Chapitre 4 : équations de bilan

Mécanique des fluides

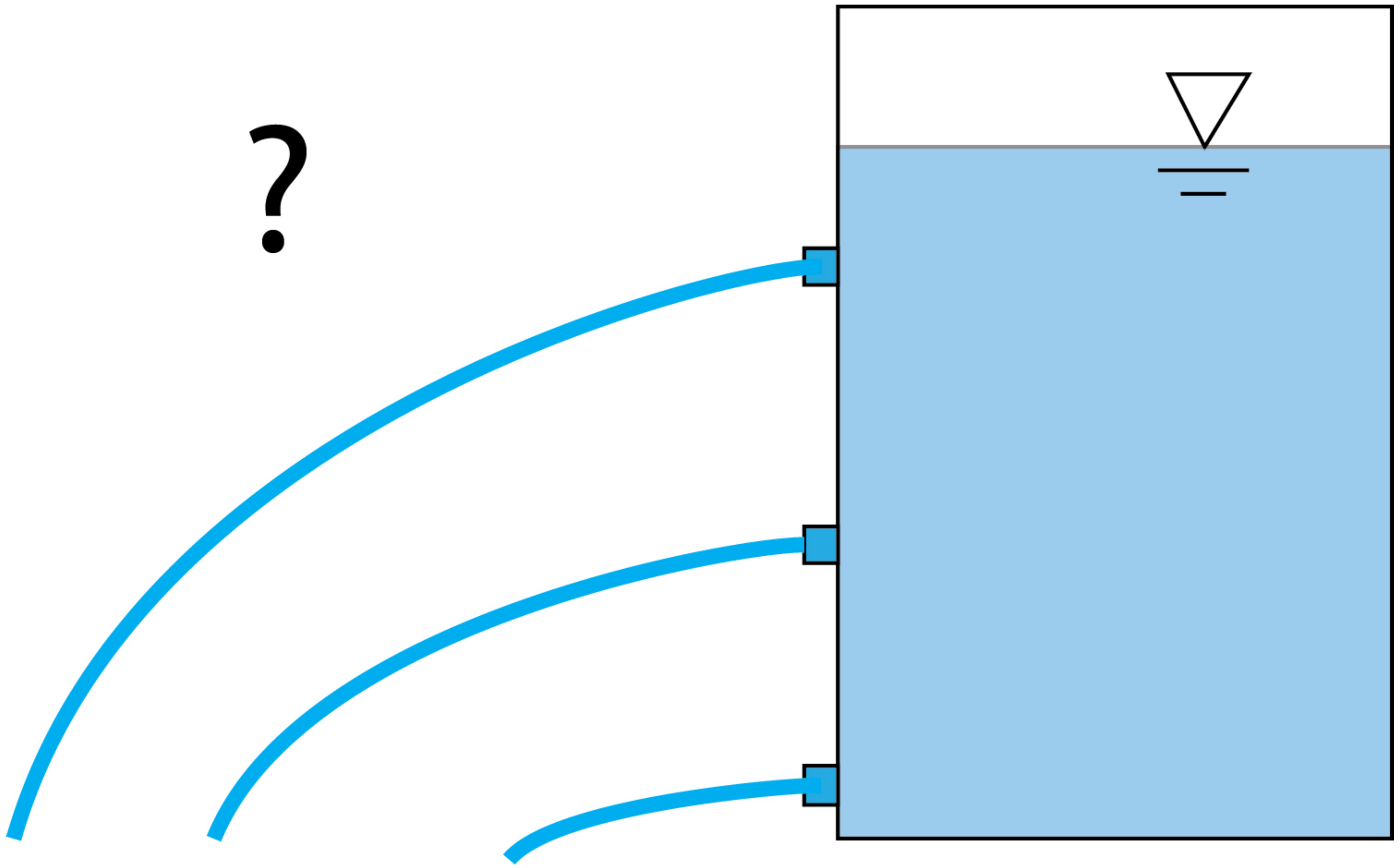
Christophe Ancey

Chapitre 4 : équations de bilan

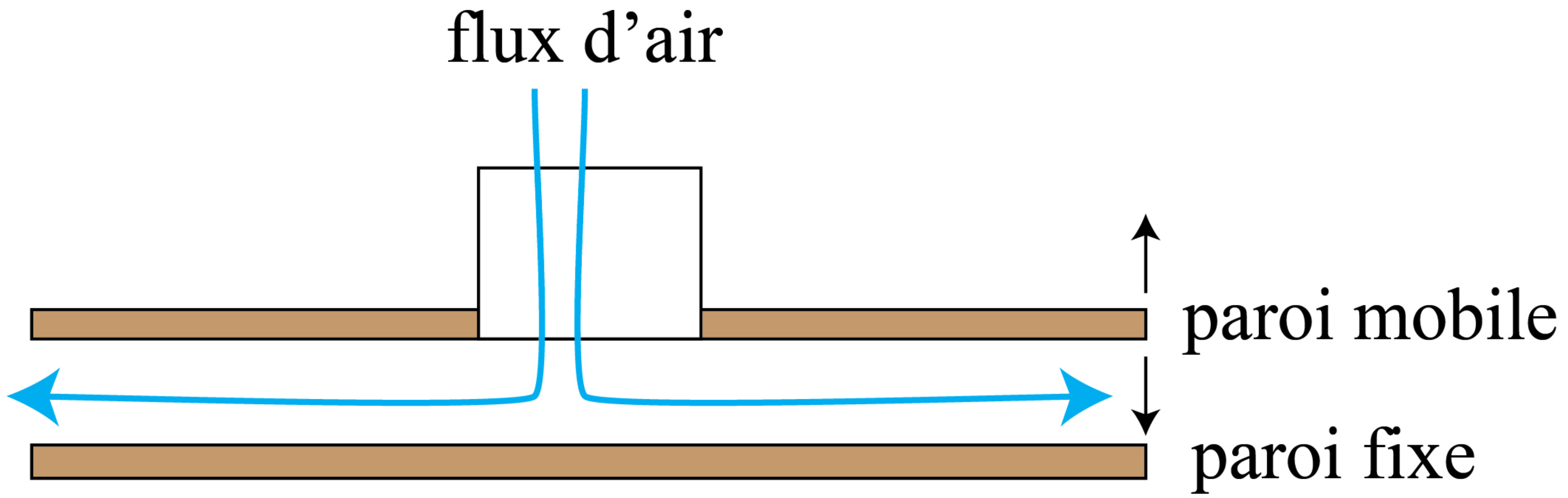
- Principes de conservation
- Spécificités des fluides
- Théorèmes de transport
- Théorème de Bernoulli
- Applications du théorème de Bernoulli

Un petit quiz pour s'échauffer

- On perce trois trous dans un réservoir rempli d'eau. Il se forme trois jets. Quel est le jet qui va le plus loin ?



- On insuffle de l'air entre une plaque mobile et une plaque fixe. Que fait la plaque mobile ?



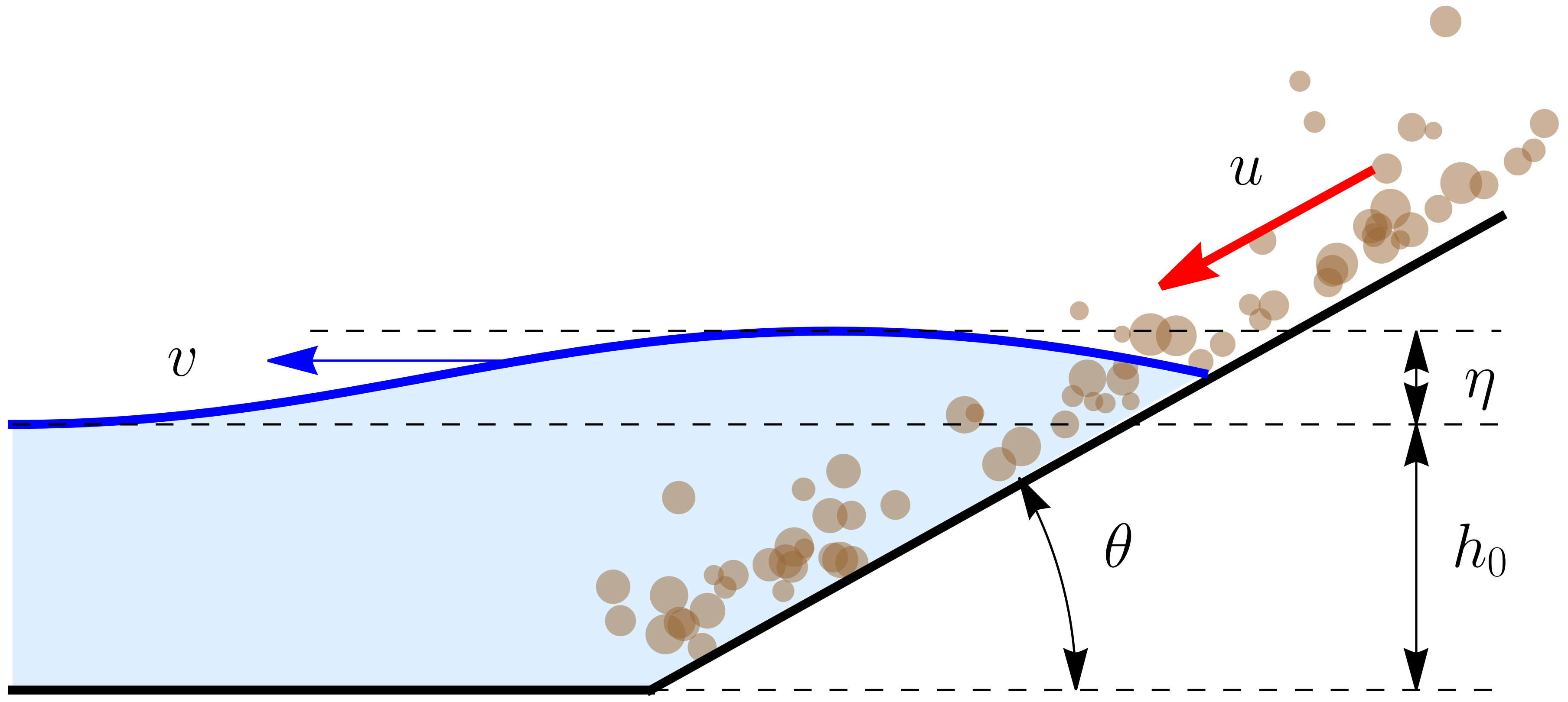
Principes

Il existe trois principes fondamentaux en physique

- la masse se conserve ;
- la variation de quantité de mouvement (masse $\times$ vitesse) est égale à la somme des forces appliquées ;
- l'énergie totale se conserve : c'est le premier principe de la thermodynamique.

Principes (2)

Vague d'impulsion créée par une avalanche entrant dans une étendue d'eau



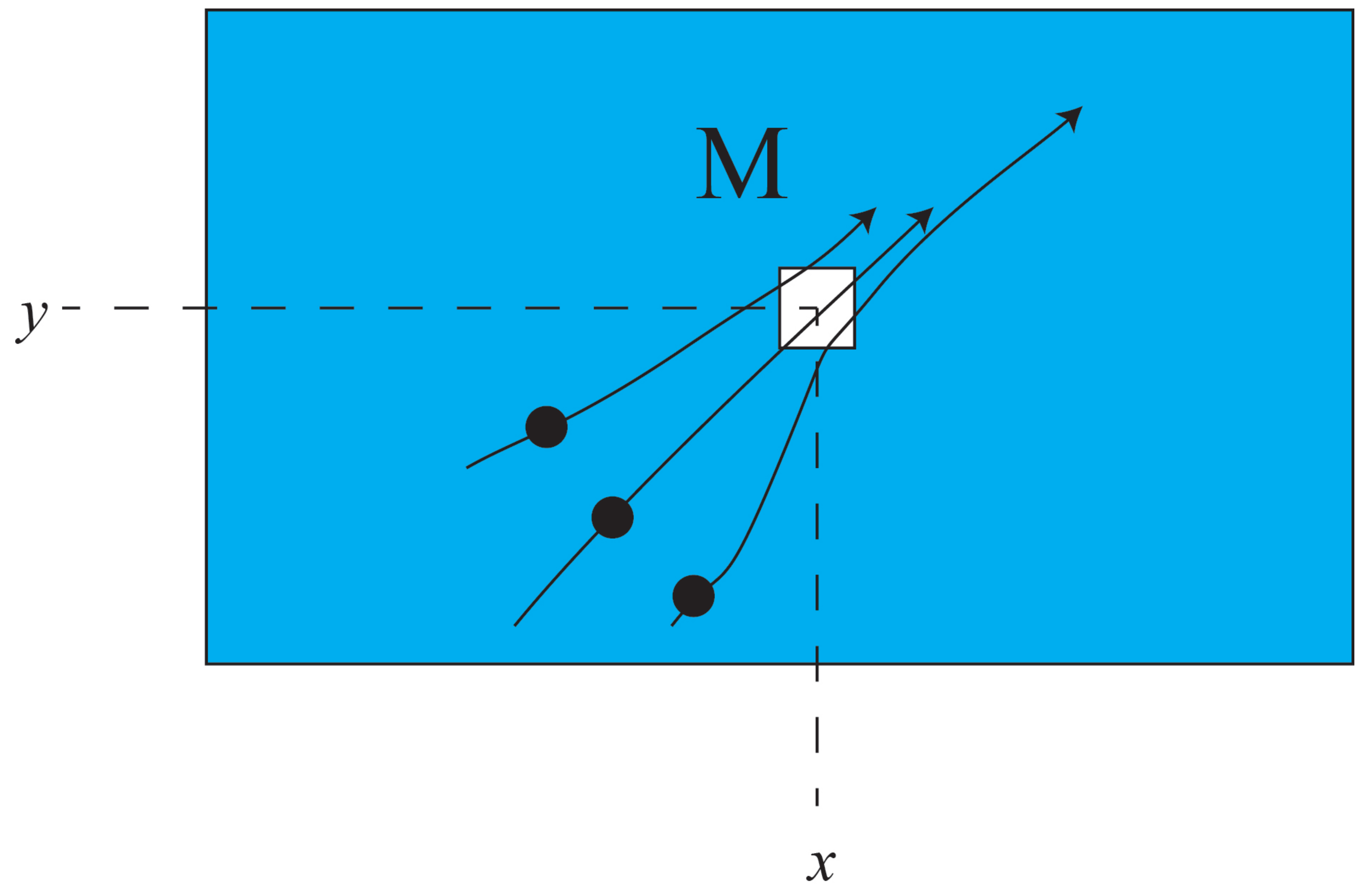
Exemple d'un raisonnement pour calculer la hauteur d'une vague d'impulsion : la vitesse des vagues est $v = \sqrt{g(h_0 + \eta)}$. La conservation de la vitesse entre la vitesse de l'avalanche u et celle de la vague c donne $u = v$ (on négligea la dissipation d'énergie), et donc on déduit

$$\eta = \frac{u^2}{g} - h_0$$

Le raisonnement vous semble-t-il correct ?

