proportionnalité différents.

Dans le cas où le seuil est *noyé* (voir figure 5.64), on peut se servir de la loi de Bernoulli pour évaluer la vitesse u_0 au-dessus du seuil :

$$\frac{u_0^2}{2g} + p + h_0 = \frac{u_1^2}{2g} + h_1 \Rightarrow u_0 = \sqrt{2g \left(\frac{u_1^2}{2g} + h_1 - p - h_0 \right)},$$

avec h_1 et u_1 la hauteur et la vitesse à l'amont du seuil. On considère que la vitesse u_1 est faible à l'approche du seuil et que la hauteur varie peu à l'aval, donc $h_2 = p + h_0$. On déduit alors :

$$u_0 \approx \sqrt{2g (h_1 - h_2)}.$$

Le débit théorique est

$$q = h_0 u_0 = (h_2 - p) \sqrt{2g (h_1 - h_2)}.$$

Le régime reste noyé tant que l'écoulement ne change pas de régime au passage du seuil. Il faut donc une hauteur minimale h_2 , qui peut s'estimer en considérant que le régime est critique au passage du seuil pour cette hauteur minimale de h_2 , et donc on a :

$$\text{Fr} = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} = 1 \Rightarrow u_0 = \sqrt{gh_0},$$

13. Un seuil est dit dénoyé lorsque l'écoulement à l'aval du seuil n'influe pas sur l'écoulement à l'amont, ce qui implique que la hauteur critique est bien atteinte au droit du seuil et/ou qu'un régime supercritique s'établit au pied du seuil. La photographie 5.63 montre par exemple l'existence d'un ressaut à l'aval immédiat du seuil non visible sur le Tibre : le seuil est dénoyé. Voir la condition (5.37) qui établit quand un seuil est noyé ou dénoyé.

et si on considère que $u_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$, alors la hauteur minimale vérifie $h_2 - p = 2(h_1 - p)/3$. Le critère pour observer un seuil noyé est donc

$$h_2 - p \geq \frac{2}{3}(h_1 - p). \quad (5.37)$$

Pour prendre en compte le caractère approximatif, on introduit un coefficient de débit C_D et on écrit que le débit est alors une relation liant le débit et la différence de hauteur de part et d'autre du seuil noyé :

$$q = C_D \sqrt{2g} (h_1 - h_2)^{1/2} (h_2 - p). \quad (5.38)$$

On note la continuité des relations de débit (5.36) et (5.38) lorsqu'on est à la transition entre régimes noyé et dénoyé pour $h_2 - p = 2(h_1 - p)/3$. \square



Figure 5.63 – Seuil dénoyé sur le Tibre au niveau de l'île Tibérine à Rome. L'apparition d'eau blanche trahit la formation d'un petit ressaut à l'aval du seuil.

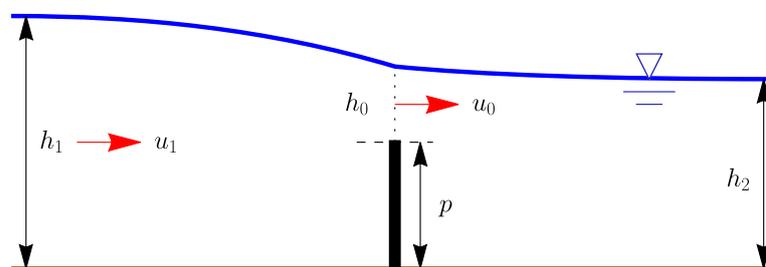


Figure 5.64 – Schéma de principe du seuil noyé.

Écoulements laminaires et turbulents

6.1 Équations de Navier–Stokes

LA PLUPART des fluides de notre environnement (eau, air, huile, etc.) sont dits *newtoniens* car leur loi de comportement suit la loi de Newton. D'autres fluides ne suivent pas cette loi et on les dit *non newtoniens*. La boue ou la peinture par exemple sont des fluides non newtoniens.

6.1.1 Bases théoriques

Au repos, un fluide ne subit que l'action de la gravité et les seules contraintes en son sein sont les pressions. On a vu précédemment la loi de la statique :

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0,$$

montrant que le gradient de pression p doit contrebalancer exactement le champ de pesanteur pour qu'il y ait équilibre ($\mathbf{u} = 0$). Que se passe-t-il maintenant si le fluide n'est plus au repos ?

On a vu au chapitre précédent que les équations du mouvement sont composées de l'équation de conservation de la masse (4.16) et de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.21). Dans cette dernière apparaît un terme $\nabla \cdot \mathbf{T}$, qui représente les extra-contraintes, c'est-à-dire les contraintes supplémentaires dues au mouvement du fluide (voir complément de cours, chap. 2). Pour fermer les équations du mouvement (c'est-à-dire pour qu'il y ait autant d'équations que de variables), il faut disposer d'une équation supplémentaire, appelée équation ou loi de comportement, qui décrit les relations entre contraintes et vitesses de déformation au sein du fluide.

Loi de comportement newtonienne

La relation la plus simple que l'on puisse imaginer entre Σ et \mathbf{D} est une relation linéaire. La loi expérimentale de Newton invite à écrire :

$$\Sigma = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \quad \text{ou bien} \quad \mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}, \quad (6.1)$$

où μ est la viscosité dynamique [Pa·s] et $\mathbf{1}$ le tenseur identité. On appelle cette relation la *loi de comportement newtonienne*. Lorsqu'on injecte cette forme de loi de comportement dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, on obtient les *équations dites de Navier–Stokes* (voir infra).

6.1.2 Équations de Navier–Stokes

Forme générique

Les équations de Navier–Stokes sous forme tensorielle s'écrivent :

$$\varrho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D}, \quad (6.2)$$

avec \mathbf{D} le tenseur des taux de déformation (partie symétrique du gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$). Il faut compléter ce système par l'équation de continuité qui, pour un fluide incompressible, prend la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.3)$$

pour aboutir aux équations complètes du mouvement. Il existe plusieurs façons d'écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement (6.2). Par exemple, en utilisant l'égalité (obtenue en se servant du théorème de Green-Ostrogradski) :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}),$$

où $\mathbf{u} \mathbf{u}$ est un tenseur d'ordre 2 (produit tensoriel de \mathbf{u} par lui-même), on obtient la forme suivante équivalente à (6.2)

$$\varrho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) \right) = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (6.4)$$

Les équations de Navier–Stokes forment un jeu d'équations dites « fermées » car il y a autant de variables (ou d'inconnues) que d'équations. Pour utiliser ces équations pour résoudre un problème pratique, il faut des équations supplémentaires, qui fournissent les conditions initiales et aux limites.

Rappelons que les mécaniciens des fluides optent souvent pour la notation suivante qui n'est pas sans ambiguïté (voir p. 79) : $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ au lieu de $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$.

Exemple : système cartésien en dimension 2

En dimension 2 et dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y) , les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible s'écrivent :

– Conservation de la masse (équation de continuité)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.5)$$

avec $\mathbf{u} = (u, v)$ les composantes de la vitesse

– Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \quad (6.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (6.7)$$

avec $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$ la projection du vecteur \mathbf{g} (accélération de la gravitation) sur les axes principaux du repère cartésien, et où les composantes du tenseur des extra-contraintes \mathbf{T} sont facilement établies à partir de sa définition pour un fluide newtonien : $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$ avec $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\dagger)$:

$$\mathbf{T} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Rappelons que T_{xy} s'appelle la *contrainte de cisaillement*, T_{xx} s'appelle la *contrainte normale* dans la direction x , et T_{yy} s'appelle la *contrainte normale* dans la direction y .

En substituant les composantes des extra-contraintes (6.8) dans les équations de Navier–Stokes, on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (6.9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (6.10)$$

On se reportera au complément de cours (chap. 2) pour voir comment s'écrivent ces équations quand elles sont projetées dans un repère cartésien de dimension 3 ou bien écrites en coordonnées cylindriques.

Forme alternative

En servant de l'équation de continuité pour un fluide incompressible, on peut écrire différemment les équations de Navier–Stokes (6.9)–(6.10). En effet, si on différentie l'équation de continuité 6.5 par rapport à x , on tire la relation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0. \quad (6.11)$$

En se servant de la relation (6.11) dans l'équation de Navier–Stokes (6.9) projetée selon x , on peut supprimer le terme de dérivée croisée $\partial_{xy}^2 v$:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (6.12)$$

On fait de même pour l'équation de Navier–Stokes (6.10) projetée selon y en différentiant l'équation de continuité 6.5 par rapport à y , puis en substituant le terme de dérivée croisée $\partial_{xy}^2 u$:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (6.13)$$

D'une façon générale, ce résultat peut se généraliser à des espaces de dimensions 3. L'expression tensorielle des équations de Navier–Stokes est alors :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (6.14)$$

On a ainsi montré que terme de divergence des extra-contraintes $\nabla \cdot \mathbf{T}$ dans l'équation (6.2) est équivalent au laplacien du champ de vitesse $\Delta \mathbf{u}$.

6.1.3 Conditions aux limites

Pour résoudre un problème (différentiel) d'écoulement, il faut connaître :

- les conditions initiales : initialement à $t = 0$, quelle était la configuration de l'écoulement ?
- les conditions aux limites : aux frontières du domaine de calcul, qu'impose-t-on à l'écoulement ?

On va s'intéresser ici aux conditions aux limites. Comme il y a deux types de variables dans les équations du mouvement (variables cinématiques liées au champ de vitesse et variables dynamiques reliées au champ de contraintes), on considère :

- les conditions aux limites *cinématiques* : ce sont les conditions que doivent vérifier le champ de vitesse ;
- les conditions aux limites *dynamiques* : ce sont les conditions que doivent vérifier les champs de contrainte et de vitesse aux frontières du domaine.

En général, on considère également deux types de frontières :

- les frontières solides sont des parois, qui ne se déforment pas (ou très peu) ;
- les frontières matérielles sont des interfaces entre deux liquides ou un liquide et un gaz (la surface libre est une frontière matérielle). Dans ce cas, la frontière a une forme qui peut varier au cours du temps et il faut donc une équation qui décrit comment sa forme et sa position varient avec le temps.

Frontière solide

Pour une paroi solide (par exemple, sur une facette orientée par \mathbf{n}), on considère que la vitesse vérifie les deux conditions suivantes

- *condition de non-pénétration* : le fluide ne peut pas entrer dans le solide (qui est imperméable), donc la composante normale de la vitesse est nulle : $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$;
- *condition d'adhérence* (ou de non-glissement) : le fluide adhère à la paroi solide, donc la composante tangentielle doit également être nulle : $u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$, avec \mathbf{t} un vecteur tangent à la paroi.

Il s'ensuit que la vitesse \mathbf{u} est nulle le long d'une paroi solide. C'est la condition aux limites cinématique.

Pour la condition aux limites dynamiques, on écrit qu'il y a équilibre de l'interface (si celle-ci est fixe), donc d'après le principe d'action et de réaction, on a :

$$\Sigma_{fluide} \cdot \mathbf{n} + \Sigma_{solide} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (6.15)$$

avec Σ_{fluide} le tenseur des contraintes fluides, Σ_{solide} le tenseur des contraintes du solide, puisque la contrainte au sein du fluide doit coïncider avec celle du solide le long de l'interface.

Frontière matérielle

En général, une frontière matérielle est une interface mouvante entre deux fluides ; dans quelques cas, par exemple pour la surface libre d'un écoulement permanent, cette surface peut occuper un lieu fixe de l'espace.

On écrit $F(x, t) = 0$ l'équation (implicite) de la frontière. Par exemple, pour une surface libre d'un écoulement d'eau le long d'une rivière, on écrit $F = y - h(x, t) = 0$, avec h la hauteur d'eau par rapport au fond. La normale en tout point est donnée par $\nabla F / |\nabla F|$. Une surface matérielle vérifie :

$$\frac{dF}{dt} = 0,$$

car un point de la surface matérielle à un instant donné reste toujours sur cette surface à n'importe quel autre instant (ses coordonnées peuvent changer au cours du temps si la surface se déforme, mais il appartient toujours à l'interface). Par exemple, dans le cas de la surface libre d'une rivière, on a :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(y - h(x, t)) = 0 \implies v(u, h, t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + (u, h, t) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (6.16)$$

où v est ici la vitesse verticale (dans la direction y) de la surface libre.

Comme pour la paroi solide, la condition dynamique implique l'égalité des contraintes entre les fluides des deux milieux au niveau de l'interface. S'il y a des effets de tension de surface, il convient de rajouter un terme supplémentaire traduisant cette tension pour la composante normale des efforts. Très souvent, dans le cas d'une surface libre d'un écoulement d'eau, il est possible de négliger l'action du fluide ambiant (l'air) et dans ce cas, on a :

$$\Sigma_{fluide} \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{1} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (6.17)$$

le long de la surface libre.

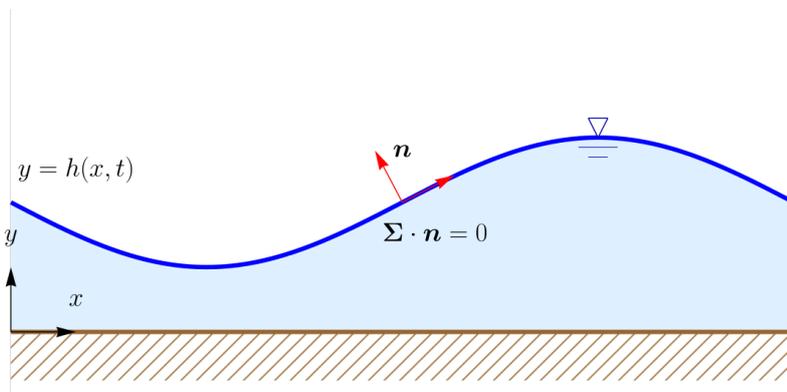


Figure 6.1 – Contrainte à la surface libre d'un fluide.

6.2 Base phénoménologique du modèle newtonien

La loi de Newton $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$ tire son nom de l'expérience de Newton, qui est le premier à avoir mis en évidence et proposer une relation décrivant la résistance d'un fluide visqueux. En 1687, Isaac Newton écrivait « the resistance which arises from the lack of slipperiness of the parts of the liquid, other things being equal, is proportional to the velocity with which the parts of the liquid are separated from one another ». Cette observation est à la base de la théorie newtonienne des fluides. Traduit sous une forme moderne, cette phrase signifie que la résistance à l'écoulement (par unité de surface) (autrement dit la contrainte τ) est proportionnelle au gradient de vitesse U/h :

$$\tau = \mu \frac{U}{h} \quad (6.18)$$

où U est la vitesse relative à laquelle se déplace la plaque supérieure et h est l'épaisseur de fluide cisailé (voir figure 6.2). μ est un coefficient intrinsèque au fluide, appelé *viscosité*. Cette relation est d'un grand intérêt pratique :

- c'est la façon la plus simple d'exprimer une loi rhéologique (loi linéaire);
- elle fournit un moyen de mesurer la viscosité μ .

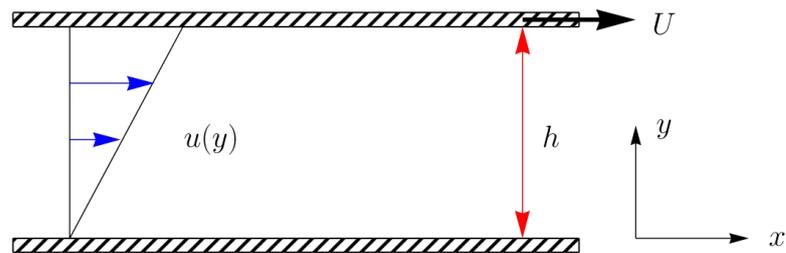


Figure 6.2 – Expérience de Newton. Cette expérience consiste à cisailier une couche de fluide entre deux plaques (écoulement de Couette).

En 1904, Trouton¹ réalisa des expériences sur une barre de section carrée composée d'un fluide très visqueux (bitume), qui consistait à étirer le fluide à une vitesse constante. La figure 6.3 montre le principe de l'expérience. Le fluide subit une élongation axiale à la vitesse constante $\dot{\alpha}$, définie comme étant : $\dot{\alpha} = \dot{\ell}/\ell$, où ℓ est la longueur de l'échantillon de fluide. Pour ses expériences, Trouton trouva une relation linéaire entre la force normale par unité de surface (contrainte normale) σ et la vitesse d'élongation :

$$\sigma = \mu_e \dot{\alpha} = \mu_e \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dt} \quad (6.19)$$

Cette relation est structurellement très similaire à celle proposée par Newton, mais elle introduit un nouveau coefficient, qu'on appelle de nos jours la *viscosité de Trouton* ou *viscosité élongationnelle*. On trouve qu'on a la relation suivante entre viscosités $\mu_e = 3\mu$.

Cela peut sembler un peu gênant que deux expériences similaires (à première vue) ne fournissent pas le même résultat. En fait ces deux expériences sont cohérentes si on se

1. Frederick Thomas Trouton (1863–1922) était un physicien anglais. On lui doit notamment la loi de Trouton, qui énonce que le changement molaire d'enthalpie (ou de l'entropie) est constant au point d'ébullition.

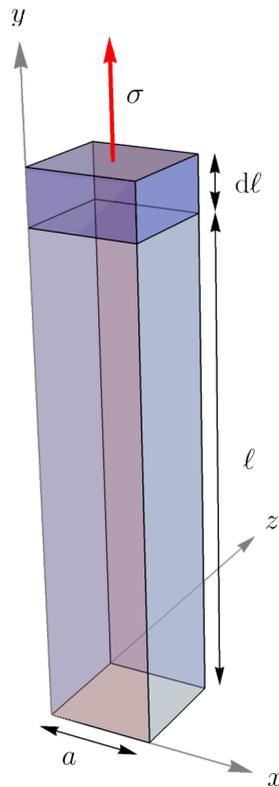


Figure 6.3 – Expérience de Trouton. Il s’agit de l’élongation axiale d’un barreau de fluide soumis à une contrainte normale σ .

sert des équations de Navier–Stokes, c’est-à-dire des équations du mouvement sous forme tensorielle et non pas simplement de lois empiriques.

Dans le cas de l’expérience de Newton, on montre facilement que le champ de vitesse est linéaire : $\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x y/h$. Le gradient de vitesse ou *taux de cisaillement* est $\dot{\gamma} = \partial u/\partial y = U/h$ et on trouve que $\tau = \mu\dot{\gamma}$.

Dans le cas de l’expérience de Trouton, on peut facilement résoudre les équations de Navier–Stokes si l’on néglige les termes inertiels (c’est-à-dire le terme $\rho d\mathbf{u}/dt$), ce qui est plausible car, pour pouvoir faire une expérience d’élongation, il faut choisir un fluide très visqueux et le solliciter lentement (expérience à très faible nombre de Reynolds). Les composantes du tenseur des taux de déformation sont :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\alpha}/2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Le tenseur des contraintes peut être écrit :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Une simple comparaison des équations (6.21) et $\Sigma = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}$ – avec \mathbf{D} donné par l'équation (6.20) – nous conduit à poser :

$$p = -\mu\dot{\alpha},$$

et donc $\sigma = 3\mu\dot{\alpha}$, c'est-à-dire : $\mu_e = 3\mu$.

On va démontrer ces résultats plus rigoureusement ci-dessous (voir § 6.3.1 et § 6.3.2 pour les expériences de Newton et Trouton, respectivement).

6.3 Méthodes de résolution des équations de Navier–Stokes

Nous allons ici montrer comment les équations de Navier–Stokes permettent de retrouver les observations expérimentales de Newton et Trouton décrites précédemment.

6.3.1 Expérience de Newton

Étape 1 : recherche des symétries

On réalise une expérience de cisaillement en régime permanent. *A priori*, les composantes de la vitesse sont des fonctions des variables x , y , et t . On va simplifier cette dépendance à l'aide des considérations suivantes :

- le régime est permanent, donc on peut écrire que $\partial_t(\cdot) = 0$ pour chacune des composantes ;
- l'écoulement est unidirectionnel dans la direction x . La vitesse ne peut pas dépendre de x . Attention cela n'est pas nécessairement vrai pour la pression car certains écoulements unidirectionnels sont dus à un gradient de pression (écoulement en charge). Nous verrons ici que la pression est effectivement indépendante de x , mais cela n'est pas vrai pour tous les écoulements dans des conduits.

Au final, cela veut dire que l'on a les dépendances suivantes : $p(x, y)$, $u(y)$, et $v(y)$.

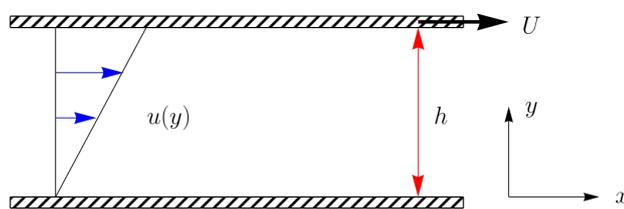


Figure 6.4 – Expérience de Newton.

Étape 2 : équations du mouvement

Les équations de Navier–Stokes pour un matériau incompressible s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

On considère deux sortes de conditions aux limites :

- cinématique : que valent les vitesses aux limites du domaine fluide ?
- dynamique : quelles sont les forces sur ces limites du domaine ?

Pour les vitesses :

- le long des plaques (en $y = 0$ et $y = h$), la condition de non-pénétration implique

$$v = 0 \quad (6.22)$$

- le long des plaques, la condition d'adhérence donne :

$$u = U \text{ en } y = h, \quad (6.23)$$

$$u = 0 \text{ en } y = 0. \quad (6.24)$$

Pour les forces :

- pas de condition imposée sur la plaque inférieure ;
- en revanche, pour la plaque supérieure en mouvement, la force sur la facette supérieure doit correspondre à celle imposée par la mise en mouvement de la plaque. L'équation du mouvement pour la plaque de masse M et de vitesse \mathbf{v} est :

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = M\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F},$$

$\mathbf{F} = F\mathbf{e}_x$ la force appliquée par l'opérateur pour mettre la plaque en mouvement et $\mathbf{R} = (R_x, R_y)$ étant la force exercée par le fluide sur la plaque, qui par définition s'écrit

$$\mathbf{R} = \int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} dS.$$

avec $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}$ le tenseur des contraintes totales et $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$ la normale orientée de l'intérieur (de la plaque) vers l'extérieur. Comme la vitesse de la plaque est supposée constante, on tire de l'équation du mouvement de cette plaque que :

$$F + R_x = 0.$$

$$-Mg + R_y = 0.$$

soit $R_x = -F$ et $R_y = Mg$.

Cela donne donc :

$$\int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_y dS = F\mathbf{e}_x - Mg\mathbf{e}_y,$$

soit encore en $y = h$:

$$p - T_{yy} = \frac{Mg}{S}, \quad (6.25)$$

$$T_{xy} = \tau = \frac{F}{S}, \quad (6.26)$$

avec S la surface de la plaque ;

- sur la facette du fond, on pourrait écrire que la force exercée par le fluide doit correspondre à la force de réaction du support, mais on n'a pas besoin de conditions aux limites à cet endroit. On ne détaille donc pas cette condition.

Étape 3 : résolution des équations

On commence à résoudre l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Il s'ensuit que v est constant, or la condition de non-pénétration (6.22) impose $v = 0$.

Examinons le tenseur des taux de déformation :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & u'(y) \\ u'(y) & 0 \end{bmatrix},$$

où l'on note que les termes normaux ($D_{xx} = (\partial_x u)$ et $D_{yy} = (\partial_y v)$) sont nuls compte tenu de la dépendance des composantes de la vitesse vis-à-vis des variables d'espace et de la nullité de v . Le tenseur des extra-contraintes s'écrit donc :

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \mu u'(y) \\ \mu u'(y) & 0 \end{bmatrix}.$$

La projection selon x de ces équations donne :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad (6.27)$$

où $\tau = T_{xy} = \mu u'(y)$ est la contrainte de cisaillement. On fait de même pour la direction y

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (6.28)$$

d'où l'on déduit que la pression est de forme hydrostatique

$$p = -\rho g y + a,$$

avec a une constante d'intégration. La condition aux limites (6.25) donne

$$p = \frac{Mg}{S} \text{ en } y = h,$$

car $T_{xx} = 0$. Donc on déduit que $a = Mg/S + \rho g h$. L'intégration de l'équation (6.27) donne :

$$u = by + c,$$

avec b et c deux constantes d'intégration. Les conditions aux limites (6.23–6.24) imposent $c = 0$ et $b = U/h$. Les profils de vitesse et de pression s'écrivent donc

$$u = U \frac{y}{h} \text{ et } p = \frac{Mg}{S} + \rho g(h - y).$$

La force de frottement correspond à la force appliquée par l'opérateur

$$F = S\tau = S\mu \frac{du}{dy} = S\mu \frac{U}{h}.$$

On vérifie donc la relation trouvée expérimentalement par Newton, qui affirme que la force de frottement est une fonction linéaire de la vitesse U de la plaque et varie inversement proportionnelle à l'espacement h entre les deux plaques.

6.3.2 Expérience de Trouton

Étape 1: recherche des symétries

On réalise une expérience d'élongation en régime permanent d'un barreau de section carrée (de côté a) de longueur $\ell(t)$. *A priori*, les composantes de la vitesse sont des fonctions des variables x , y , z , et t . On va simplifier cette dépendance à l'aide des considérations suivantes :

- Le régime est permanent, donc on peut écrire que $\partial_t(\cdot) = 0$ pour chacune des composantes.
- L'écoulement est unidirectionnel dans la direction y . Comme il s'agit d'un mouvement d'élongation, cela veut dire que deux particules initialement contenues dans le même plan horizontal restent au même niveau, donc v ne peut pas dépendre de x ou z (sinon la barre serait en torsion).
- Le problème est invariant par rotation de $\pi/2$, donc x et z jouent le même rôle (on doit donc avoir des équations identiques) et les vitesses selon x et z sont identiques.
- Même raisonnement pour la dépendance de u et w en y : ces deux composantes ne peuvent pas dépendre de y car sinon à la surface libre (côté BC ou DA), il y aurait des déformations non homogènes. Par ailleurs, on doit avoir une contraction dans la direction x et z à cause de la conservation du volume (matériau incompressible): on gagne en longueur, donc on perd en largeur.
- La symétrie fait que u ne peut pas dépendre de z et vice versa, w ne peut pas dépendre de x .

Au final, cela veut que l'on a les dépendances suivantes : $u(x)$, $w(z)$, et $v(y)$.

Étape 2: simplification des équations

Dans le cas de l'expérience de Trouton, l'élongation n'est possible que si le matériau est très visqueux et de poids négligeable devant les contraintes de traction (sinon la barre s'effondrerait sous l'effet de la gravité) et si les vitesses d'élongation sont assez faibles. Typiquement avec: $\mu \sim 10^5$ Pa·s, $\rho \sim 2000$ kg/m³, $U_* = 1$ mm/s, et $L_* = 1$ cm, le nombre de Reynolds est de l'ordre de

$$\text{Re} = \frac{2 \times 10^3 \times 10^{-3} \times 10^{-2}}{10^5} = 2 \times 10^{-7},$$

ce qui implique que Re est très petit et qu'on peut négliger les termes inertiels.

