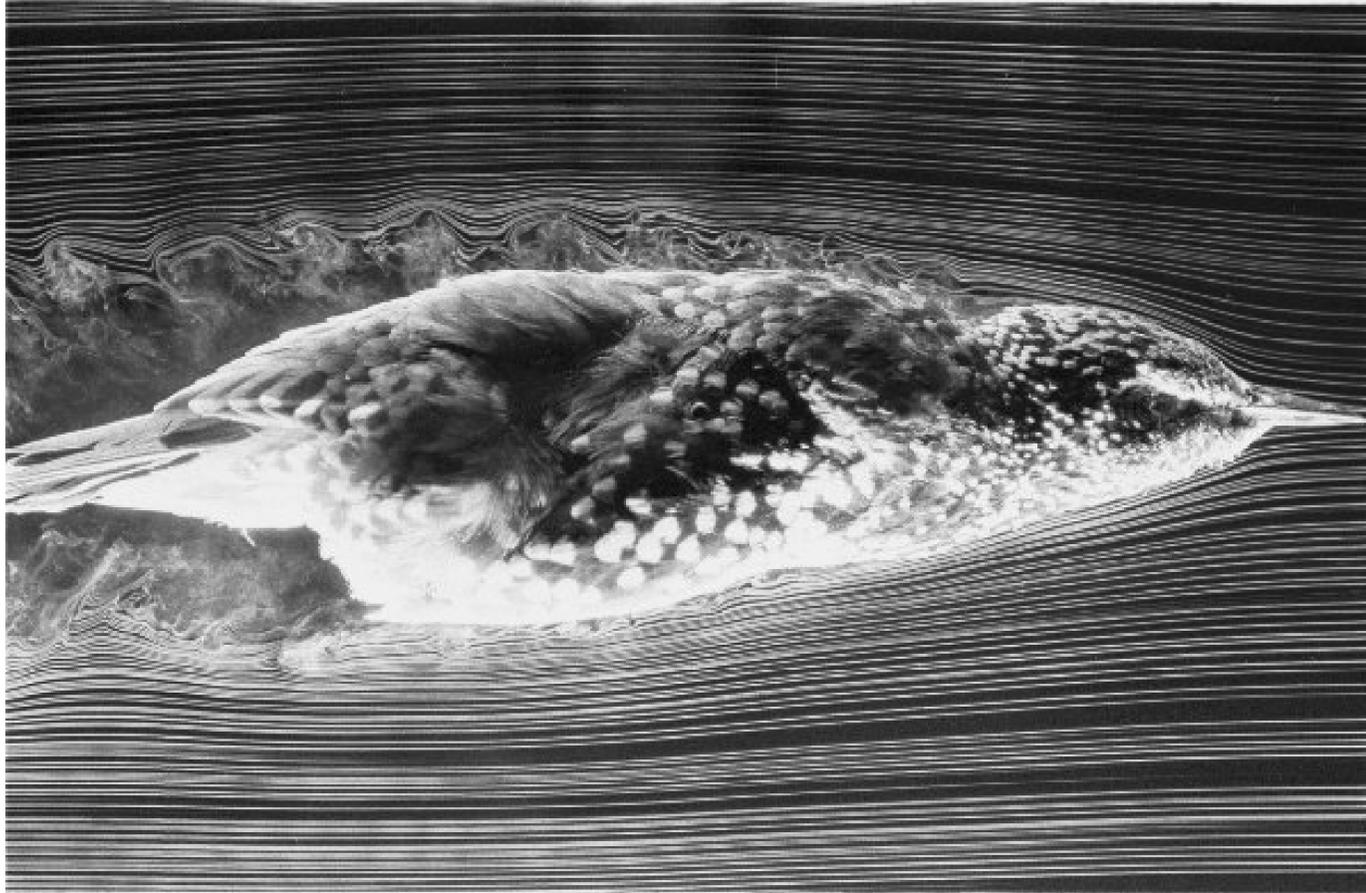




Chapitre 6 : écoulements laminaires et turbulents

Mécanique des fluides

Christophe Ancey



- Équations de Navier–Stokes
- Base phénoménologique
- Adimensionnalisation des équations
- Méthodes de résolution (analytique)
- Écoulements dominés par la viscosité
- Couche limite
- Introduction à la turbulence
- Équations de Navier–Stokes moyennées
- Problème de fermeture

Un petit quiz pour s'échauffer



1. Quand parle-t-on de régime laminaire
 - pour désigner un fluide visqueux ?
 - pour décrire un écoulement à faible vitesse lorsque les lignes de courant sont régulières ?
2. Qu'est-ce qui explique la bonne aérodynamique d'un véhicule ?
 - un faible sillage ?
 - une face profilée ?

Les fluides *newtoniens* constituent une classe importante de fluides. Pour ces fluides, l'expérience de Newton (cisaillement simple, voir chap. 1) a montré qu'il existe une relation linéaire entre contrainte de cisaillement τ et taux de cisaillement $\dot{\gamma}$

$$\tau = \mu \dot{\gamma},$$

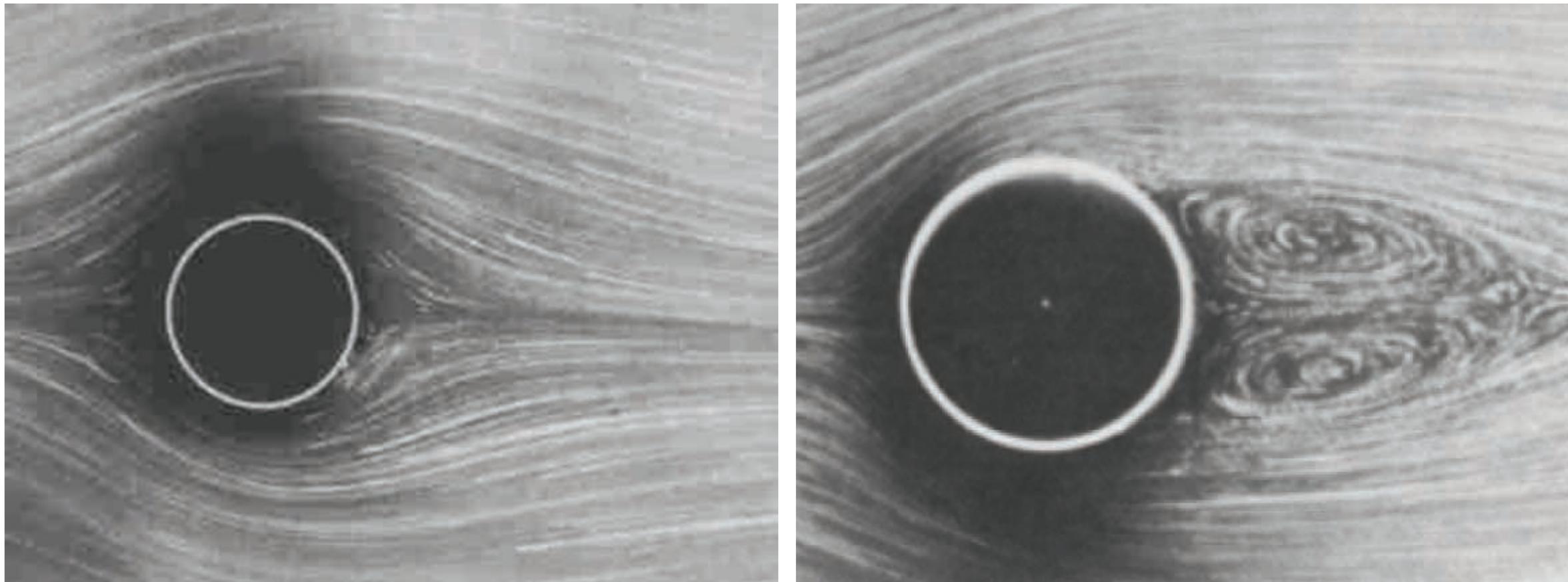
où μ est une constante intrinsèque appelée viscosité (dynamique) à température donnée. Cette loi expérimentale se généralise :