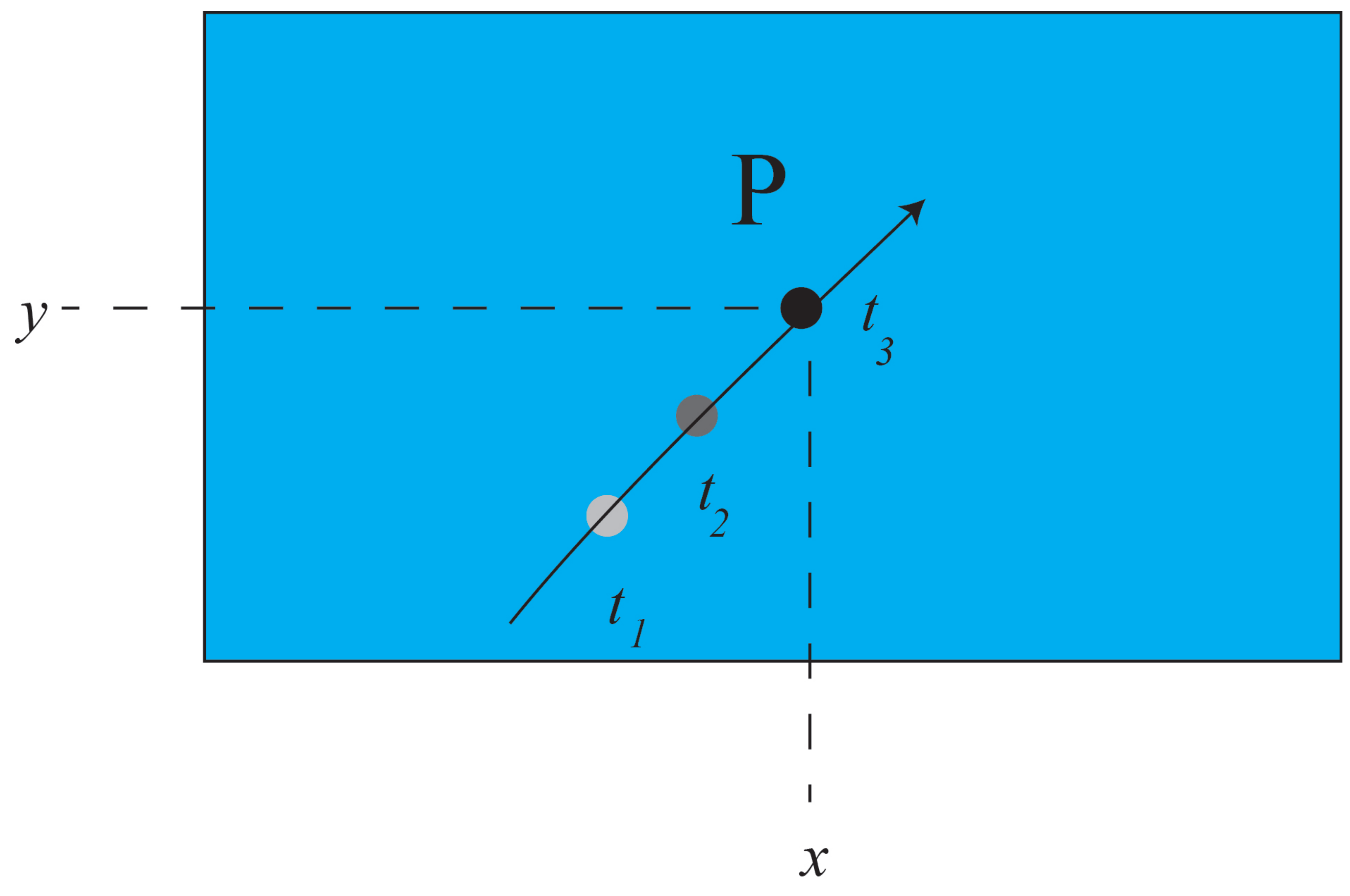
Descriptions eulérienne et lagrangienne

Dans la description eulérienne, on considère un point fixe M du volume de fluide et on regarde les particules passer. La vitesse du fluide au point M correspond alors à celle de la parcelle de fluide qui se situe en M au temps t.



Descriptions eulérienne et lagrangienne

Dans la description lagrangienne, on considère une parcelle de fluide que l'on suit dans son mouvement au fil du temps

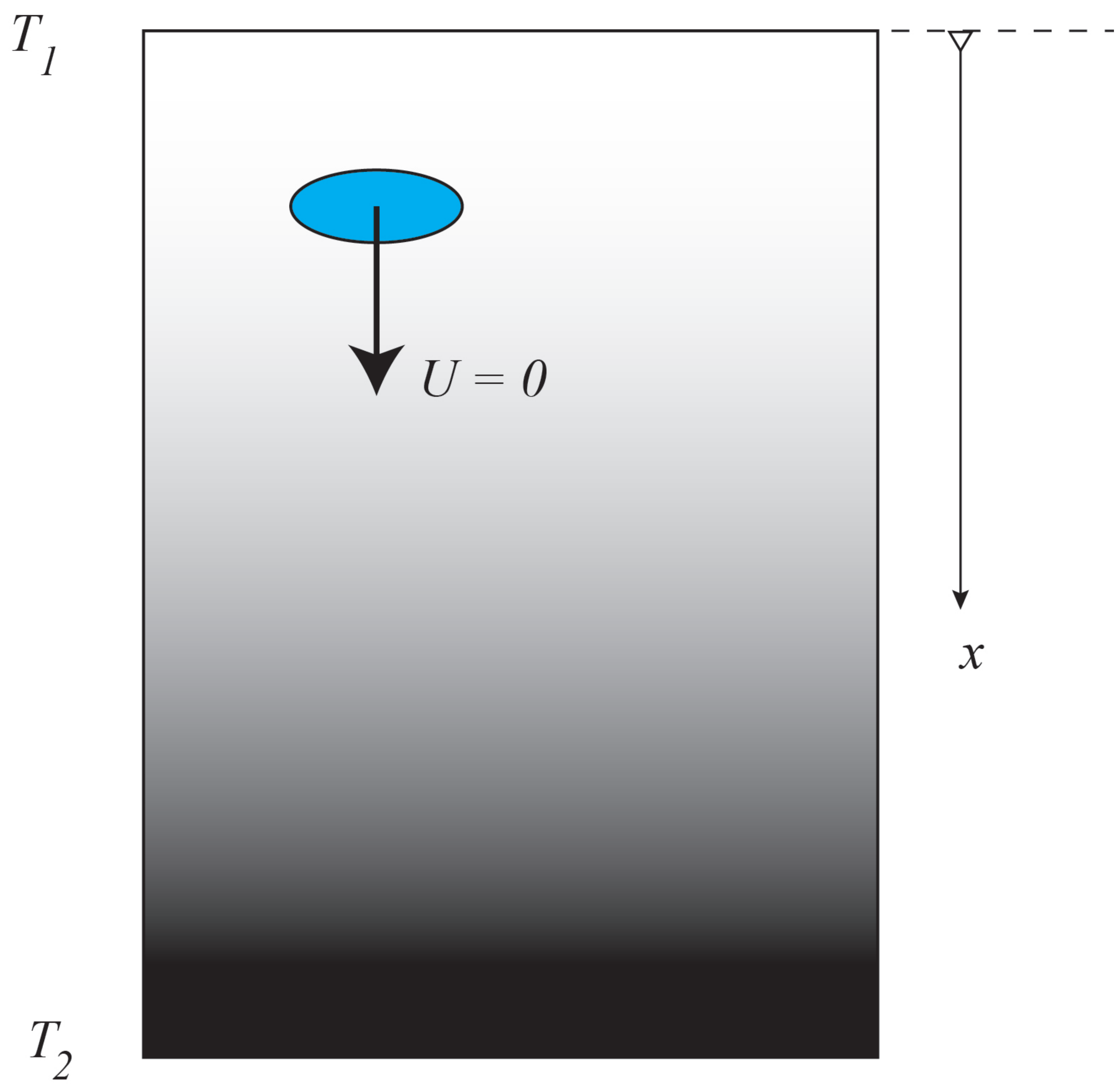


Descriptions eulérienne et lagrangienne (2)

Le choix d'une description est une affaire de convenance.

En mécanique des fluides, il est plus facile de travailler en eulérien car un fluide possède un nombre infiniment grand de parcelle de fluides, dont le mouvement est irrégulier (surtout si l'écoulement est turbulent). En mécanique des solides, il est plus facile de travailler en lagrangien car les parcelles de solides restent proches les unes des autres au cours du temps.

Dérivée matérielle (ou particulaire)

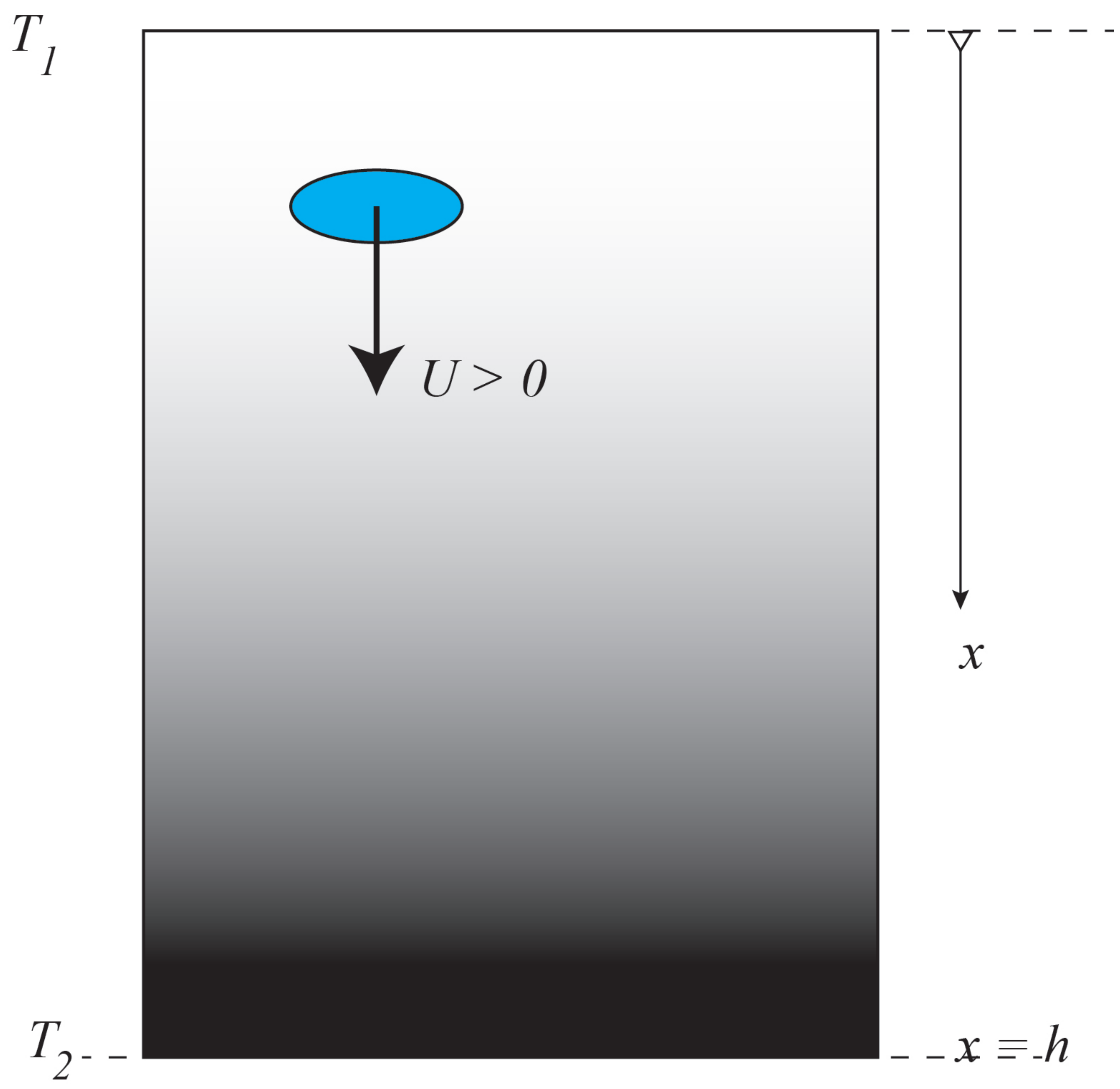


Considère un nageur qui plonge dans de l'eau, dont la température varie de T_1 à T_2 en fonction de la profondeur x sous l'effet du soleil. Si le nageur est immobile ($U = 0$) on a

$$T = cst \Rightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$$

La température ressentie par le nageur ne change pas.