Notons par ailleurs que l'ordre de grandeur de la pression hydrostatique est $\rho g L_* \approx 2 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-2} = 200$ Pa tandis que l'ordre de grandeur des contraintes visqueuses est $\mu U_*/L_* = 10^5 \times 10^{-3}/10^{-2} = 10^4$ Pa. La pression hydrostatique est négligeable par rapport à la contrainte visqueuse. Cela justifiera plus loin (voir § 6.4.1 où l'on va adimensionnaliser les équations de Navier–Stokes) que l'on ne pose pas $P_* \sim \rho g L_*$ comme échelle de pression, mais $P_* \sim \mu U_*/L_*$. On se servira de ce choix d'échelle de pression pour montrer qu'aux petits nombres de Reynolds, les équations de Navier–Stokes peuvent être simplifiées en équations de Stokes, c'est-à-dire les équations de Navier–Stokes sans terme inertiel.

On va commencer à résoudre le problème en déterminant les champ des taux de déformation et de contraintes à partir des considérations physiques sur la géométrie du pro-

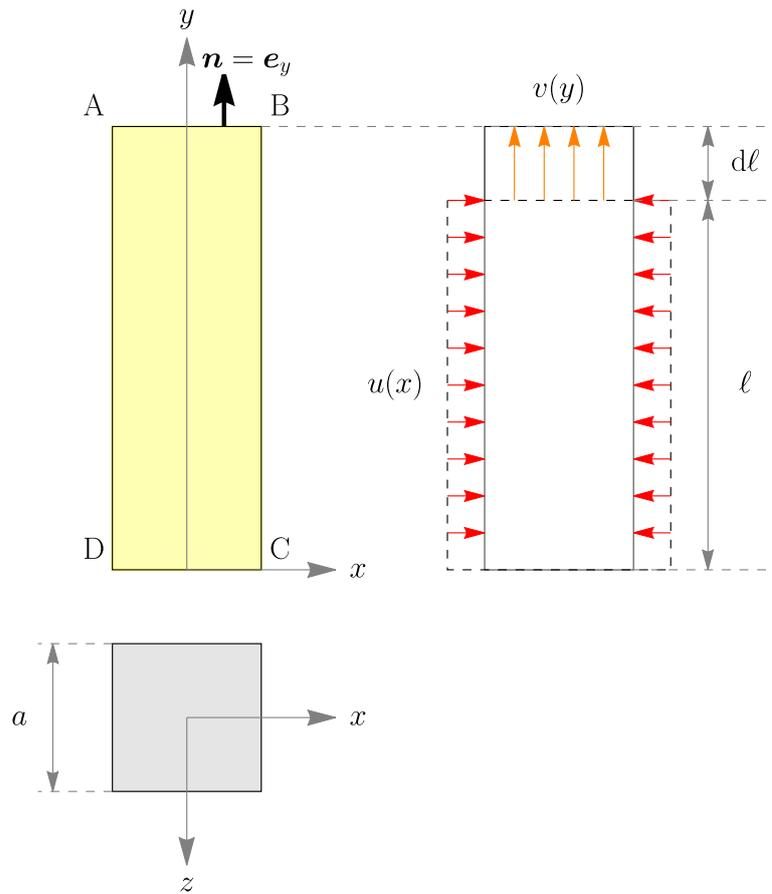


Figure 6.5 – Expérience de Trouton. Il s’agit de l’élongation axiale d’un barreau de fluide soumis à une contrainte normale $\sigma = F/S$ (voir aussi figure 6.5).

blème énumérées précédemment. Examinons le tenseur des taux de déformation :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} u'(x) & 0 & 0 \\ 0 & v'(y) & 0 \\ 0 & 0 & w'(z) \end{bmatrix},$$

où l’on note que les termes de cisaillement comme $D_{xy} = (\partial_y u + \partial_x v)/2$ sont nuls compte tenu de la dépendance des composantes de la vitesse vis-à-vis des variables d’espace. Le tenseur des extra-contraintes s’écrit donc :

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\mu u'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu v'(y) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu w'(z) \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Les équations de Stokes – c’est-à-dire les équations de Navier–Stokes sans terme inertiel – pour un matériau incompressible s’écrivent :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} &= 0. \end{aligned}$$

La projection selon x de ces équations donne :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu u''(x), \quad (6.30)$$

où $T_{xx} = 2\mu u'(x)$ est la contrainte normale dans la direction x . On fait de même pour les autres directions :

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu v''(y), \quad (6.31)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} + 2\mu w''(z). \quad (6.32)$$

L'équation de conservation de la masse donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.33)$$

Étape 3: conditions aux limites

On considère deux sortes de conditions aux limites :

- cinématique : que valent les vitesses aux limites du domaine fluide ?
- dynamique : et quelles sont les forces ?

Pour les vitesses :

- sur la facette du fond CD, on a

$$v = 0 \quad (6.34)$$

(barre fixée sur le fond);

- sur la facette supérieure AB, on a

$$v = \dot{\ell} \quad (6.35)$$

où $\dot{\ell} = d\ell(t)/dt$ (la vitesse du fluide correspondant à la vitesse imposée par l'opérateur. Cette vitesse est la dérivée par rapport au temps de la distance $\ell = DA$;

- sur les facettes latérales BC et DA, on ne peut rien dire pour u et w . On note toutefois qu'il s'agit d'un mouvement de contraction, donc la vitesse

$$u \text{ s'annule en } x = 0 \text{ et } w \text{ en } z = 0. \quad (6.36)$$

Les composantes des vitesses u et w doivent être des fonctions impaires.

Pour les forces :

- pas de force sur les facettes latérales BC et DA. Si on se sert de la relation (6.17), on :

$$\Sigma_{fluide} \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{1} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

avec $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ ou bien $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$. Prenons l'exemple de la contrainte sur la facette normale BC normale à \mathbf{e}_x en $x = a/2$:

$$\Sigma_{xx} = \Sigma_{fluide} \cdot \mathbf{e}_x = -p + T_{xx} = 0,$$

or d'après l'équation (6.29), on a :

$$T_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 2\mu u'(a/2).$$

Et donc la pression en $x = a/2$ vaut :

$$p = 2\mu u'(a/2). \quad (6.37)$$

On peut raisonner de même pour les autres facettes verticales.

- la force sur la facette supérieure doit correspondre à celle imposée par l'opérateur. Cela donne donc :

$$\int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_y dS = F \mathbf{e}_y,$$

avec $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}$ le tenseur des contraintes totales. Soit encore :

$$\sigma = \frac{F}{S} = T_{yy} - p = 2\mu v' - p \text{ en } y = \ell, \quad (6.38)$$

avec $S = a^2$ la section de la barre (en toute rigueur il faudrait tenir compte de la contraction de la barre, mais on note que si la largeur diminue de ε , on a $S = (a - \varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 \approx a^2$ au premier ordre);

- sur la facette du fond, on pourrait écrire que la force exercée par le fluide doit correspondre à la force de réaction du support, mais on n'a pas besoin de conditions aux limites à cet endroit. On ne détaille donc pas cette condition.

Étape 4 : résolution des équations

Détermination du champ de vitesse.

On commence à résoudre l'équation de conservation de la masse. On note que cette équation doit être valable pour tout x, y, z . L'équation de conservation de la masse (6.33) n'est vérifiée que si $u', v',$ et w' sont des constantes et que la somme de ces constantes est nulle. De plus, on doit avoir $w'(z) = u'(x) = cte$. On pose donc :

$$\beta = v'(y) \text{ et } u'(x) = w'(z) = -\frac{\beta}{2},$$

où β est une constante à déterminer. L'intégration de la première équation donne :

$$v(y) = \beta y + \gamma,$$

avec γ une constante d'intégration. On se sert des conditions aux limites (6.34)–(6.35) pour trouver :

$$\beta = \frac{\dot{\ell}}{\ell} \text{ et } \gamma = 0.$$

On fait de même pour $u' = -\beta/2$, dont l'intégration fournit :

$$u(x) = -\frac{\beta}{2}x + \eta,$$

avec η une constante d'intégration. On se sert de la condition aux limites (6.36) pour trouver :

$$\eta = 0.$$

Le champ de vitesse w est également :

$$w(z) = -\frac{\beta}{2}z.$$

Détermination du champ de pression.

Reste maintenant à trouver la pression. Compte tenu du champ linéaire de vitesse $v(y)$, l'équation (6.31) de conservation de la quantité de mouvement selon y donne :

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (6.39)$$

dont l'intégration nous donne l'habituel profil de pression hydrostatique :

$$p = \rho g(h - y) + c(x, z), \quad (6.40)$$

avec c une constante d'intégration qui dépend *a priori* de x et z . Pour déterminer cette constante d'intégration, on substitue la forme (6.40) dans l'équation (6.30) de conservation de la quantité de mouvement selon x :

$$0 = \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (6.41)$$

On en déduit que c est une constante indépendante de x (mais peut-être dépendante de z). La condition à la limite (6.37) nous fournit la valeur de cette constante :

$$p = 2\mu u'(a/2) = -\mu\beta. \quad (6.42)$$

On note que la distribution de pression ainsi obtenue $p = -\mu\beta - \rho gy$ vérifie aussi l'équation (6.32) de conservation de la quantité de mouvement selon z . La pression s'écrit donc :

$$p = \underbrace{-\mu\beta}_{\text{effet visqueux}} + \underbrace{\rho g(h - y)}_{\text{effet hydrostatique}}. \quad (6.43)$$

Contrairement à l'expérience de Newton où la pression était identique à la pression hydrostatique (même si le fluide n'est pas au repos), la pression est ici la somme de deux contributions : une première contribution représente la pression nécessaire pour lutter contre la compression du fluide induite par la traction tandis que le second terme résulte du poids propre du fluide. On vérifie que l'ordre de grandeur de cette dernière est faible devant la première (ce qui est important pour justifier l'utilisation des équations de Stokes).

Calcul de la force.

Maintenant que nous avons le champ de pression avec l'équation (6.43), on peut calculer la contrainte en $y = \ell$ à partir de la condition à la limite (6.38) :

$$\sigma = T_{yy} - p = 2\mu v' - p = 2\mu\beta + \mu\beta = 3\mu\beta,$$

ou en d'autres termes :

$$\sigma = 3\mu \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dt} \quad (6.44)$$

qui est bien la loi expérimentalement obtenue par Trouton.

6.4 Adimensionalisation des équations

6.4.1 Choix des échelles

L'adimensionalisation des équations du mouvement est une étape importante :

- elle peut permettre de simplifier les équations en supprimant les termes « petits » par rapport à d'autres ;
- elle permet de trouver les nombres sans dimension qui sont utiles pour proposer des critères de similitude. Ces critères servent en ingénierie à faire le lien entre des expériences à échelle réduite sur des maquettes et des écoulements en grandeur réelle. Par exemple, pour optimiser la forme d'une coque de bateau, on réalise des essais à échelle réduite dans des bassins.

Le second point a été abordé dans l'introduction de ce cours (§ 2.5). Le premier point va nous permettre de simplifier les équations du mouvement. On constate en général que les équations de type Navier–Stokes sont très compliquées à résoudre, mais qu'il est possible de trouver des approximations qui fournissent une solution satisfaisante en pratique. L'adimensionalisation des équations fournit un outil très pratique pour supprimer des termes négligeables. Pour les équations de Navier–Stokes, on introduit un jeu de variables sans dimension :

$$\begin{aligned} u &\rightarrow U_* U \quad \text{et} \quad x \rightarrow L_* X \\ T_x &\rightarrow \mu \frac{U_*}{L_*} S_X, T_y \rightarrow \mu \frac{U_*}{L_*} S_Y, \quad \text{et} \quad T_{xy} \rightarrow \mu \frac{U_*}{L_*} S_{XY}, \\ t &\rightarrow \frac{L_*}{U_*} \tau, \\ p &\rightarrow P_* P \end{aligned}$$

avec p qui désigne ici la pression généralisée (pression + potentiel de gravité) et T (ou S) le tenseur des extra-contraintes. Quelques remarques :

- les échelles ne sont pas indépendantes. Par exemple, si on fixe une échelle de vitesse et une échelle de longueur, on se donne nécessairement une échelle de temps ;
- pour les variables d'espace, il peut y avoir plusieurs échelles. Par exemple, pour une rivière, la longueur de la rivière est bien supérieure à sa largeur ou à sa hauteur ; il faut donc introduire au moins deux échelles : une pour la longueur, l'autre pour la hauteur d'eau ;
- plusieurs échelles possibles pour la pression selon le type d'écoulement. En général on pose :
 - $P_* = \rho g H_*$ (écoulement à surface libre) ;
 - $P_* = \rho U_*^2$ (écoulement en charge) ;
 - $P_* = \mu U_* / L_*$ (écoulement très lent).

Rappelons que le nombre de Reynolds se définit comme le rapport de forces d'inertie sur des forces de viscosité :

$$\text{Re} = \frac{\rho U_* H_*}{\mu} = \frac{U_* H_*}{\nu}, \quad (6.45)$$

avec $\nu = \mu / \rho$ la viscosité cinématique. Notons que le nombre de Reynolds fait appel à une vitesse caractéristique U_* et une longueur caractéristique H_* . Cette dernière pourrait être



également L_* . Le choix est souvent une affaire de convention ; le résultat final ne dépend pas du choix particulier des échelles, mais attention toutefois



- le nombre de Reynolds sert :
 - dans des formules comme la formule de Darcy–Weisbach (5.7) pour le frottement hydraulique,
 - dans des classifications de régime d'écoulement comme la transition laminaire/turbulente (voir § 6.4.2).

Il est essentiel de vérifier que le choix des échelles et la définition du nombre de Reynolds sont cohérents avec les formules employées. Par exemple, dans la formule de Darcy–Weisbach (5.7) employée pour un canal ou une rivière, la longueur caractéristique est le rayon hydraulique pondéré d'un facteur 4 ;

- la longueur caractéristique à utiliser dans la définition du nombre de Reynolds est généralement une taille caractéristique de l'écoulement et des grandes structures turbulentes. Pour une rivière ou une conduite, cette longueur caractéristique est donc la hauteur d'écoulement ou le diamètre de la conduite car ce sont elles qui conditionnent la taille des plus grandes structures turbulentes ; on ne prend pas la longueur de la rivière ou de la conduite car elle ne renseigne en rien sur les structures turbulentes. Pour une aile d'avion ou un obstacle de taille finie dans un écoulement, la longueur caractéristique est généralement la longueur car c'est elle qui fournit l'ordre de grandeur des grandes structures turbulentes qui peuvent affecter l'aile ou l'obstacle.

6.4.2 Régimes d'écoulement

En substituant les variables dimensionnelles par des variables sans dimension, on tire les équations de Navier–Stokes sous forme adimensionnelle :

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = -\frac{P_*}{\rho U_*^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{S}$$

On déduit trois comportements possibles selon la valeur du nombre de Reynolds :

- Quand $\text{Re} \rightarrow \infty$:

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = -\frac{P_*}{\rho U_*^2} \nabla P,$$

ou si l'on revient aux variables dimensionnelles :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p, \quad (6.46)$$

Ce sont les *équations d'Euler* sous forme adimensionnelle (pour le fluide dit *parfait* ou fluide non visqueux). Les frottements visqueux peuvent être négligés ; l'écoulement est donc contrôlé par un équilibre entre forces de pression et d'inertie. Les équations d'Euler fournissent alors une bonne approximation du mouvement. Le mouvement d'un avion en vol sub- ou supersonique peut donc être étudié à l'aide de ces équations. Le théorème de Bernoulli fournit des approximations utiles quand la géométrie du problème s'y prête. Pour des applications, voir § 4.2.

- Quand $\text{Re} \rightarrow 0$:

$$0 = -\nabla P + \nabla \cdot \mathbf{S}$$

Ce sont les *équations de Stokes* sous forme adimensionnelle (pour le fluide sans inertie). L'écoulement est entièrement commandé par l'équilibre entre gradient de pression et force visqueuse. Ce type d'écoulement s'observe très fréquemment dans des écoulements à travers des matériaux poreux, des écoulements près d'obstacles (couches limites laminaires), des problèmes de sédimentation de particules fines, etc. Pour des applications, voir § 6.5.

- Quand $Re = O(1 - 100)$, inertie, gradient de pression, et viscosité sont trois processus de même importance. Il faut résoudre l'équation de Navier–Stokes complètement. Notons que pour $Re > 2000$, l'écoulement devient turbulent. Pour des applications, voir § 6.7.

6.5 Écoulements dominés par la viscosité

Pour des écoulements à très faible nombre de Reynolds, les termes inertiels dans les équations de Navier–Stokes sont négligeables et l'écoulement est contrôlé par un équilibre entre pression et contrainte visqueuse. L'approximation des équations de Navier–Stokes quand $Re \rightarrow 0$ est appelée *équation de Stokes*. Sous forme adimensionnelle (avec $P_* = \mu U_*/L$), on a pour un fluide incompressible :

$$\begin{cases} \nabla P = \Delta \mathbf{U} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \end{cases} \quad (6.47)$$

car $\nabla \cdot \mathbf{D} = \Delta \mathbf{U}$ par définition du laplacien et de \mathbf{D} . Sous forme dimensionnelle, (6.47) s'écrit $\nabla p = 2\mu\Delta \mathbf{u}$ et $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. On peut transformer ce jeu d'équations en découplant le champ de pression et celui de vitesse en prenant la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. On obtient alors un jeu d'équations indépendantes pour chaque variable. On montre alors que la pression est une fonction harmonique alors que la vitesse est une fonction dite *biharmonique* :

$$\begin{aligned} \Delta P &= 0, \\ \nabla^4 \mathbf{U} &= 0, \end{aligned}$$

avec $\nabla^4 f = \Delta\Delta f$ l'opérateur biharmonique (on applique deux fois de suite l'opérateur de Laplace).

On va voir des applications assez diverses et plus ou moins directes de ces équations dans des problèmes d'ingénierie :

- sédimentation de particules (cf. § 6.5.1) : calcul de la vitesse de sédimentation en fonction du diamètre ;
- écoulement dans un massif poreux (cf. § 6.5.2) : calcul du débit d'infiltration à travers un sol ;
- lubrification d'un palier (cf. § 6.5.3) : force supportée par le palier d'un moteur.

6.5.1 Sédimentation

On souhaite calculer la vitesse u de sédimentation d'une particule sphérique de diamètre $2r$ et de masse volumique ϱ_p dans un fluide newtonien au repos (viscosité μ , masse

volumique ρ_f). On considère tout d'abord le problème analogue où c'est la particule qui est immobile et le fluide en mouvement avec une vitesse loin de la particule égale à $-u$. À l'aide des fonctions de Green, on peut montrer que la force exercée par le fluide sur la particule est alors :

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu r \mathbf{u}.$$

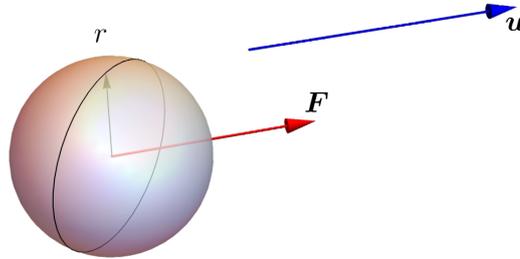


Figure 6.6 – Mouvement d'une sphère dans un fluide newtonien.

Maintenant si on revient au problème originel, on peut déduire la vitesse de la particule lorsqu'elle sédimente. En régime permanent, la force de résistance du fluide contrebalance exactement le poids « déjaugé »² de la particule ; on a donc :

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu r \mathbf{u} = m' \mathbf{g},$$

avec $m' = 4(\rho_p - \rho_f)\pi a^3/3$. Cette relation est souvent appelée *loi de Stokes*. On déduit immédiatement :

$$u = \frac{m'g}{6\pi\mu r} = \frac{2}{9}(\rho_p - \rho_f) \frac{r^2 g}{\mu}.$$

Notons au passage que la force de frottement exercée par le fluide se met le plus souvent sous la forme :

$$F = \frac{1}{2} C_d(\text{Re}_p) \rho_f \pi r^2 u_p^2,$$

avec C_d le coefficient dit de *traînée*, qui est écrit comme une fonction du *nombre de Reynolds particulaire* $\text{Re}_p = \rho_f u_p 2r / \mu$, πr^2 est la section *efficace* de la sphère vue par le fluide. On se reportera au chapitre 2 pour comprendre l'origine de cette formulation. Par comparaison avec les deux équations, on déduit immédiatement que :

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}_p}.$$

L'avantage de cette formulation est qu'on peut la généraliser pour des écoulements à nombre de Reynolds grand ou intermédiaire (voir figure 2.8).

Application numérique. – Calculer la vitesse de sédimentation d'une argile avec $r = 1 \mu\text{m}$ et $\rho_p = 2650 \text{ kg/m}^3$ dans de l'eau ($\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$) :

$$u_p = \frac{2}{9}(2650 - 1000) \frac{10^{-12} \times 9,81}{10^{-3}} = 3,6 \mu\text{m/s}.$$

2. Le poids « déjaugé » est le poids moins la force d'Archimède.

3. Attention la définition du nombre de Reynolds particulaire varie d'un auteur à l'autre.

Le nombre de Reynolds particulaire associé est

$$\text{Re}_p = \frac{2\rho_f u r}{\mu} = \frac{2 \times 1000 \times 3,6 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{10^{-3}} = 37,2 \times 10^{-6} \ll 1,$$

donc l'hypothèse de nombre de Reynolds faible est bien vérifiée.

6.5.2 Écoulement dans les milieux poreux

Un milieu poreux est un matériau au sein duquel existe un réseau de pores ou de canaux reliés entre eux. Un sol, la plupart des matériaux de construction, certains alliages métalliques (obtenus par frittage d'une poudre) offrent des exemples de milieux poreux. Lorsque les pores sont de petite taille, l'écoulement d'un liquide newtonien (eau, air, huile, etc.) se fait à toute petite vitesse et l'approximation de Stokes est généralement valable. Pour que le fluide s'écoule à travers un milieu poreux, il faut exercer un gradient de pression pour vaincre les forces de frottement au sein du réseau interne. Le problème qui se pose en ingénierie est de calculer le débit qui transite à travers un massif poreux connaissant le gradient de pression.

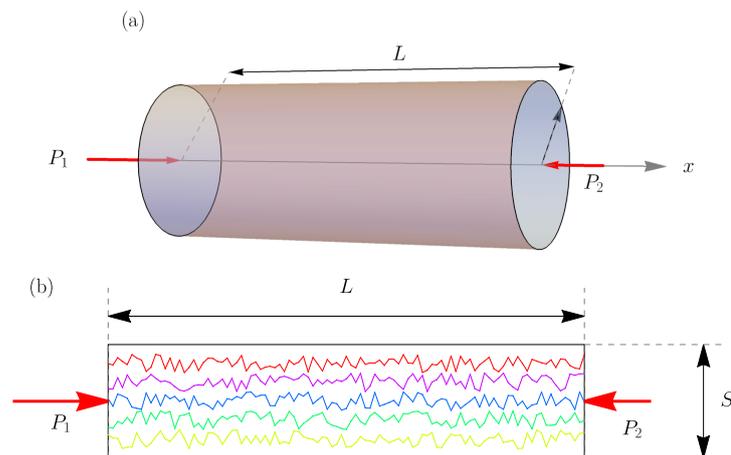


Figure 6.7 – (a) Écoulement à travers une conduite cylindrique sous l'effet d'une différence de pression $\Delta P = P_2 - P_1$. (b) Dans un milieu poreux, l'eau percole en suivant des cheminements tortueux. Chacun des chemins suivi par l'eau peut être vu comme un micro-tube.

Si on considère un cas idéal tel que l'écoulement d'un fluide entre deux plans parallèles de longueur L et espacés d'une distance d (écoulement Poiseuille plan, voir chap. 7), on montre que la vitesse moyenne u (ou *vitesse débitante*) est reliée au gradient de pression par la relation :

$$\frac{\Delta p_g}{L} = -\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{k_0} u, \quad (6.48)$$

avec $k_0 = d^2/12$ un coefficient de perméabilité de la structure poreuse (appelé perméabilité intrinsèque) et p_g la pression généralisée. Pour une conduite cylindrique de rayon R (voir figure 6.7(a) montrant un écoulement de Poiseuille cylindrique), on a la même dépendance (linéaire) de pression (6.48) avec la vitesse, mais la perméabilité intrinsèque vaut $k_0 = R^2/8$.

Ce résultat se généralise empiriquement quand on considère un matériau poreux quelconque comme un réseau de tubes comme le montre la figure 6.7(b). La loi qui lie vitesse débitante et gradient de pression est connue sous le nom de *loi de Darcy*⁴:

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\rho g} \nabla p, \quad (6.49)$$

avec k le coefficient de perméabilité ou de filtrage, appelée *conductivité hydraulique*; on a $k = \rho g k_0 / \mu$. Le terme ρg sert à transformer le terme de pression en équivalent « hauteur d'eau » (équivalent souvent utilisé en ingénierie). On passe parfois le terme ρg sous l'opérateur ∇ ; la quantité $p/(\rho g)$ est dimensionnellement équivalente à une hauteur et on l'appelle la *charge hydraulique* H . L'équation de Darcy (6.49) s'écrit donc également:

$$\mathbf{u} = -k \nabla H.$$

On note la ressemblance entre cette équation et les lois de Fick et de Fourier utilisées respectivement pour le calcul des gradients de concentration et de température. Avec les notations employées ici, k est homogène à une vitesse [m/s], alors que k_0 est homogène à une surface [m²]. Seul k_0 est intrinsèque au matériau (k dépend du fluide interstitiel). Le tableau 6.1 fournit quelques ordres de grandeur pour k_0 .

Tableau 6.1 – Ordres de grandeur de la perméabilité de quelques milieux poreux.

	k_0 (en μm^2)
sol	0,1–10
roche dure (grès)	5×10^{-4}
roche sédimentaire (calcaire)	2×10^{-3} – 0,05
sable	20–200

Avec la loi de Darcy, on peut par exemple calculer le débit d'infiltration q (par unité de largeur) à travers un massif poreux (voir figure 6.8) qui sépare deux retenues d'eau (au repos) à des niveaux différents et constants h_1 et h_2 . On suppose que la ligne d'eau est à faible courbure de telle sorte que l'écoulement est à peu près unidirectionnel; cela implique que dans la formule de Darcy (6.49), on a $\nabla p \approx (\partial p / \partial x, 0)$. On suppose également que l'écoulement d'eau est très lent et qu'il n'y a pas d'effet de tension de surface, donc la pression reste hydrostatique aussi bien dans les retenues d'eau que dans le massif: $p = \rho g h(x)$ en tout point du massif. Le débit est ici défini comme le produit de la hauteur d'eau $h(x)$ et de la vitesse débitante u :

$$q = uh(x) = \left(-k \frac{\partial h}{\partial x} \right) h(x).$$

Par ailleurs, en régime permanent, le débit est constant, donc l'intégration de l'équation ci-dessus donne:

$$qx = -\frac{1}{2}kh^2 + a,$$

4. Henry Darcy (1803–1858) était un hydraulicien français. Ingénieur des Ponts et Chaussées, il a été l'auteur de plusieurs contributions majeures en hydraulique en puisant dans les problèmes qui se posaient à l'ingénieur de l'époque. On lui doit ainsi les premières notions sur la couche limite dans l'écoulement d'un fluide, le développement de l'équation de Darcy–Weisbach (résistance de l'écoulement dans un conduit), la loi de Darcy de l'écoulement en milieux poreux, qui a été la pierre fondatrice de l'hydraulique souterraine, ainsi que des améliorations notables du tube de Pitot pour mesurer les vitesses au sein d'un fluide.