$$\Sigma = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \quad \text{ou bien} \quad \mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$$

avec Σ le tenseur des contraintes, \mathbf{T} le tenseur des extra contraintes et \mathbf{D} le tenseur des taux de déformation.

Si la relation entre contraintes et vitesses de déformations est simple car linéaire, la cinématique des écoulements newtoniens peut être redoutablement compliquée.

Exemple : écoulement autour d'un cylindre pour différents nombres de Reynolds



Une conséquence pratique est que l'on va distinguer :

- les écoulements *laminaires*, qui se produisent à petits nombres de Reynolds,
- les écoulements *turbulents*, qui se produisent à des Reynolds plus élevés.

La distinction se fait donc à l'aide du nombre de Reynolds $Re = \rho U d / \mu$ avec U et d une vitesse et une dimension caractéristique du problème étudié. La transition d'un régime laminaire à un régime turbulent se fait graduellement sur une plage critique de nombre de Reynolds, dont les valeurs dépendent de chaque problème.

Au repos, un fluide ne subit que l'action de la gravité et les seules contraintes en son sein sont les pressions. On a vu précédemment la loi de la statique :

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0.$$

Quand le fluide n'est pas au repos, il y a des variations de vitesse qui produisent du cisaillement (et/ou de l'élongation) et sont donc contrebalancées par des forces de résistance visqueuses ($\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$). Les équations du mouvement sont alors

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

On obtient les équations de Navier–Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D}.$$

En dimension 2 et dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y) , les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible s'écrivent :

- *Conservation de la masse (équation de continuité)*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

avec $\mathbf{u} = (u, v)$ les composantes de la vitesse

- *Conservation de la quantité de mouvement*

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y},$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y}$$

Notation employée

- $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$ la projection du vecteur \mathbf{g} (accélération de la gravitation)
- composantes du tenseur des extra-contraintes \mathbf{T} pour un fluide newtonien :

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$$

$$\mathbf{T} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

car

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\dagger)$$

Rappelons que T_{xy} s'appelle la *contrainte de cisaillement*, T_{xx} s'appelle la *contrainte normale* dans la direction x , et T_{yy} s'appelle la *contrainte normale* dans la direction y .

En insérant l'expression des contraintes dans l'équation de qdm, on a :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

En se servant de l'équation de continuité, on montre qu'on a aussi :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Pour résoudre un problème d'écoulement, il faut connaître

- les conditions initiales : initialement à $t = 0$, quelle était la configuration de l'écoulement ?
- les conditions aux limites : aux frontières du domaine de calcul, qu'impose-t-on à l'écoulement ?

Comme il y a deux types de variables dans les équations du mouvement (variables cinématiques et variables dynamiques), on considère

- les conditions aux limites *cinématiques* : ce sont les conditions que doivent vérifier le champ de vitesse ;
- les conditions aux limites *dynamiques* : ce sont les conditions que doivent vérifier les champs de contrainte et de vitesse aux frontières du domaine.

- Pour une paroi solide orientée par \mathbf{n} , la vitesse vérifie les deux conditions suivantes
- *condition de non-pénétration* : le fluide ne peut pas entrer dans le solide, donc la composante normale de la vitesse est nulle : $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$;
 - *condition d'adhérence* : le fluide adhère à la paroi solide, donc la composante tangentielle doit également être nulle : $u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$, avec \mathbf{t} un vecteur tangent à la paroi.

La vitesse \mathbf{u} est nulle le long d'une paroi solide. C'est la condition aux limites cinématique.

Pour la condition aux limites dynamiques, il y a équilibre de l'interface, donc d'après le principe d'action et de réaction, on a

$$\Sigma_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n} + \Sigma_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

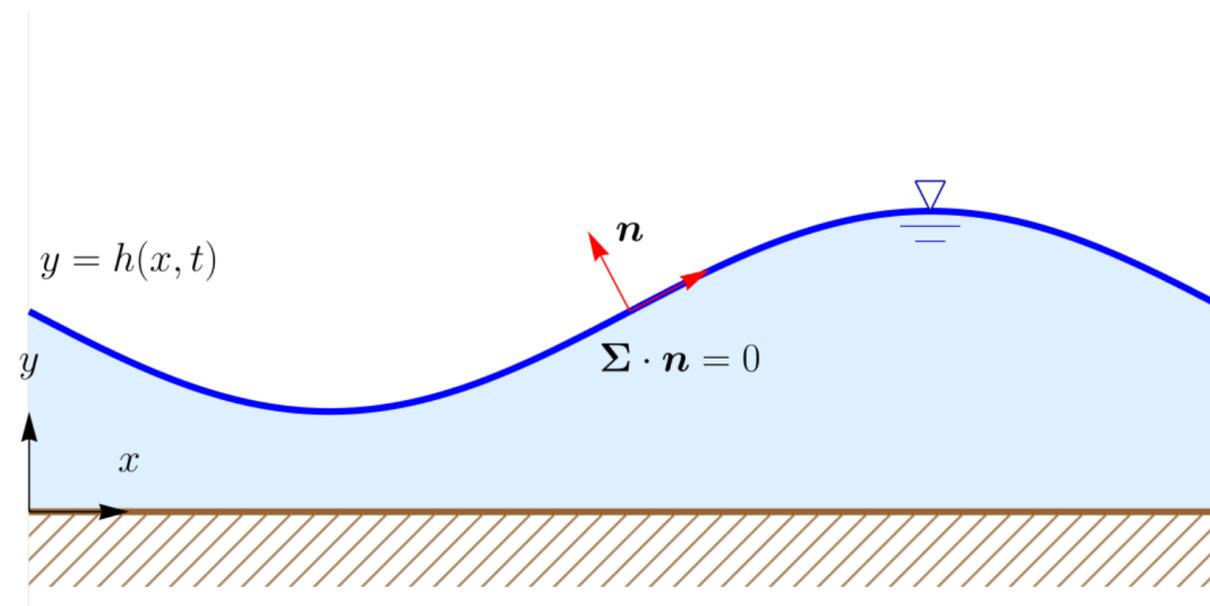
Conditions aux limites pour une frontière fluide