Dérivée matérielle (2)



Si le nageur nage vers le fond avec une vitesse $U > 0$, alors la température ressentie diminue avec la profondeur

$$T = T_2 \frac{x}{h} - T_1 \frac{x-h}{h}$$

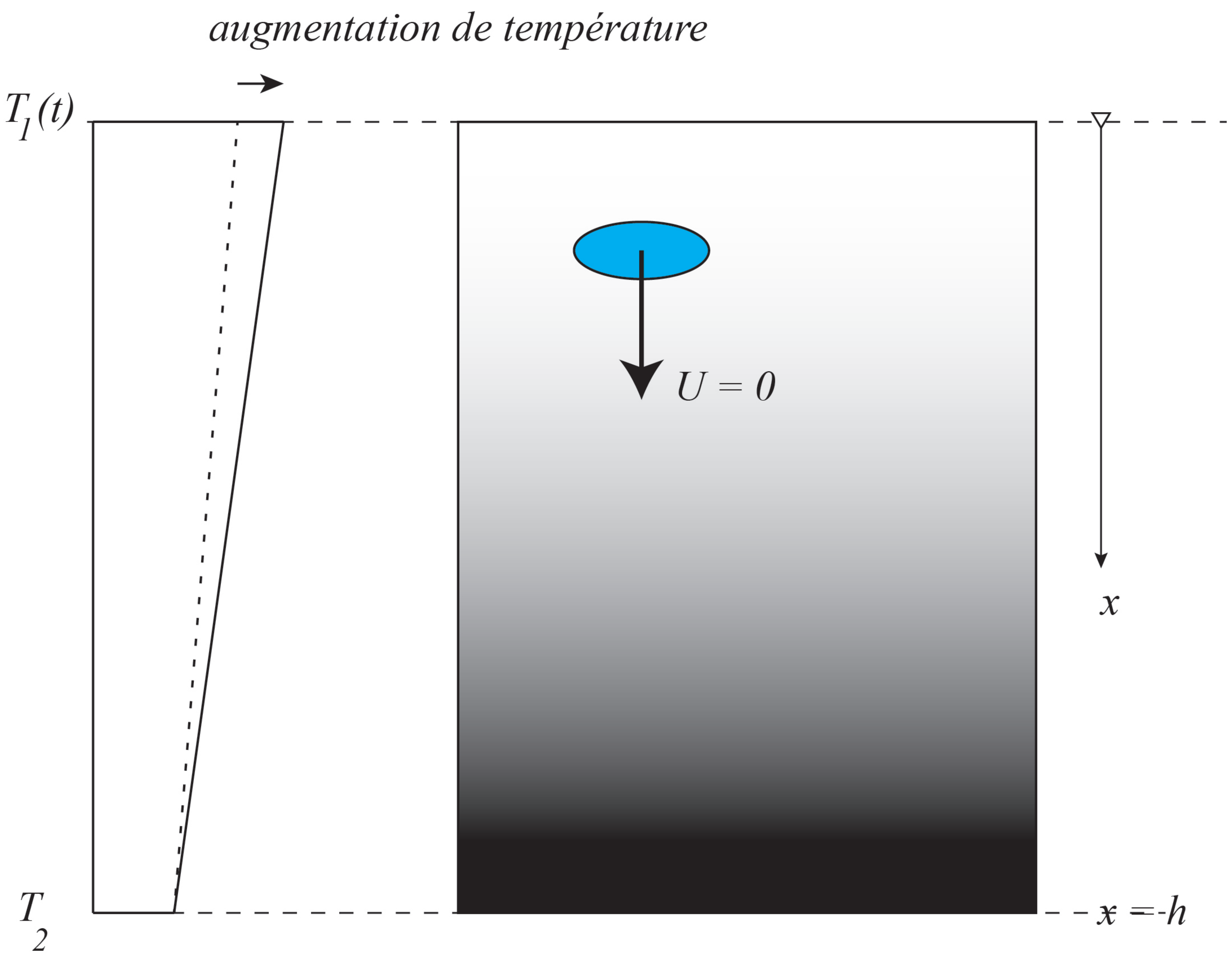
La variation de température ressentie est donc

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = U\frac{T_2 - T_1}{h} = U\nabla T$$

alors qu'en un point M fixe quelconque, la température (eulérienne) reste fixe, donc

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

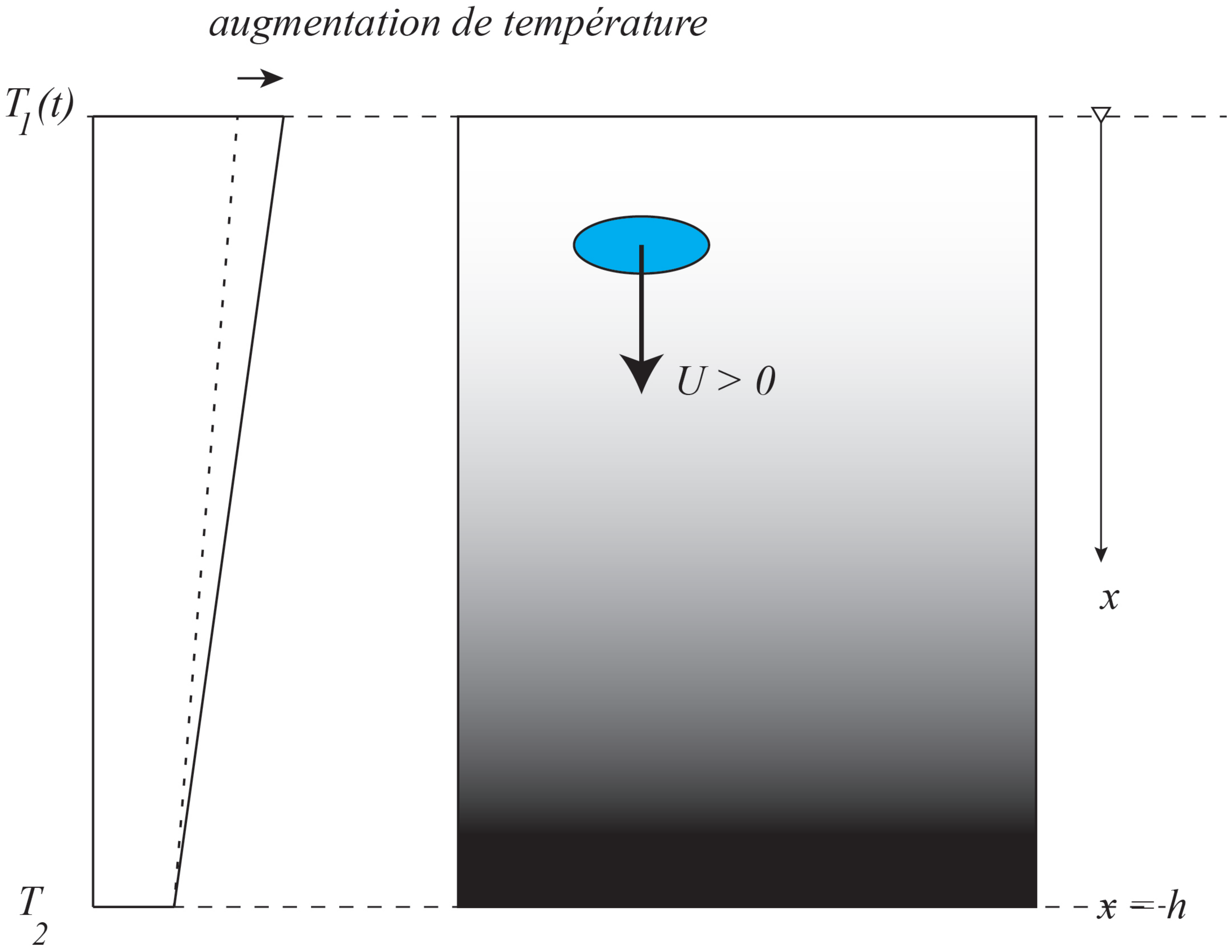
Dérivée matérielle (3)



Si maintenant la température T_1 augmente au cours de la journée et que le nageur reste à la même place alors les points de vue lagrangien et eulérien coïncident :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}.$$

Dérivée matérielle (4)



Enfin si le nageur se met à plongeur dans cette eau à température variable $T(x, t)$, alors la température ressentie est

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + U \nabla T.$$

- $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ dérivée matérielle ou particulaire (plus rarement lagrangienne)
- $\frac{\partial T}{\partial t}$ dérivée locale
- $U \nabla T$ terme d'advection

Dérivée matérielle : synthèse

Considérons la fonction température $T(x, t)$. Si on se place en un endroit fixe, la variation locale de température en un point x au cours du temps t est représentée par une différentielle partielle

$$\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Si maintenant on tient compte du fait que la température varie non seulement du fait de processus locaux (p. ex. conduction de chaleur), mais aussi parce que le fluide se déplace et transporte de la chaleur (convection), alors la variation totale de température comprend ces deux processus. Considérons une petite « parcelle » de fluide, qui est en x à l'instant t. Elle est transportée à la vitesse u.

Dérivée matérielle : dérivation mathématique

Donc au temps $t + \mathrm{d}t$, la température sera

$$T + \Delta T = T(x + u\mathrm{d}t,\, t + \mathrm{d}t) = T(x,\, t) + \mathrm{d}t \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} \right),$$

(développement de Taylor à l'ordre 1) soit le taux de variation de la température

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\Delta T}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{variation temporelle}} + \underbrace{u\frac{\partial T}{\partial x}}_{\text{transport convectif}}.$$

On retrouve le fait que lorsqu'on suit une particule dans son mouvement, la variation totale comprend deux termes : une variation locale et un terme de transport appelé *convection* ou *advection*.

Application : accélération

Quelle que soit la description (eulérienne/lagrangienne), l'accélération d'une « particule » de fluide animée de la vitesse u est définie comme

$$a = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{u(x + u\mathrm{d}t,\, t + \mathrm{d}t) - u(x,\, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Un résultat que l'on peut généraliser en dimension 3 avec $\boldsymbol{u} = (u,\, v,\, w)$

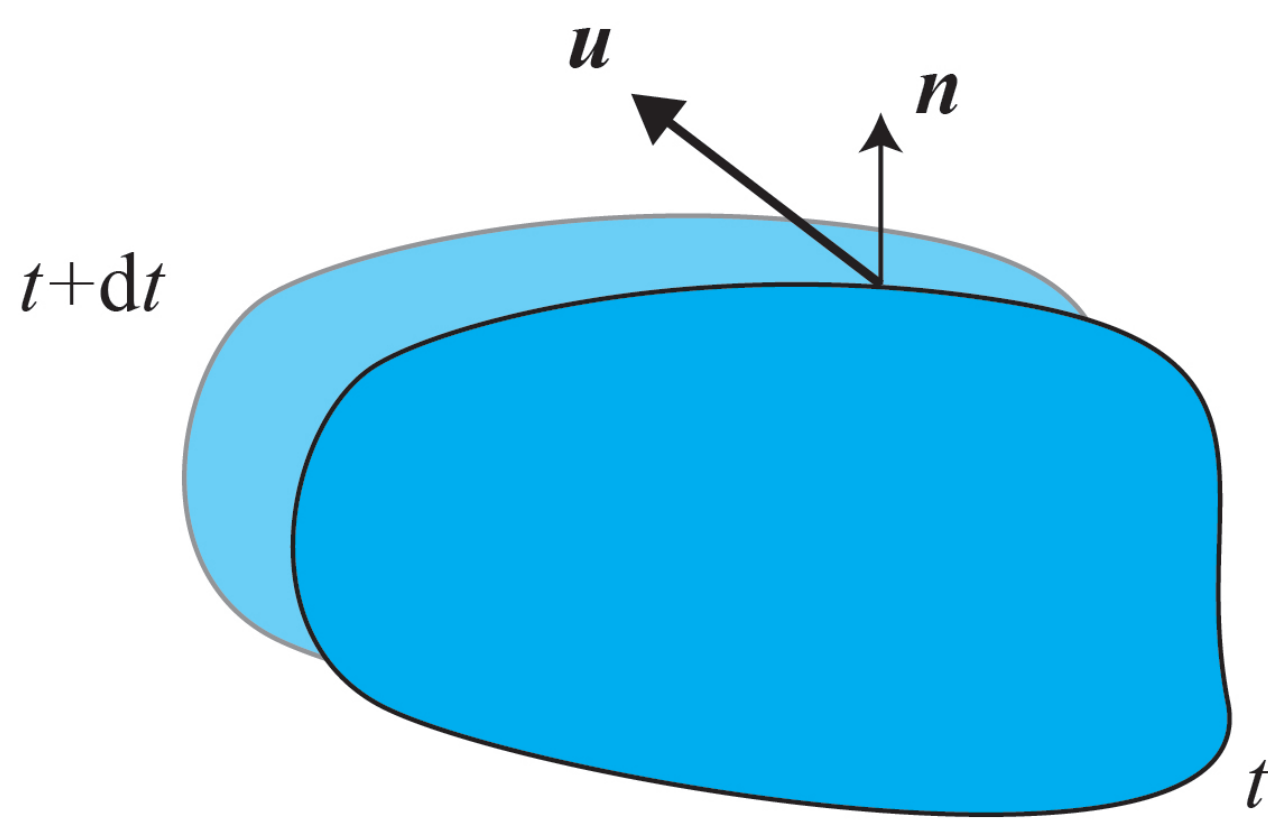
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\mathrm{d}t,\, t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}.$$

où l'on a défini l'opérateur (ici dans un système cartésien x, y, z) :

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla) = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

Remarque : la dérivée matérielle est parfois notée $\dfrac{D}{Dt}$.

Volume de contrôle



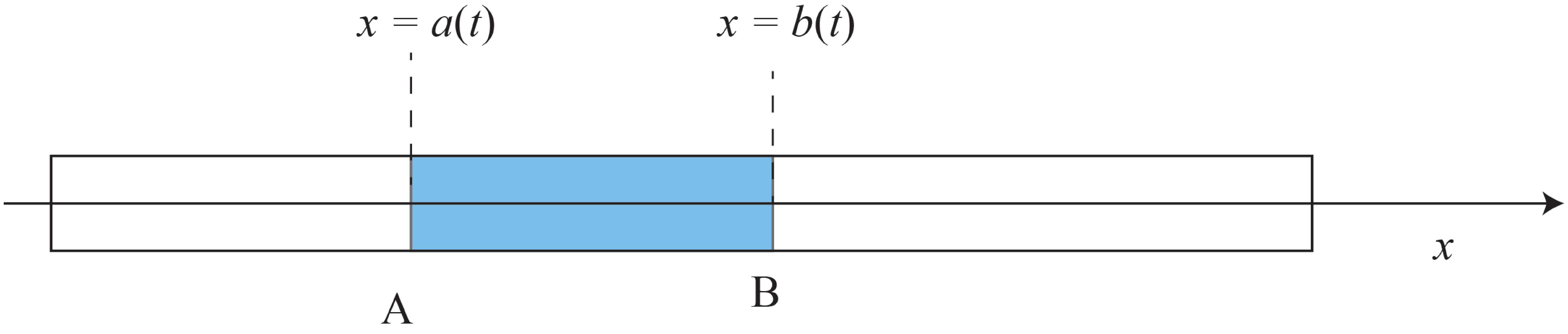
En mécanique des fluides, on peut travailler :

- en un point donné : description locale $\rightsquigarrow$ le mouvement est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles
- sur un volume de fluide, dit « volume de contrôle » : description plus globale $\rightsquigarrow$ le mouvement est décrit par des équations intégrales

On distingue les volumes de contrôle matériels (composés d'un volume donné de fluide et attaché à lui) et les volumes arbitraires (p. ex. volume ouvert fixe).

Théorème de transport en dimension 1

On considère un « volume de contrôle » en dimension 1 compris entre A et B, deux points se déplaçant respectivement à la vitesse $\dot{a}$ et $\dot{b}$.