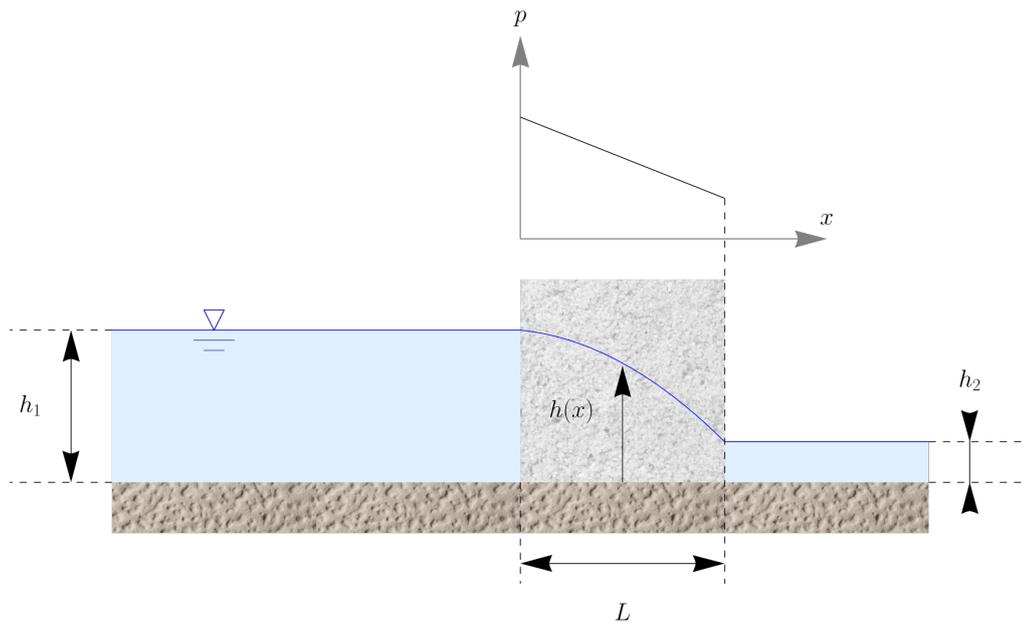


Figure 6.8 – Écoulement à travers un massif poreux. Sous l'effet de la pression, l'eau percole à travers le massif poreux. La chute de pression est linéaire avec la distance.

avec a une constante d'intégration. Compte tenu des conditions aux limites (en $x = 0$, $h = h_1$), on en déduit que $a = kh_1^2/2$, soit finalement en $x = L$:

$$q = \frac{1}{2L}k(h_1^2 - h_2^2).$$

D'autres applications importantes de la formule de Darcy sont données par le pompage d'une nappe (rabattement de nappe) à travers un puits et l'écoulement sous un barrage (stabilité de barrage).

6.5.3 Effet coin d'huile

Considérons une couche d'huile (supposée incompressible) entre deux plans métalliques mobiles (par exemple, huile de lubrification dans un palier de moteur) espacés d'une hauteur variable $h(x)$ et de longueur ℓ . L'espacement h reste très petit devant ℓ : $h(x) \ll \ell$. La vitesse de déplacement du plan inférieur est constante et égale à u_d ; celle du plan supérieur est nulle. Les échelles typiques du problème sont les suivantes: $U_* = 1$ cm/s (vitesse des plans), $H_* = 1$ mm (espacement des plans), $L_* = \ell = 10$ cm. La viscosité μ d'une huile de type silicone est de l'ordre de 1 Pa·s; sa masse volumique est de l'ordre 1100 kg/m³. Le rapport d'aspect ϵ et le nombre de Reynolds sont petits:

$$\epsilon = \frac{H_*}{L_*} = 10^{-2} \text{ et } Re = \frac{\rho U_* H_*}{\mu} = \frac{1,1 \times 10^3 \times 10^{-2} \times 10^{-3}}{1} \approx 10^{-2}.$$

Nous introduisons les variables sans dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} u &\rightarrow U_* U \text{ et } v \rightarrow V_* V, \\ x &\rightarrow L_* X \text{ et } y \rightarrow H_* Y. \end{aligned}$$

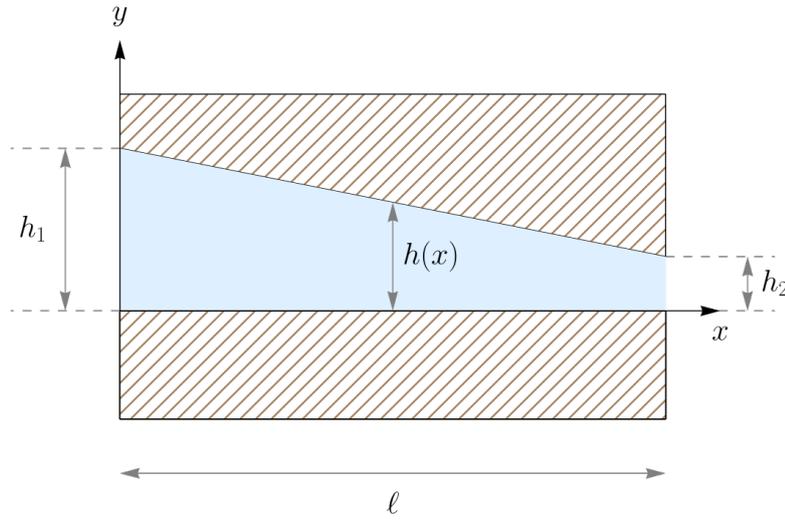


Figure 6.9 – Couche de lubrifiant entre deux parois formant un coin. Les échelles de longueur et l'angle du coin ne sont pas respectés.

Notons que l'équation de continuité (6.50) implique que $V_* = U_* H_* / L_* = \epsilon U_*$. Pour la pression, on introduit l'échelle $P_* = \mu U_* / (\epsilon L_*)$ (voir *infra*; il faut que le gradient de pression équilibre le gradient de cisaillement); on introduit une pression généralisée (pression du fluide + potentiel gravitaire) sans dimension: $p \rightarrow PP_*$. La projection des équations de Navier–Stokes dans le repère attaché à la partie fixe du palier (quoique l'origine soit attenante à la plaque inférieure qui est mobile) donne pour la conservation de la masse:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.50)$$

et des équations de quantité de mouvement:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (6.51)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (6.52)$$

avec p la pression généralisée. On substitue les variables dimensionnelles par les variables sans dimension, ce qui fait apparaître les rapports sans dimension Re et ϵ . Les équations du mouvement sans dimension s'écrivent alors:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (6.53)$$

$$\epsilon Re \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (6.54)$$

$$\epsilon Re \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}. \quad (6.55)$$

On néglige les termes qui sont petits devant 1, c'est-à-dire ici tous les termes où ϵ et/ou Re apparaissent. La projection sur l'axe x de l'équation (6.54) donne ainsi:

$$-\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0,$$

ce qui peut s'intégrer facilement :

$$U = -\Gamma Y^2 + aY + b,$$

avec $\Gamma = -\partial P/\partial X$ le gradient de pression motrice sous forme adimensionnelle, a et b deux constantes d'intégration. En repassant sous forme dimensionnelle, nous obtenons :

$$u = -Gy^2 + ay + b,$$

où a et b sont deux constantes d'intégration (mais dimensionnelles) et $G(x) = -\partial p/\partial x$ est le gradient de pression motrice sous forme dimensionnelle. On suppose que G est une fonction de x uniquement. Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} y = 0, u = 0, \\ y = h(x), u = u_d \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$u(x, y) = \frac{Gh^2(x)}{2\mu} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + u_d \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

La conservation du débit entraîne que :

$$q = \int_0^{h(x)} u dy = \frac{Gh^3(x)}{12\mu} + \frac{u_d h(x)}{2} = cste$$

ce qui impose que le gradient de pression est :

$$G(x) = \frac{12\mu}{h^3(x)} \left(q - \frac{u_d h(x)}{2} \right).$$

Une nouvelle intégration donne le profil de pression motrice :

$$p(x) - p_1 = 12\mu \left(\frac{u_d}{2} \int_0^x \frac{d\xi}{h^2(\xi)} - q \int_0^x \frac{d\xi}{h^3(\xi)} \right).$$

Si l'on suppose que le palier baigne dans un bac d'huile, on a $p_1 = p_2 = p_0$, avec p_0 une pression au sein du bac (la pression à droite et à gauche du palier est donc constante et égale à p_0). Donc, si l'on considère le palier sur toute sa longueur, le gradient de pression est nul, ce qui implique que le débit vérifie finalement :

$$q = \frac{u_d}{2} \frac{\int_0^\ell \frac{d\xi}{h^2(\xi)}}{\int_0^\ell \frac{d\xi}{h^3(\xi)}}.$$

Pour un profil linéaire de palier :

$$h(x) = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{\ell} x = h_2 \left(\lambda + \frac{1 - \lambda}{\ell} x \right),$$

avec $\lambda = h_1/h_2 > 1$ le rapport de hauteur, on obtient par intégration :

$$q = u_d h_2 \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Application numérique. – Considérons que le palier soit en forme de coin avec un angle petit ($\ell = 10$ cm, $\mu = 1$ Pa·s, $u_d = 1$ cm/s, $h_2 = 0,1$ mm). On a donc $\tan |\alpha| =$

$(h_1 - h_2)/\ell = h_2(\lambda - 1)/\ell$ qui doit être petit; par exemple, on prend $\alpha = 0,11^\circ$ (soit $\lambda = 3$). On note p_{ref} la pression de référence $p_{ref} = \mu u_d L / h_2^2 = 100$ kPa. La répartition de pression au sein du coin est donc :

$$\frac{p(x) - p_0}{p_{ref}} = \frac{6}{\lambda^2 - 1} \left(\lambda - \frac{h}{h_2} \right) \left(\frac{h}{h_2} - 1 \right),$$

ce qui donne une surpression maximale de :

$$\frac{p_{max} - p_0}{p_{ref}} = \frac{3}{2} \frac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 1)} = 0,25.$$

L'ordre de grandeur de la pression de référence est de 100 kPa, la pression maximale de l'ordre de 25 kPa, ce qui autorise le déplacement de pièces dont le poids peut atteindre des valeurs importantes : un palier de $0,1 \times 0,1$ m² peut ainsi supporter des masses d'environ 250 kg.

6.6 Couche limite

6.6.1 Définition

Dans les écoulements à grande vitesse autour d'obstacle ou près d'une paroi, le nombre de Reynolds de l'écoulement est le plus souvent très grand, ce qui fait que l'écoulement peut être considéré à l'échelle macroscopique comme étant dans un régime turbulent et les effets de la viscosité sont négligeables. Toutefois, près d'une paroi solide, la condition d'adhérence implique que la vitesse doit tendre rapidement vers 0. Si on définit un nombre de Reynolds local à l'aide de la vitesse réelle (et non d'une échelle de vitesse), celui-ci tend également vers 0, ce qui veut dire que très localement, dans le voisinage de la paroi, l'écoulement est dans un régime laminaire et les effets de viscosité deviennent prédominants. Cette zone de faible épaisseur accolée à la paroi s'appelle une *couche limite*. Cette notion a été proposée par Prandtl en 1905 :

- près d'une paroi solide, il existe une couche de très faible épaisseur dans laquelle les forces de viscosité sont prédominantes ;
- loin des parois, l'écoulement peut être considéré comme turbulent ou non visqueux.

Cette décomposition permet de traiter un grand nombre de problème en découplant les effets à grande échelle (liés à la turbulence) et ceux intervenant à petite échelle près d'une paroi (et faisant jouer un rôle crucial à la viscosité du fluide).

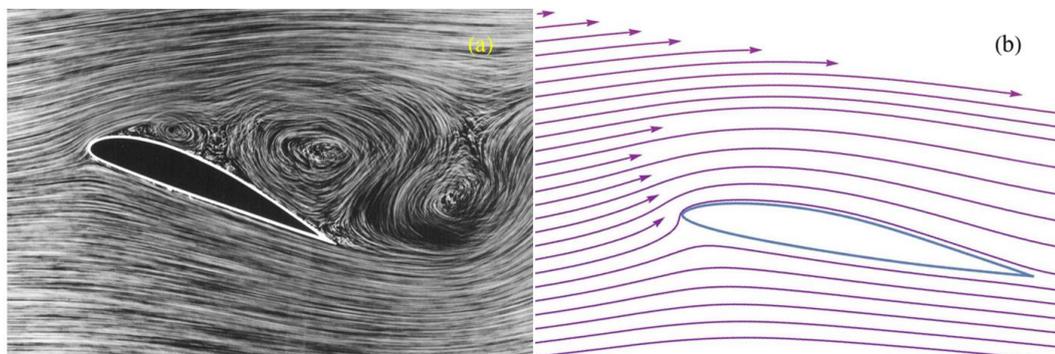


Figure 6.10 – Tourbillons générés par des ailes d'avion. (a) Avion en soufflerie ; source : [Wikimedia](#). (b) Lignes de courant autour d'une aile de profil Eppler E374. Les lignes sont obtenues en résolvant l'équation de Laplace pour le potentiel de vitesse.

Prendre en compte la couche-limite est de prime importance pour comprendre un grand nombre de processus physiques. Ainsi, si on examine l'écoulement d'air autour d'une aile d'avion pour déterminer la force de portance, on note expérimentalement que près de la paroi, il y a une couche laminaire (la couche-limite) et des zones de forte vorticité comme le montre la figure 6.10(a). Si on faisait un calcul des lignes de courant autour de l'air en résolvant les équations d'Euler (6.46), on obtiendrait des lignes de courant variant régulièrement autour de l'aile comme le montre la figure 6.10(b) et si on intégrait les forces exercées par le fluide sur l'aile, on trouverait que la force de portance est nulle : c'est le pa-

radoxe de D'Alembert⁵. Il est donc essentiel de prendre en compte les effets visqueux près de la paroi pour expliquer la portance et estimer la force correspondante.

6.6.2 Estimation de l'épaisseur de la couche limite

L'épaisseur δ de la couche limite peut être estimée à l'aide de l'analyse dimensionnelle. Considérons une plaque placée dans un fluide newtonien de masse volumique ρ et viscosité dynamique μ soumis à un champ de vitesse uniforme U loin de la paroi. Près de la paroi se développe une couche d'épaisseur $\delta(x)$, qui varie avec la distance x depuis le bord d'attaque de la plaque; x et δ sont les deux échelles de longueur du problème et on va supposer que $\epsilon = \delta/x \ll 1$ (la couche est très peu épaisse). L'échelle de vitesse dans ce problème est U . L'échelle de vitesse est $U_* = U$ et l'échelle de temps est $T_* = x/U_*$.

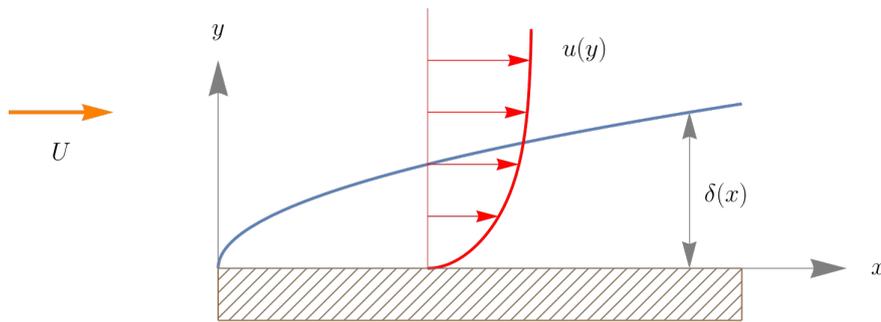


Figure 6.11 – Couche-limite le long d'une plaque placée dans un champ de vitesse uniforme U .

Dans l'équation de Navier–Stokes, le terme d'inertie est d'ordre :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} \sim \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho \frac{U^2}{x}.$$

Les termes de viscosité ont les ordres de grandeur suivants :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \mu \frac{U}{x^2} = \mu \epsilon^2 \frac{U}{\delta^2} \text{ et } \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}.$$

Comme $\epsilon \ll 1$, on en déduit que $u_{xx} \ll u_{yy}$: les variations normales à la paroi sont prépondérantes par rapport aux variations longitudinales. L'équilibre dynamique implique que les forces de viscosité contrebalancent localement l'inertie du fluide :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \delta = x \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}},$$

donc si on définit un nombre de Reynolds local sous la forme :

$$\text{Re}_x = \frac{\rho U x}{\mu},$$

5. Jean Le Rond D'Alembert (ou d'Alembert) (1717–1783) était un mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français. On lui doit notamment la solution générale à l'équation des ondes et la mise en évidence de l'insuffisance des équations d'Euler à expliquer la portance.

alors on a :

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}}.$$

L'épaisseur de la couche limite varie comme l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds local. En réarrangeant les termes, on a aussi :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U}} x,$$

donc $\delta \propto \sqrt{x}$: la forme de la couche limite est parabolique.

6.6.3 Équation de la couche-limite

Nous reprenons le problème de la couche-limite le long d'une plaque horizontale semi-infinie (voir figure 6.11). L'écoulement est permanent et bidimensionnel au voisinage de la plaque : $\mathbf{u} = (u, v)$. Le fluide est incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité μ . Loin de la paroi le champ de vitesse est uniforme, mais peut éventuellement dépendre de x : $u = u_e(x)$. Les équations du mouvement sont données par les équations de Navier–Stokes, qui compte tenu de nos hypothèses prennent ici la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.56)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (6.57)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (6.58)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0, \text{ et } \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x). \quad (6.59)$$

On introduit, comme précédemment, les échelles et variables adimensionnelles suivantes :

$$u \rightarrow U_* U \quad v \rightarrow V_* V \quad x \rightarrow L_* X, \text{ et } y \rightarrow H_* Y$$

$$t \rightarrow \frac{L_*}{U_*} \tau, \text{ et } p \rightarrow \rho U_*^2 P$$

avec U_* , V_* , L_* , et H_* des échelles de vitesse, de longueur, et de hauteur de la couche limite, respectivement. On pose :

$$\text{Re} = \frac{\rho U_* L_*}{\mu} \text{ et } \epsilon = \frac{H_*}{L_*}$$

L'équation (6.56) conduit à choisir V_* tel que $V_* = \epsilon U_*$. De plus, la discussion menée au § 6.6.1 conduit à prendre $H_* = L_* \text{Re}^{-1/2}$. Avec ces nouvelles variables, les équations de la couche limite (6.56–6.58) deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0,$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2},$$

$$\epsilon^2 \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Re}^{-2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}.$$

On déduit qu'au premier ordre en ϵ , on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial Y}.\end{aligned}$$

La dernière équation montre que dans une couche limite, il n'y a pas de gradient de pression dans la direction y : la pression ne varie pas dans la direction normale à la paroi, ce qui veut dire encore que la pression est gouvernée par l'écoulement externe (loin des parois). L'équation de Bernoulli impose que $\Psi = \frac{1}{2}\rho u_e^2 + p$ soit constant, donc :

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx}.$$

Si le champ de vitesse loin de la paroi est totalement uniforme (c'est-à-dire, indépendant de x), alors $dp/dx = 0$. Sous forme dimensionnelle, les équations de la couche-limite pour une plaque sont donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

6.6.4 Équation de Blasius

Considérons le cas où effectivement u_e est constant (indépendant de x), les équations de la couche-limite sous forme dimensionnelle sont donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.60)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6.61)$$

avec pour conditions aux limites : $u(x, 0) = 0$, $v(x, 0) = 0$, et $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e$. Cette équation peut se résoudre à l'aide de la fonction de courant ψ définie telle que $u = \psi_y$ et $v = -\psi_x$. L'équation de continuité (6.60) est automatiquement satisfaite tandis que l'équation de quantité de mouvement donne :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (6.62)$$

alors que les conditions aux limites imposent : $\psi_y(x, 0) = 0$, $\psi_x(x, 0) = 0$, et $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi_y(x, y) = u_e$. C'est une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, qui peut être simplifiée en recherchant des solutions auto-similaires de la forme :

$$\psi = \sqrt{u_e x \nu} f(\eta), \text{ avec } \eta = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}$$

Quand on substitue cette forme dans l'équation (6.62), on obtient l'équation de Blasius⁶ :

$$2f''' + ff'' = 0, \quad (6.63)$$

avec pour conditions aux limites $f(0) = f'(0) = 0$ et $f'(\infty) = 1$. Il n'existe pas de solution analytique à cette équation, mais comme il s'agit d'une équation différentielle ordinaire, elle est bien plus simple à résoudre numériquement que l'équation originale (6.62); entre autres, une méthode numérique de tir permet de la résoudre. Une fois f déterminé numériquement, on déduit le profil de vitesse (voir figure 6.12) :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e f'(\eta),$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} u_e \sqrt{\frac{\nu}{u_e x}} (\eta f' - f).$$

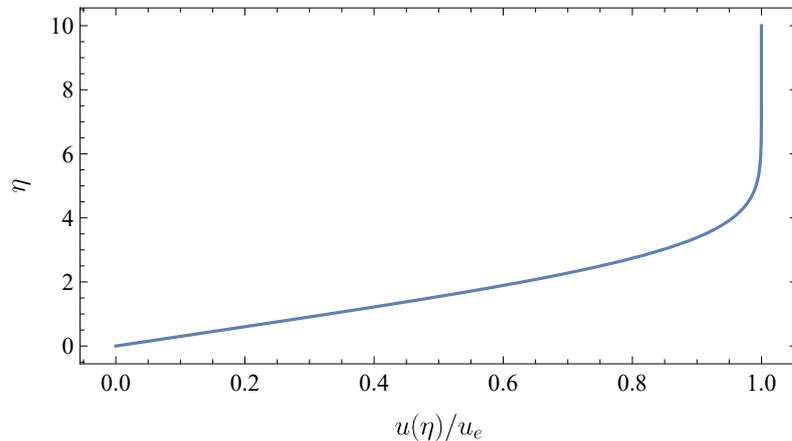


Figure 6.12 – Profil de vitesse $u(\eta)$, solution de l'équation de Blasius (6.63).

Un problème associé à la détermination du profil de vitesse est la détermination de la contrainte à la paroi et du coefficient de frottement. La contrainte de cisaillement vaut :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu u_e}{x} \sqrt{\text{Re}_x} f''(0),$$

avec $\text{Re}_x = u_e x / \nu$. Le coefficient de frottement pariétal est donc :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{\text{Re}_x}} \approx \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

6. Heinrich Blasius (1883–1970) était un mécanicien des fluides allemand, élève de Ludwig Prandtl. Il est l'un des créateurs du laboratoire de Göttingen en Allemagne, où des percées substantielles en mécanique des fluides furent réalisées entre les deux guerres mondiales. Son nom est principalement lié à l'équation de la couche limite pour une plaque finie et à son coefficient de frottement. Toute sa vie, il travailla sur les problèmes de couche limite, les lois de similitude, les pertes de charge dans les conduites, et le transfert de chaleur.

6.7 La turbulence ou les limites du modèle newtonien

Reynolds a mis en évidence simplement la turbulence en réalisant l'expérience reportée sur la figure 6.13 : il s'agit d'injecter dans un écoulement le long d'un tube cylindrique un filet d'encre colorée. Si l'écoulement est laminaire, la trajectoire des particules est parallèle à la génératrice du tube ; le filet d'encre reste donc un mince filet, qui peut éventuellement se diluer sous l'effet de la diffusion moléculaire. Dans un écoulement turbulent, en revanche, les trajectoires sont erratiques, ce qui conduit à une dispersion rapide de l'encre et la formation de structures sous forme de volutes, appelées *tourbillons*.

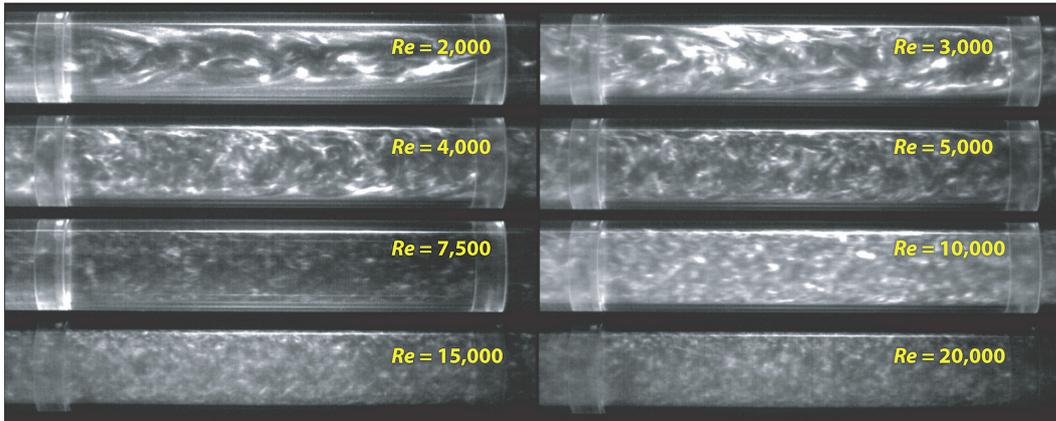


Figure 6.13 – Mise en évidence de la turbulence (l'expérience de Reynolds). Visualisations de l'écoulement de divers états turbulents pour des nombres de Reynolds compris entre 2000 et 20 000. Chaque image montre approximativement une longueur d'écoulement qui représente environ 6,5 diamètres du tuyau. D'après Mullin (2011).

Quand l'inertie augmente, les petites fluctuations de vitesses peuvent être amplifiées à cause de la non-linéarité du terme convectif $\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$ dans la dérivée particulaire, ce qui conduit à une perte de stabilité de l'écoulement. On dit que l'écoulement devient *turbulent*.

Pour mettre cela en évidence dans les équations de Navier–Stokes (6.4), on introduit la *décomposition de Reynolds* de la vitesse en une valeur moyenne et une fluctuation : $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$. Quand on moyenne cette décomposition, les fluctuations disparaissent $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$, où le symbole $\langle \cdot \rangle$ désigne l'opérateur moyenne. Dans les équations de Navier–Stokes, on remplace \mathbf{u} par la décomposition de Reynolds, puis on moyenne les équations ; on part de l'équation (6.4) :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} \right) = -\nabla p_* + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

(p_* est la pression généralisée) pour aboutir à :

$$\rho \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle \right) = -\nabla \langle p_* \rangle + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} - \rho \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle,$$

car $\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \neq 0$ *a priori*. Cette dernière équation appelée *équation de Reynolds* est très semblable à la première (Navier–Stokes) si ce n'est qu'un nouveau terme est apparu :

$$\Sigma_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle.$$

C'est le tenseur de Reynolds (qui représente la turbulence). Ce nouveau tenseur (symétrique) introduit de nouvelles inconnues et il faut donc fournir des relations supplémentaires pour résoudre le système d'équations. On parle de *fermeture* des équations du mouvement.

Le régime d'écoulement est caractérisé selon la valeur du nombre de Reynolds :

- $Re \rightarrow 0$: écoulement laminaire ;
- $Re = O(100 - 1000)$: écoulement transitionnel ;
- $Re > Re_c = O(2000)$: écoulement turbulent, turbulence développée ;

Les valeurs exactes des seuils de transition dépendent de la géométrie de l'écoulement. Comme le montre la série de clichés des figures 6.14 et 6.15, la transition vers la turbulence se fait assez lentement quand on augmente le nombre de Reynolds. Pour un cylindre les premiers effets se font sentir pour des nombres de Reynolds proches de 1 ; jusqu'à des nombres de Reynolds de quelques centaines, l'écoulement présente des structures bien organisées (allée de von Kármán) dans le sillage du cylindre. Si l'on prenait une sphère au lieu d'un cylindre, les valeurs des seuils seraient différentes.