Exemple de la surface d'un écoulement avec l'air : l'équation de la surface libre s'écrit sous la forme implicite $F = y - h(x, t) = 0$. Un point de la surface matérielle à un instant donné reste toujours sur cette surface à n'importe quel autre instant, donc

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(y - h(x, t)) = 0 \implies v(x, h, t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x}$$

où v est ici la vitesse verticale (dans la direction y) de la surface libre. En l'absence d'effet de l'air ambiant, on a :

$$\Sigma_{fluide} \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{1} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = 0$$



Base phénoménologique du comportement newtonien

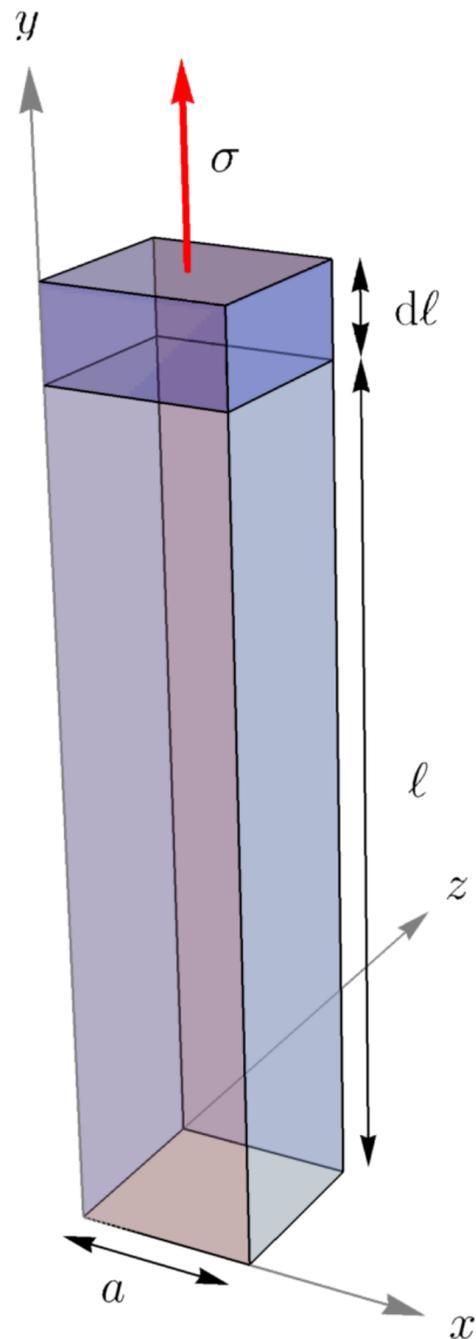


En 1687, Isaac Newton écrivait : *the resistance which arises from the lack of slipperiness of the parts of the liquid, other things being equal, is proportional to the velocity with which the parts of the liquid are separated from one another.*

Autrement dit, la résistance à l'écoulement (c.-à-d. la contrainte τ) est proportionnelle au gradient de vitesse U/h

$$\tau = \mu \frac{U}{h}$$





En 1904, Trouton réalisa des expériences sur une barre de section carrée composée d'un fluide très visqueux (bitume), qui consistait à étirer le fluide à une vitesse constante $\dot{\alpha} = \dot{l}/l$, où l est la longueur de l'échantillon de fluide. Trouton trouva une relation linéaire entre la force normale par unité de surface (contrainte normale) σ et la vitesse d'élongation :

$$\sigma = \mu_e \dot{\alpha} = \mu_e \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$$

mais avec $\mu_e = 3\mu$.

Un problème ?

Méthodologie à mettre en œuvre :

- chercher les simplifications du problème (les « symétries »)
- poser les équations de Navier–Stokes dans le repère approprié : conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement, conditions aux limites (vérifier que le problème est fermé et qu’il est bien posé)
- résoudre les équations après les avoir simplifiées

Exemple : expérience de Newton

Étape 1 : recherche des simplifications.

- le régime est permanent, donc on peut écrire que $\partial_t(\cdot) = 0$;
- l'écoulement est unidirectionnel dans la direction x . La vitesse ne peut pas dépendre de x . Nous verrons ici que la pression est indépendante de x , mais cela n'est pas vrai pour tous les écoulements dans des conduits.

Au final, cela veut dire que l'on a les dépendances suivantes : $p(x, y)$, $u(y)$, et $v(y)$.



Étape 2 : équations du mouvement.

Les équations de Navier–Stokes pour un matériau incompressible s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$
$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

On considère deux sortes de conditions aux limites :

- cinématique : que valent les vitesses aux limites du domaine fluide ?
- dynamique : quelles sont les forces sur ces limites du domaine ?

Exemple : expérience de Newton (conditions aux limites)



Pour les vitesses :

- le long des plaques (en $y = 0$ et $y = h$), la condition de non-pénétration implique

$$v = 0$$

- le long des plaques, la condition d'adhérence donne

$$u = U \text{ en } y = h,$$

$$u = 0 \text{ en } y = 0.$$

Attention, la plaque supérieure est mobile, la vitesse du fluide est celle imposée par la plaque.

Exemple : expérience de Newton (conditions aux limites)



Pour les forces : la force sur la frontière supérieure doit correspondre à celle imposée par la mise en mouvement de la plaque de masse M et de vitesse \boldsymbol{v}

$$M \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F},$$

$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_x$ la force appliquée par l'opérateur pour mettre la plaque en mouvement et $\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)$ étant la force exercée par le fluide sur la plaque, qui par définition s'écrit

$$\boldsymbol{R} = \int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{n} dS.$$

avec $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{T}$ le tenseur des contraintes totales et $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_y$ la normale orientée de l'intérieur (de la plaque) vers l'extérieur.