Dérivée d'une primitive (définition d'une primitive) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi = f(t).$$

Théorème de transport en dimension 1 (2)

- Dérivée d'une primitive avec une borne variable :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{a(t)} f(\xi)\mathrm{d}\xi = f(a(t))\dot{a}(t).$$

- Dérivée d'une fonction composée :

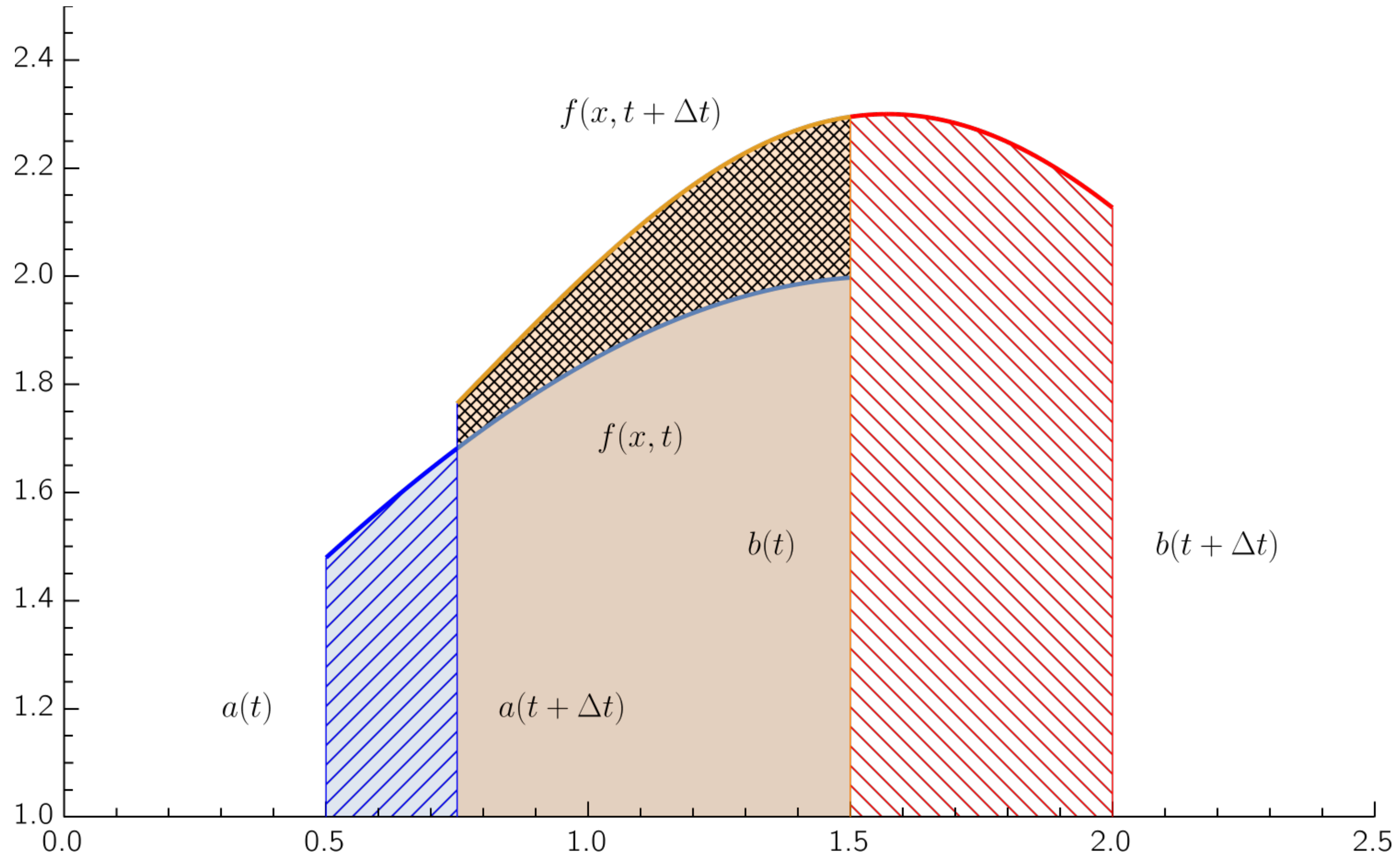
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,\,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x,\,t)}{\partial t}\mathrm{d}x.$$

- Formule de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,\,t)\mathrm{d}x = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,\,t)}{\partial t}\mathrm{d}x + f(b(t))\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - f(a(t))\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$ ou encore

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,\,t)\mathrm{d}x = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,\,t)}{\partial t}\mathrm{d}x + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x}(f(x,\,t)u(x,t))\mathrm{d}x$$

Théorème de transport en dimension 1 (3)



Taux de variation de $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$:

- $-$ flux de f en a (ce qui est perdu aux frontières)
- $+$ flux de f en b (ce qui est gagné aux frontières)
- la variation de f sur $[a,b]$ (ce qui varie en interne)

Généralisation en dimension 2 ou 3

La formule de Leibniz se généralise aux dimensions supérieures

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V f\mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot(f\boldsymbol{u})\right)\mathrm{d}V$$

soit encore (par utilisation du théorème de Green–Ostrogradski)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V f\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_S f\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

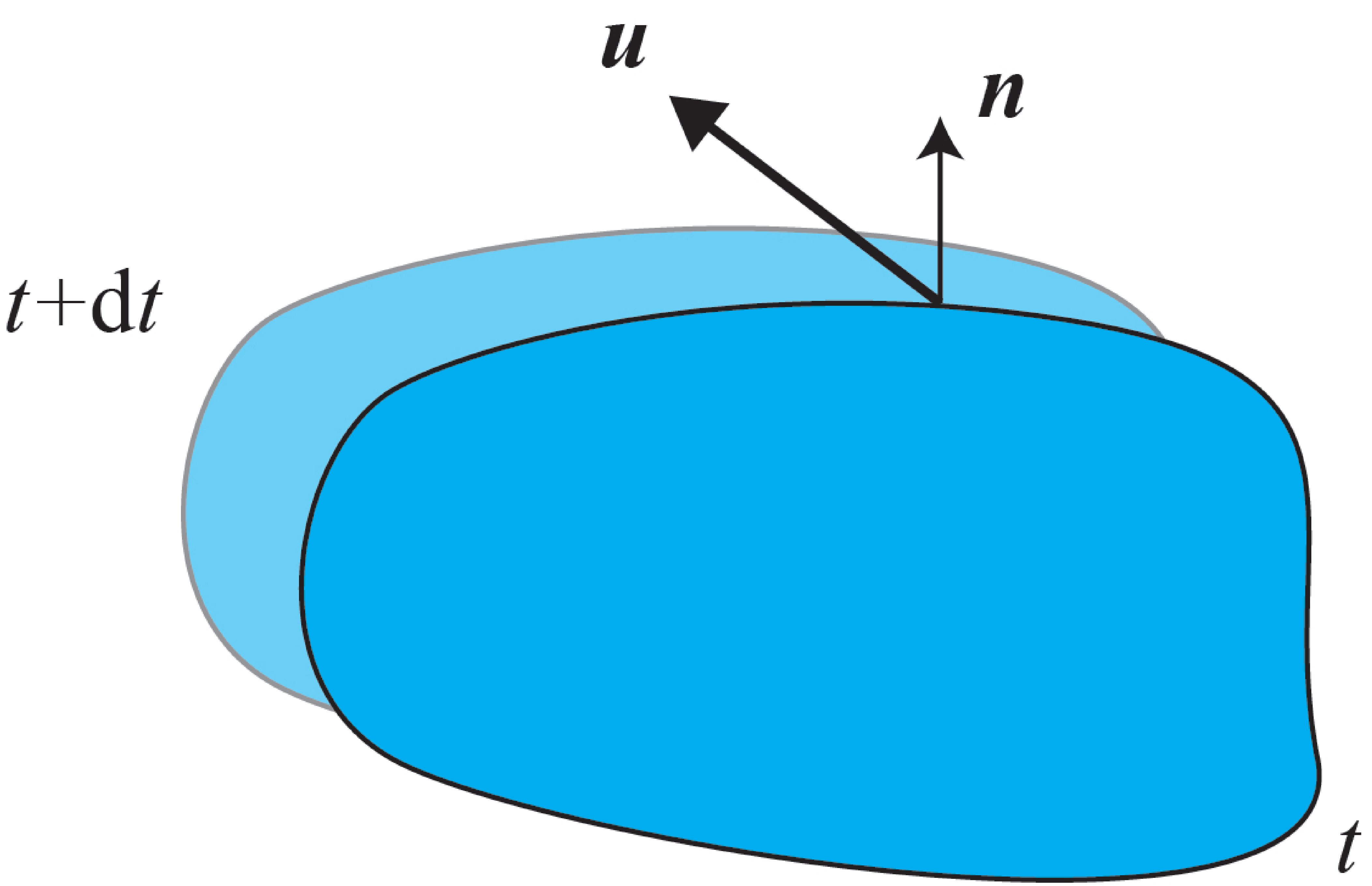
avec S la surface de contrôle enveloppant le volume de contrôle V.

On note la décomposition

- variation temporelle au sein du volume $\partial_t f$
- flux $f\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ aux frontières du domaine (advection)

Conservation de la masse

Volume de contrôle V



Le principe de conservation de la masse impose :

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ avec } M = \int_{\mathcal{V}} \varrho(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}V$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \varrho(\boldsymbol{x},\, t)}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_S \varrho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

ou bien encore

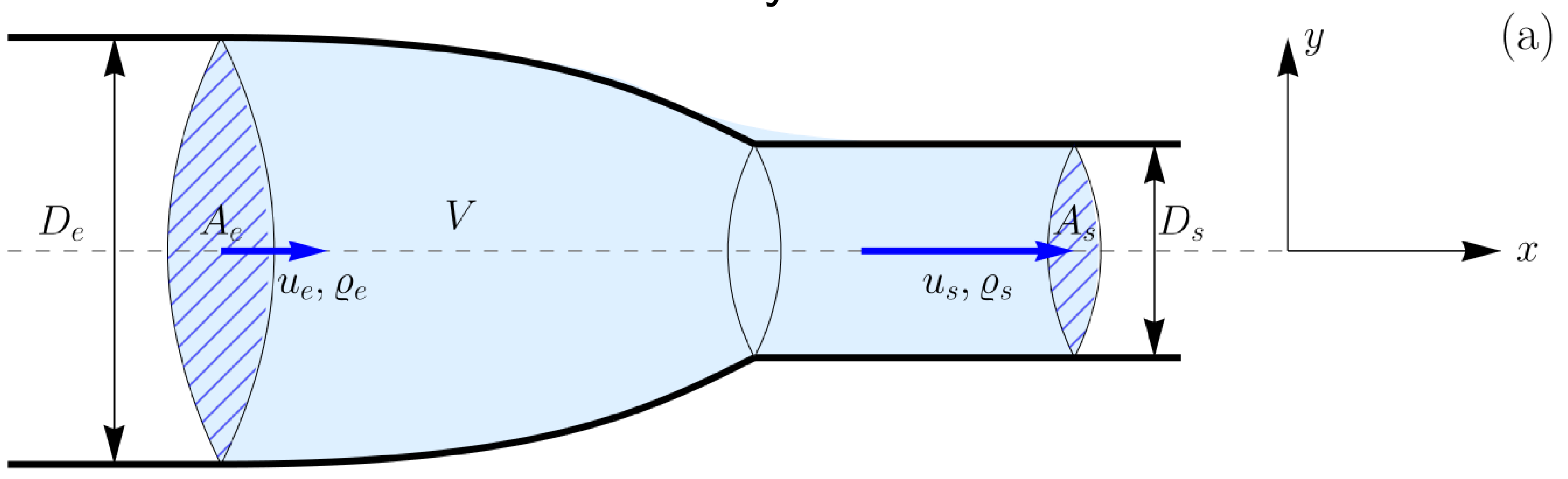
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho \mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{\partial \varrho(\boldsymbol{x},\, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \boldsymbol{u})\right)\mathrm{d}V$$

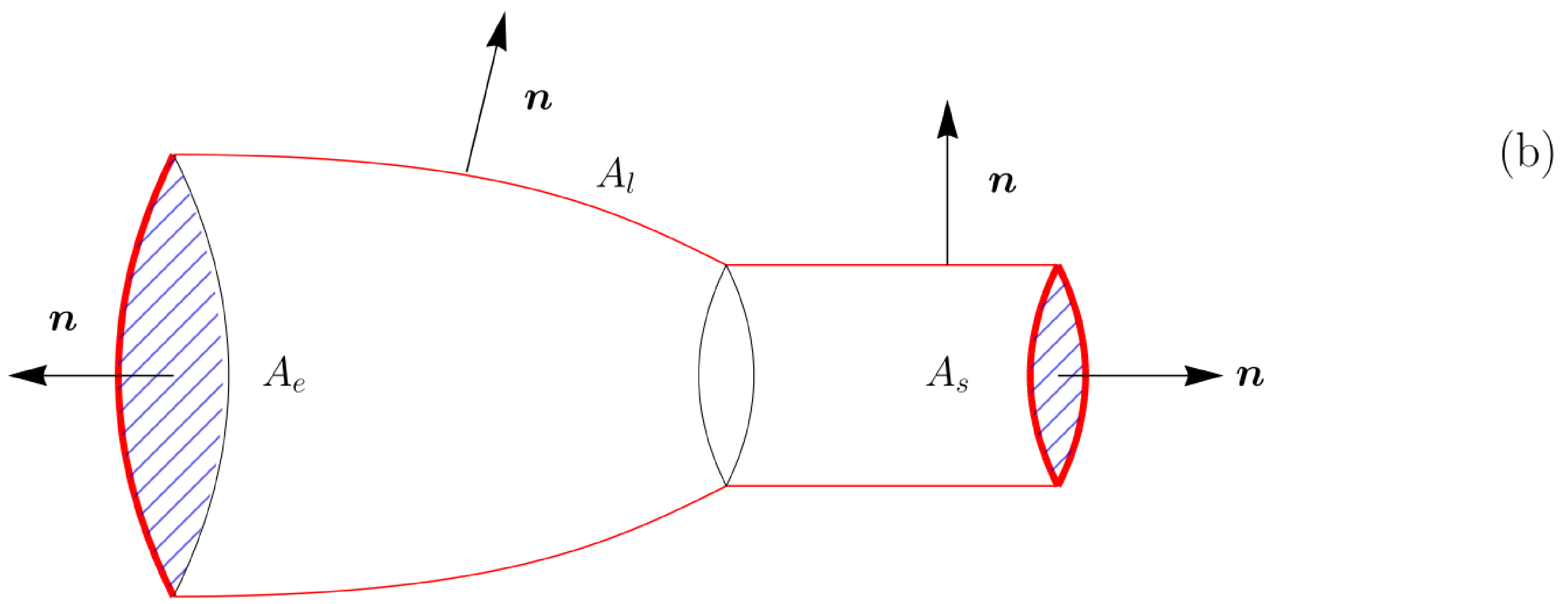
et la forme locale est

$$\frac{\partial \varrho(\boldsymbol{x},\, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \boldsymbol{u}) = 0$$