La turbulence traduit une perte de stabilité du régime laminaire ; elle introduit donc du désordre dans la distribution des vitesses. Une des principales difficultés de l'étude de la turbulence est que, malgré le désordre induit, de nouvelles structures apparaissent. Les écoulements atmosphériques présentent de nombreux exemples de structures turbulentes : forme en spirale des dépressions et ouragans, forme des nuages, etc. L'existence de ces structures explique le caractère non local de la turbulence : ce qui se passe à un endroit donné peut dépendre très fortement de ce qui passe dans un voisinage plus ou moins éloigné. Cela implique que, pour le traitement statistique de la turbulence, il est nécessaire d'introduire des échelles de longueur caractéristiques.

6.8 Quelques illustrations de la turbulence à grande échelle

Si la turbulence implique un comportement chaotique sur de courtes distances, elle peut aussi être à l'origine de la création de structures à grande échelle. D'une certaine façon, le désordre à petite échelle crée de l'ordre à grande échelle. Une observation qui intrigue le physicien et passionne le philosophe !

Ainsi, quand on examine l'effet d'un obstacle tel qu'un barreau cylindrique, on observe que la structure de l'écoulement derrière l'obstacle varie fortement en fonction du nombre de Reynolds (voir figures 6.14 et 6.15). À tout petit nombre de Reynolds Re , les lignes de courant sont quasiment symétriques autour du cylindre. Lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, des tourbillons se forment dans le sillage de l'écoulement. Aux faibles nombres de Reynolds, ceux-ci se maintiennent stationnaires près du cylindre, mais au fur et à mesure que Re est augmenté, les tourbillons s'écartent et se mettent à osciller. Pour $Re \sim 2000$, on observe des allées de von Kármán, c'est-à-dire des émissions de vortex depuis le cylindre.

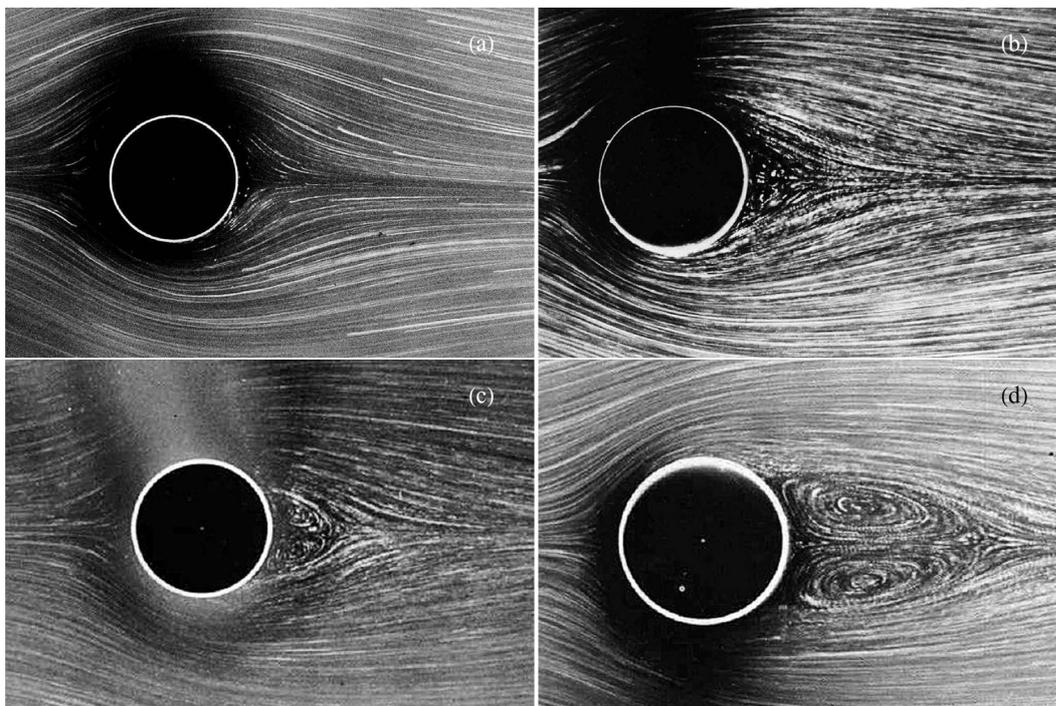


Figure 6.14 – Écoulement permanent d'un fluide visqueux (eau) autour d'un cylindre (de section circulaire) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds: (a) $Re = 1,54$; (b) $Re = 9,6$; (c) $Re = 13,1$; (d) $Re = 26$. Les lignes de courant sont rendues visibles en ensemençant de la poudre d'aluminium. Au fur et à mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, deux vortex se forment à l'arrière du cylindre. Clichés Sadatoshi Taneda (Taneda, 1956; Van Dyke, 1982).

Les vues satellitaires montrent également dans l'atmosphère des vortex à grande échelle (voir figure 6.16). Les zones de dépression et les ouragans offrent des exemples typiques de structures turbulentes sur des échelles de plusieurs centaines de kilomètres. La surface

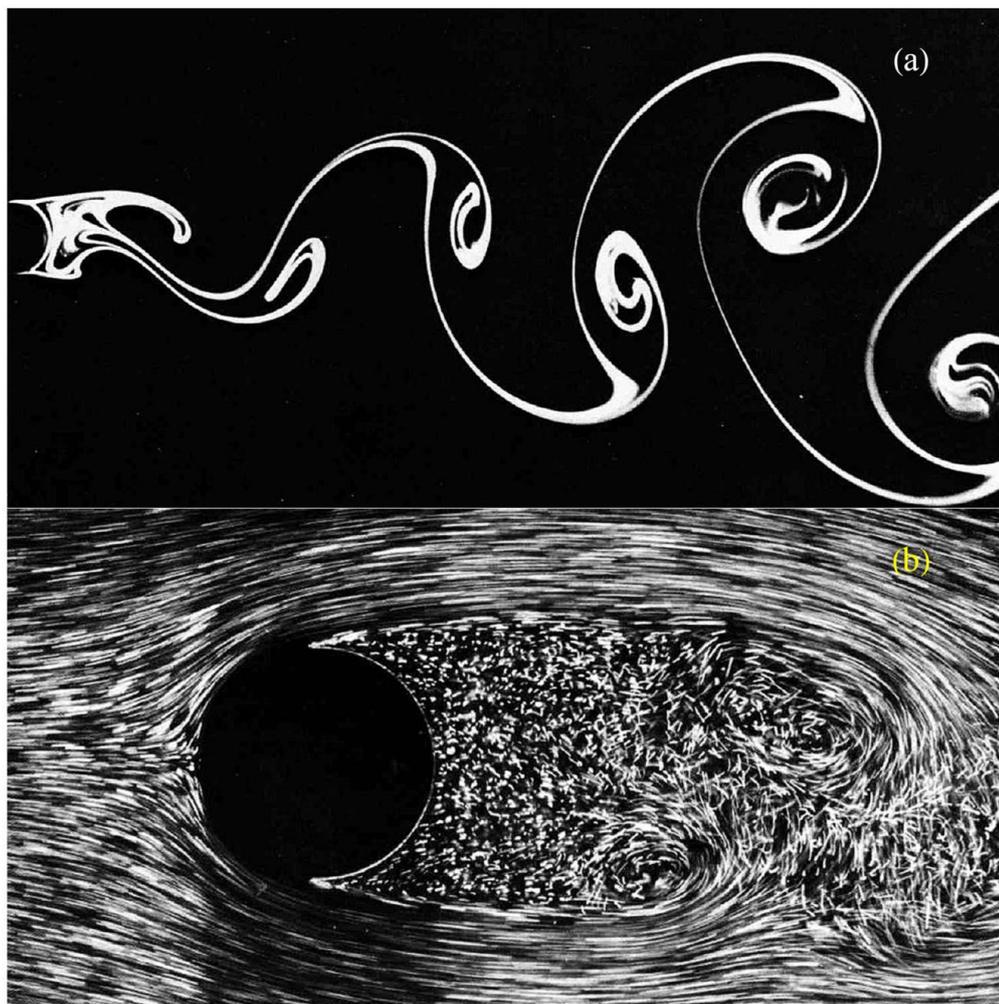


Figure 6.15 – Écoulement permanent d'un fluide visqueux (eau) autour d'un cylindre (de section circulaire) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. (a) $Re = 140$; les lignes d'émission sont rendues visibles en émettant une fumée d'un colloïde blanc et en éclairant par un tranche de lumière. C'est un phénomène appelé « allée de von Kármán », qui correspond à la formation de paires de vortex. (b) $Re = 2000$; la visualisation des lignes de courant se fait à l'aide bulles d'air piégées dans l'écoulement. Clichés Sadatoshi Taneda (a) (Taneda, 1956; Van Dyke, 1982); Henri Werlé et Marc Gallon (Werlé & Gallon, 1973; Van Dyke, 1982).

des océans peut aussi montrer des structures tourbillonnaires impliquant des sédiments marins ou bien des blocs de glace.

Il existe également des instabilités de cisaillement dites de Kelvin–Helmholtz lorsque deux couches bien distinctes glissent l'une sur l'autre à grande vitesse comme le montre la figure 6.17(a). Le relief peut agir comme un obstacle aux couches basses de l'atmosphère. Les vues aériennes peuvent alors révéler des allées de von Kármán dans le sillage des écoulements.

Les tornades sont des structures turbulentes à plus petite échelle spatiale (et temporelle). La figure 6.18 montre deux exemples de tornade sur terre et sur un lac.

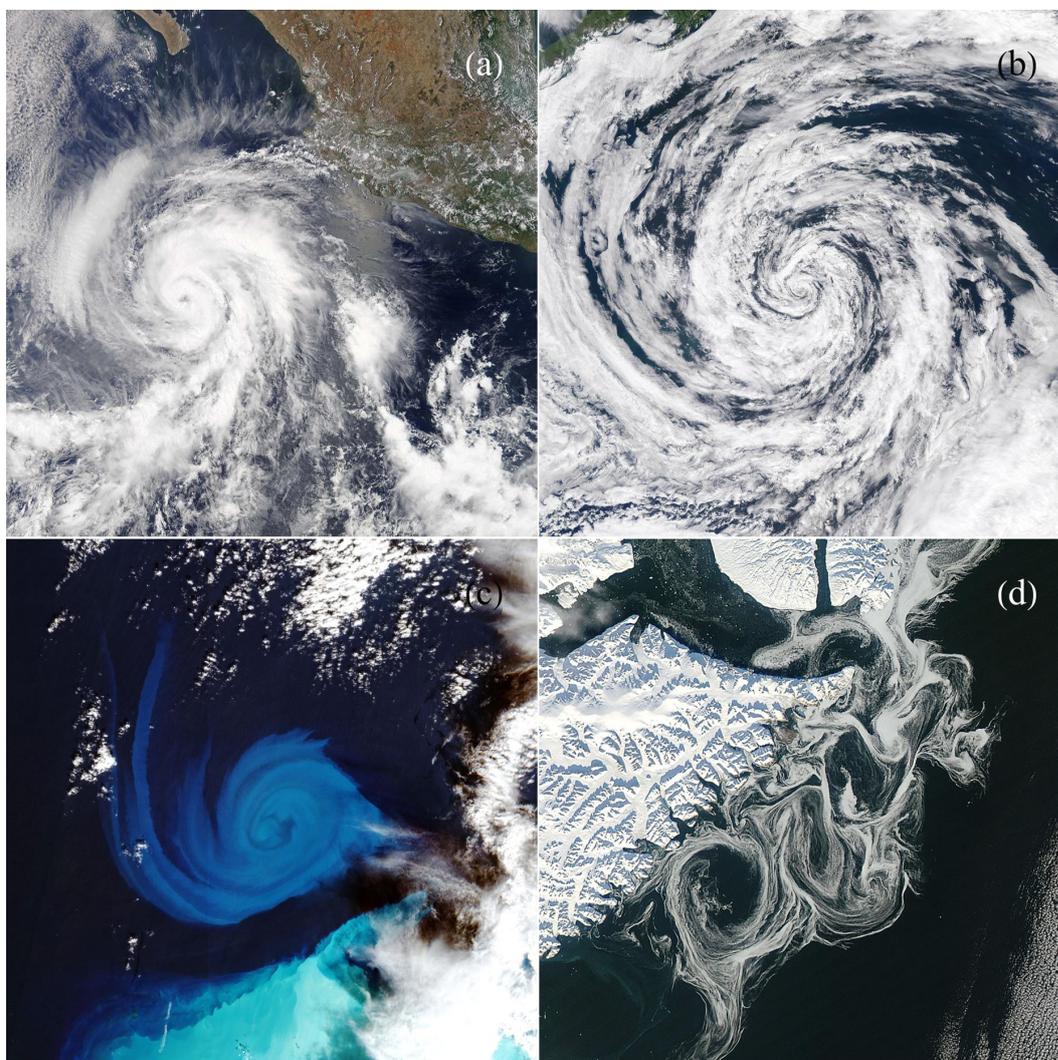


Figure 6.16 – (a) Ouragan Aletta sur le Pacifique oriental en juin 2018; source: [NASA](#). (b) Zone dépressionnaire sur le golfe d’Alaska; source: [NASA](#). (c) Tourbillon au large des Bahamas mobilisant des sédiments fins mis en suspension lors du passage de la tempête Nicole en 2022; [NASA](#). (d) tourbillon mobilisant des blocs de glace sur côte est du Groenland; source: [NASA](#).

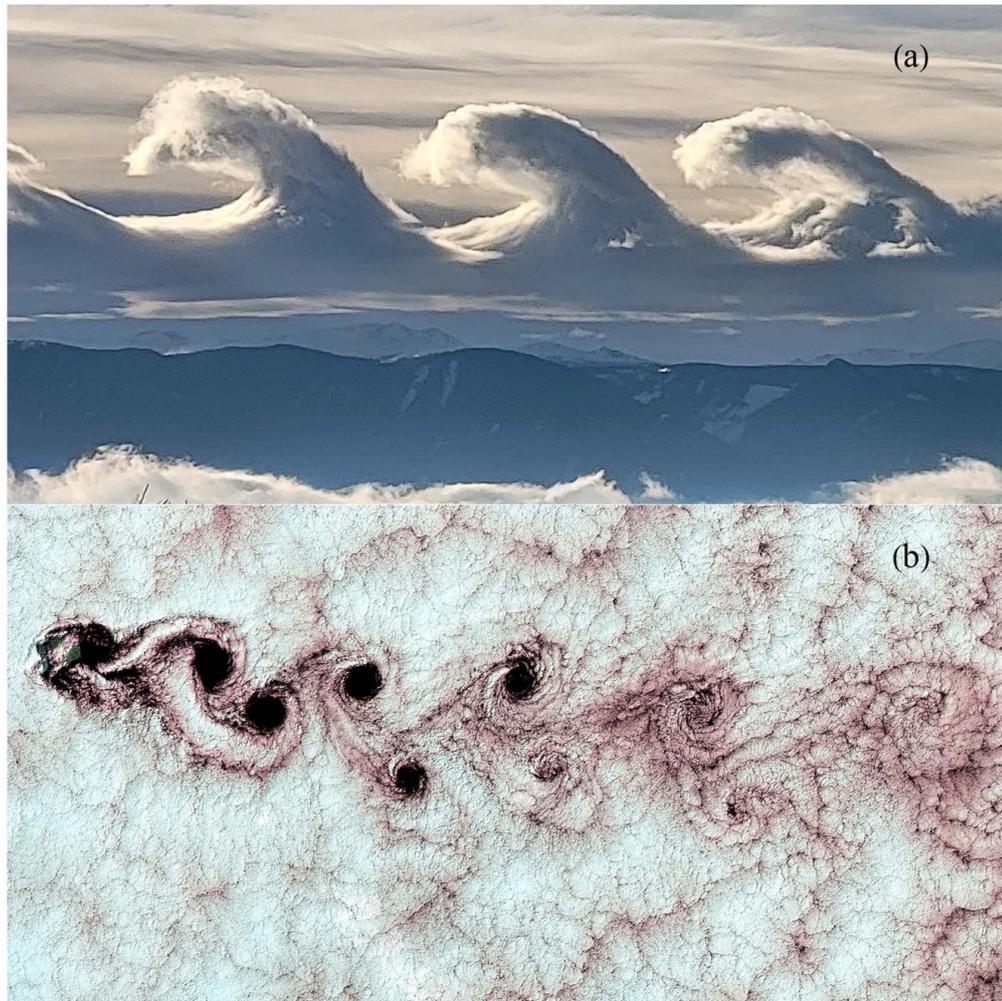


Figure 6.17 – (a) Nuages en forme de vagues dans le Wyoming. Le phénomène est dû à une instabilité de Kelvin–Helmholtz. Ce type d’instabilité se produit lorsque deux couches atmosphériques avec des températures différentes glissent l’une sur l’autre. L’interface n’est pas stable et forme des oscillations qui sont bien visibles lorsque des nuages sont présents ; source : [Rachel Gordon](#). (b) Allée de von Kármán dans le sillage de l’île Alexander Selkirk dans le Pacifique sud ; source : [NASA](#).



Figure 6.18 – (a) Tornado sur le Montana en 2012 [Sean R. Heavey](#). (b) Tornado sur le Léman ; source : Nicolas Gascard.

6.9 Moyenne des équations de Navier–Stokes

La clé pour comprendre (un peu) et modéliser la turbulence est liée à la notion de fluctuations de vitesse et de pression : les écoulements turbulents présentent des fluctuations aléatoires des vitesses. En pratique, cela veut dire que si l'on met un tube de Pitot dans une rivière pour mesurer la vitesse locale, on observe que la vitesse fluctue au cours du temps (voir figure 6.19). On décompose alors la vitesse instantanée $u(t)$ en une vitesse moyenne (vitesse moyennée dans le temps) et une fluctuation de vitesse notée u' :

$$u(t) = \langle u \rangle + u'(t),$$

avec

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt,$$

la moyenne temporelle de la vitesse ; expérimentalement, la moyenne se calcule en intégrant le signal sur un temps arbitraire T (en général, T doit être choisi suffisamment grand pour que la moyenne soit stationnaire). On a vu que cette décomposition s'appelle *décomposition de Reynolds*.

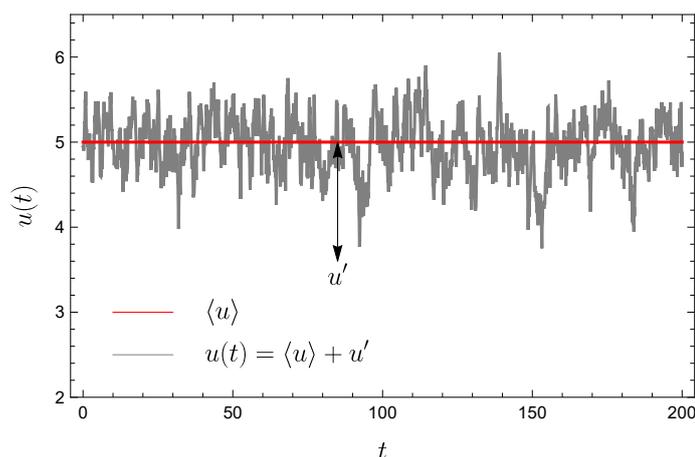


Figure 6.19 – Fluctuation de la vitesse instantanée.

Sur le plan théorique, l'opérateur $u(\mathbf{x}, t) \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T u(\mathbf{x}, t) dt$ s'appelle l'*opérateur moyenne temporelle* ; il permet de passer d'une vitesse instantanée $u(\mathbf{x}, t)$ à une vitesse moyenne $\langle u \rangle$ (qui ne dépend plus de la position \mathbf{x}). On peut construire d'autres opérateurs de moyenne : par exemple une moyenne dans l'espace (dite moyenne spatiale) ou une *moyenne d'ensemble*, où l'on suppose que l'on réalise la même expérience un très grand nombre de fois et qu'on moyenne sur ces « réalisations ». On admet le plus souvent que ces moyennes sont équivalentes entre elles (on parle d'*ergodicité* du système) et qu'on peut les interchanger sans problème. L'opérateur moyenne a plusieurs propriétés intéressantes :

- la moyenne d'une somme est égale à la somme des moyennes : $\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle$;
- la moyenne d'un produit d'une fonction f par une constante α est : $\langle \alpha f \rangle = \alpha \langle f \rangle$. Attention cela ne marche pas pour deux fonctions non constantes $\langle fg \rangle \neq \langle f \rangle \langle g \rangle$;
- la moyenne est invariante par elle-même : $\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle$. On tire de cette relation et de la précédente que $\langle f \langle g \rangle \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle$;

- la moyenne d’une fluctuation est nulle $\langle u' \rangle = 0$;
- mais la moyenne du carré d’une fluctuation n’est pas nulle : $\langle u'^2 \rangle > 0$ (sauf si $u' = 0$);
- on peut intervertir les opérations de moyenne et de différentiation (grâce à l’ergodicité du système):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle &= \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x}, \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t}; \end{aligned}$$

- mais attention cela ne marche pas avec la dérivée matérielle à cause du terme convectif (non linéaire):

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle \neq \frac{d\langle f \rangle}{dt}.$$

Examinons en effet ce que vaut la moyenne d’une dérivée matérielle. On utilise la décomposition de Reynolds: $f = \langle f \rangle + f'$ et $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$. Examinons le terme convectif de la dérivée matérielle:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla f &= (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}') \cdot \nabla (\langle f \rangle + f'), \\ &= \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle f \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla f' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \langle f \rangle + \mathbf{u}' \cdot \nabla f'. \end{aligned}$$

Moyennons maintenant cette équation à l’aide de l’opérateur moyenne spatiale:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \cdot \nabla f \rangle &= \langle \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle f \rangle \rangle + \langle \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla f' \rangle + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \langle f \rangle \rangle + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle, \\ &= \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle f \rangle + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle, \end{aligned}$$

où l’on s’est servi des relations vues plus haut. On trouve que la moyenne de la dérivée matérielle vaut donc:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla f \rangle, \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle f \rangle + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle, \\ &= \frac{d\langle f \rangle}{dt} + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle. \end{aligned}$$

À cause du caractère non linéaire de la convection, il apparaît donc un produit $\langle \mathbf{u}' \cdot \nabla f' \rangle$ supplémentaire.

Avec ces outils en main, on va donc pouvoir moyennner maintenant les équations de Navier–Stokes. L’objectif est de fournir une équation du mouvement moyen, c’est-à-dire une équation pour les champs moyens $\langle \mathbf{u} \rangle$ et $\langle p \rangle$. On part de la formulation suivante des équations de Navier–Stokes pour un fluide newtonien incompressible :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} \right) &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \Delta \mathbf{u}, \end{aligned}$$

où l’on rappelle que l’on a $\mathbf{u}\nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u}$, où $\mathbf{u}\mathbf{u}$ désigne le produit tensoriel de \mathbf{u} par \mathbf{u} . On introduit ensuite la décomposition de Reynolds pour la vitesse et la pression :

$$p = \langle p \rangle + p' \text{ et } \mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'.$$

On substitue ces relations dans les équations de Navier–Stokes :

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}' \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}') \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla \langle p \rangle - \nabla p' + 2\mu (\Delta \langle \mathbf{u} \rangle + \Delta \mathbf{u}').$$

L'étape suivante est de prendre la moyenne temporelle, ce qui permet d'aboutir à la forme suivante :

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{\Sigma}_t) \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla \langle p \rangle + 2\mu \Delta \langle \mathbf{u} \rangle.$$

On note que les équations moyennées de Navier–Stokes, appelées encore *équations de Reynolds*, sont très proches des équations originelles si ce n'est qu'un nouveau terme apparaît dans les équations au niveau de l'accélération convective : $\rho \nabla \cdot \mathbf{u}' \mathbf{u}'$. Comme ce terme se présente sous la forme d'une divergence (comme le tenseur des contraintes), il peut s'interpréter comme une contrainte. On introduit donc un nouveau tenseur, appelé *tenseur de Reynolds* : $\mathbf{\Sigma}_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$. Si on écrit ce tenseur dans une base cartésienne, on a une matrice symétrique

$$\mathbf{\Sigma}_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle = -\rho \begin{bmatrix} \langle u' u' \rangle & \langle u' v' \rangle \\ \langle u' v' \rangle & \langle v' v' \rangle \end{bmatrix}.$$

Ce tenseur de Reynolds représente les contraintes effectives générées par la turbulence du fluide ; pour cette raison, on l'appelle aussi tenseur des contraintes turbulentes. En effet, pour l'écoulement moyen, le mouvement erratique des particules de fluide génère une dissipation supplémentaire par rapport à un écoulement purement laminaire qui aurait le même champ de vitesse et de pression. Le premier effet de la turbulence est donc d'induire une dissipation d'énergie supplémentaire.

La principale difficulté réside dans le calcul du tenseur de Reynolds $\mathbf{\Sigma}_t$. On peut se dire que puisqu'on vient d'obtenir un jeu d'équations pour le mouvement moyen, on peut faire de même et dériver un jeu d'équations pour \mathbf{u}' et p' . On peut en effet obtenir un jeu d'équations gouvernant les fluctuations simplement en soustrayant aux équations de Navier–Stokes les équations de Reynolds. Toutefois, ce nouveau jeu d'équations n'est pas fermé. Tous les modèles théoriques de calcul de $\mathbf{\Sigma}_t$ ont été à ce jour voués à l'échec et en pratique, il faut recourir à des équations de fermeture empiriques, c'est-à-dire des relations qui permettent de calculer de façon plus ou moins implicite $\mathbf{\Sigma}_t$ en fonction des caractéristiques de l'écoulement. Il n'existe malheureusement pas d'équation de fermeture universelle. À chaque type de problème, il existe en général une équation de fermeture plus ou moins complexe, dont l'expérience a montré qu'elle pouvait fournir une approximation correcte. On va ici présenter la plus simple d'entre elle (le modèle dit de *longueur de mélange*), qui fournit une bonne approximation de ce qui se passe pour des écoulements près d'une paroi solide. C'est cette géométrie que l'on va rencontrer le plus souvent dans les applications en hydraulique.

6.10 Problème de fermeture

Les équations de fermeture sont plus ou moins empiriques et plus ou moins complexes. Les plus simples sont des fermetures algébriques où l'on écrit directement une relation

entre grandeur fluctuante et grandeur moyenne, par exemple en cisaillement simple (écoulement près d'une paroi) :

$$\tau = \mu_t \frac{d\langle u \rangle}{dy},$$

avec μ_t la viscosité turbulente. Les fermeture algébriques dépendent du problème traité. Ainsi :

- loi de paroi $\nu_t = \mu_t / \rho = \ell_m^2 \frac{d\langle u \rangle}{dy}$, $\ell_m = \kappa y$ est la *longueur de mélange* introduite par Prandtl⁷ et qui représente la taille caractéristique des structures turbulentes près de la paroi, et où $\kappa \approx 0,4$ est la constante de von Kármán. La contrainte de cisaillement s'exprime alors comme :

$$\tau = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2,$$

où l'on notera par rapport à la loi en régime laminaire : une dépendance quadratique vis-à-vis de la vitesse et une dépendance vis-à-vis de la profondeur y ;

- pour un jet $\nu_t = \ell \bar{u}$.