Exemple : expérience de Newton (conditions aux limites)



Comme la vitesse de la plaque est supposée constante, on tire de l'équation du mouvement de cette plaque que

$$F + R_x = 0.$$

$$-Mg + R_y = 0.$$

soit $R_x = -F$ et $R_y = Mg$.

Cela donne donc

$$\int_S \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_y dS = F \mathbf{e}_x - Mg \mathbf{e}_y,$$

soit encore en $y = h$

$$p - T_{yy} = \frac{Mg}{S},$$
$$T_{xy} = \tau = \frac{F}{S},$$

Exemple : expérience de Newton (résolution)



Étape 3 : résolution des équations.

On commence à résoudre l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Il s'ensuit que v est constant, or la condition de non-pénétration impose $v = 0$.

Exemple : expérience de Newton (résolution)



Le tenseur des taux de déformation

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & u'(y) \\ u'(y) & 0 \end{bmatrix},$$

où l'on note que les termes normaux ($D_{xx} = (\partial_x u)$ et $D_{yy} = (\partial_y v)$) sont nuls compte tenu de la dépendance des composantes de la vitesse vis-à-vis des variables d'espace et de la nullité de v . Le tenseur des extra-contraintes s'écrit donc :

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \mu u'(y) \\ \mu u'(y) & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple : expérience de Newton (résolution)



La projection selon x de ces équations donne

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

où $\tau = T_{xy} = \mu u'(y)$ est la contrainte de cisaillement. On fait de même pour la direction y

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

d'où l'on déduit que la pression est de forme hydrostatique

$$p = -\rho g y + a,$$

avec a une constante d'intégration.

Exemple : expérience de Newton (résolution)



La condition aux limites d'équilibre de la plaque donne

$$p = \frac{Mg}{S} \text{ en } y = h,$$

car $T_{xx} = 0$. Donc on déduit que $a = Mg/S + \rho gh$. L'intégration de la conservation de la qdm donne :

$$u = by + c,$$

avec b et c deux constantes d'intégration. Les conditions aux limites cinématiques imposent $c = 0$ et $b = U/h$. Les profils de vitesse et de pression s'écrivent donc

$$u = U \frac{y}{h} \text{ et } p = \frac{Mg}{S} + \rho g(h - y).$$

La force de frottement correspond à la force appliquée par l'opérateur

$$F = S\tau = S\mu \frac{du}{dy} = S\mu \frac{U}{h}.$$

Adimensionnaliser des équations, c'est travailler avec des variables sans dimension (unité physique) au lieu de variables physiques. Pour cela on va introduire des échelles de grandeur du problème. Par exemple, pour l'abscisse x

$$\underbrace{x}_{\text{variable dimensionnelle}} = \underbrace{L_*}_{\text{facteur d'échelle}} \times \underbrace{X}_{\text{variable sans dimension}},$$

où X désigne une variable sans dimension d'espace, L_* est une échelle de longueur telle qu'on ait X de l'ordre de 1 : $X = O(1)$. Grâce à ce changement de variable, l'unité physique et l'ordre de grandeur sont portés par l'échelle L_* tandis que X ne représente que la variation relative de x .

- L'adimensionalisation des équations du mouvement est une étape importante :
- elle peut permettre de simplifier les équations en supprimant les termes « petits » par rapport à d'autres ;
 - elle permet de trouver les nombres sans dimension qui sont utiles pour proposer des critères de similitude.

Le problème délicat est le choix des échelles caractéristiques du problème étudié.

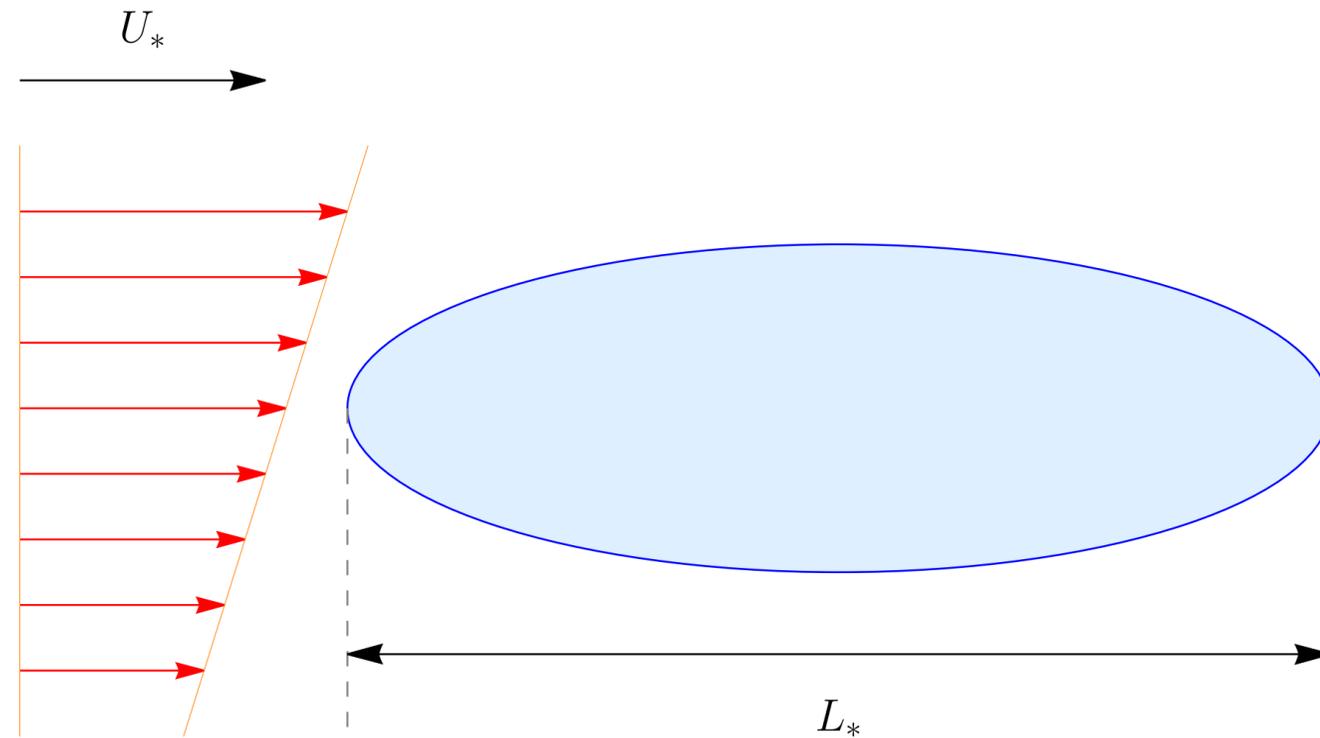
Pour les équations de Navier–Stokes, on introduit un jeu de variables sans dimension :

$$u \rightarrow U_* U \quad \text{et} \quad x \rightarrow L_* X$$

$$T_x \rightarrow \mu \frac{U_*}{L_*} S_X, T_y \rightarrow \mu \frac{U_*}{L_*} S_Y, \text{ et } T_{xy} \rightarrow \mu \frac{U_*}{L_*} S_{XY},$$
$$t \rightarrow \frac{L_*}{U_*} \tau,$$
$$p \rightarrow P_* P$$

avec p qui désigne ici la pression généralisée (pression + potentiel de gravité)

- $P_* = \rho g H_*$ (écoulement à surface libre);
- $P_* = \rho U_*^2$ (écoulement en charge);
- $P_* = \mu U_* / L_*$ (écoulement très lent).