Conservation de la masse : exemple

Écoulement dans une tuyère avec constriction V





Conservation de la masse pour un volume matériel V_m

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_m} \varrho \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \varrho(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{A_e+A_s} \varrho \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0.$$

et donc pour le volume fixe V

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho \mathrm{d}V = \varrho_e A_e u_e - \varrho_s A_s u_s.$$

Si l'écoulement est permanent et isochore alors le débit à travers toute section se conserve :

$$Q = A_e u_e = A_s u_s$$

Conservation de la masse

L'équation de conservation locale de la masse est appelée aussi *équation de continuité*

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{u}.$$

Si le fluide est incompressible ou l'écoulement isochore : $\varrho = constante$, donc l'équation de continuité devient :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

Écrite sous forme algébrique, cette équation s'écrit en dimension 2 :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

Corollaire : théorème de Reynolds

Si f est une fonction massique, alors

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho f \mathrm{d}V &= \int_V \left(\frac{\partial \varrho f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho f \boldsymbol{u})\right) \mathrm{d}V \\ &= \int_V \left(\varrho \frac{\partial f}{\partial t} + \varrho \boldsymbol{u} \cdot \nabla f + f \frac{\partial \varrho}{\partial t} + f \nabla \cdot (\varrho \boldsymbol{u})\right) \mathrm{d}V\end{aligned}$$

En se servant de l'équation de continuité et de la définition de la dérivée matérielle, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho f \mathrm{d}V = \int_V \varrho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \mathrm{d}V.$$

Intérêt : on peut exprimer les principes de conservation de la masse en considérant $f = 1$ (conservation de la masse), $f = \boldsymbol{u}$ (conservation de la quantité de mouvement), $f = e$ (e énergie interne massique, conservation de l'énergie)

Conservation de la quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique veut que toute variation (temporelle) de quantité de mouvement résulte de l'application de forces. Donc, on peut écrire une relation générale de la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho \boldsymbol{u} \mathrm{d}V = \text{forces appliquées au volume } V.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \varrho \boldsymbol{u} \mathrm{d}\mathcal{V} = \underbrace{m\boldsymbol{g}}_{\text{poids}} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\mathcal{S}}_{\text{force de surface}} ,$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \varrho \boldsymbol{g} \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\mathcal{S}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ désigne la contrainte, $\boldsymbol{\Sigma}$ le tenseur des contraintes, fonction du tenseur des taux de déformations $\boldsymbol{D}$.

Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes se décompose en tenseur des pressions $-p\mathbf{1}$ et un tenseur des extra-contraintes $\boldsymbol{T}$:

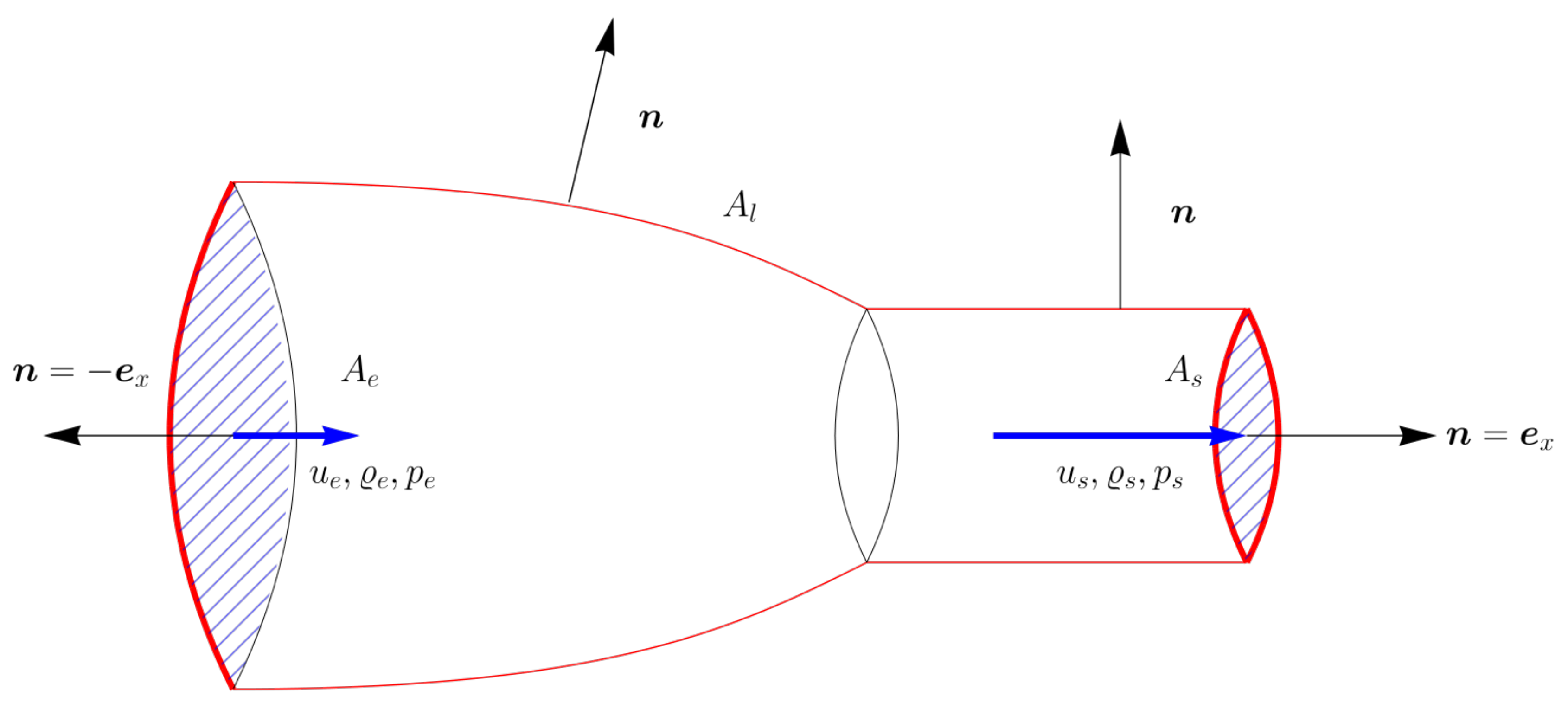
$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{T}.$$

Le tenseur $\boldsymbol{T}$ dépend de la nature du fluide étudié ou du niveau d'approximation :

- $\boldsymbol{T} = 0$ correspond au cas des fluides parfaits (ou non visqueux) et les équations du mouvement qui en résultent sont appelées *équations d'Euler* ;
- $\boldsymbol{T} = 2\mu\boldsymbol{D}$ correspond au cas des *fluides newtoniens* et les équations du mouvement qui en résultent sont appelées *équations de Navier-Stokes* ;
- $\boldsymbol{T} = \mathcal{F}(\boldsymbol{D})$ correspond au cas des fluides non newtoniens, avec $\mathcal{F}$ la *loi de comportement du fluide*. Les équations du mouvement résultantes sont appelées *équations de Cauchy*.

Conservation de la quantité de mouvement : exemple

Écoulement dans une tuyère avec constriction



Quatre hypothèses supplémentaires :

- Le fluide se comporte comme un fluide parfait

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1}$$

- Introduction de la pression généralisée p_* :

$$p_* = p + \psi$$

qui comprend la pression p au sein du fluide et le potentiel gravitaire ψ tel que $\varrho \boldsymbol{g} = -\nabla\psi$

- On note $\boldsymbol{R}$ l'action du fluide sur la paroi latérale A_l de la tuyère

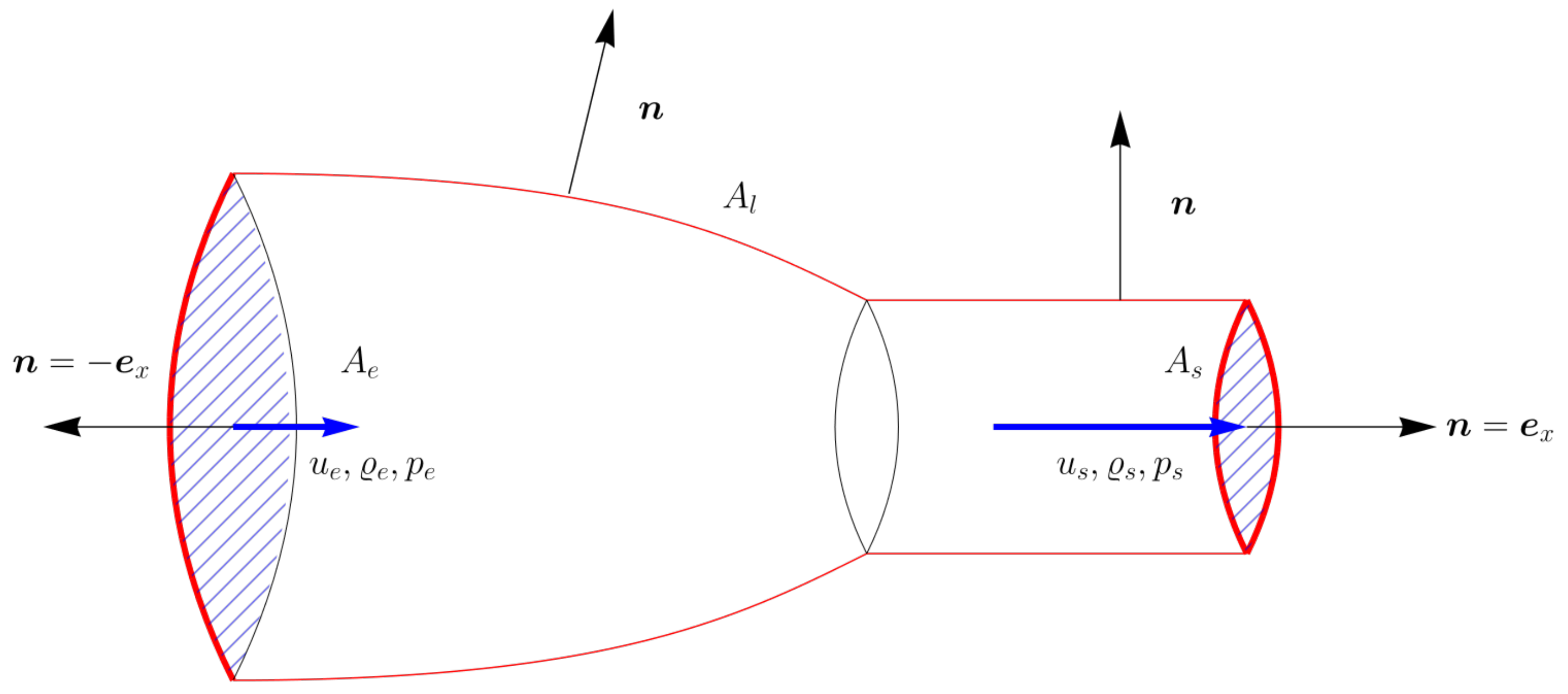
$$\boldsymbol{R} = +\int_{A_l} p_* \boldsymbol{n} \mathrm{d}S.$$

(attention au signe !)

- Le champ de pression totale p_* est constant sur toute section A en travers de la conduite.

Conservation de la quantité de mouvement : exemple (2)

Écoulement dans une tuyère avec constriction



Conservation de conservation de la quantité de mouvement sur V_m :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_m} \varrho \boldsymbol{u} \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \varrho \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{A_e+A_s} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = -\boldsymbol{R} - \int_{A_e+A_s} p_* \boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

soit encore

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho \boldsymbol{u}\mathrm{d}V = -\int_{A_e+A_s} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S - \boldsymbol{R} + (p_e^* A_e - p_s^* A_s)\boldsymbol{e}_x.$$

$$\varrho_e A_e u_e^2 + p_e^* A_e = \varrho_s A_s u_s^2 + p_s^* A_s + \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{R}.$$

Si l'écoulement est isochore ($\varrho_e = \varrho_s = \varrho$) et permanent, alors on a

$$R = A_e \Psi_e - A_s \Psi_s.$$

avec l'énergie totale $\Psi = \varrho u^2/2 + p + \psi$

Formulation locale de la conservation de la quantité de mouvement

La formulation locale des équations de la quantité de mouvement :

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \varrho \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \right) = \varrho \boldsymbol{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \varrho \boldsymbol{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{T}.$$

On peut également l'écrire

$$\frac{\partial \varrho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = \varrho \boldsymbol{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{T},$$

ou bien encore

$$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \varrho (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \varrho \boldsymbol{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{T},$$

où l'on prendra bien garde à la position de la masse volumique ϱ dans les termes différentiels.

Expression cartésienne de la conservation de la quantité de mouvement

Attention à la notation $\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$. Cela ne signifie pas qu'il s'agit du produit entre le vecteur $\boldsymbol{u}$ et le tenseur (matrice) $\nabla \boldsymbol{u}$. En coordonnées cartésiennes (en dimension 2)

$$\begin{aligned}
\varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \varrho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \\
\varrho \frac{\partial v}{\partial t} + \varrho u \frac{\partial v}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial v}{\partial y} &= \varrho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y},
\end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{u} = (u, v)$ les composantes du vecteur vitesse, $(g_x,\ g_y)$ les composantes du vecteur gravité, T_{xy} la contrainte de cisaillement et T_{xx} et T_{yy} les contraintes normales.