On remarque ainsi que pour une paroi, le modèle de la longueur de mélange prévoit que la contrainte de cisaillement dépend du carré du taux de cisaillement $d\langle u(y) \rangle / dy$ et n'est donc plus une fonction linéaire de $d\langle u(y) \rangle / dy$ comme pour le régime laminaire, ce qui montre que la dissipation d'énergie (rappelons que la puissance dissipée s'écrit $\Phi = \tau d\langle u(y) \rangle / dy$) croît très rapidement avec la vitesse moyenne. Comme on le montre au § 6.11, cette dépendance a également une profonde influence sur le profil de vitesse, puisque celui-ci devient logarithmique à proximité de la paroi.

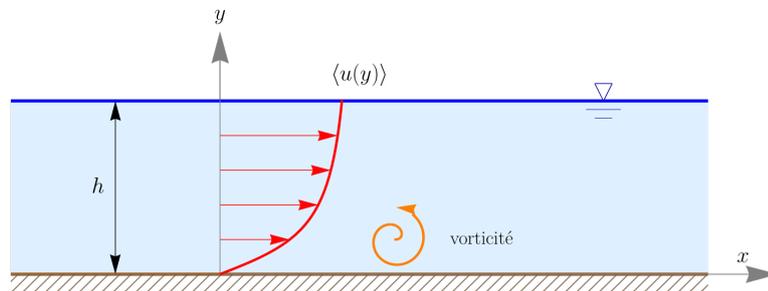


Figure 6.20 – Turbulence près d'une paroi.

6.11 Exemple d'application : écoulement sur un plan incliné

On considère un écoulement permanent uniforme d'un fluide newtonien incompressible le long d'un plan infini. La hauteur d'écoulement est h .

7. Ludwig Prandtl (1875–1953) est un mécanicien allemand. Chercheur et enseignant à la réputation internationale bien établie, Prandtl est l'instigateur de l'école de Göttingen en mécanique des fluides, qui attira parmi les meilleurs scientifiques de l'époque. Les fondements de la théorie de la couche limite y furent établis. La théorie de la longueur de mélange fut développée par Prandtl sur la base d'une analogie entre le mouvement turbulent et la cinétique des gaz.

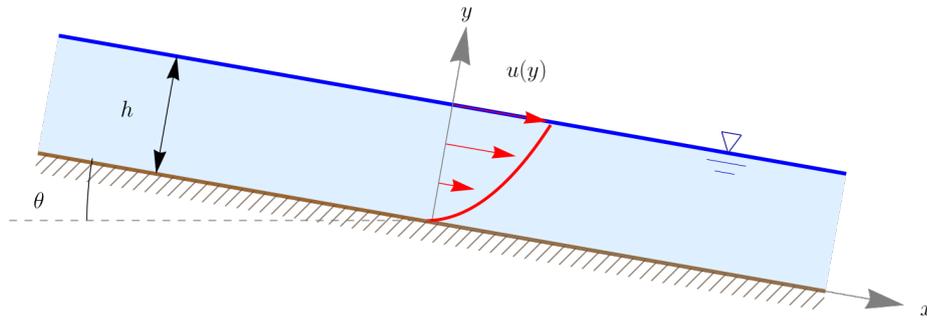


Figure 6.21 – Écoulement en régime permanent le long d'une plaque infinie inclinée d'un angle θ .

Étape 1 : recherche des symétries

L'écoulement est bidimensionnel. Il y a invariance par translation selon x et invariance par t (écoulement permanent). On en déduit que la vitesse selon x s'écrit donc $u(y)$. Il n'y a pas de vitesse selon y : $v = 0$.

Étape 2 : équations du mouvement

Les équations de Navier–Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

qui est systématiquement vérifiée. La projection selon x des équations de conservation de la quantité de mouvement donne :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

soit après simplification :

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (6.64)$$

On fait de même pour la projetée selon y :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

soit après simplification :

$$0 = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (6.65)$$

Les conditions aux limites ;

- cinématique : condition d'adhérence au fond :

$$u = 0 ; \quad (6.66)$$

- dynamique : contrainte nulle à la surface libre $\Sigma \cdot e_y = 0$ (pression atmosphérique négligée) :

$$p = 0 \text{ et } \sigma_y = 2\mu \frac{du}{dy} = 0 \text{ en } y = h. \quad (6.67)$$

Étape 3 : résolution des équations en régime laminaire

En régime laminaire, la viscosité est constante. L'équation (6.65) montre que la pression est hydrostatique :

$$p = \rho g \cos \theta (h - y).$$

On déduit donc l'équation (6.64) de la quantité de mouvement selon (x) que :

$$\rho g \sin \theta = -\mu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

qui s'intègre facilement :

$$u(y) = -\frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} y^2 + \alpha y + \beta,$$

avec α et β des constantes d'intégration. La condition aux limites (6.66) au fond implique que :

$$\beta = 0,$$

tandis que la condition aux limites (6.67) à la surface libre :

$$u'(h) = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} h + \alpha = 0.$$

Le champ de vitesse s'écrit donc :

$$u(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} (2hy - y^2).$$

Le profil de vitesse est donc parabolique.

Étape 4 : résolution des équations en régime turbulent

Si on fait l'expérience avec du miel de masse volumique 1100 kg/m^3 , de viscosité $\mu = 10 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, sur un plan incliné de 30° et pour une hauteur h de 5 cm, on trouve que la vitesse moyenne vaut :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{1}{3} \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} h^2 \approx 45 \text{ cm/s}$$

et donc le nombre de Reynolds vaut à peu près

$$\text{Re} = \frac{1100 \times 5 \times 10^{-2} \times 0,45}{10} = 2,47.$$

L'écoulement est donc laminaire et on peut appliquer les équations de Navier-Stokes. Que se passe-t-il si on prenait de l'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$) à la place du miel ? Pour les mêmes conditions expérimentales, la vitesse de l'écoulement serait en théorie de :

$$\bar{u} = 4087 \text{ m/s},$$

soit un nombre de Reynolds de

$$\text{Re} = \frac{1000 \times 5 \times 10^{-2} \times 4087}{10^{-3}} = 2,4 \times 10^8.$$

L'écoulement est donc turbulent et on ne peut plus appliquer les équations de Navier-Stokes.

On va donc écrire les équations de la turbulence dans le cas du modèle très simple de la *longueur de mélange* de Prandtl. La contrainte de cisaillement dans un régime permanent uniforme s'écrit d'après l'équation (6.6):

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (6.68)$$

(où la contrainte de cisaillement est notée $\tau = T_{xy}$) car la contrainte normale selon x est nulle ($T_{xx} = 0$) et le gradient longitudinal de pression est nul car h ne dépend pas de x (soit $\partial_x p = 0$). En intégrant cette équation avec pour condition aux limites à la surface libre $\tau = 0$ en $y = h$ (l'air n'exerce pas de frottement sur la surface libre de l'écoulement), on déduit la relation:

$$\tau = \rho g \sin \theta (h - y).$$

Remarquons au passage que cette relation est générale et valable pour tout écoulement permanent uniforme; elle est indépendante de la loi de comportement utilisée pour décrire la rhéologie du fluide. Le modèle de Prandtl donne par ailleurs la relation:

$$\tau = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy},$$

avec μ_t la viscosité turbulente

$$\mu_t = \rho (\kappa y)^2 \frac{d\langle u \rangle}{dy},$$

où $\kappa \approx 0,41$ est la constante de von Kármán et $\langle u(y) \rangle$ est la vitesse moyenne (dans le temps). L'équation du mouvement est donc:

$$\rho g \sin \theta (h - y) = \rho (\kappa y)^2 \left(\frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2, \quad (6.69)$$

soit

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} = \frac{\sqrt{g \sin \theta}}{\kappa} \sqrt{\frac{h}{y^2} - \frac{1}{y}},$$

dont l'intégration donne:

$$\langle u \rangle = 2 \frac{\sqrt{g \sin \theta}}{\kappa} \left(\sqrt{h - y} - \sqrt{h} \operatorname{arctanh} \left[1 - \frac{y}{h} \right] \right) + c,$$

avec c une constante d'intégration. On note que le profil de vitesse n'est plus parabolique (voir figure 6.22) et diverge vers $-\infty$ quand $y \rightarrow 0$. Pour éviter cela, on impose une condition d'adhérence à une hauteur $y = y_0$. Notons que malgré cela, l'intégrale du champ de vitesse existe et vaut:

$$\int_0^h d\langle u(y) \rangle dy = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{gh^3 \sin \theta}}{\kappa}.$$

La vitesse moyenne est alors:

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h d\langle u(y) \rangle dy = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{gh \sin \theta}}{\kappa}.$$

Une application numérique pour l'eau nous donne une vitesse moyenne de 80 cm/s à comparer avec les 4087 m/s obtenus précédemment.

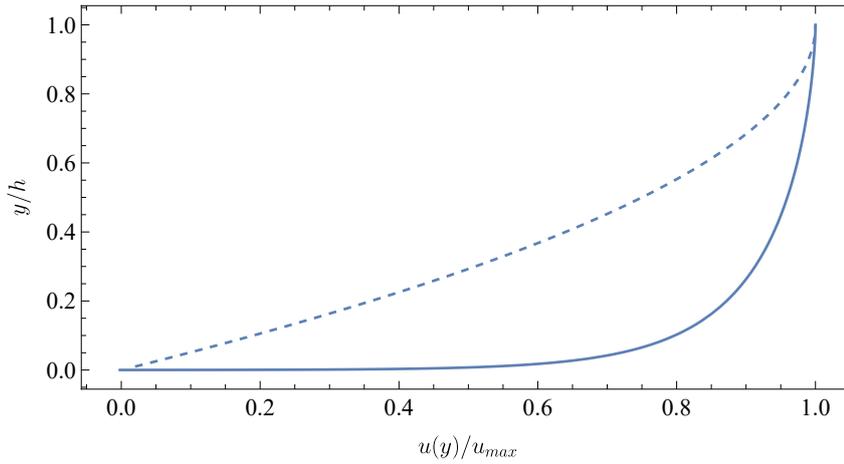


Figure 6.22 – Profils de vitesse sous forme adimensionnelle pour un écoulement en régime permanent le long d’une plaque infinie inclinée d’un angle θ : écoulement turbulent (ligne continue) avec $y_0 = 10^{-4}$ m et $c = 4,29$; écoulement laminaire (ligne discontinue). u_{max} est la vitesse à la surface libre.

Remarque 1. On réalise souvent l’intégration du profil de vitesse (6.69) en supposant que dans la contrainte de cisaillement, si on est suffisamment près du fond, alors $y \ll h$ (ce qui revient à supposer que la contrainte est constante et égale à la contrainte pariétale $\tau_p = \rho g h \sin \theta$). Ce faisant, on simplifie l’intégration puisque :



$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \approx \frac{\sqrt{gh \sin \theta}}{\kappa} \frac{1}{y},$$

soit :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \ln y + C,$$

avec C une constante d’intégration. C’est pour cette raison que l’on parle de *profil de vitesse logarithmique* pour décrire un écoulement turbulent près d’une paroi. À noter qu’avec cette loi, la vitesse serait infinie en $y = 0$. Le modèle cesse d’être valide en fait très près de la paroi, où il existe une couche dite très fine « sous-couche visqueuse », qui fait la jonction entre l’écoulement turbulent (zone logarithmique) et paroi solide.

Remarque 2. On a vu au chapitre 4 que la dissipation d’énergie au sein d’un fluide s’écrit :

$$\Phi = \text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{T}),$$

ce qui donne ici pour une expérience en cisaillement simple :

$$\Phi = \tau \dot{\gamma},$$

avec $\tau = \rho g (h - y) \sin \theta$ la contrainte de cisaillement et $\dot{\gamma} = du/dy$ le taux de cisaillement (gradient de vitesse). Pour un fluide newtonien en régime laminaire on a donc :

$$\Phi = \rho g (h - y) \sin \theta \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} (h - y) = \frac{(\rho g \sin \theta)^2}{\mu} (h - y)^2,$$

ce qui montre que la dissipation se produit partout dans l’écoulement, avec une valeur maximale au fond puis une diminution régulière jusqu’à la surface libre.

Pour le régime turbulent, la dissipation d'énergie s'écrit :

$$\Phi = \rho g (h - y) \sin \theta \frac{\sqrt{g \sin \theta}}{\kappa} \sqrt{\frac{h}{y^2} - \frac{1}{y}} = \rho \frac{(g \sin \theta)^{3/2}}{\mu} \frac{(h - y)^{3/2}}{y},$$

qui montre que Φ est très grand ($\Phi \rightarrow \infty$ quand $y \rightarrow 0$) dans la couche logarithmique, puis tend rapidement vers 0 au-dessus de la couche logarithmique. Comme le montre la figure 6.23, quasiment toute l'énergie se dissipe dans la couche pariétale au fond.

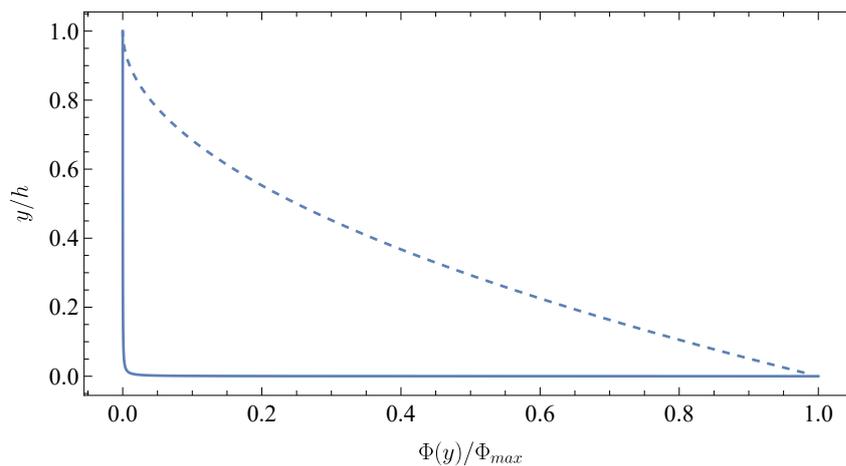


Figure 6.23 – Profils de dissipation sous forme adimensionnelle pour un écoulement en régime permanent le long d'une plaque infinie inclinée d'un angle θ : écoulement turbulent (ligne continue) avec $y_0 = 10^{-4}$ m et $c = 4,29$; écoulement laminaire (ligne discontinue). Φ_{max} est la valeur maximale prise par la dissipation d'énergie.

Écoulements turbulents en charge

7.1 Introduction



ON A VU au chapitre 4 le théorème de Bernoulli, qui énonce que l'énergie

$$E = \rho g z + \rho \frac{u^2}{2} + p$$

se conserve le long d'une ligne de courant lorsque l'écoulement est permanent et non visqueux (c'est-à-dire sans dissipation d'énergie). Au chapitre 5, nous avons généralisé ce résultat en introduisant la *charge*, c'est-à-dire la traduction de l'énergie en équivalent de hauteur d'eau

$$H = \frac{E}{\rho g}.$$

Dans les écoulements réels, l'énergie (ou la charge) ne se conserve pas à cause des dissipations d'énergie. En hydraulique à surface libre, on a ainsi montré que la variation linéaire de charge

$$j_f = -\frac{dH}{dx}$$

traduit la dissipation d'énergie et qu'on peut la relier aux variables d'écoulement \bar{u} et h à l'aide de lois empiriques telles que la loi de Manning-Strickler.

On va ici suivre un raisonnement similaire pour les écoulements en charge, c'est-à-dire les écoulements dans des conduites où le fluide est mis en mouvement en appliquant une différence de pression (ou bien une différence de charge). Contrairement à l'hydraulique des rivières où le moteur de l'écoulement est la force de gravité, c'est ici le gradient de pression (de part et d'autre des extrémités de la conduite) qui commande le mouvement ; cette différence de pression peut être causée par des moteurs (pompes) ou bien par la pression hydrostatique. L'équation de perte de charge va s'écrire dans ce contexte :

$$\Delta H = H_1 - H_2 = f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

où H_2 est la charge à la sortie de la conduite, H_1 celle à l'entrée de la conduite, L la longueur de la conduite, D_h son diamètre hydraulique, \bar{u} la vitesse débitante, f le coefficient de frottement qui est une fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement $Re = D_h \bar{u} / \nu$. Contrairement au cas des rivières, il est ici possible de calculer la dissipation d'énergie de façon relativement fine et donc $f(Re)$ pour un certain nombre de régimes d'écoulement

dans des conduites de géométrie simple. On va commencer ce chapitre en examinant comment l'énergie est dissipée pour des conduites simples. On abordera ensuite le calcul pratique des pertes de charge. Enfin, on verra que des pertes de charge supplémentaires dites « pertes de charges singulières » sont à prendre en compte lorsque la conduite présente des changements de caractéristiques importants (direction, section d'écoulement, etc.).

7.2 Écoulement permanent uniforme lisse

On considère un *écoulement de Poiseuille plan* (appelé aussi écoulement parallèle) entre deux plans parallèles et immobiles, dont l'entrefer est $2b$ (voir figure 7.1). Le fluide est mu par un gradient de pression $\partial_x p$.

7.2.1 Équations du mouvement

On rappelle qu'en turbulence, on peut obtenir un jeu d'équations dites moyennées en faisant la décomposition de Reynolds: $u = \langle u \rangle + u'$, avec u' la fluctuation de vitesse et $\langle u \rangle$ la vitesse moyennée (dans le temps).

Le jeu d'équations (outre l'équation de continuité) à résoudre est :

$$\rho \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \right) = -\nabla \langle p_* \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{T} \rangle - \rho \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle, \quad (7.1)$$

avec \mathbf{u} le champ de vitesse instantanée (u, v, w les composantes dans un repère cartésien), $\langle \mathbf{T} \rangle$ le tenseur des contraintes visqueuses: $\langle \mathbf{T} \rangle = 2\mu \langle \mathbf{D} \rangle$ avec $\langle \mathbf{D} \rangle$ le tenseur des taux moyens de déformation $\langle \mathbf{D} \rangle = (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle^\dagger)/2$.

Simplifications pour la suite du calcul :

- Le tenseur de Reynolds $\Sigma_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$ est remplacé par une équation de fermeture algébrique de type *longueur de mélange* proposée par Prandtl (voir § 6.10) avec

$$\Sigma_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle = 2\mu_t \langle \mathbf{D} \rangle, \quad (7.2)$$

avec μ_t la viscosité turbulente (ce n'est pas une constante, mais une fonction de du/dy ou de u) et \mathbf{D} le tenseur des taux moyens de déformation. Ce modèle est parfois dit pseudo-laminaire car il est très proche structurellement du modèle newtonien.

- Le tenseur des contraintes visqueuses est toujours :

$$\langle \mathbf{T} \rangle = 2\mu \langle \mathbf{D} \rangle.$$

Notons qu'il existe des modèles de turbulence qui sont bien moins rudimentaires que le modèle empirique de longueur de mélange. Une meilleure précision et une plus grande généralité peuvent être obtenues en considérant des équations différentielles supplémentaires. Un modèle énergétique comme le modèle $k - \ell$ revient à faire l'hypothèse d'une viscosité turbulente définie comme

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = \ell \sqrt{k},$$



avec k l'énergie cinétique turbulente¹

$$k = \frac{1}{2} (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle),$$

qui représente l'énergie cinétique de la turbulence. Pour s'en convaincre, il suffit de calculer la moyenne de l'énergie cinétique instantanée :

$$\frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}')^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{u} \rangle^2 + \rho k.$$

k est déterminé en résolvant une équation supplémentaire dite de conservation de l'énergie cinétique turbulente (non reportée dans ce cours), qui s'obtient à partir de l'équation quantité de mouvement de Navier–Stokes en la multipliant par \mathbf{u}' , puis en la moyennant. Cette équation n'est pas « fermée », c'est-à-dire il faut encore des hypothèses supplémentaires pour la résoudre. Un autre modèle populaire est le modèle $k - \epsilon$, selon lequel $\nu_t = C_\mu k^2 / \epsilon$ avec $\epsilon = \nu \langle \nabla \mathbf{u}' : \nabla \mathbf{u}' \rangle$ la *dissipation turbulente* et C_μ une constante. Ces modèles de turbulence sont couramment implémentés dans les codes de calcul industriel de type FLUENT ou OpenFoam.

7.2.2 Phénoménologie

Il faut distinguer les parois *lisses* et les parois *rugueuses*. En effet, la présence de rugosité :

- modifie fortement la turbulence près de la paroi ;
- pose le problème de la définition de la localisation du point origine $y = 0$.

On montre que la solution comporte trois parties traduisant un effet spécifique de la turbulence :

- Très près de la paroi, la vitesse est très faible, donc le nombre de Reynolds local $Re = uy/\nu$ est petit : $Re \rightarrow 0$; l'écoulement est localement *laminaire*. On parle de *sous-couche visqueuse*. Le jeu d'équations à résoudre est le même que précédemment. Au premier ordre, on peut mettre la solution sous la forme :

$$\boxed{u = u_* \xi},$$

avec u_* la *vitesse de frottement*, appelée encore *vitesse de cisaillement* :

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}, \text{ et } \xi = y \frac{u_*}{\nu}$$

La vitesse de frottement est la traduction de la contrainte pariétale en termes de vitesse alors que ξ est une ordonnée « sans dimension ». Expérimentalement on observe que la sous-couche visqueuse s'étend sur $0 < \xi < 3$.

Preuve. Par intégration des équations de Navier–Stokes (voir exercices), on peut montrer que la vitesse s'écrit :

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y(y - 2b),$$

1. Notons que l'appellation est un peu trompeuse car il s'agit d'une énergie cinétique par unité de masse, ρ n'intervenant pas dans la définition de k .

donc au premier ordre en y , on a :

$$u \approx \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y(-2b) = \frac{1}{\mu} \tau_p y.$$

On pose $u_*^2 = \tau_p / \rho$ et $y = \mu \xi / (\rho u_*)$ et on retrouve la formulation précédente. \square

- Au fur et à mesure qu'on s'éloigne, Re croît, l'écoulement devient turbulent. La turbulence est influencée fortement par la paroi (fort cisaillement de vitesse). On va montrer que le profil de vitesse est logarithmique. On parle de *zone logarithmique*. Cette loi est valable pour $25 < \xi < 500$ avec la contrainte supplémentaire $y/b < 0,2$ (il n'y a pas un strict recouvrement avec la zone visqueuse). Note : Pour $3 < \xi < 25$, il s'agit d'une zone de transition, la vitesse se calcule de façon numérique (pas d'approximation analytique).
- Loin des parois, l'influence des parois est moindre. La turbulence est à peu près homogène. On parle de *zone centrale*. Cette zone s'étend à partir de $y/b > 0,2$.

Les deux premières sous-couches forment la *couche interne*, entièrement dominée par la paroi, de la *couche-limite*. Le reste s'appelle la *couche externe*; cette notion n'a ici pas beaucoup de sens car la zone centrale correspond à la rencontre des deux couches limites.

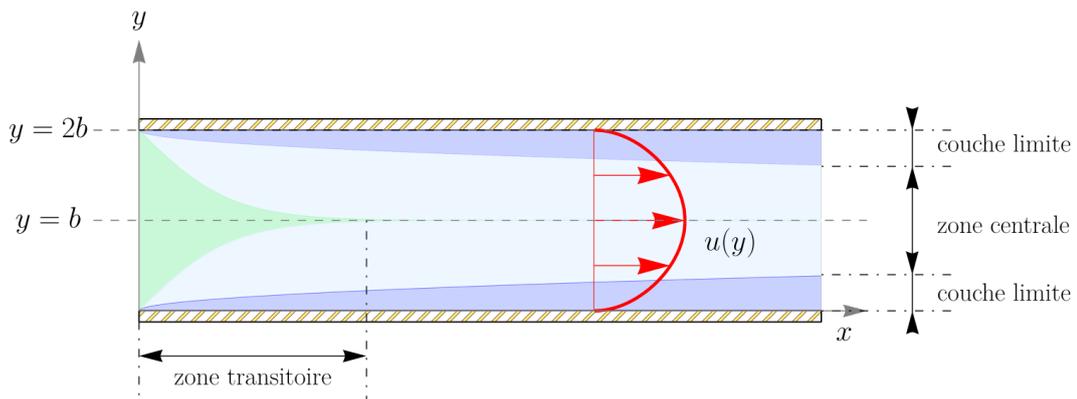


Figure 7.1 – Structuration de l'écoulement en sous-couches.

7.2.3 Zone logarithmique

On intègre l'équation (7.1) en ne considérant que la projection de Navier–Stokes sur x . En régime pleinement établi (les termes inertiels sont donc nuls) et en négligeant les contraintes visqueuses par rapport aux contraintes turbulentes, l'équation résultante traduit l'équilibre entre le terme de divergence des contraintes $\rho \nabla \cdot \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ (dissipation visqueux) et le gradient de pression motrice :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right) = \frac{\partial \langle p_* \rangle}{\partial x},$$

où l'on a employé un modèle de fermeture de type longueur de mélange (7.2). On tire

$$\mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \frac{\partial \langle p_* \rangle}{\partial x} y + c,$$

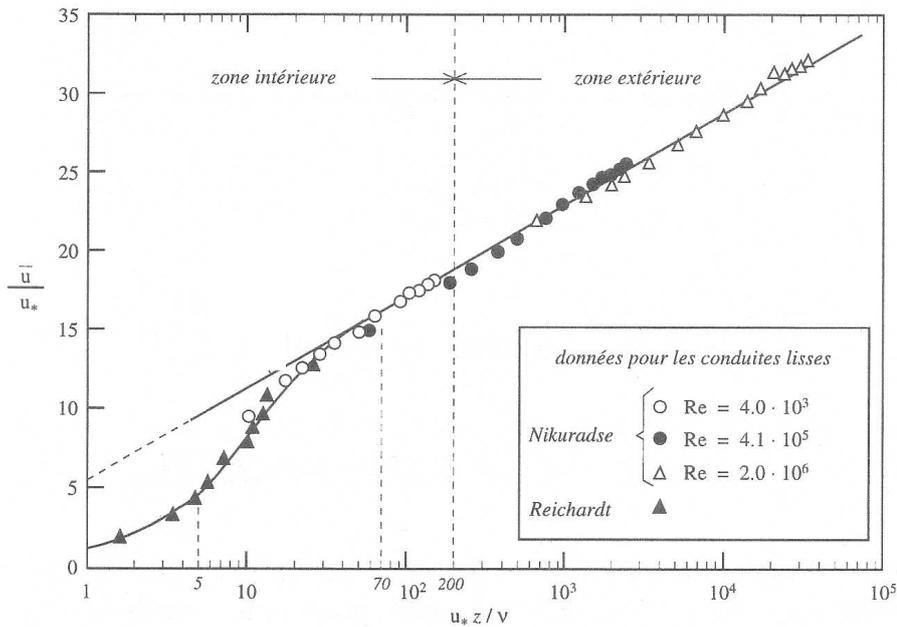


Figure 7.2 – Profil de vitesse à la paroi. Données expérimentales.

où c est une constante. En négligeant la sous-couche visqueuse, on peut relier le taux de cisaillement moyen et la contrainte pariétale: en $y = 0$, $\nu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \tau_p / \rho$ (définition de la contrainte de cisaillement), avec $\nu_t = \mu_t / \rho$ la viscosité cinématique turbulente. On déduit:

$$\nu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_* \rangle}{\partial x} y + \frac{\tau_p}{\rho},$$

Très près de la paroi, on peut négliger le terme linéaire $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} y$ devant le terme de frottement qui est très grand, soit au premier ordre:

$$\nu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \approx \frac{\tau_p}{\rho}.$$

La loi de fermeture est ici: $\nu_t = (\kappa y)^2 d \langle u \rangle / dy$, soit

$$\frac{d \langle u \rangle}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \frac{1}{\kappa y}.$$

Soit

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \frac{1}{\kappa} \ln y + c = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + c.$$

La constante d'intégration c est calculée de telle sorte qu'il y ait un bon raccordement avec la couche laminaire.