Remarques

- les échelles ne sont pas indépendantes. Par exemple, si on fixe une échelle de vitesse et une échelle de longueur, on se donne nécessairement une échelle de temps ;
- pour les variables d'espace, il peut y avoir plusieurs échelles. Par exemple, une pour la longueur, l'autre pour l'épaisseur.

On part de la conservation de la quantité de mouvement dans les équations de Navier–Stokes incompressible

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}$$

et on introduit les variables adimensionnelles. Après substitution

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = -\frac{P_*}{\rho U_*^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{S}$$

avec

$$\text{Re} = \frac{\rho U_* H_*}{\mu} = \frac{U_* H_*}{\nu},$$

avec $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique. Selon l'échelle de pression, le terme $P_*/(\rho U_*^2)$ se simplifie.

Il y a deux comportements asymptotiques possibles selon la valeur de Re :

- Quand $Re \rightarrow \infty$:

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = -\frac{P_*}{\rho U_*^2} \nabla P$$

Ce sont les *équations d'Euler* sous forme adimensionnelle (pour le fluide dit *parfait* ou fluide non visqueux). Les frottements visqueux peuvent être négligés ;

l'écoulement est donc contrôlé par un équilibre entre forces de pression et d'inertie.

Les équations d'Euler fournissent alors une bonne approximation du mouvement.

Le mouvement d'un avion en vol sub- ou supersonique peut donc être étudié à l'aide de ces équations. Le théorème de Bernoulli fournit des approximations utiles quand la géométrie du problème s'y prête.

- Quand $Re \rightarrow 0$:

$$0 = -\nabla P + \nabla \cdot \mathbf{S}$$

Ce sont les *équations de Stokes* sous forme adimensionnelle (pour le fluide sans inertie). L'écoulement est entièrement commandé par l'équilibre entre gradient de pression et force visqueuse. Ce type d'écoulement s'observe très fréquemment dans des écoulements à travers des matériaux poreux, des écoulements près d'obstacles (couches limites laminaires), des problèmes de sédimentation de particules fines, etc.

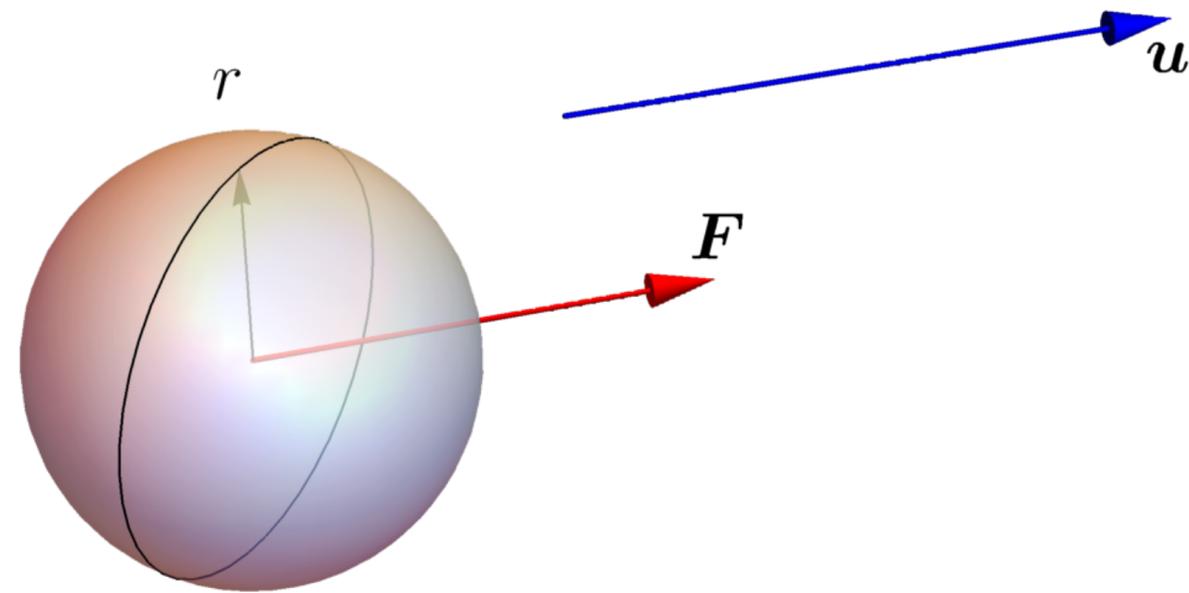
Quand $Re = O(1 - 1000)$, inertie, gradient de pression, et viscosité sont trois processus de même importance. Il faut résoudre l'équation de Navier–Stokes complètement. La transition d'un régime à l'autre dépend du problème étudié.

Pour des écoulements à très faible nombre de Reynolds, les termes inertiels dans les équations de Navier–Stokes sont négligeables et l'écoulement est contrôlé par un équilibre entre pression et contrainte visqueuse. L'approximation des équations de Navier–Stokes quand $Re \rightarrow 0$ est appelée *équation de Stokes*. Sous forme adimensionnelle (avec $P_* = \mu U_* / L$), on a pour un fluide incompressible

$$\begin{cases} \nabla P = \Delta \mathbf{U} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \end{cases}$$

On montre aussi que la pression est une fonction harmonique alors que la vitesse est une fonction dite *biharmonique*