Conservation de l'énergie cinétique

C'est une variante de la conservation de la quantité de mouvement. La forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \varrho \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \varrho \boldsymbol{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{T},$$

et en multipliant par $\boldsymbol{u}$ et en remplaçant les termes de la forme $\boldsymbol{u}\partial\boldsymbol{u}$ par $\partial|\boldsymbol{u}|^2/2$, on arrive à

$$\frac{1}{2}\varrho \frac{\partial |\boldsymbol{u}|^2}{\partial t} + \frac{\varrho}{2}\boldsymbol{u} \cdot \nabla(|\boldsymbol{u}|^2) = \varrho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{T}.$$

En introduisant $k = \frac{1}{2}\varrho|\boldsymbol{u}|^2$, en se servant de l'équation de continuité (fluide incompressible) et de l'identité $2\nabla \cdot (k\boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|^2 \nabla \cdot (\varrho \boldsymbol{u}) + \varrho \boldsymbol{u} \cdot \nabla |\boldsymbol{u}|^2$, on a

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k\boldsymbol{u}) = \varrho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{T}.$$

Théorème de Bernoulli

On introduit la *fonction de dissipation* $\Phi = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{D})$, le potentiel gravitaire ($\varrho \boldsymbol{g} = -\nabla \psi$), et $p_* = p + \psi$ la pression généralisée. On tire donc que : $\varrho \boldsymbol{g} - \nabla p = -\nabla p_*$. Le taux de variation de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k \boldsymbol{u}) = \frac{\partial k}{\partial t} + \varrho \boldsymbol{u} \cdot \nabla \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}.$$

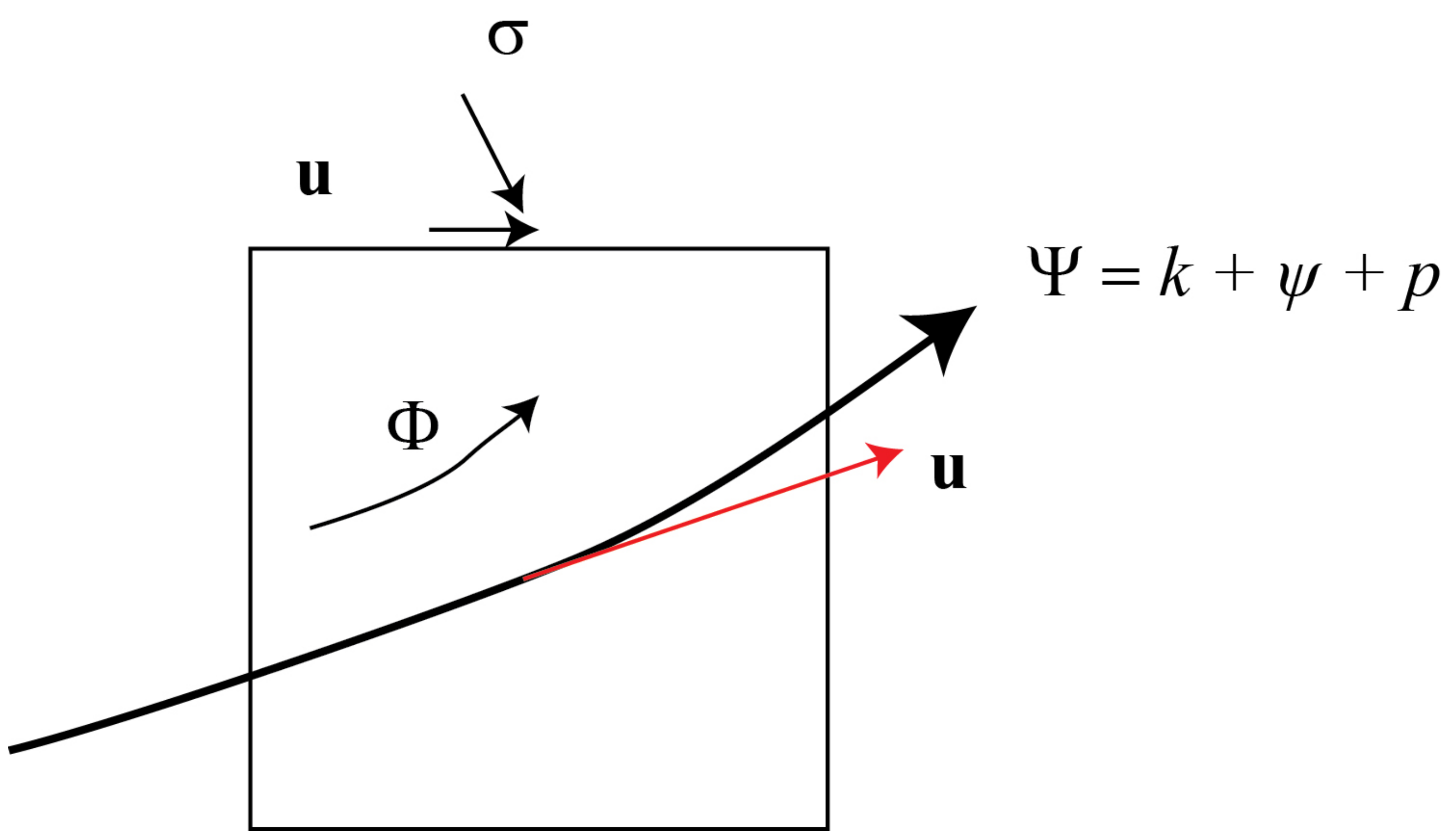
La puissance des efforts internes et externes s'écrit :

$$\varrho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{T} = -\boldsymbol{u} \cdot \nabla p_* - \Phi + \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T}).$$

D'où l'on déduit que la conservation de l'énergie cinétique entraîne

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla (k + \psi + p) = \Phi + \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T}).$$

Interprétation



- Φ représente l'énergie dissipée par unité de volume ;
- $\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T})$ représente l'énergie dissipée ou produite aux frontières du domaine ;
- $\partial k / \partial t$ est la variation locale d'énergie cinétique ;
- $\boldsymbol{u} \cdot \nabla \, (k + \psi + p)$ représente le transport ou *advection* d'une quantité $\Psi = k + \psi + p$.

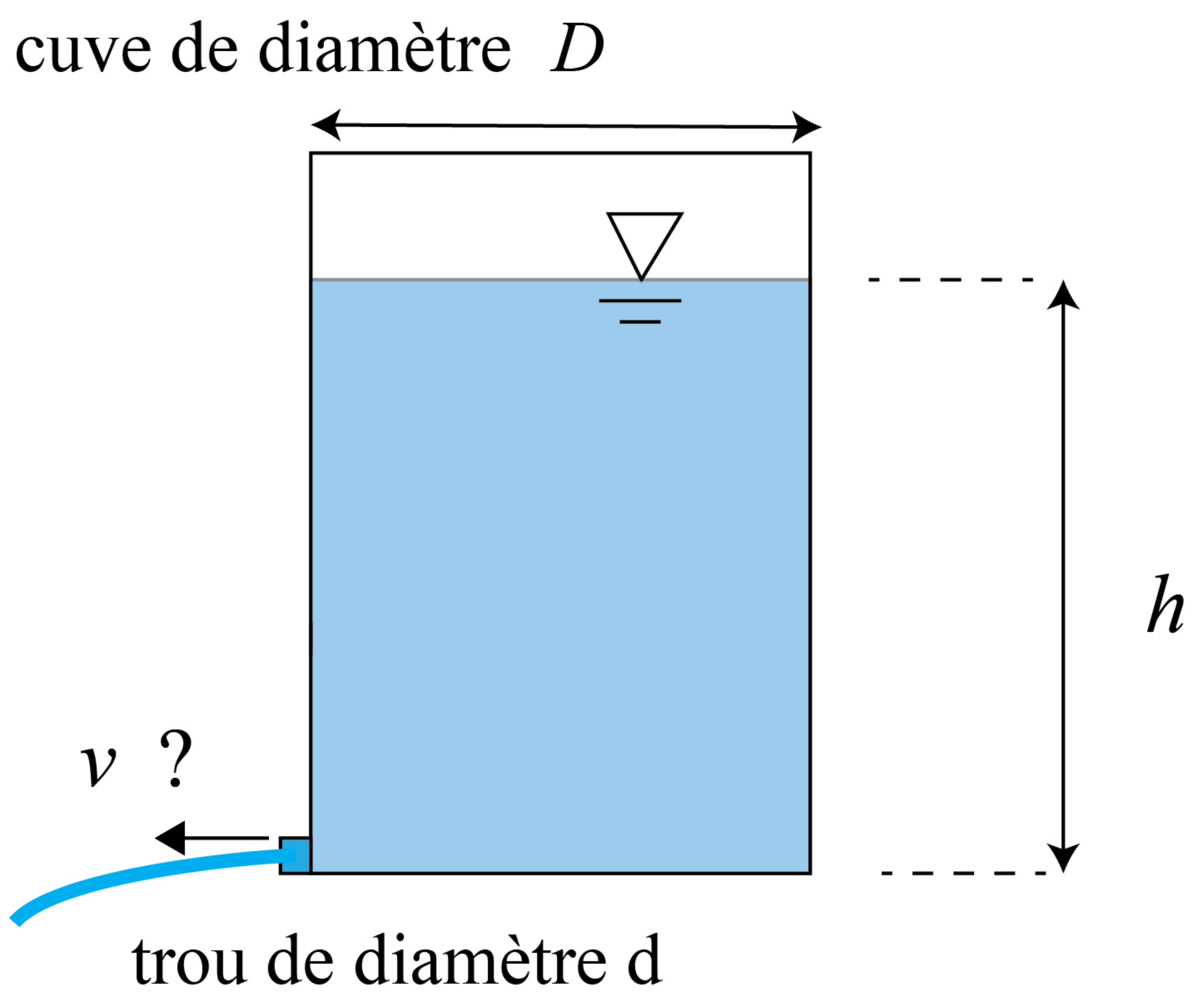
Énoncé du théorème de Bernoulli

Lorsque

- l'écoulement est permanent ($\partial_t k = 0$) et
- le fluide est non visqueux ($\mu = 0$),

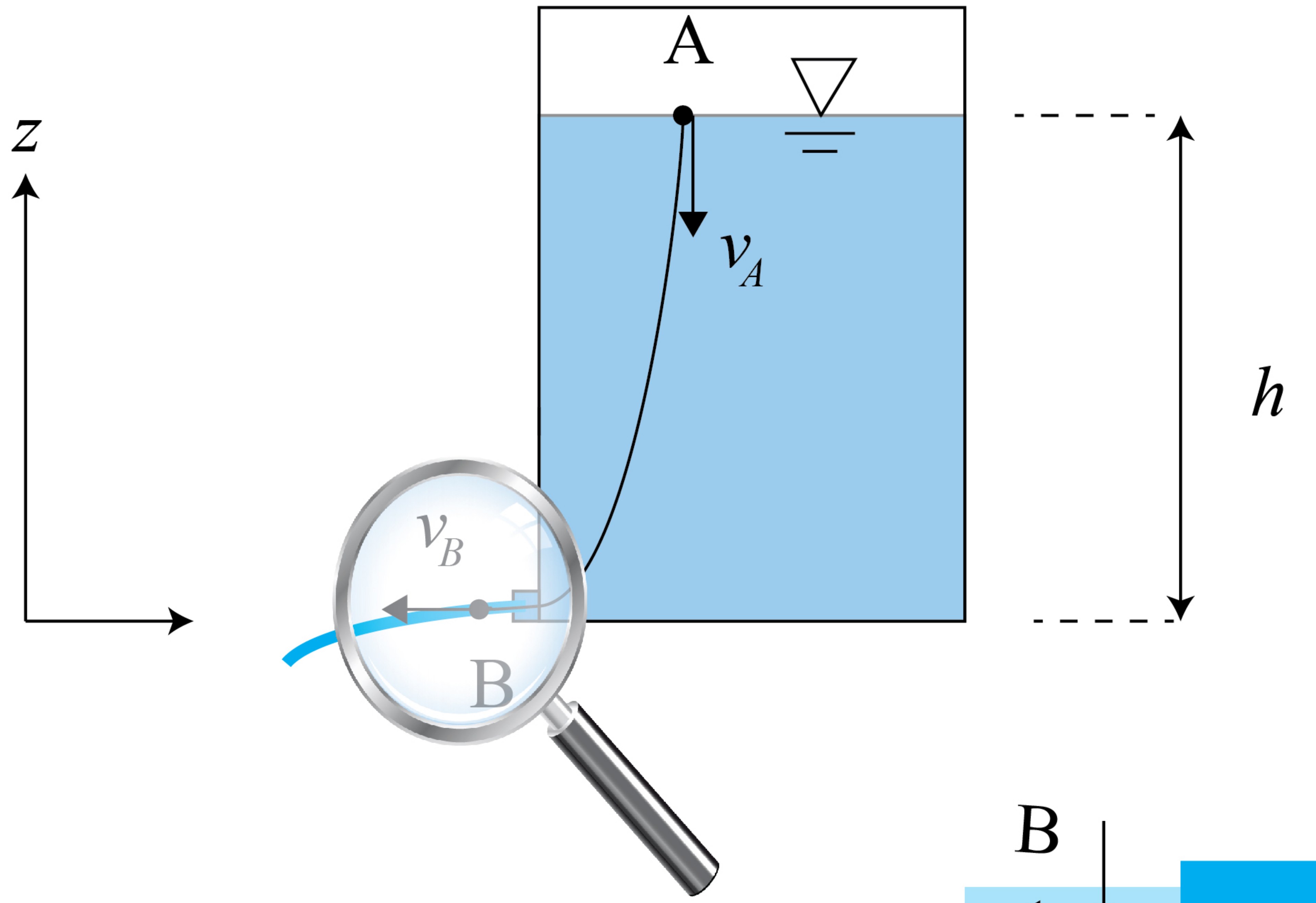
alors la quantité $\Psi = k + \psi + p$ se conserve le long d'une ligne de courant (rappel : une ligne de courant est la courbe dont la tangente en un point est colinéaire à la vitesse en ce point).