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = 2,5 \ln \xi + 5,5,$$

car $1/\kappa \approx 2,5$. C'est le **profil de vitesse logarithmique** (valable pour $25 < \xi < 500$), que l'on retrouve assez fréquemment en régime turbulent près d'une paroi.

7.2.4 Zone centrale

Dans la zone centrale, il y a moins de cisaillement. La loi *ad hoc* de fermeture employée pour la paroi n'est plus valable, on emploie :

$$\nu_t = 0,080bu_*$$

(saturation de la viscosité turbulente). Il faut intégrer les équations de Navier–Stokes turbulentes (en remplaçant ν par ν_t) pour la zone centrale et ajuster la constante d'intégration pour qu'il y ait continuité avec la zone logarithmique. On note u_m la vitesse maximale atteinte en $y = b$ (symétrie du problème). On montre que :

$$\frac{u_m}{u_*} = 2,5 \ln \xi_r + 5,5,$$

avec $\xi_r = 0,2bu_*/\nu$ l'ordonnée de la transition zone centrale/logarithmique. Le profil de vitesse s'écrit finalement dans la zone centrale

$$\frac{u_m - \langle u \rangle(y)}{u_*} = 6,3 \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2,$$

pour $0,2b < y < 1,8b$.

7.2.5 Synthèse

On peut sommer les différentes contributions. La contribution de la sous-couche visqueuse est négligeable. Finalement le débit s'écrit :

$$q = 2\ell bu_* \left(2,5 \ln \frac{bu_*}{\nu} + 3,21\right),$$

et la vitesse de frottement

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} = \left(-\frac{b}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)^{1/2}.$$

Comme pour l'écoulement laminaire, la contrainte pariétale s'écrit :

$$\tau_p = -b \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Cette propriété importante interviendra dans le calcul des pertes de charge. En effet, la dissipation s'écrit :

$$\Phi = \tau_p \bar{u} = b \frac{\partial p}{\partial x} u_* \left(2,5 \ln \frac{bu_*}{\nu} + 3,21\right)$$

soit encore en remplaçant le gradient de pression

$$\Phi = \rho u_*^3 \left(2,5 \ln \frac{bu_*}{\nu} + 3,21\right).$$

Si l'on compare au régime laminaire, la dissipation d'énergie ne dépend plus de la viscosité et devient une fonction assez complexe de la vitesse de cisaillement u_* (ou bien de la vitesse moyenne \bar{u} , calcul que nous ne reportons pas ici).

Remarque : écoulement de Poiseuille cylindrique

Pour un écoulement de Poiseuille, le raisonnement est identique et on aboutit à la formule du débit :

$$q = \pi R^2 u_* \left(2,5 \ln \frac{Ru_*}{\nu} + 2,04 \right),$$

et à la vitesse de frottement

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} = \left(-\frac{R}{2\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1/2}.$$

7.3 Écoulement permanent uniforme rugueux**7.3.1 Équations du mouvement ; effet de la rugosité**

Les équations sont les mêmes que précédemment, mais il se pose le problème de définir où se situe $y = 0$. Expérimentalement cela correspond à l'ordonnée où $u = 0$. Il existe une relation empirique entre la taille caractéristique des rugosités k_s et l'incrément δ de la longueur de mélange dans la loi de fermeture : $\ell_m = \kappa(y + \delta)$ (rappelons $\nu_t = \ell_m^2 du/dy$) :

$$\delta = \begin{cases} 0,036k_s & \text{pour } k_s > 3,1\nu/u_* \rightarrow \text{rugueux} \\ 0 & \text{pour } k_s < 3,1\nu/u_* \rightarrow \text{lisse} \end{cases}$$

On introduit également une sorte de nombre de Reynolds lié à la rugosité

$$k_s^+ = \frac{k_s u_*}{\nu}$$

pour séparer le **régime turbulent rugueux** du **régime turbulent lisse**.

La taille caractéristique de la rugosité peut également être définie comme la moyenne quadratique $k_s = \sqrt{\overline{y_s(x)^2}}$ où $y_s(x)$ est le profil de la surface par rapport au plan moyen². En pratique, comme un état de surface reste difficile à réaliser simplement, on introduit la notion de « rugosité équivalente de sable », c'est-à-dire le diamètre de grains de sable (de même taille) uniformément répartis sur une surface parfaitement lisse et qui produiraient une perte de charge équivalente à celle causée par la rugosité d'une conduite industrielle. Le problème de l'échelle rugosité est surtout délicat dans le domaine de transition $3 < k_s^+ < 70$ car il est alors vraisemblable qu'il faille plusieurs échelles de longueur pour décrire l'état de surface de la conduite ; les formules empiriques peuvent être imprécises dans ce domaine de transition.

7.3.2 Calcul du débit pour des canalisations rugueuses

La présence d'une rugosité a pour effet d'augmenter la turbulence de paroi (d'où l'effet sur la longueur de mélange). La conséquence directe est une modification de la vitesse dans la zone logarithmique :

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = 2,5 \ln \frac{y}{k_s} + 8,34.$$

2. On a donc $\overline{y_s(x)} = 0$

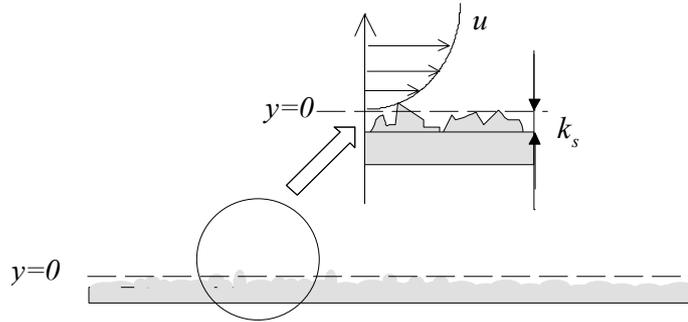


Figure 7.3 – Micro-rugosité des parois.

En revanche, il n'y a pas de modification du profil de vitesse dans la zone centrale. Le débit s'écrit alors pour une canalisation plane rectangulaire (Poiseuille plan) :

$$q = 2\ell b u_* \left(2,5 \ln \frac{b}{k_s} + 6,04 \right),$$

et pour un écoulement dans un conduit circulaire (Poiseuille circulaire) :

$$q = \pi R^2 u_* \left(2,5 \ln \frac{R}{k_s} + 4,87 \right).$$

7.4 Dissipation d'énergie dans les conduites en régime établi

Jusqu'à présent, on a supposé qu'on appliquait un gradient de pression et on calculait le débit résultant à travers une section de géométrie connue. En pratique, on a rarement besoin d'un tel niveau de calcul et on se contente de formules approchées. Ces formules sont fondées sur l'utilisation du théorème de Bernoulli et la notion de coefficient de frottement.

7.4.1 Bilan d'énergie en régime laminaire

Bilan d'énergie dans une conduite longue

On a vu que l'équation de Bernoulli généralisée en régime permanent et appliquée sur un volume de contrôle V (de frontière $C \cup S$) s'écrit³ :

$$\underbrace{\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \left(\frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + p \right) dS}_{\text{flux d'énergie}} = \underbrace{\int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) dS}_{\text{puissance dissipée à la frontière}} - \underbrace{\int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV}_{\Phi, \text{ puissance dissipée dans le volume}}$$

3. Cette équation est la formulation intégrale – sur un volume de contrôle fixe – de l'équation de conservation de l'énergie cinétique (4.30) vue au chap. 4. Outre l'intégration sur le volume de contrôle, on fait l'hypothèse de régime permanent, donc $\partial_t k = 0$. À noter que la pression est une pression généralisée, incluant donc le potentiel gravitaire.

où nous rappelons que p est ici la pression généralisée. La condition d'adhérence à la paroi fait que le membre de gauche et le premier terme du membre de droite sont nuls le long de la surface C composant la conduite.

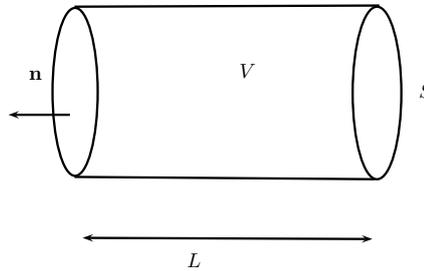


Figure 7.4 – Volume de contrôle pour une conduite.

On s'intéresse à des écoulements établis dans des conduits assez longs, ce qui implique :

- la longueur de la canalisation (cylindrique) L est bien plus grande que la longueur d'établissement

$$\frac{L_e}{D} = \begin{cases} 0,06\text{Re} & \text{pour un régime laminaire,} \\ 0,63\text{Re}^{1/4} & \text{pour un régime turbulent,} \end{cases}$$

avec $\text{Re} = \bar{u}D/\nu$ le nombre de Reynolds de l'écoulement, D le diamètre de la conduite, \bar{u} la vitesse débitante (ou vitesse moyenne).

- la section ne change pas avec x ;
- l'écoulement est établi : $\partial \mathbf{u} / \partial x = 0$;
- la composante selon y (r en coordonnées cylindriques) de la vitesse est nulle : $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. La pression généralisée est considérée comme constante dans une section droite.

Si S_1 et S_2 sont l'entrée et la sortie de la conduite, alors on peut simplifier l'équation

$$-\int_{S_1} \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) u dS + \int_{S_2} \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) u dS = -\int_V \Phi dV,$$

avec $\Phi = \mathbf{T} : \mathbf{D}$ la fonction de *dissipation interne*. En effet, la puissance dissipée $\int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{uT})dS$ aux frontières S est globalement nulle si le débit est constant. La constance de la pression sur une section et l'invariance du débit q (volumique) amènent – après avoir divisé par q – à l'équation de conservation de la *charge* :

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2q} \underbrace{\left(\int_{S_2} u^3 dS - \int_{S_1} u^3 dS \right)}_0 + \frac{1}{q} \int_V \Phi dV.$$

Dans une conduite en régime établi, la différence de pression motrice équivaut à la dissipation d'énergie (aux pertes de charge).

Les pertes de charge

Les termes sont homogènes à des pressions. On peut les rendre aussi homogènes à des hauteurs en divisant par ρg : c'est la pratique courante en hydraulique. On introduit quelques grandeurs :

- *puissance totale dissipée* par frottement (visqueux) : $\mathcal{P}_\mu = \int_V \Phi dV$ [W] (Watt);
- *charge hydraulique* en [Pa] ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ J/m}^3$):

$$X = p + \frac{\rho}{2q} \int_S u^3 dS,$$

ou bien en [m] (usage en hydraulique)

$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2qg} \int_S u^3 dS,$$

L'équation de conservation de la charge s'écrit (alors avec ces notations) sous la forme abrégée :

$$H_1 = H_2 + \frac{1}{\rho g} \frac{\mathcal{P}_\mu}{q}.$$

La quantité

$$\Delta H = \frac{1}{\rho g} \frac{\mathcal{P}_\mu}{q}$$

s'appelle la *perte de charge*. Elle est exprimée ici en [m] ou parfois en [mCE] « mètres de colonne d'eau ». Pour retrouver l'énergie totale dissipée, il suffit de calculer : $\mathcal{P}_\mu = \rho g \Delta H q$. On introduit aussi la *perte de charge unitaire* [m/ml], c'est-à-dire la variation de perte de charge par longueur de canalisation L . On écrit ainsi :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\Delta H}{L} = \frac{p_1 - p_2}{L} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7.3)$$

Pertes de charge et coefficient de frottement

Il faut maintenant relier la pression aux frottements aux parois. Si le régime est établi, on montre simplement à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement⁴ :

$$\rho \int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} dS = - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_A \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS,$$

que l'on a :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_2 - p_1}{L} = \frac{1}{V} \int_A \tau_p dS = \frac{A}{V} \bar{\tau}_p = \frac{1}{\mathcal{L}} \bar{\tau}_p, \quad (7.4)$$

avec $V = S \times L$ le volume de fluide compris entre les sections S_1 et S_2 (entrée et sortie de la conduite); A est la surface du tube C entre les sections S_1 et S_2 . $\bar{\tau}_p$ est la valeur moyenne de la pression sur cette surface. La longueur \mathcal{L} vérifie

$$\mathcal{L} = \frac{V}{A} = \frac{\text{section} \times L}{\text{périmètre} \times L} = \frac{D_h}{4}$$

4. C'est la formulation intégrale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.23), où l'on suppose que le régime est permanent, donc $\partial_t \mathbf{u} = 0$. Le théorème de Green-Ostrogradski permet d'écrire $\int_V \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \rho \int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} dS$.

et sera le plus souvent introduite sous la forme d'un diamètre hydraulique D_h . Il s'agit de la dimension caractéristique de la canalisation. Pour :

- une conduite circulaire :

$$D_h = 2R,$$

- une conduite rectangulaire :

$$D_h = 4 \frac{\ell b}{2\ell + 2b} = 2 \frac{\ell b}{\ell + b}.$$

À noter quand $b \ll \ell$, $D_h \approx 2b$.

Attention le nombre de Reynolds de l'écoulement (à ne pas confondre avec un nombre de Reynolds local) est défini avec le diamètre hydraulique :



$$\text{Re} = \frac{\bar{u} D_h}{\nu},$$

avec \bar{u} la vitesse débitante.

Enfin, il reste à relier la contrainte à la paroi à une vitesse ; par convention et usage, c'est la vitesse débitante \bar{u} qui sert de vitesse caractéristique. Pour cela on introduit un coefficient de frottement C_f - dit *coefficient de Fanning* - sous la forme :

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2} C_f \rho \bar{u}^2.$$

♣ **Exemple.** - Par exemple en combinant l'équation du débit pour une conduite rectangulaire

$$q = -\frac{2}{3} \frac{\ell b^3}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right),$$

avec la relation donnant la contrainte pariétale :

$$\tau = -b \frac{\partial p}{\partial x},$$

on tire : $\tau_p = 3\mu\bar{u}/b$, soit :

$$C_f = \frac{24}{\text{Re}}.$$

Pour une conduite circulaire, on a :

$$C_f = \frac{16}{\text{Re}}.$$

□

Calcul en pratique des pertes en ligne en régime laminaire

Un problème courant est : connaissant les caractéristiques de la canalisation et le débit, quelle est la perte de charge en ligne (ou unitaire) ?

Dans le cas général, pour une canalisation de longueur L , on obtient en combinant les équations (7.3)-(7.4) :

$$-\frac{dH}{dx} = -\frac{\Delta H}{L} = \frac{\tau_p}{\rho g \mathcal{L}} = \frac{4C_f \bar{u}^2}{D_h 2g} \quad [\text{m/m}],$$

$$\Delta H = f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{u}^2}{2g} \quad [\text{m}], \quad (7.5)$$

avec $f = 4C_f$ le *coefficient de perte de charge en ligne*⁵ (coefficient de Darcy–Weisbach). Ainsi on pose pour une conduite circulaire :

$$f = \frac{64}{\text{Re}},$$

qui donne la droite à gauche dans le diagramme de Moody (voir figure 7.5). Notez que dH/dx est homogène à une pente et pour cette raison, est parfois *pente d'énergie*.

Notons qu'en général, on considère que la rugosité de la conduite ne joue pas de rôle pour les écoulements laminaires : **en régime laminaire, la perte de charge est indépendante de la rugosité**. Cela n'est toutefois vrai que pour des conduites industrielles classiques où les aspérités sont aléatoirement réparties et de petite taille. Il est possible pour certaines conduites spécialement usinées d'obtenir une diminution des pertes de charge en régime laminaire. On parle d'*effet de peau de requin* (shark skin effect) de façon générale pour décrire ce type de phénomène que le régime soit turbulent ou laminaire ; les mécanismes sont néanmoins différents car dans le cas laminaire, la réduction de perte de charge est obtenue en créant des zones de recirculation entre les aspérités de telle sorte que le fluide a tendance à glisser le long des parois. En régime laminaire, cette diminution de frottement obtenue par usinage des parois est relativement faible (de l'ordre de 1 %), alors qu'en régime turbulent, des diminutions de plus de 10 % peuvent être réalisées par usinage (ou par l'ajout de polymères).

7.4.2 Bilan d'énergie en régime turbulent

Perte de charge en régime turbulent

On peut établir une équation de Bernoulli valable pour le régime turbulent ; la principale différence avec le régime laminaire est que l'équation n'est valable que pour les valeurs moyennes de vitesse et que la fonction de dissipation Φ est nettement plus complexe car il faut tenir compte des fluctuations de vitesse comme mécanisme supplémentaire de dissipation d'énergie.

En multipliant par la vitesse moyenne $\langle \mathbf{u} \rangle$ l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \right) = -\nabla \langle p_* \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{T} \rangle - \rho \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle,$$

avec p_* la pression généralisée, on tire l'équation généralisée de Bernoulli. En régime permanent, cette équation s'écrit :

$$\int_S \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{n} \left(\frac{\rho |\langle \mathbf{u} \rangle|^2}{2} + \langle p_* \rangle \right) dS = \int_S \langle \mathbf{u} \rangle \cdot ([2\mu \langle \mathbf{D} \rangle - \rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle] \cdot \mathbf{n}) dS - \int_V \Phi dV,$$

5. On trouve aussi la notation $\Lambda = 4C_f = f$ dans certains ouvrages.

avec $\Phi = [2\mu\langle\mathbf{D}\rangle - \rho\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle] : \langle\mathbf{D}\rangle$ la fonction de dissipation interne. Il y a peu de différences, du point de vue de la structure de l'équation, avec l'équation de Bernoulli pour le cas laminaire. Comme précédemment, on utilise les mêmes hypothèses et on introduit :

– la charge hydraulique :

$$H = \frac{1}{\rho g} \int_S \langle\mathbf{u}\rangle \cdot \mathbf{n} \left(\frac{\rho|\langle\mathbf{u}\rangle|^2}{2} + \langle p_* \rangle \right) dS = \frac{1}{\rho g} \int_S \bar{u} \left(\frac{\rho|\langle\bar{u}\rangle|^2}{2} + \langle p_* \rangle \right) dS$$

– la puissance dissipée :

$$\mathcal{P}_\mu = \int_S \langle\mathbf{u}\rangle \cdot ([2\mu\langle\mathbf{D}\rangle - \rho\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle] \cdot \mathbf{n}) dS - \int_V \Phi dV.$$

L'équation de Bernoulli s'écrit alors sous la forme simple :

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \frac{1}{\rho g} \mathcal{P}_\mu \propto q^n,$$

avec $n \approx 1,75$ pour une conduite lisse et $n = 2$ pour une conduite rugueuse (corrélation expérimentale). La relation de conservation de la quantité de mouvement donne :

$$-\frac{dH}{dx} = -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial \langle p_* \rangle}{\partial x} = \text{cte} = \frac{1}{\rho g} \frac{d\mathcal{P}_\mu}{dx}.$$

Comme pour le cas laminaire, on introduit une contrainte pariétale sous la forme :

$$\bar{\tau}_p = -\mathcal{L} \frac{\partial \langle p_* \rangle}{\partial x} = -\rho g \mathcal{L} \frac{dH}{dx},$$

avec $\mathcal{L} = D_h/R$ la longueur caractéristique de la conduite (introduite pour le cas laminaire). La relation entre perte de charge et coefficient de frottement s'écrit comme pour le cas laminaire [voir équation (7.5)] :

$$\Delta H = 4C_f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{u}^2}{2g} = f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

avec \bar{u} la vitesse débitante et

$$4C_f = f,$$

le coefficient de frottement. Notons qu'en régime turbulent, on préfère relier le débit à la vitesse de frottement u_* (plutôt qu'au gradient de vitesse comme en laminaire). Notons qu'on a :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho \bar{u}^2} = \left(\frac{u_*}{\bar{u}} \right)^2,$$

ou souvent (par usage)

$$\frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = \frac{1}{\sqrt{f/8}} = \frac{\bar{u}}{u_*}.$$

Calcul pratique de f en régime turbulent

Expérimentalement, on observe que pour les écoulements turbulents, f dépend

– uniquement du nombre de Reynolds Re si la conduite est *lisse* (ou hydrauliquement lisse);



- uniquement de la rugosité relative k_s/R ou k_s/b si la conduite est *rugueuse* (ou hydrauliquement rugueuse);
- à la fois de Re et k_s dans le régime de transition lisse/rugueux.

La séparation entre régime lisse et rugueux se fait à l'aide du nombre sans dimension $k_s^+ = k_s u_* / \nu$ (voir § 7.3.1). Pour les conduites circulaires industrielles, on introduit souvent la distinction suivante :

- si $k_s^+ < 5$, le régime est *lisse*;
- si $k_s^+ > 70$, il est (pleinement) *rugueux*. La viscosité n'est alors plus importante, ce qui explique que f devienne indépendant du nombre de Reynolds;
- lorsque $5 \leq k_s^+ \leq 70$ on parle de *régime rugueux transitionnel*.

Il existe trois stratégies classiques pour calculer f :

- on utilise une formule de type Nikuradse en supposant que le régime est turbulent lisse ou turbulent rugueux, puis on vérifie l'hypothèse de départ;
- on utilise une formule de type Colebrook, qui est valable pour une large gamme d'écoulements (lisses et rugueux);
- on se sert de l'abaque de Moody.

Méthode 1 : formulation à la Nikuradse

Le tableau 7.1 récapitule les formules de Nikuradse⁶. Ce sont des équations implicites en C_f ou f , qui dépendent du régime turbulent (lisse ou rugueux) et de la géométrie de la conduite. Ces formules ne sont pas démontrées ici, mais peuvent être obtenues à partir des équations vues précédemment.

Tableau 7.1 – Coefficient de frottement selon le régime turbulent et la géométrie de la conduite.

	<i>rectangulaire</i>	<i>circulaire</i>
lisse	$\frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \ln \left(\text{Re} \sqrt{C_f/2} \right) - 0,25$	$\frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \ln \left(\text{Re} \sqrt{C_f/2} \right) + 0,31$
rugueux	$\frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \ln \frac{b}{k_s} + 6,04$	$\frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \ln \frac{R}{k_s} + 4,87$

En pratique :

- on fait l'hypothèse que l'écoulement est hydrauliquement lisse ou rugueux;
- on calcule f en fonction du type de régime (lisse ou rugueux) et des données du problème (nombre de Reynolds, caractéristiques géométriques de la conduite, rugosité);
- on calcule la vitesse de frottement $u_* = \bar{u} \sqrt{f/8}$, puis le nombre de Reynolds associé à la rugosité $k_s^+ = u_* k_s / \nu$, et enfin on vérifie la pertinence de l'hypothèse initiale.

6. Johann Nikuradse (1894–1979) était un mécanicien des fluides allemand. Il était originaire de Géorgie (Russie), mais fit son doctorat en Allemagne sous la direction de Prandtl au Kaiser-Wilhelm Institut à Göttingen. On lui doit principalement les formules qui portent son nom et qui décrivent les écoulements turbulents rugueux/lisses dans une conduite. Il introduit aussi la notion de rugosité effective k_s . À cause de ses acquantances avec le régime nazi, sa réputation a été fortement ternie après la seconde guerre mondiale.

Notons que les formules telles que celles de Nikuradse ne sont valables que pour les régimes asymptotiques : turbulence lisse $k_s^+ < 3 - 5$ et turbulence rugueuse $k_s^+ > 70$.

Notons qu'aujourd'hui, il existe des formules plus précises que les formules établies par Nikuradse. Ainsi, la *formule de McKeon* (2005) permet de calculer le coefficient de frottement avec une précision inférieure à 1,25 %

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,83 \ln(\text{Re} \sqrt{f}) - 0,537,$$

qui valable pour $31 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 35 \times 10^6$.

Méthode 2 : formulation à la Colebrook

Pour les conduites circulaires, on peut utiliser la *formule de Colebrook*⁷ (1939) valable quelle que soit la rugosité (pour $Re > 2300$):

$$\frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = -2,56 \ln \left(0,27 \frac{k_s}{2R} + \frac{0,887}{Re \sqrt{C_f/2}} \right),$$

ou encore

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,91 \ln \left(0,27 \frac{k_s}{2R} + \frac{2,51}{\sqrt{f} Re} \right).}$$

Cette formule a l'avantage de donner un résultat relativement précis sans se soucier de la nature du régime turbulent (lisse/rugueux), mais la précision peut être faible pour le régime transitionnel $5 < k_s^+ < 70$.

Méthode 3 : abaque de Moody–Stanton

On peut également utiliser les données expérimentales synthétisées dans le diagramme de Moody-Stanton (1944) valable pour les conduites industrielles.

7. Cyril Colebrook (1910–1997) était un ingénieur hydraulicien anglais. Il fit toute sa carrière dans le cabinet Binnie and Partners à Londres. Son nom est associé à la formule de Colebrook ou Colebrook-White pour calculer le coefficient de frottement pour un écoulement turbulent dans une conduite rugueuse.

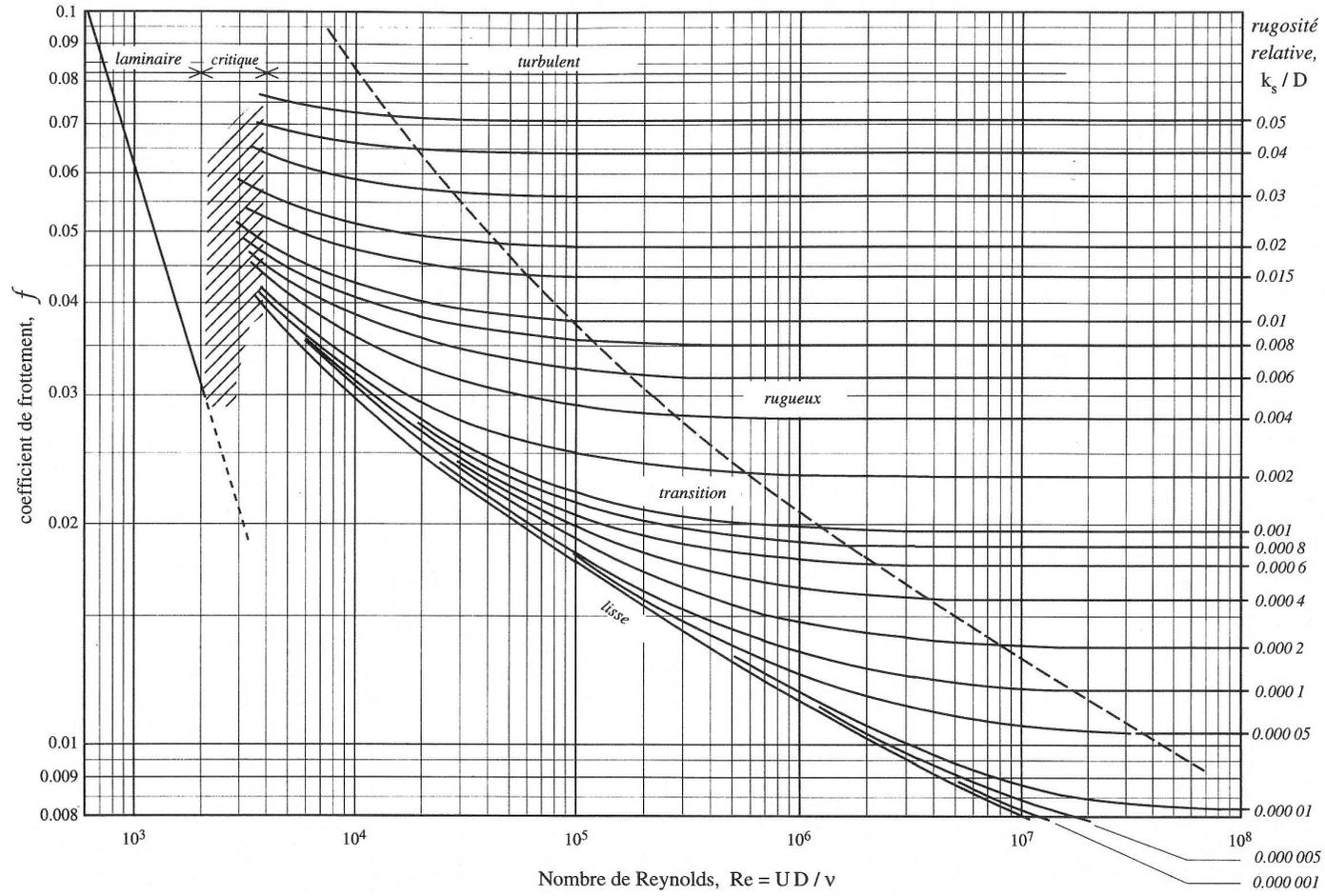


Figure 7.5 – Diagramme de Moody–Stanton.