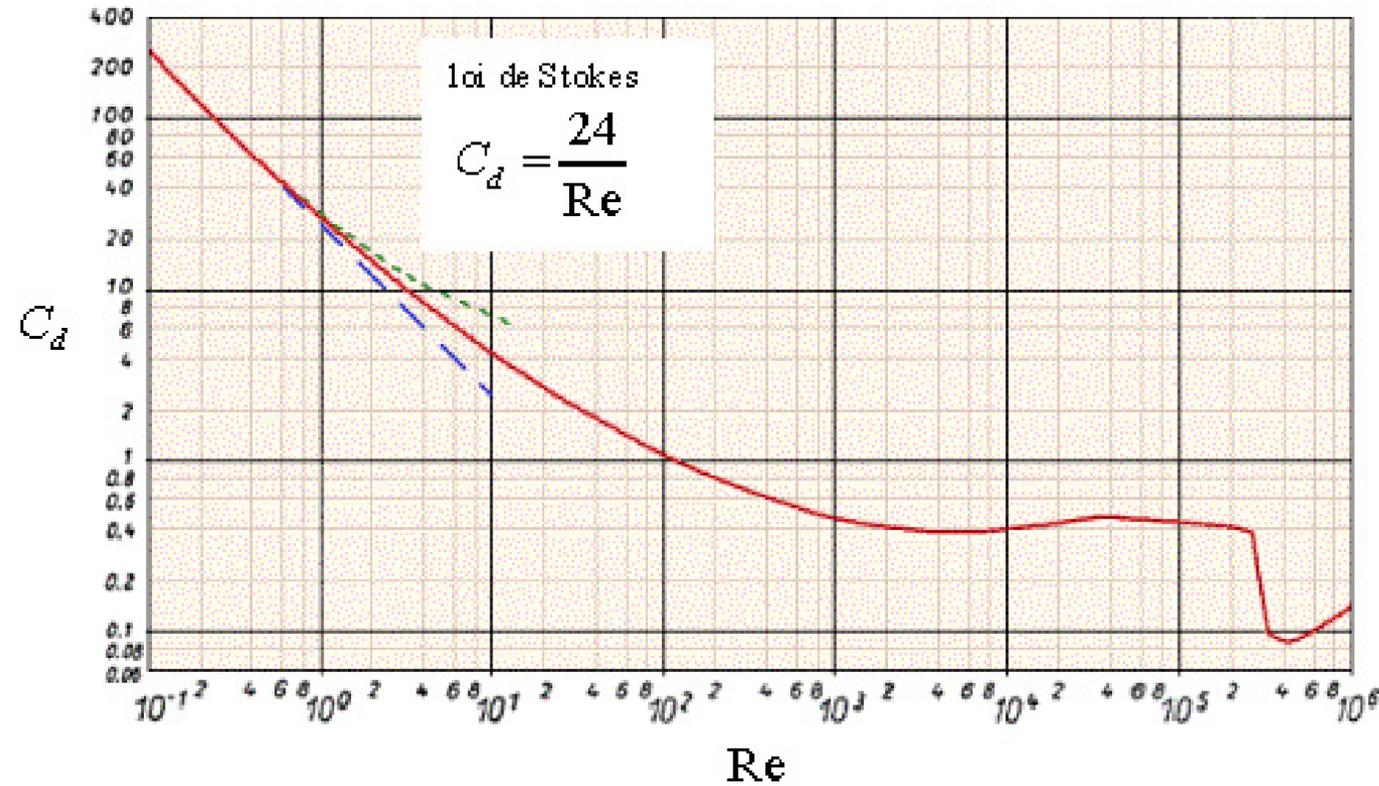
$$\begin{aligned} \Delta P &= 0, \\ \nabla^4 \mathbf{U} &= 0. \end{aligned}$$



Sédimentation d'une particule sphérique de rayon r animée de la vitesse relative u par rapport à celle d'un fluide de viscosité μ . La résolution des équations de Stokes permet de trouver la vitesse du fluide autour de la particule, donc la force exercée par le fluide sur la particule

$$F = 6\pi\mu r u$$

Applications des équations de Stokes : sédimentation



Notons au passage que la force de frottement exercée par le fluide se met le plus souvent sous la forme

$$F = \frac{1}{2} C_d(Re_p) \rho_f \pi r^2 u_p^2,$$

avec C_d le coefficient dit de *traînée* et avec $Re_p = \rho_f u 2r / \mu$. Pour la loi de Stokes, on a :

$$C_d = \frac{24}{Re_p}.$$

Calcul de la vitesse de sédimentation : équilibre du poids déjaugé (= poids - force d'Archimède) et de la force de frottement

$$F = 6\pi\mu r u = m'g,$$

avec $m' = 4(\rho_p - \rho_f)\pi r^3/3$. Cette relation est souvent appelée *loi de Stokes*. On déduit immédiatement

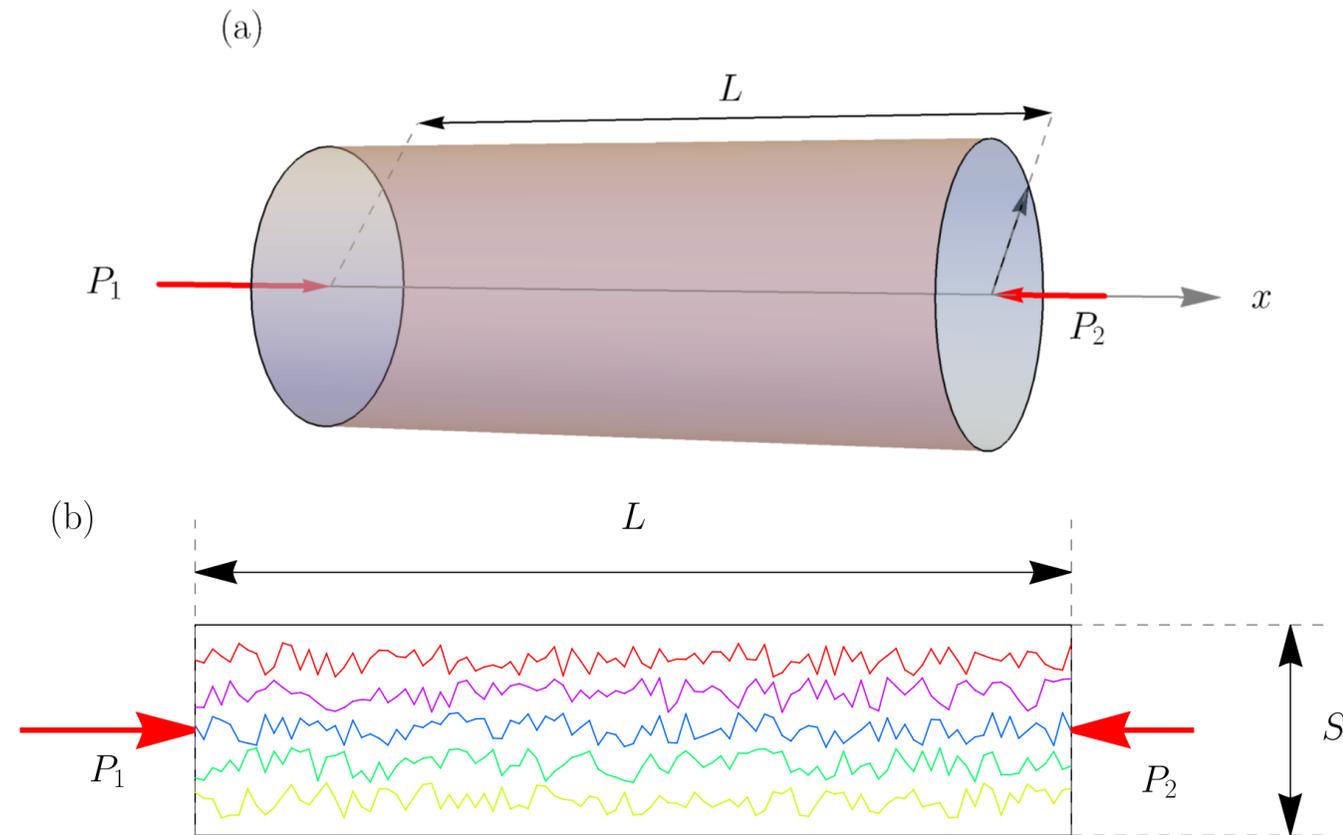
$$u = \frac{m'g}{6\pi\mu r} = \frac{2}{9}(\rho_p - \rho_f)\frac{r^2 g}{\mu}.$$