Formule de Torricelli

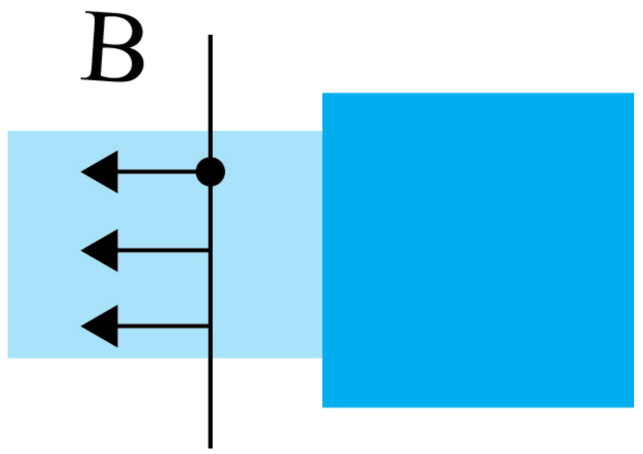


Mise en évidence expérimentale : Evangelista Torricelli (1644). Analyse théorique : Daniel Bernoulli (1738)

Formule de Torricelli



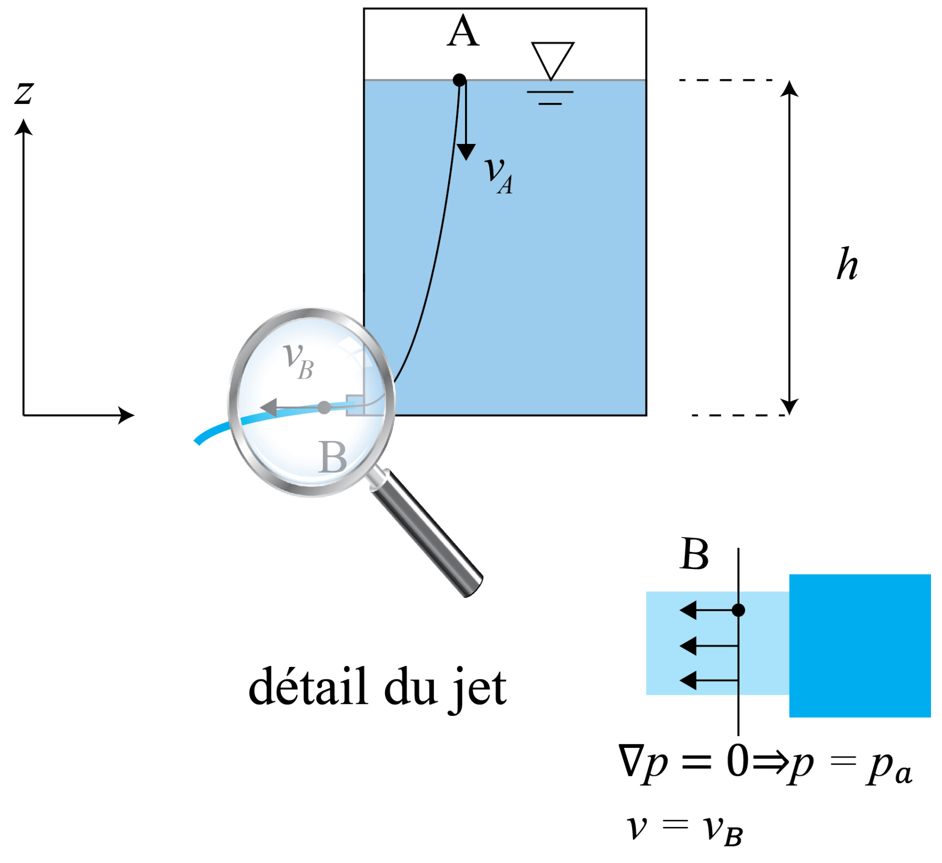
détail du jet



$$\nabla p = 0 \Rightarrow p = p_a$$

$$v = v_B$$

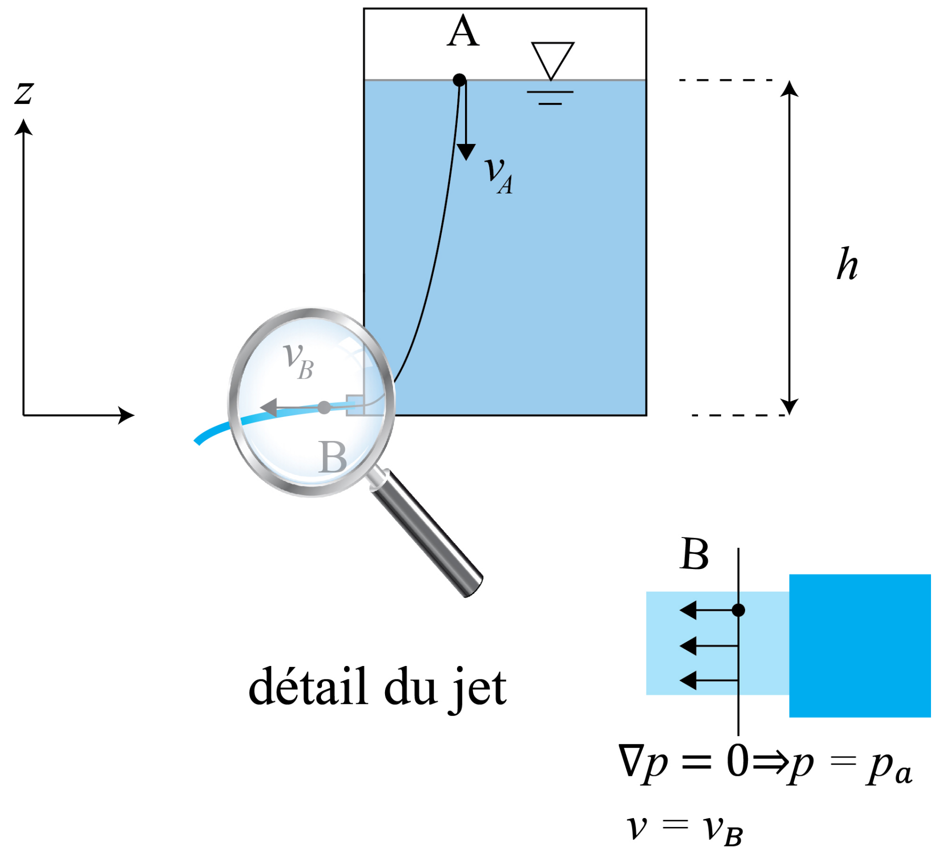
Formule de Torricelli



Conservation de la masse :

$$\pi\frac{D^2}{4}v_A = \pi\frac{d^2}{4}v_B \Rightarrow v_A = \frac{d^2}{D^2}v_B \ll v_B$$

Formule de Torricelli



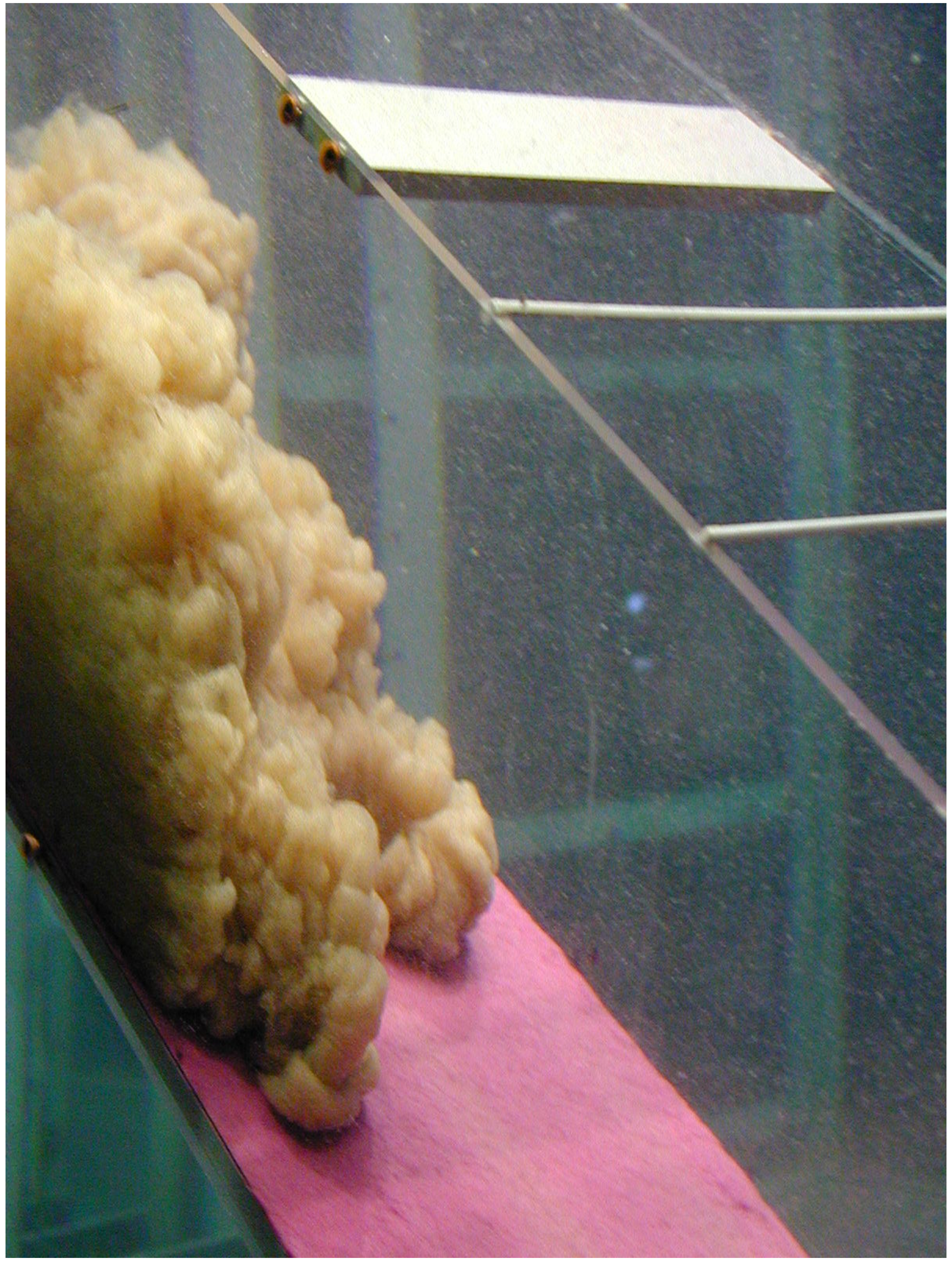
En A : $v_A = 0$, $\psi_A = \varrho g h$, $p_A = p_a$ (pression atmosphérique).

En B : $v_B = v$, $\psi_B = 0$, $p_B = p_a$ (pression atmosphérique).

On a donc :

$$\Psi = \varrho g h = \frac{1}{2}\varrho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

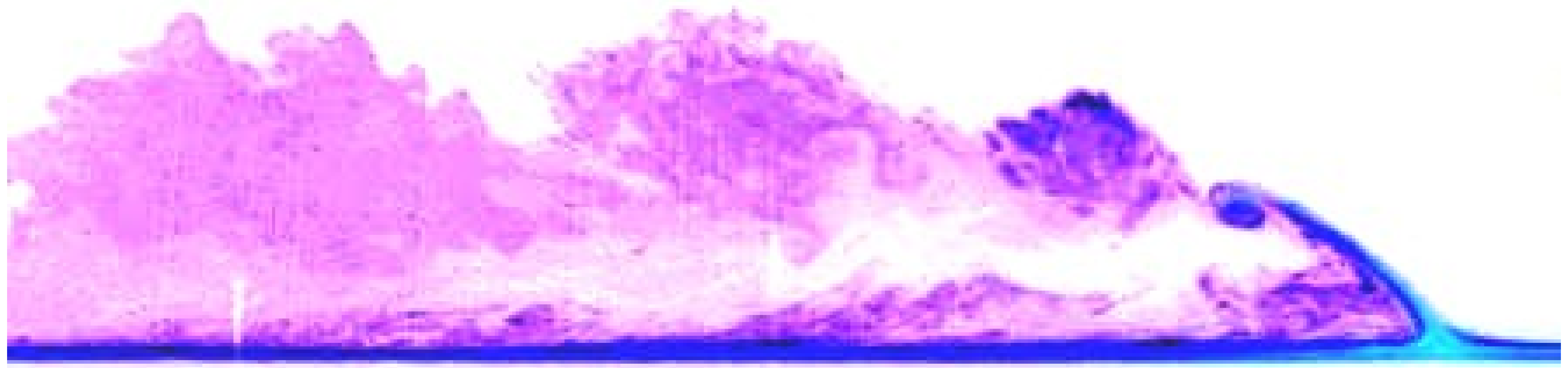
Intrusion d'un courant de gravité

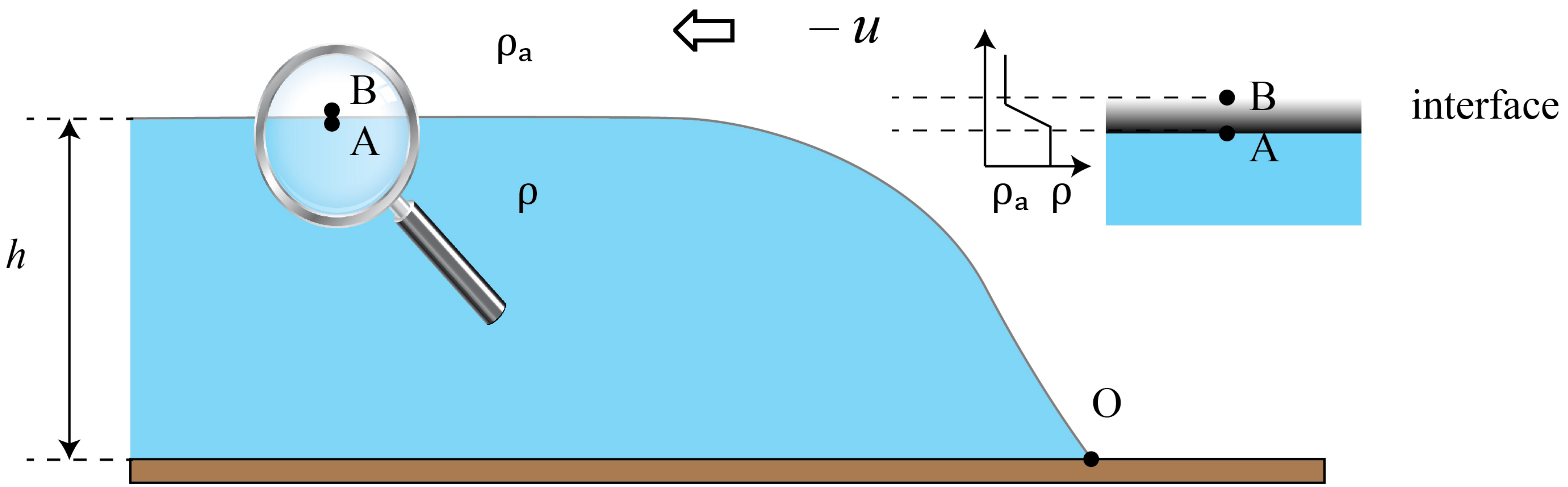


Courant de gravité : écoulement d'un fluide lourd dans un fluide plus léger.

Par ex. : aérosol, poche d'air froid, courant de turbidité, gaz de combat.

Intrusion d'un courant de gravité





Intrusion d'un courant de densité avec $\varrho > \varrho_a$, se déplaçant à vitesse constante u

Intrusion d'un courant de gravité

Hypothèses :

- A et B sont deux points de l'interface, l'un au-dessous (avec une masse volumique ϱ) et l'autre au-dessus (avec une masse volumique ϱ_a). Il y a une saute de masse volumique, mais pas de pression $P_B = P_A$ ni de vitesse $u_B = u_A = -u$;
- ligne de courant entre O et B ;
- O est un point d'arrêt dans le référentiel mobile : $u_0 = 0$;
- distribution hydrostatique de pression au sein du courant : $P_0 = P_A + \varrho g h$.