7.5 Pertes de charge singulières

7.5.1 Problématique

Les pertes de charge singulières traduisent les pertes d'énergie au niveau d'un changement rapide dans une conduite (changement de section, arrivée dans un réservoir, etc.). Une singularité induit à la fois une dissipation locale d'énergie, mais également une modification de l'écoulement à l'amont et à l'aval de la singularité (modification des lignes de courant). Les résultats suivants ne sont pertinents que pour des singularités suivies et/ou précédées de canalisations suffisamment longues (40–50 diamètres de conduite) ou bien d'un réservoir de grandes dimensions.

Les pertes de charge singulières sont introduites sous la forme :

$$\Delta H_s = \zeta \frac{\bar{u}^2}{2g} \text{ [m]},$$

avec ζ le coefficient de perte de charge singulière. Le problème est de savoir dans quelle section il faut prendre la vitesse débitante. On se souviendra qu'une perte de charge est une perte d'énergie.

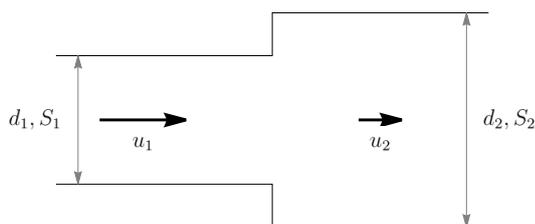


Figure 7.6 – Exemple de perte de charge singulière : élargissement brutal.

7.5.2 Principales formules de perte de charge singulière

On ne donne ici que les formules pour des conduites cylindriques. Toutes ces formules sont empiriques et à considérer avec prudence car, selon les formules et les auteurs, des variations significatives sont possibles. On prendra garde également que la formule de pertes de charge peut s'exprimer en fonction de la vitesse à l'aval ou à l'amont selon la géométrie considérée.

- *Élargissement brutal* d'une section S_1 (section amont) à une section S_2 (à l'aval) :

$$\Delta H_s = \zeta \frac{\bar{u}_1^2}{2g} \text{ [m]},$$

avec :

- si l'écoulement est laminaire

$$\zeta = 2 - \frac{8 S_1}{3 S_2} + \frac{2 S_1^2}{3 S_2^2},$$

- pour un écoulement turbulent (profil de vitesse uniforme), on suivra la formule de Borda-Carnot :

$$\zeta = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2. \quad (7.6)$$

- *Entrée dans un réservoir*. Le coefficient de perte de charge se déduit en prenant $S_2 \rightarrow \infty$:

$$\zeta = 1. \quad (7.7)$$

- *Rétrécissement brutal* (contraction) d'une section S_1 (section amont, diamètre d_1) à une section S_2 (à l'aval, diamètre d_2) (Padet, 1991) :

$$\Delta H_s = \zeta \frac{\bar{u}_2^2}{2g} \text{ [m]},$$

avec

$$\zeta = \left(1 - \frac{1}{0,59 + 0,41(S_2/S_1)^3}\right)^2 \quad (7.8)$$

pour un écoulement turbulent. Des auteurs ont toutefois reporté des valeurs $\zeta > 0,5$ quand $\beta = d_2/d_1 \rightarrow 0$, et en théorie selon Kirchoff, le coefficient $\zeta = \pi/(\pi + 2) = 0,611$ quand $\beta \rightarrow 0$. La formule de Benedict *et al.* (1966) est censée être plus précise pour les petites valeurs de rapport β (voir aussi la comparaison des deux équations à la figure 7.7) (Rennels & Hudson, 2012) :

$$\zeta = 0,0696(1 - \beta^5)\lambda^2 + (\lambda - 1)^2 \quad (7.9)$$

avec $\lambda = 1 + 0,622(1 - 0,215\beta^2 - 0,785\beta^5)$.

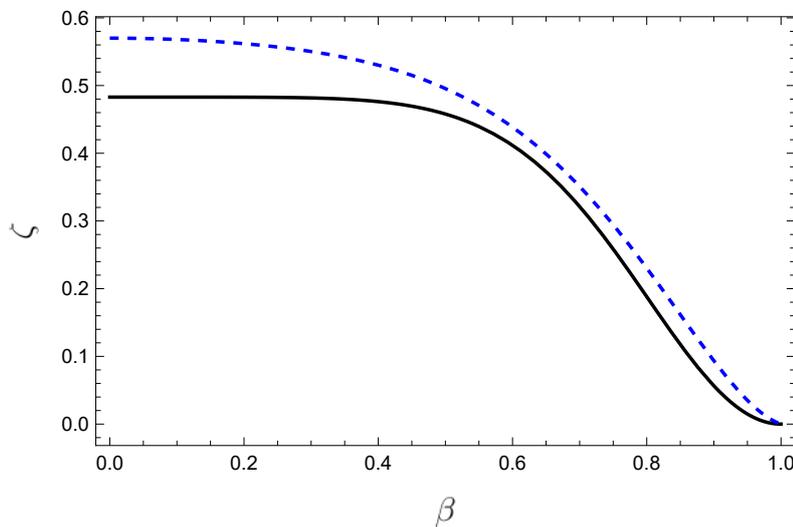


Figure 7.7 – Coefficient de perte de charge pour une contraction selon l'équation (7.8) (trait continu) ou l'équation (7.9) de Benedict *et al.* (1966) (trait discontinu).

- *Entrée dans une canalisation* (contraction) : c'est un cas particulier de contraction où l'on considère que l'eau entre dans une canalisation depuis un réservoir (où l'eau est immobile). On pourra prendre

$$\zeta = 0,5 \quad (7.10)$$

pour des bords droits et un réservoir de grande taille par rapport à la conduite. C'est la *formule de Borda*⁸ pour une canalisation à bord vif. Toutefois, de nos jours, pour rester consistant avec les contractions classiques, on préfère opter pour l'équation (7.9), qui donne $\zeta = 0,57$ pour un réservoir infini.

- *Changement de direction*: au niveau du coude (changement de direction θ exprimé en degrés, avec un rayon de courbure R_c), il y a une perte de charge donnée par la *formule de Weisbach*⁹

$$\zeta = \frac{\theta}{180} \left(0,13 + 1,85 \left(\frac{R}{R_c} \right)^{7/2} \right),$$

avec R le rayon de la conduite. Pour un coude sans rayon de courbure, on peut employer la variante suivante :

$$\zeta = \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin^4 \frac{\theta}{2}.$$

Pour un coude à angle vif ($R_c \rightarrow 0$) d'angle 90° , on peut prendre $\zeta = 1,3$.

8. Jean-Charles de Borda (1733–1799) aurait pu être un héros de roman. Tour à tour, magistrat, officier dans l'armée française, puis la marine royale, il devint directeur de l'École Navale. Il s'intéressa à divers problèmes de mécanique des fluides ayant trait aux applications militaires : résistance de l'air sur un projectile, résistance de l'eau sur une coque, écoulement à travers des orifices, la roue à aube, etc.

9. Julius Weisbach (1806–1871) était un professeur allemand de mathématiques appliquées et de mécanique à l'université de Freiberg. Il a également mené un grand nombre d'expériences pour déterminer les pertes de charge singulières pour diverses configurations. Son nom est également associé à la formule de Darcy–Weisbach pour les pertes de charge régulières.

7.6 Pompage

7.6.1 Propriétés d'une pompe

Les pompes sont des organes mécaniques permettant d'injecter de l'énergie (sous la forme de pression) à un écoulement en charge. Il existe d'autres appareils avec une fonction similaire (extracteur, ventilateur, accélérateur), mais le plus souvent avec des surpressions faibles (moins de 0,1 bar). La plupart des pompes sont constituées d'un arbre tournant à la vitesse nominative ω , et elles ne sont conçues que pour tourner à cette vitesse ou pour une plage de vitesses fixée. Il existe plusieurs fonctions caractérisant le fonctionnement d'une pompe :

- la *courbe caractéristique* est la relation entre la charge H fournie par la pompe (exprimée ici en m, souvent en Pa en génie industriel) et le débit Q . Cette courbe est une fonction décroissante de Q à cause de la dissipation d'énergie dans la pompe (voir figure 7.8). La charge à débit nul s'appelle la *hauteur de fermeture* : elle correspond à la hauteur d'eau que la pompe est capable de supporter à débit nul. Au-delà d'un certain débit Q_{max} , toute l'énergie de la pompe est dissipée sous forme de chaleur et la pompe ne fournit plus de pression. En pratique, les pompes fonctionnent de façon optimale tant que $Q \leq 0,7Q_{max}$;
- la *courbe de puissance utile* est la relation entre la puissance fournie au fluide $P_u = \rho g Q H$ et le débit ;
- la *courbe de rendement* (global) η fait appel au rapport entre la puissance utile P_u et la puissance électrique ou thermique fournie à la pompe. On définit aussi un rendement hydraulique η_b comme le rapport entre la charge $H(Q)$ fournie par la pompe et celle qu'elle fournirait en l'absence de dissipation interne.

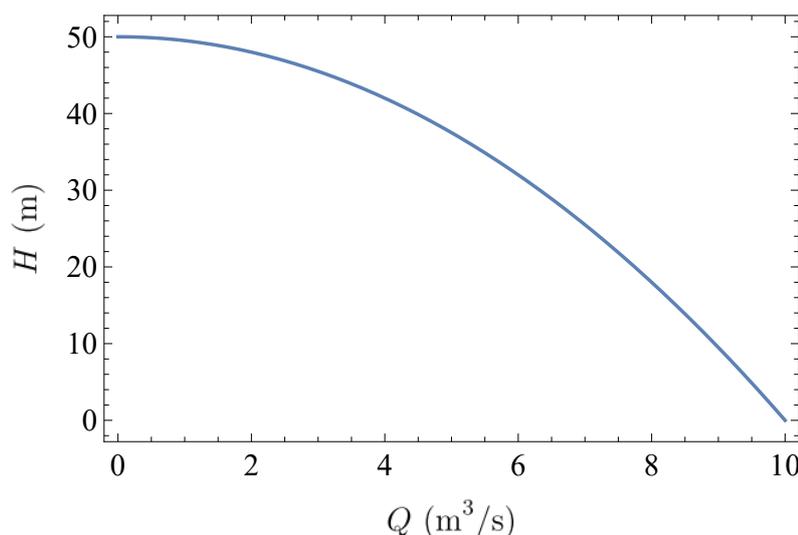


Figure 7.8 – Courbe caractéristique d'une pompe.

7.6.2 Calcul du point de fonctionnement d'une pompe

Considérons une pompe montée sur une canalisation (avec éventuellement plusieurs dispositifs montés en série). Cette canalisation va être caractérisée par des pertes de charge régulières H_r et singulières H_s qui sont des fonctions du débit transitant dans cette conduite. Les pertes de charge singulières inclut notamment les dissipations internes dans la pompe ($\zeta \sim 0,3$). Si la canalisation comporte I tronçons de longueur L_i et diamètre D_i ainsi que J pertes de charge singulières, alors on a :

$$H_{r,i} = f \frac{L_i}{D_i} \frac{\bar{u}_i^2}{2g} \text{ et } H_{s,j} = \zeta_j \frac{\bar{u}_j^2}{2g}, \quad (7.11)$$

(avec $\bar{u}_i = 4Q/(\pi D^2)$) et la perte de charge totale est

$$\Delta H = \sum_{i=1}^I H_{r,i} + \sum_{j=1}^J H_{s,j}. \quad (7.12)$$

Le point d'intersection de la courbe $H(Q)$ avec la courbe de perte de charge $\Delta H(Q)$

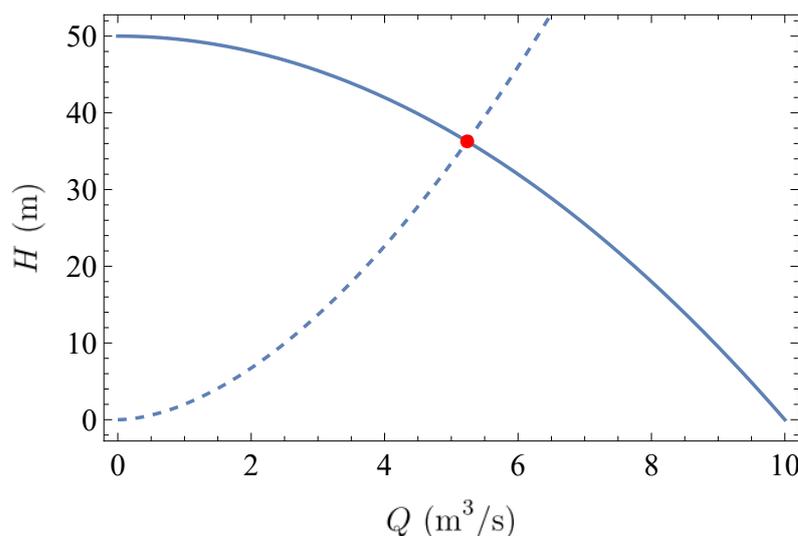


Figure 7.9 – Point de fonctionnement d'une pompe. C'est le point d'intersection de la courbe caractéristique $H(Q)$ (courbe continue) et de la perte de charge ΔH (courbe discontinue).

7.7 Application

7.7.1 Vidange d'un réservoir

On considère une conduite de vidange d'un réservoir de hauteur (d'eau) h_0 . La conduite est lisse et de diamètre D . Sa longueur totale est L . La chute de dénivellation est notée h_1 . On cherche à calculer le débit à la sortie de la conduite.

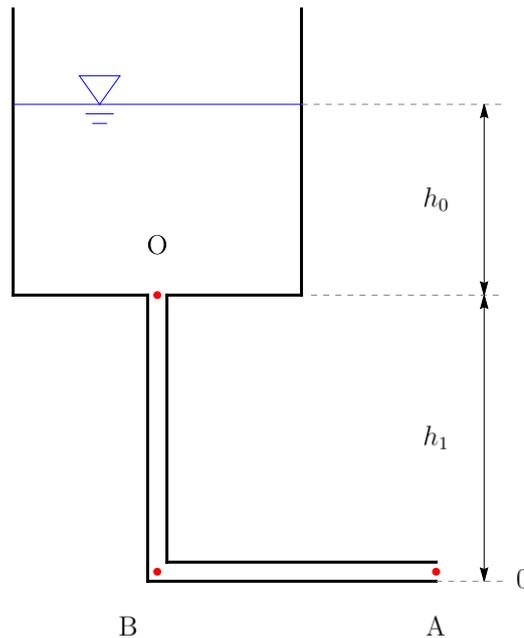


Figure 7.10 – Écoulement en charge dans un conduit de vidange d'une retenue.

Pour cela on applique le théorème de Bernoulli entre la surface libre et la sortie de la conduite au point B :

$$H_0 = H_B + \Delta H,$$

où la perte de charge ΔH comprend à la fois :

- les pertes de charge réparties

$$\Delta H_r = \frac{\bar{u}^2}{2g} \frac{f}{D} L,$$

- les pertes de charge singulières dues à l'entrée dans la canalisation en O et le coude en A :

$$\Delta H_s = (\zeta_A + \zeta_O) \frac{\bar{u}^2}{2g}.$$

En détaillant, on a à la surface libre (point O) :

$$H_O = z_O + \frac{\bar{u}^2}{2g} + \frac{p_O}{\rho g} = h_1 + h_0,$$

tandis qu'à la sortie (point B) on a :

$$H_B = z_B + \frac{\bar{u}^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} = \frac{\bar{u}^2}{2g}.$$

On en déduit que la vitesse moyenne est solution de l'équation :

$$h_1 + h_0 = \frac{\bar{u}^2}{2g} + \frac{\bar{u}^2}{2g} \left(\frac{f}{D}L + \zeta_A + \zeta_O \right).$$

On déduit facilement que :

$$\bar{u} = \left(\frac{2g(h_0 + h_1)}{1 + \frac{f}{D}L + \zeta_A + \zeta_O} \right)^{1/2}.$$

Le débit est simplement $Q = S\bar{u}$, avec $S = \pi D^2/4$. Si les coefficients de perte de charge sont des constantes, cette équation se calcule très simplement. Si le coefficient de frottement f est fonction du nombre de Reynolds, il faut résoudre une équation non linéaire ou bien procéder par tâtonnement.

Application numérique

On prend $D = 1$ m, $L = 1000$ m, $k_s/D = 10^{-5}$, $h_0 = 10$ m, et $h_1 = 10$ m. On emploie la formule de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,91 \ln \left(0,27 \frac{k_s}{2R} + \frac{2,51}{\sqrt{f}Re} \right).$$

On a vu par ailleurs : $\zeta_O = 0,5$ et $\zeta_A = 1,3$. En programmant avec Mathematica, on trouve que la vitesse vaut 5,85 m/s, soit un débit de 4,6 m³/s.

```

d = 1;
L = 1000;
v = 10 ^ (-6);
ks = d / 10 ^ 5;
g = 9.81;
h0 = h1 = 10; vit = Sqrt[(h0 + h1) * 2 * g]
FindRoot[
  {u == ((2g (h0 + h1)) / (1 + (f / d) L + 0.5 + 1.3)) ^ (1 / 2),
   1 / Sqrt[f] == -0.91 Log[0.27 (ks / d) + 2.51 / (Sqrt[f] * Rey)], Rey == u (d / v)},
  {{u, vit}, {f, 0.01}, {Rey, vit (d / v)}}]
Out[12]= 19.8091
Out[13]= {u -> 5.85811, f -> 0.0086344, Rey -> 5.85811 * 10^6}

```

Figure 7.11 – Exemple de résolution de calcul de f et de \bar{u} avec un logiciel de calcul.

7.7.2 Remplissage d'un réservoir

Supposons maintenant que l'on veuille pomper de l'eau dans le réservoir. En B, on place une pompe qui aspire l'eau et la remonte dans le réservoir. Quelle est la puissance fournie par la pompe et quel est le débit si sa courbe caractéristique est $H_p = 70 - Q^2/2$?

Si on néglige la perte de charge singulière de la pompe, alors la perte de charge de la conduite que doit compenser la pompe est

$$\Delta H(Q) = \left(\frac{f}{D}L + \zeta_A + \zeta_O \right) \frac{4Q^2}{2g\pi D^2}.$$

Dans le cas présent, elle est la même que l'écoulement aille de O vers A (turbinage) ou de A vers O (pompage). Cela n'est pas toujours le cas car certaines singularités se comportent différemment selon le sens de l'écoulement.

Le théorème de Bernoulli entre les points A et O donne :

$$H_O + \Delta H(Q) = H_A + H_p.$$

La perte de charge se place maintenant dans le membre de gauche de l'équation de Bernoulli car l'écoulement se fait de A vers O. Détaillons les charges en O et A pour l'exemple traité ici :

- en O: $H_O = h_0 + h_1 + \bar{u}^2/(2g)$ (altitude h_1 , pression h_0 , vitesse dans la conduite $\bar{u} = 4Q/(\pi D^2)$);
- en A: $H_A = \bar{u}^2/(2g)$ (altitude 0, pression 0, vitesse dans la conduite \bar{u}).

La seule difficulté ici est que le coefficient de frottement f est une fonction implicite de Q . Le point de fonctionnement est obtenu en recherchant le point d'intersection :

$$H_p(Q) = \Delta H(Q) + h_0 + h_1.$$

On trouve: $Q_{fonc} = 6,6 \text{ m}^3/\text{s}$ et $H_p(Q_{fonc}) = 28,4 \text{ m}$. La puissance fournie par la pompe est $P_u = \rho Q_{fonc} g H_p(Q_{fonc}) = 1,83 \text{ MW}$.

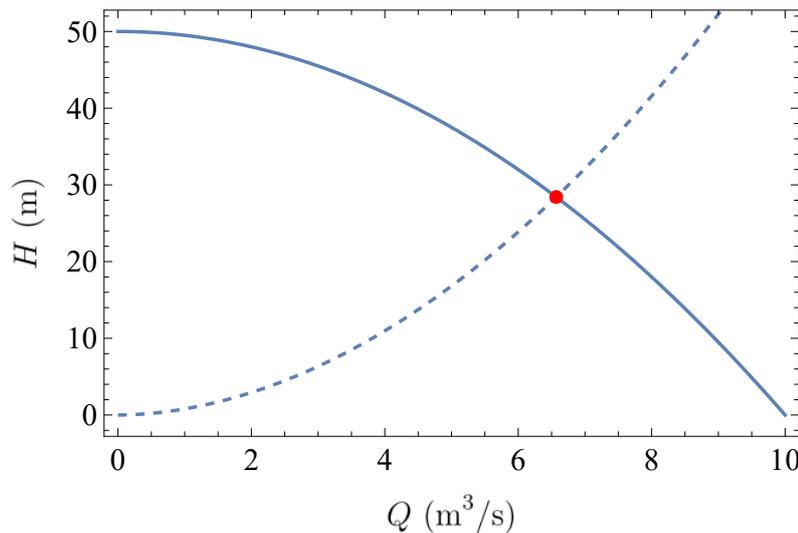


Figure 7.12 – Point de fonctionnement de la pompe. La différence d'altitude $\Delta h = h_1 + h_0$ entre O et A a été retirée à la courbe caractéristique de la pompe.



Références bibliographiques

Bibliographie

- ALI, S. Z. & DEY, S. 2021 Linear stability of dunes and antidunes. *Phys. Fluids* **33** (9), 094109.
- ANDREOTTI, B., CLAUDIN, P., DEVAUCHELLE, O., DURÁN, O. & FOURRIÈRE, A. 2012 Bedforms in a turbulent stream: ripples, chevrons and antidunes. *J. Fluid Mech.* **690**, 94–128.
- BARENBLATT, G. I. 1996 *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- BARNES, H. A. 2000 *A Handbook of Elementary Rheology*. Aberystwyth: University of Wales.
- BENEDICT, R. P., CARLUCCI, N. A. & SWETZ, S. D. 1966 Flow losses in abrupt enlargements and contractions. *J. Eng. Power* **88**, 73–81.
- BENJAMIN, T. B. 1968 Gravity currents and related phenomena. *J. Fluid Mech.* **31**, 209–248.
- BERNARD, C. J. M. 1927 *Cours de restauration des montagnes*. Nancy: École Nationale des Eaux et Forêts.
- BOHORQUEZ, P., CAÑADA PEREIRA, P., JIMENEZ-RUIZ, P. J. & DEL MORAL-ERENCIA, J. D. 2019 The fascination of a shallow-water theory for the formation of megaflood-scale dunes and antidunes. *Earth-Sci. Rev.* **193**, 91–108.
- BORDES, J.-L. 2005 *Les barrages-réservoirs: Du milieu du XVIIIe siècle au début du XXe siècle en France*. Paris: Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
- BRAUDEL, F. 1979 *Civilisation matérielle, économie et capitalisme*, vol. Tome 1: les structures du quotidien. Paris: Armand Colin.
- BRUN, J.-P. & LEGUILLOUX, M. 2014 Une tannerie et son moulin hydraulique? In *Les installations artisanales romaines de Saepinum. Tannerie et moulin hydraulique* (ed. J.-P. Brun & M. Leguilloux), pp. 147–170. Naples: Publications du Centre Jean Bérard.
- BUCKINGHAM, E. 1914 On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review* **4**, 345.
- CHARLE, C. & VERGER, J. 2007 *Histoire des universités*. Presses Universitaires de France.
- CHARRU, F., ANDREOTTI, B. & CLAUDIN, P. 2013 Sand ripples and dunes. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **45**, 469–493.

- CHOW, V. T., ed. 1959 *Open-Channel Hydraulics*. New York: Mc Graw Hill.
- CUNGE, J. A. & HAGER, W. H. 2015 Alexandre Preissmann: his scheme and his career. *Journal of Hydraulic research* **53** (4), 413–422.
- DOOGE, J. C. I. 1992 The Manning formula in context. In *Channel flow resistance: centennial of Manning's formula* (ed. B. C. Yen), pp. 136–185. University of Virginia, Charlottesville: Water Resources Publications Littleton, CO.
- EHRBAR, D., SCHMOCKER, L., VETSCH, D. F. & BOES, R. M. 2018 Hydropower potential in the periglacial environment of Switzerland under climate change. *Sustainability* **10** (8), 2794.
- FARINOTTI, D., PISTOCCHI, A. & HUSS, M. 2016 From dwindling ice to headwater lakes: could dams replace glaciers in the European Alps? *Env. Res. Lett.* **11** (5), 054022.
- FARINOTTI, D., ROUND, V., HUSS, M., COMPAGNO, L. & ZEKOLLARI, H. 2019 Large hydropower and water-storage potential in future glacier-free basins. *Nature* **575** (7782), 341–344.
- FERGUSON, R. 1986 Hydraulics and hydraulic geometry. *Prog. Phys. Geog.* **10**, 1–31.
- GAUCKLER, P. 1867 Etudes théoriques et pratiques sur l'écoulement et le mouvement des eaux. *C. R. Acad. Sci. Paris* **64**, 818–822.
- GEORGE, D. L. 2008 Augmented Riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation. *J. Comput. Phys.* **227**, 3089–3113.
- GIMPEL, J. 2002 *La révolution industrielle du Moyen Âge*. Seuil.
- GIOIA, G. & BOMBARDELLI, F. A. 2002 Scaling and similarity in rough channel flows. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 014501.
- GLEASON, C. J. 2015 Hydraulic geometry of natural rivers: A review and future directions. *Prog. Phys. Geog.* **39**, 337–360.
- GRAF, W. H. & ALTINAKAR, M. S. 1993 *Hydraulique fluviale*, vol. 2. Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes.
- GREGOR, T. & RENNER, C. 2021 Renaturation des eaux suisses. État de la mise en oeuvre des revitalisations de 2011 à 2019. *Tech. Rep.*. Office fédéral de l'environnement.
- HAEBERLI, W., BUETLER, M., HUGGEL, C., FRIEDLI, T. L., SCHAUB, Y. & SCHLEISS, A. J. 2016 New lakes in deglaciating high-mountain regions-opportunities and risks. *Clim. Change* **139** (2), 201–214.
- HAGEN, G. W. 1881 Neuere Beobachtung über die gleichförmige Bewegung des Wassers. *Zeitschrift für Bauwesen* **31**, 221–223.
- HAGER, W. H. 2001 Gauckler and the GMS formula. *J. Hydraul. Eng.* **127** (8), 635–638.
- HAGER, W. H. & BOES, R. M. 2014 Hydraulic structures: a positive outlook into the future. *J. Hydraul. Res.* **52**, 299–310.
- HAGER, W. H., BREMEN, R. & KAWAGOSHI, N. 1990 Classical hydraulic jump: length of roller. *J. Hydraul. Res.* **28** (5), 591–608.
- HAGER, W. H. & SCHLEISS, A. 2009 *Constructions hydrauliques: écoulements stationnaires, Traité de génie civil*, vol. 15. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- HANSEN, F. K. & RØDSRUD, G. 1991 Surface tension by pendant drop: I. A fast standard instrument using computer image analysis. *J. Colloid. Interface Sci.* **141**, 1–9.
- HARPER, K. 2017 *Fate of Rome: Climate, Disease, and the End of an Empire*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- HELLER, V. 2011 Scale effects in physical hydraulic engineering models. *J. Hydraul. Res.* **49**, 293–306.