Exemple : vitesse de sédimentation d'une argile avec $r = 10^{-6}$ m et $\rho_p = 2650$ kg/m³ dans de l'eau ($\rho_f = 1000$ kg/m³ et $\mu = 10^{-3}$ Pa·s) :

$$u = \frac{2}{9}(2650 - 1000)\frac{10^{-12} \times 9,81}{10^{-3}} = 0,0036 \text{ mm/s}.$$

Le nombre de Reynolds particulaire associé est $Re_p = 37,2 \times 10^{-6} \ll 1$.

Applications des équations de Stokes : milieux poreux



Intégration des équations de Stokes pour un écoulement visqueux dans un cylindre de rayon R et de longueur L soumis à un gradient de pression : $\Delta P/L$ avec $\Delta P = (P_2 - P_1)$. Le débit vaut

$$Q = \frac{\pi \Delta P R^4}{8 L \mu},$$

relation que l'on peut généraliser à un milieu poreux vu comme un assemblage de petits tubes :

$$Q = k_0 \frac{\Delta P S}{L \mu}.$$

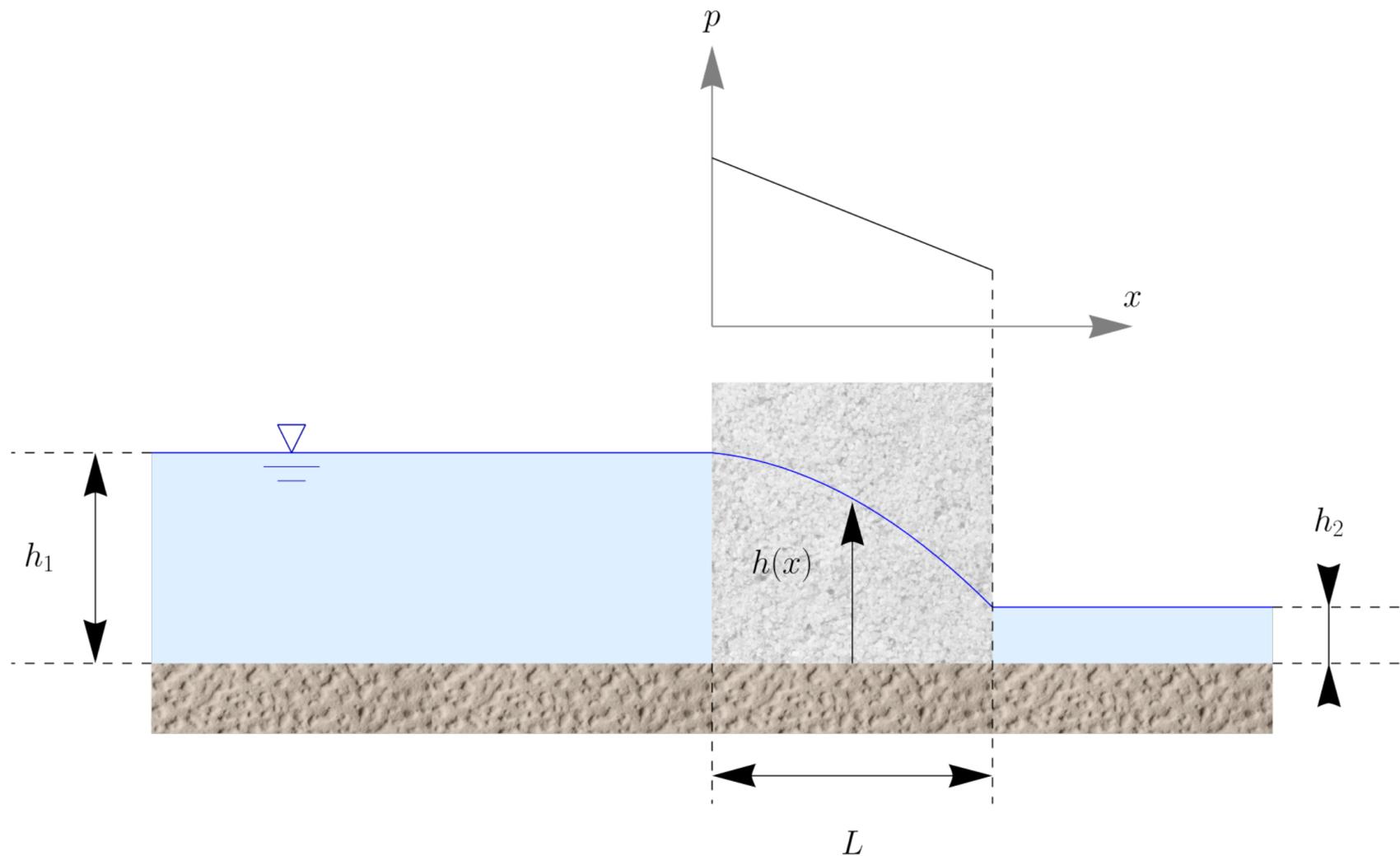
Loi phénoménologique de Darcy

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\rho g} \nabla p,$$

avec $k = \rho g k_0 / \mu$ la conductivité hydraulique [m/s] et k_0 la perméabilité (intrinsèque) [m²]. Si on introduit la charge hydraulique $H = p / (\rho g)$, alors on a

$$\mathbf{u} = -k \nabla H$$

	k_0 (10 ⁻⁶ m ²)
sol	0,1–10
roche dure (grès)	5×10^{-4}
roche sédimentaire (calcaire)	$2 \times 10^{-3} - 0,05$
sable	20–200