Théorème de Bernoulli

$$\Psi = P_0 + \varrho_a g z_0 + \frac{1}{2}\varrho_a u_0^2 = P_B + \varrho_a g z_B + \frac{1}{2}\varrho_a u_B^2.$$

Intrusion d’un courant de gravité

Théorème de Bernoulli

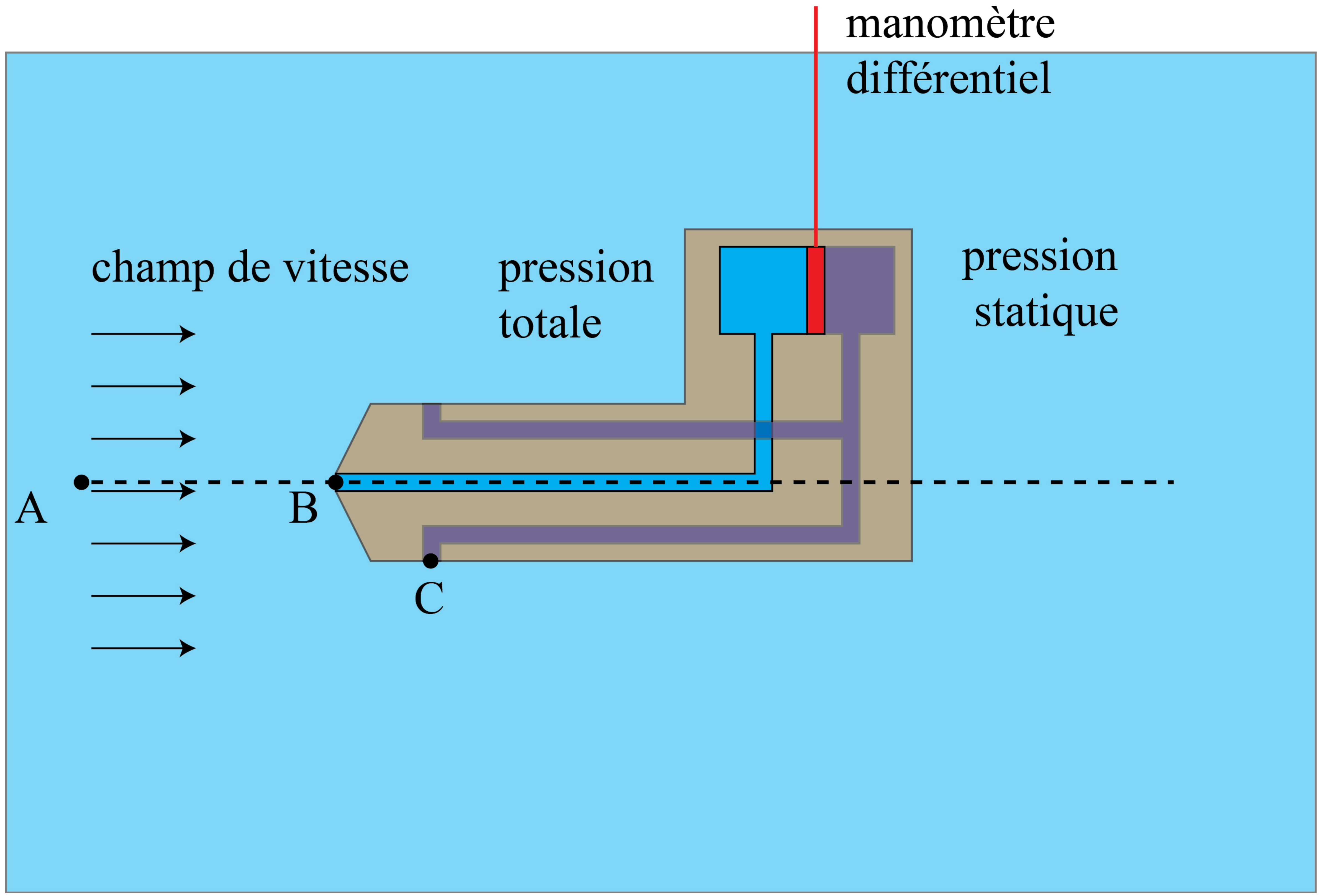
$$\cancel{P_A} + \varrho g h + \cancelto{0}{\varrho_a g z_0} + \cancelto{0}{\frac{1}{2}\varrho_a u_0^2} = \cancel{P_A} + \varrho_a g h + \frac{1}{2}\varrho_a u_B^2,$$

soit encore

$$u = \sqrt{2\frac{\varrho - \varrho_a}{\varrho_a} g h} = \sqrt{2g'h} \Rightarrow Fr = \frac{u}{\sqrt{g'h}} = \sqrt{2},$$

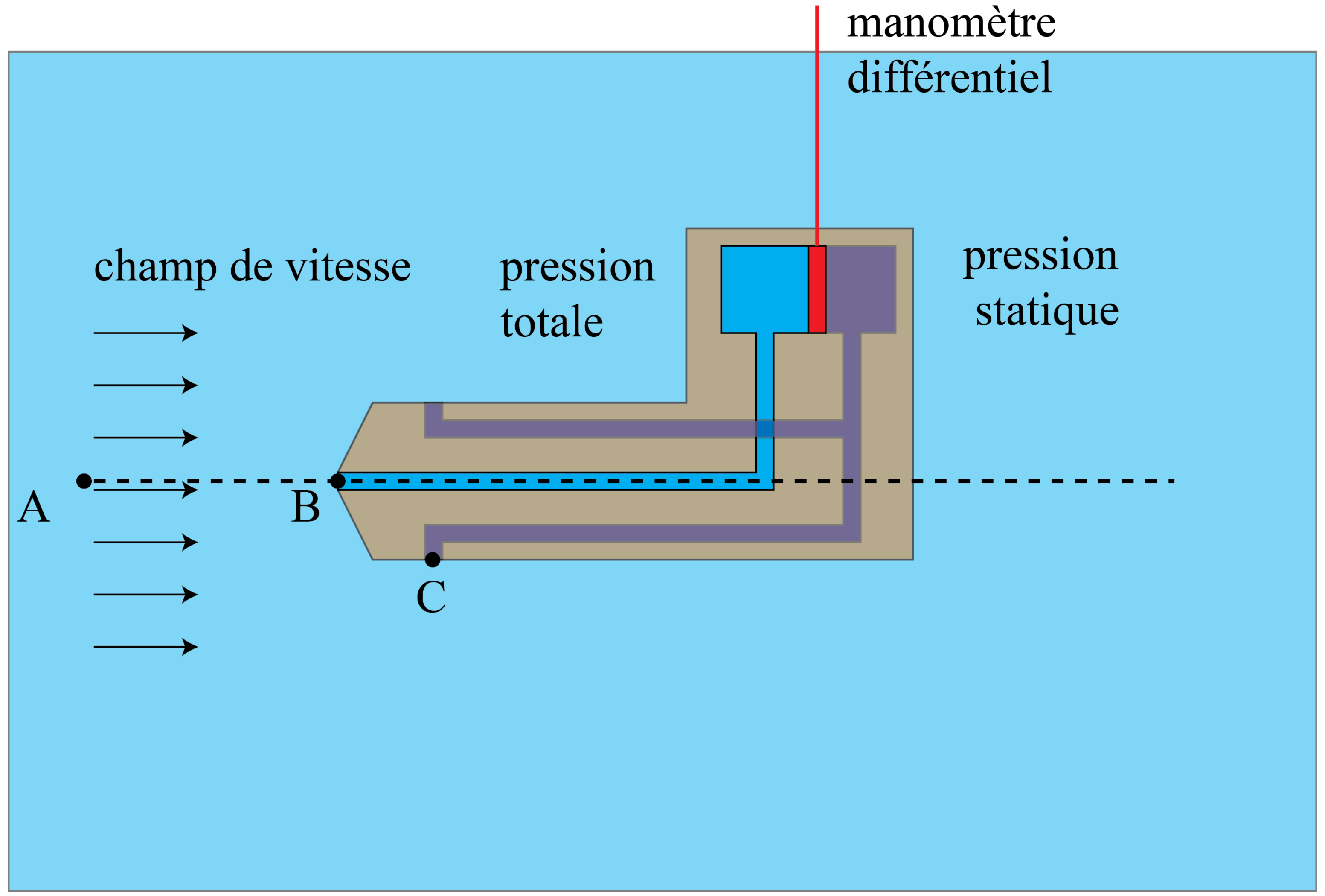
avec $g' = \frac{\varrho - \varrho_a}{\varrho_a} g$ la gravité réduite.

Tube de Pitot



Immersion d'un tube Pitot parallèlement aux lignes de courant.

Tube de Pitot



Considérons une ligne de courant A–B. En A, on a $p = P_A$, $v = v_A = v_\infty$, et $z = z_A$.
En B, on a $p = p_B$, $u_B = 0$, et $z = z_A = z_B$.
Le théorème de Bernoulli donne donc

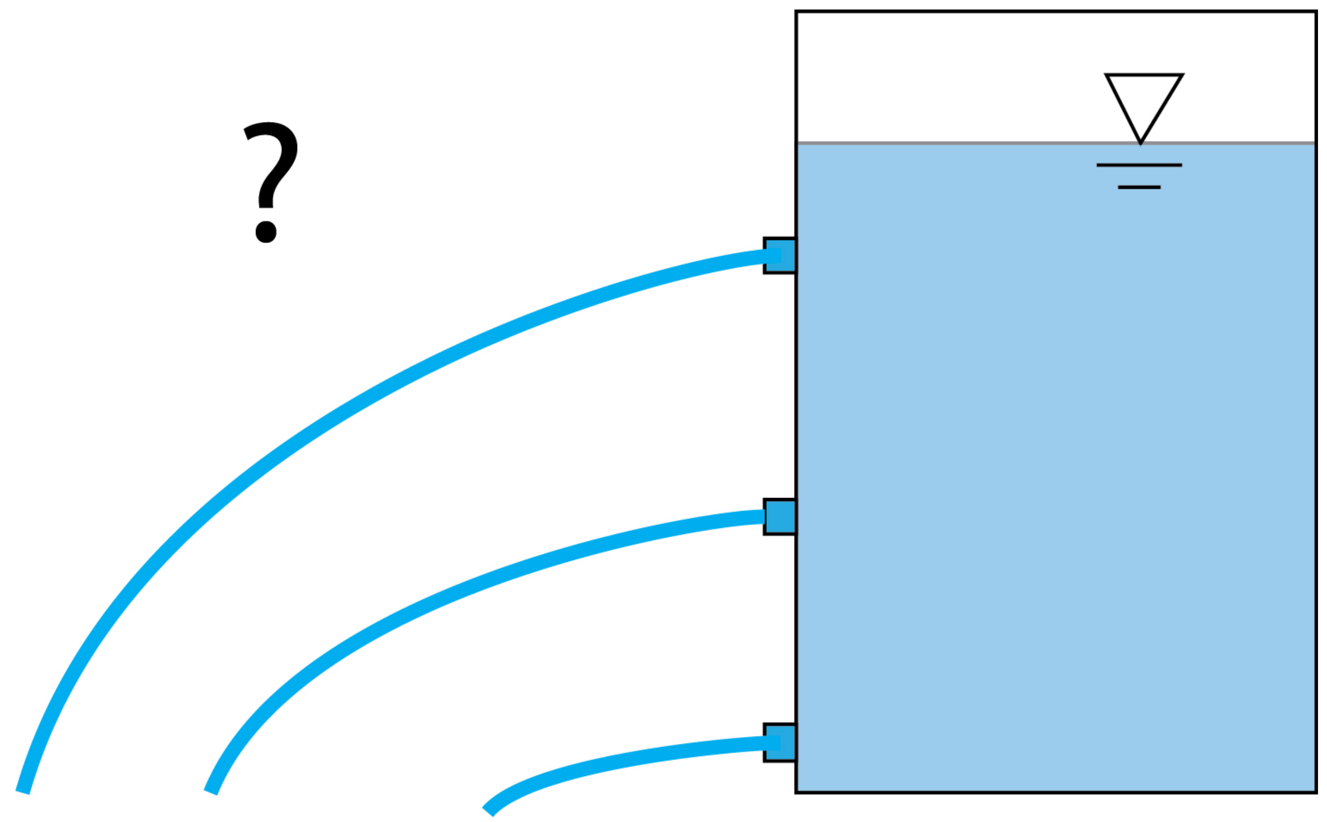
$$\begin{aligned} p_A + \frac{1}{2}\varrho v_A^2 + \varrho g z_A &= p_B + \frac{1}{2}\varrho v_B^2 + \varrho g z_B \\ &= p_B + \varrho g z_A, \end{aligned}$$

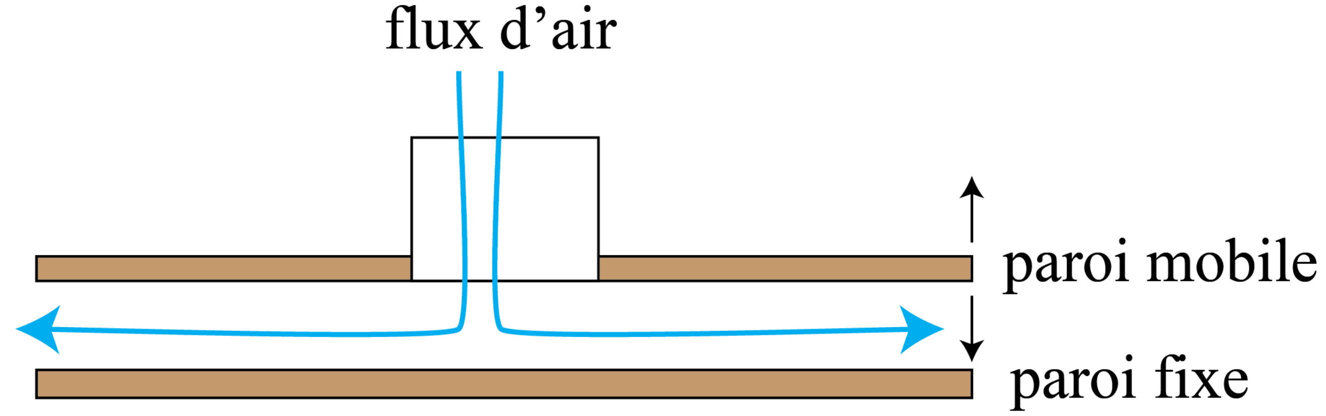
d'où

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2}{\varrho}(p_B - p_A)}.$$

Par ailleurs, $P_A = P_C$. On peut donc calculer la vitesse v_∞.

Réponse au quiz de relaxation





1. Réservoir percé de trois trous : quel jet va le plus loin ?

2. On souffle à travers une plaque percée : que se passe-t-il ?

Réponses