- HEY, R. D. 1979 Flow resistance in gravel-bed rivers. *J. Hydraul. Div. ASCE* **105**, 365–379.
- JÄGGI, M. 1984 Abflußberechnung in kiesführenden Flüssen. *Wasserwirtschaft* **74** (5), 263–267.
- JULIEN, P. Y. 1994 *Erosion and Sedimentation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- JULIEN, P. Y. 2002 *River Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- KALESS, G., MAO, L. & LENZI, M. A. 2014 Regime theories in gravel-bed rivers: models, controlling variables, and applications in disturbed Italian rivers. *Hydrolog. Process.* **28** (4), 2348–2360.
- KAMPHUIS, J. W. 1974 Determination of sand roughness for fixed beds. *J. Hydraul. Res.* **12**, 193–203.
- KENNEDY, J. F. 1969 The formation of sediment ripples, dunes, and antidunes. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **1**, 147–168.
- KEULEGAN, G. H. 1938 Laws of turbulent flows in open channels. *J. Res. Natl Bur. Stand.* **21**, 707–741.
- KING, J. G. 2004 Sediment transport data and related information for selected coarse-bed streams and rivers in Idaho. *Tech. Rep.* RMRS-GTR-131. US Department of Agriculture, Forest Service, Rocky Mountain Research Station.
- KURTH, A.-M. & SCHIRMER, M. 2014 Thirty years of river restoration in Switzerland: implemented measures and lessons learned. *Environmental Earth Sciences* **72** (6), 2065–2079.
- LACEY, G. 1930 Stable Channels in Alluvium. *Min. Proc. I. Civil. Eng.* **229**, 259–292.
- LANE, E. W. 1955 The importance of fluvial morphology in river hydraulic engineering. *Am. Soc. Civil Eng. Proc.* **81**, 1–17.
- LEOPOLD, L. B. & MADDOCK, T. 1953 The Hydraulic Geometry of Stream Channels and Some Physiographic Implications. *Tech. Rep.* US Geological Survey.
- LI, C., CZAPIGA, M. J., EKE, E. C., VIPARELLI, E. & PARKER, G. 2015 Variable Shields number model for river bankfull geometry: bankfull shear velocity is viscosity-dependent but grain size-independent. *J. Hydraul. Res.* **53**, 36–48.
- MACAGNO, E. O. 1971 Historico-critical review of dimensional analysis. *Journal of the Franklin Institute* **292** (6), 391–402.
- MACKIN, J. H. 1948 Concept of the graded river. *Geol. Soc. Amer. Bull.* **59** (5), 463–512.
- MALVERTI, L., LAJEUNESSE, E. & MÉTIVIER, F. 2008 Small is beautiful: Upscaling from microscale laminar to natural turbulent rivers. *J. Geophys. Res.* **113**, F04004.
- DEL MAR CASTRO GARCÍA, M. 2018 *La gestión del agua en época romana. Percepción postclásica y construcción historiográfica*. Cádiz: Editorial Didáctica Tecnológica S.L.
- MARUSIC, I. & BROOMHALL, S. 2021 Leonardo da Vinci and fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics* **53**, 1–25.
- MAYS, L. W., ed. 2010 *Ancient Water Technologies*. Dordrecht: Springer.
- MÉTIVIER, F., LAJEUNESSE, E. & DEVAUCHELLE, O. 2017 Laboratory rivers: Lacey's law, threshold theory, and channel stability. *Earth Surf. Dyn.* **5**, 187–198.
- MEYER-PETER, E. & MÜLLER, R. 1948 Formulas for bed load transport. In *2nd meeting* (ed. IAHR), pp. 39–64. Stockholm, Sweden.
- MOKYR, J. 1990 *The Lever of Riches: Technological Creativity and Economic Progress*. New York: Oxford University Press.
- MULLIN, T. 2011 Experimental studies of transition to turbulence in a pipe. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43**, 1–24.
- OFEN 2019 Potentiel hydroélectrique de la Suisse. évaluation du potentiel de développement de la force hydraulique dans le cadre de la stratégie énergétique 2050. *Tech. Rep.*

- PADET, J. 1991 *Fluides en écoulement*. Paris: Masson.
- PARKER, G. 1978a Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1. The sand-silt river. *J. Fluid Mech.* **89** (1), 109–125.
- PARKER, G. 1978b Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 2. The gravel river. *Journal of Fluid mechanics* **89** (1), 127–146.
- PARKER, G., WILCOCK, P. R., PAOLA, C., DIETRICH, W. E. & PITLICK, J. 2007 Physical basis for quasi-universal relations describing bankfull hydraulic geometry of single-thread gravel bed rivers. *J. Geophys. Res. Earth Surf.* **112**, 2006JF000549.
- PARONUZZI, P., BOLLA, A., PINTO, D., LENAZ, D. & SOCCAL, M. 2021 The clays involved in the 1963 Vajont landslide: Genesis and geomechanical implications. *Eng. Geol.* **294**, 106375.
- PHILLIPS, C., MASTELLER, C. C., SLATER, L. J., DUNNE, K. B. J., FRANCALANCI, S., LANZONI, S., MERRITTS, D. J., LAJEUNESSE, E. & JEROLMACK, D. J. 2022 Threshold constraints on the size, shape and stability of alluvial rivers. *Nature Reviews Earth & Environment* **3**, 406–419.
- PHILLIPS, J. D. 2010 The job of the river. *Earth Surf. Process. Landf.* **35**, 305–313.
- POULIQUEN, O. 1999 On the shape of granular front down rough inclined planes. *Phys. Fluids* **11**, 1956–1958.
- POWELL, R. W. 1962 Another note on Manning's formula. *J. Geophys. Res.* **67** (9), 3634–3635.
- RAUDKIVI, A. J. 1990 *Loose Boundary Hydraulics*. Oxford: Pergamon Press.
- RECKING, A., BACCHI, V., NAAIM, M. & FREY, P. 2009 Antidunes on steep slopes. *J. Geophys. Res.* **114**, F04025.
- RENNELS, D. C. & HUDSON, H. M. 2012 *Pipe Flow—A Practical and Comprehensive Guide*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- RICHARDS, K. S. 1977 Channel and flow geometry: a geomorphological perspective. *Prog. Phys. Geog.* **1**, 65–102.
- ROUSE, H. & INCE, S. 1963 *History of Hydraulics*.
- SCHAEFLI, B., MANSO, P., FISCHER, M., HUSS, M. & FARINOTTI, D. 2019 The role of glacier retreat for Swiss hydropower production. *Renewable energy* **132**, 615–627.
- SCHEWE, J., GOSLING, S. N., REYER, C., ZHAO, F., CIAIS, P., ELLIOTT, J., FRANCOIS, L., HUBER, V., LOTZE, H. K. & SENEVIRATNE, S. I. 2019 State-of-the-art global models underestimate impacts from climate extremes. *Nat. Comm.* **10** (1), 1–14.
- SCHIED, H.-U. 2014 *Voitures et chars*. Berne: Dictionnaire historique de la Suisse.
- SCOTT, J. C. 2017 *Against the Grain: A Deep History of the Earliest States*. New Haven: Yale University Press.
- SEMINARA, G. 2006 Meanders. *J. Fluid Mech.* **554**, 271–297.
- SEMINARA, G. 2010 Fluvial sedimentary patterns. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **42**, 43–66.
- SIMONS, D. B. & RICHARDSON, E. V. 1966 Resistance to flow in alluvial channels. *Tech. Rep. Professional Paper 422-J*. U. S. Geological Survey.
- SINGH, A. & NOTT, P. R. 2003 Experimental measurements of the normal stresses in sheared Stokesian suspensions. *J. Fluid Mech.* **490**, 293–320.
- SMART, G. M. & JAEGGI, M. N. R. 1983 Sedimenttransport in steilen Gerinnen. *Tech. Rep. 64*. Mitteilungen 64 der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie.
- SQUATRITI, P. 1998 *Water and society in early medieval Italy AD 400-1000*. Cambridge: Cambridge University Press.
- STRICKLER, A. 1924 Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen. *Schweizerische Bauzeitung* **83-84** (23), 265–268.

- TANEDA, S. 1956 Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low Reynolds numbers. *J. Phys. Soc. Japan* **11** (3), 302–307.
- TONKA, L. 2015 Hydropower license renewal and environmental protection policies: a comparison between Switzerland and the USA. *Regional Environmental Change* **15** (3), 539–548.
- VAN DYKE, M. 1982 *Album of Fluid Motion*. Stanford: Parabolic Press.
- VAN KONINGSVELD, M., MULDER, J. P. M., STIVE, M. J. F., VAN DER VALK, L. & VAN DER WECK, A. 2008 Living with sea-level rise and climate change: a case study of the Netherlands. *Journal of Coastal Research* **24** (2), 367–379.
- VASCHY, A. 1892 Sur les lois de similitude en physique. In *Annales Télégraphiques*, , vol. 19, pp. 25–28.
- VIOLLET, P.-L. 2005 *L'hydraulique dans les civilisations anciennes: 5000 ans d'histoire*. Paris: Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
- VISCHER, D. L. 1987 Strickler formula, a Swiss contribution to hydraulics A short note on the 100th anniversary of Strickler's birth. *Wasser, Energie, Luft* **79** (7-8), 139–142.
- VISCHER, D. L. 2003 Die Geschichte des Hochwasserschutzes in der Schweiz. *Tech. Rep. Berichte des BWG. Serie Wasser BWGW Nr. 5*. Bundesamt für Umwelt BAFU.
- VITI, N., VALERO, D. & GUALTIERI, C. 2018 Numerical simulation of hydraulic jumps. Part 2: Recent results and future outlook. *Water* **11** (1), 28.
- WERLÉ, H. & GALLON, M. 1973 Sillages de cheminées, faisceaux tubulaires, grilles et turbomachines Quelques exemples de visualisations basés sur l'analogie hydraulique. *Houille Blanche* **59** (4), 339–360.
- WHITING, P. J., STAMM, J. F., MOOG, D. B. & ORNDORFF, R. L. 1999 Sediment-transporting flows in headwater streams. *Geol. Soc. Amer. Bull.* **111**, 450–466.
- WILLIAMS, G. P. 1970 Flume width and water depth effects in sediment-transport experiments. *Tech. Rep. Professional Paper 562-H*. USGS.
- WILLIAMS, G. P. 1978 Bank-full discharge of rivers. *Water resources research* **14** (6), 1141–1154.
- WONG, M. & PARKER, G. 2006 Reanalysis and correction of bed-load relation of Meyer-Peter and Müller using their own database. *J. Hydraul. Eng.* **132**, 1159–1168.
- ZHUANG, Y. 2017 State and irrigation: archeological and textual evidence of water management in late Bronze Age China. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Water* **4** (4), e1217.



Index des mots-clés et des noms

Index

- adimensionalisation, 182
- adimensionnalisation, 38, 50, 127
- allée
 - de von Kármán, 199, 200
- analyse
 - dimensionnelle, 43, 192
- angle
 - de contact, 17–19, 24
- antidune, 107
- aqueduc, xvii
- auto-similarité, 29

- baromètre, 61
- barrage, xvii, xxv, 109, 141, 143, 235
- berge, 96
- bief, 92

- calorie, 34
- canal
 - prismatique, 139

- charge hydraulique, 114, 122, 186, 222
- charriage, 104
- cheval-vapeur, 35
- chute, 141, 147
- coefficient
 - de Darcy–Weisbach, 124, 223
 - de Fanning, 223
 - de frottement, 122, 196, 223, 225
 - de Manning, 133
 - de perméabilité, 186
 - de traînée, 45, 184
- coefficient de frottement, 222
- compressible, 6
- concavité, 22
- condition
 - adhérence, 170
 - aux limites, 170
 - d'adhérence, 192
 - non-pénétration, 170

- conductivité hydraulique, 186
- conjugaison, 153
- conservation
 - de l'énergie cinétique, 69
 - de la masse, 67
 - de la quantité de mouvement, 69
- constante
 - de Boltzmann, 3
 - de von Kármán, 206
 - des gaz parfaits, 4
- contraction, 230
- contrainte, 78
 - de cisaillement, 10, 169, 210
 - normale, 169
- convexité, 22
- couche
 - de rugosité, 127
 - externe, 216
 - interne, 216
 - limite, 6, 37, 184, 192, 216
 - logarithmique, 127, 211
 - visqueuse, 211
- courbe
 - caractéristique, 233
 - de débitance, 130
 - de puissance, 233
 - de remous, 92, 114, 119, 137, 139, 153
 - de rendement, 233
 - de tarage, 130
 - maîtresse, 53
- courbure, 22
- diagramme
 - de Moody–Stanton, 228
- diamètre, 95
 - hydraulique, 223
- discontinuité, 78
- dispersion, 5
- dissipation
 - d'énergie, 211
 - turbulente, 214
- divergence, 80
- dune, 107, 134, 159, 160
- débit, 75, 78, 95
 - d'étiage, 96
 - de plein bord, 96, 130
 - dominant, 96
 - plein bord, 104
- débitance, 126, 130
- décomposition de Reynolds, 197, 204
- déjaugé, 185
- dérivée
 - matérielle, 64
- déversoir, 109, 164
- déviateur, 75
- échelle, 48, 182
- écoulement
 - de Couette, 172
 - de Hele-Shaw, 6
 - de Stokes, 6
 - laminaire, 220
 - Poiseuille cylindrique, 186, 219
 - Poiseuille plan, 186, 214, 219
 - potentiel, 6
 - turbulent, 215, 220
- effet
 - peau de requin, 224
 - Weissenberg, 12
- élargissement, 143, 230
- émulsion, 5
- énergie
 - interne, 81
 - interne massique, 81
 - mécanique, 84
 - piézométrique, 114
 - spécifique, 114
 - totale, 84
 - énergie cinétique turbulente, 214
- entrée, 231
- équation
 - d'Euler, 69, 75, 79, 183, 192
 - d'état, 3
 - de Bernoulli, 69, 84, 114, 119, 224
 - de Blasius, 195
 - de Bresse, 137, 139
 - de Cauchy, 75
 - de Colebrook, 227
 - de conjugaison, 152
 - de continuité, 73
 - de Gromeka-Lamb, 78
 - de l'énergie cinétique, 82
 - de l'énergie interne, 83
 - de la charge, 222
 - de la couche-limite, 194
 - de McKeon, 227
 - de Navier–Stokes, 75, 78, 167, 168
 - de Navier–Stokes moyennée, 205
 - de Newton, 78
 - de Prandtl, 210

- de Rankine-Hugoniot, 78
- de Reynolds, 197, 198, 205
- de Stokes, 183, 184
- du mouvement, 168
- du ressaut, 148
- équilibre, 104
- ergodicité, 204
- étiage, 96
- expérience
 - de Couette, 172
 - de Newton, 10, 174
 - de Reynolds, 197
 - de Trouton, 173, 177
- fermeture, 167, 168, 198, 206, 214
- fluide
 - d'Euler, 79
 - newtonien, 10, 12, 75
 - non newtonien, 10, 75
 - non visqueux, 69
 - parfait, 6, 69, 75, 79, 183
 - rhéofluidifiant, 12
 - rhéoépaississant, 12
 - à seuil, 12
- flux de chaleur, 81
- fonction
 - de dissipation, 83, 211
- de courant, 195
- force
 - de portance, 192
 - de traînée, 45
 - de Van der Waals, 2
 - de viscosité, 35
- formule
 - de Borda, 136, 231
 - de Borda-Carnot, 230
 - de Colebrook, 124
 - de Jäggi, 120, 123, 132
 - de Leibniz, 65
 - de Meyer-Peter, 123, 132
 - de Parker, 125
 - de Raudkivi, 132
 - de Sugio, 136
 - de Torricelli, 86
 - de Weisbach, 231, 232
- frottement, 222
 - de forme, 133
 - de peau, 133
- gaz, 2
- gel, 5
- glissement, 170
- goutte, 19
- granulométrie, 95
- hauteur
 - critique, 117, 118, 137, 139, 147
 - d'écoulement, 93
 - de fermeture, 233
 - moyenne, 138
 - normale, 93, 121, 130, 137, 139
- incompressible, 6
- inertie, 35
- instabilité, 107
- invariance, 29, 31
- isochore, 6
- Jupyter, xii
- Kelvin-Helmholtz
 - instabilité, 200
- laplacien, 170
- libre parcours moyen, 11
- ligne
 - d'énergie, 114
 - de courant, 85
- liquide, 2
- lisse, 225
- lit, 107
 - alluvial, 96
 - fixe, 133
 - majeur, 96
 - mineur, 96
 - mobile, 133
 - rocheux, 96
 - stable, 106
- loi
 - d'échelle, 31
 - d'écoulement, 122
 - de Boyle-Mariotte, 3
 - de Chézy, 119, 123, 125
 - de Coles, 129
 - de comportement, 6, 75, 167
 - de Darcy, 186
 - de Darcy-Weisbach, 123, 124, 126
 - de Fick, 186
 - de frottement, 122
 - de Gauckler-Manning-Strickler, 123

- de Jurin, 26
- de Keulegan, 125
- de Lacey, 104
- de Lane, 104
- de Laplace, 21
- de Laplace–Young, 22
- de Manning–Strickler, 119, 126
- de Pascal, 57
- de Prandtl, 127
- de sillage, 129
- de Stokes, 45, 184
- de tarage, 122
- de Van der Waals, 3
- des gaz parfaits, 3
- longueur
 - d'établissement, 221
 - de dune, 135
 - de mélange, 127, 206, 210, 214, 219
 - de ressaut, 152
- machine, xx
- Manning, 119
- manomètre, 61
- mascaret, 148
- modèle
 - de Prandtl, 214
 - de Prandtl–Kolmogorov, 214
 - de turbulence $k - \ell$, 214
 - de turbulence $k - \epsilon$, 214
- mouillant, 16
- mouille, 107, 108, 133
- moulin, xvii
- moyenne
 - d'ensemble, 204
 - temporelle, 204
- méandre, 104
- ménisque, 26
- méthode
 - de la dichotomie, 130
 - de Newton, 130
- nombre
 - adimensionnel, 35
 - capillaire, 35
 - de capillarité, 35
 - de Déborah, 6
 - de Froude, 35, 92, 117, 137, 139
 - de Mach, 35
 - de Prandtl, 35
 - de Péclet, 35
 - de Reynolds, 35, 44, 127, 182, 192, 215, 223
 - de Reynolds particulière, 184
 - de Schmidt, 35
 - de similitude, 35
 - de Stokes, 35
 - sans dimension, 29, 44
- non-glissement, 170
- non-pénétration, 170
- obstacle, 158
- opérateur
 - biharmonique, 184
 - différentiel, 79
- ouragan, 200
- paradoxe
 - de D'Alembert, 192
- paroi
 - lisse, 215, 219, 225
 - rugueuse, 215, 219, 225
- pascal, 10
- pavage, 132
- penne, 95
 - critique, 147
 - d'énergie, 223
 - de frottement, 114, 122, 137
- perméabilité, 186
- perte de charge, 114, 136, 222
 - d'un ressaut, 152
 - régulière, 122
 - singulière, 230
- poids
 - déjaugé, 185
- point
 - critique, 1
- poiseuille, 10
- polder, xvii
- pompe, 233
- pont, 109
- poreux, 186
- potentiel
 - de Lennard-Jones, 2
 - gravitaire, 69, 76, 78, 84
- pression, 1, 55
 - généralisée, 78, 84
- principe
 - d'action et réaction, 65, 76
 - de la thermodynamique, 81
- prismatique, 139

- produit
 - tensoriel, 75
- puissance
 - dissipée, 83, 84, 222, 224
 - utile, 233
- Python, xii
- périmètre mouillé, 93
- période
 - de retour, 96
- rapide, 108
- rayon
 - de courbure, 22
- remontée
 - capillaire, 24
- renaturalisation, 106
- rendement, 233
- ressaut, 64, 78, 92, 95, 139, 147, 153, 155, 159
 - hydraulique, 148
 - mobile, 148
 - stationnaire, 148
- rhéofluidifiant, 13
- rhéoépaississant, 13
- ridule, 107
- ripisylve, 96
- rive, 96
- rivière, 92, 104
 - alluviale, 96, 104
 - torrentielle, 92
- rugosité, 95, 127, 133
- rugueux, 225
- régime
 - critique, 117
 - de transition, 198
 - fluvial, 95, 117, 147
 - graduellement varié, 95
 - inférieur, 107
 - laminaire, 35, 192, 198
 - permanent, 95
 - rapidement varié, 95, 109
 - subcritique, 35, 95, 117
 - subsonique, 35
 - supercritique, 35, 95, 117
 - supersonique, 35
 - torrentiel, 95, 117, 147
 - turbulent, 35, 192, 198
 - uniforme, 95
- réservoir, 230
- rétrécissement, 230
- section
 - d'écoulement, 93
- seuil, 107–109, 133, 153, 155, 164
 - dénoyé, 165
 - noyé, 165
- seuil de contrainte, 12
- sillage, 45, 200
- similitude, 29, 182
 - complète, 47
 - incomplète, 47
- singularité, 109, 139, 153, 164
- auto-similaire, 195
- sous-couche
 - visqueuse, 211, 216
- stokes, 10
- structure, 134
- surface libre, 2
- suspension, 5, 104
- sédimentation, 184
- température, 1
- tenseur
 - de Reynolds, 127, 198, 205
 - des contraintes, 78
 - des extra-contraintes, 78
- tensiomètre, 19
- tension
 - capillaire, 16
 - de surface, 16
- thermes, xvii
- théorie
 - cinétique, 3, 11
 - de la couche limite, 192
 - de la similitude, 29
- théorème
 - de Bernoulli, 69, 114, 119, 158, 183
 - de Green-Ostrogradski, 71, 73, 76, 78, 82, 84
 - de l'énergie cinétique, 81
 - de Reynolds, 68, 71
 - de transport, 71
 - de Vaschy–Buckingham, 40
- tirant
 - d'eau, 93, 138
- torrent, 92
- transformation
 - affine, 31
 - isomorphe, 31
- transport
 - solide, 104

tube de Pitot, 88
 turbulence, 197, 219
 vague, 29
 d'impulsion, 29
 vanne, 143, 155
 viscosité, 10
 cinématique, 10, 35
 dynamique, 10
 turbulente, 218
 élongationnelle, 172
 vitesse
 agitation thermique, 4
 de cisaillement, 215
 de frottement, 128, 215, 225
 débitante, 95, 186
 moyenne, 95
 volume
 de contrôle, 64, 71
 de contrôle arbitraire, 72
 de contrôle fixe, 72
 de contrôle matériel, 71, 72
 fermé, 64
 matériel, 64, 71
 ouvert, 64
 vortacité, 78
 zone
 centrale, 216, 218
 logarithmique, 128, 216, 219

Index des noms propres

ABB, xxii
 Archimède, 59
 Bernoulli, Daniel, xx, 85
 Blasius, Heinrich, 195
 Boltzmann, Ludwig, 3
 Bonnard, Daniel, xxiii
 Borda, Jean-Charles de, xx, 232
 Bossut, Charles, xx
 Boussinesq, Joseph, xxiii
 Buffon, comte de, xxi
 Celsius, Anders, 34
 Chézy, Antoine de, xx
 Crédit Suisse, xxii
 D'Alembert, Jean Le Rond, xx, 192
 Darcy, Henry, xxi, 186
 du Buat, Pierre, xx
 Démocrite, 3
 Euler, Leonhard, xx, 80
 Galilei, Galileo, xx
 Gauckler, Philippe, 120, 123
 Gugliemini, Domenico, xx
 Hagen, Gotthilf, 120
 Humboldt, Alexander von, xxi
 Jurin, James, 27
 Kármán, Theodore von, 87, 199
 Keulegan, Garbis H., 125
 Lagrange, Joseph-Louis, xx
 Laplace, Pierre Simon, xx, 21
 Leibniz, Gottfried Wilhelm von, 65
 Lennard-Jones, Edward, 2
 Lugeon, Maurice, xxiii
 Manning, Robert, 120
 Mariotte, Edme, 3
 Maxwell, James C., 3
 Meyer-Peter, Eugen, xxiii, 123
 Müller, Robert, 123
 Newcomen, Thomas, xx
 Nikuradse, Johann, 226
 Pascal, Blaise, xx, 58
 Pitot, Henri, 88
 Preissmann, Alexandre, xxiii
 Rayleigh, John William Strutt, Lord, 38
 Reynolds, Osborne, 71
 Saint-Venant, Adhémar Barré de, xxi
 Savery, Thomas, xx
 Sogreah, xxiii, 51
 Strickler, Albert, 119, 120
 Stucky, André, xxiii
 Torricelli, Evangelista, xx, 61
 UBS, xxii

van der Waals, Johannes D., 2
 Vaschy, Aimé, 41
 Villard de Honnecourt, Aimé, xix

Vinci, Leonardo da, xix
 Watt, James, xx
 Weisbach, Julius, 232

Index des lieux

Aar, 160
 Alaska, 200
 Amazone, 105
 Arc, 96
 Arve, 104
 Avançon, 108, 134

barrage
 d'Oroville, 153
 d'Émosson, xxv
 de Gorner, xxv
 de Grangent, 148
 de la Grande Dixence, xxiv
 de Mauvoisin, ii
 de Muttsee, xxv
 de Rouvière, 160
 de Serra, xxv
 de Trift, xxv
 du Vajont, 29
 du Vieux-Émosson, xxv

Bazacle, xvii
 Berne, 97
 Boise, 130

Crieulon, 160

Doubs, 93, 109, 110, 160

Garonne, 160
 Grindelwald, 29

Jura, xxii
 Juruá, 105

lac
 de Klontal, 97
 de Lona, 7
 Tahoe, 96

Lochsa, 134
 Loire, 93, 96, 97, 148
 Léna, 109

Mississippi, 105, 148

Navisence, 93, 96, 108
 Nith, 148
 Nozon, 134

Orbe, 96
 Ouvèze, 97

Pacifique
 océan, 200

Reuse de l'A Neuve, 96
 Reuss, 110
 Rhin, xxii
 Rhône, xxii, 93, 96
 Rio de Janeiro, 18
 Rome, xvii

Saint-Michel, 51
 Saufla, 108

Tagliamento, 109
 Tana, 105
 Tibre, 166

Venise, xviii
 Vieux-Émosson, 110

Zavragia, 148