Écoulement à travers un talus

Hypothèses : écoulement 1D, permanent, lent à travers un talus. Le débit q par unité de largeur est constant $q = uh$. La loi de Darcy donne

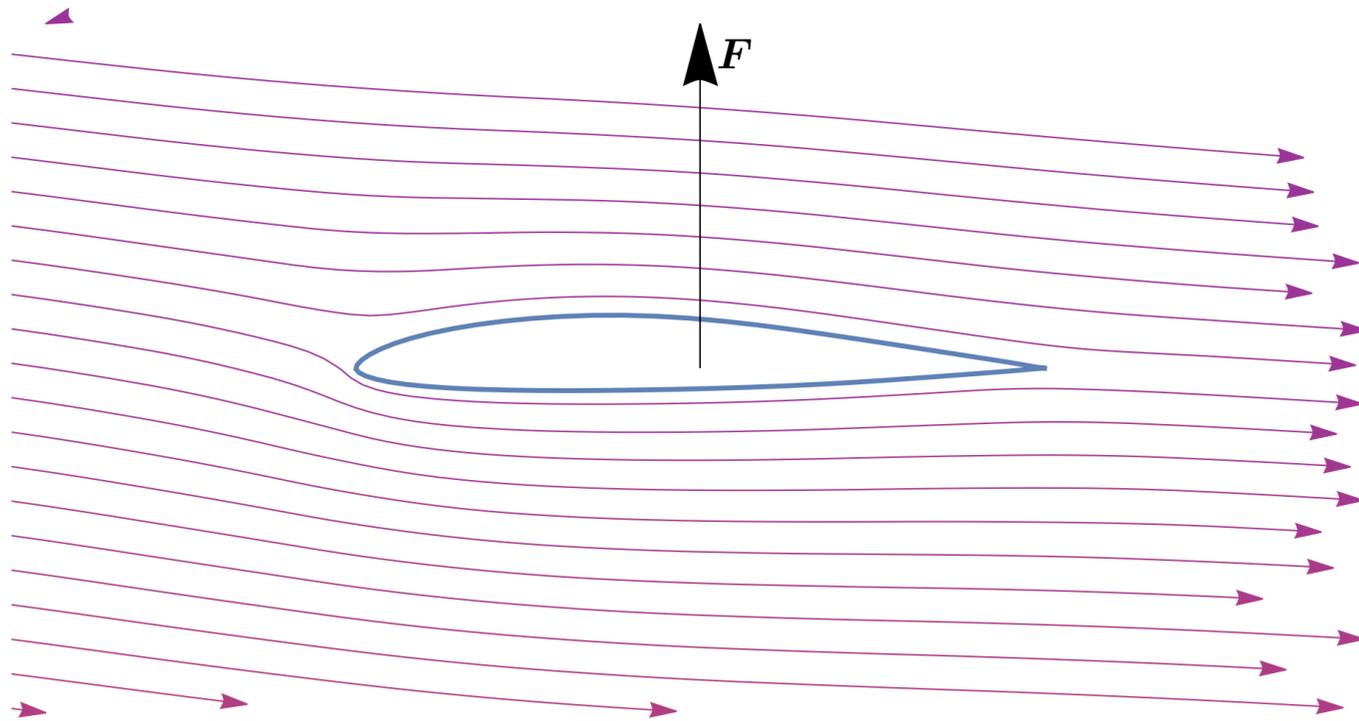
$$q = uh(x) = \left(-k \frac{\partial h}{\partial x} \right) h(x).$$

Par intégration

$$qx = -\frac{1}{2}kh^2 + a,$$

soit encore

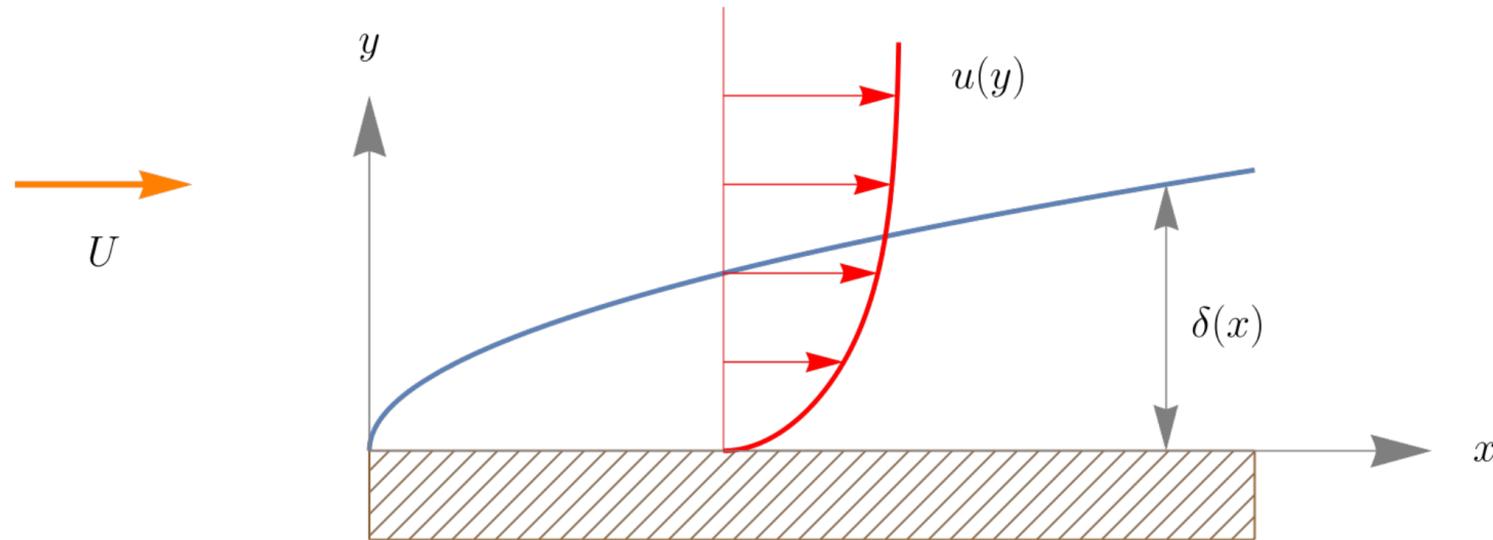
$$q = \frac{1}{2L}k(h_1^2 - h_2^2).$$



Paradoxe de d'Alembert : si on calcule la force F exercée par un fluide supposée non visqueux en écoulement permanent autour d'un objet tel qu'une aile d'avion, on trouve que

$$F = 0.$$

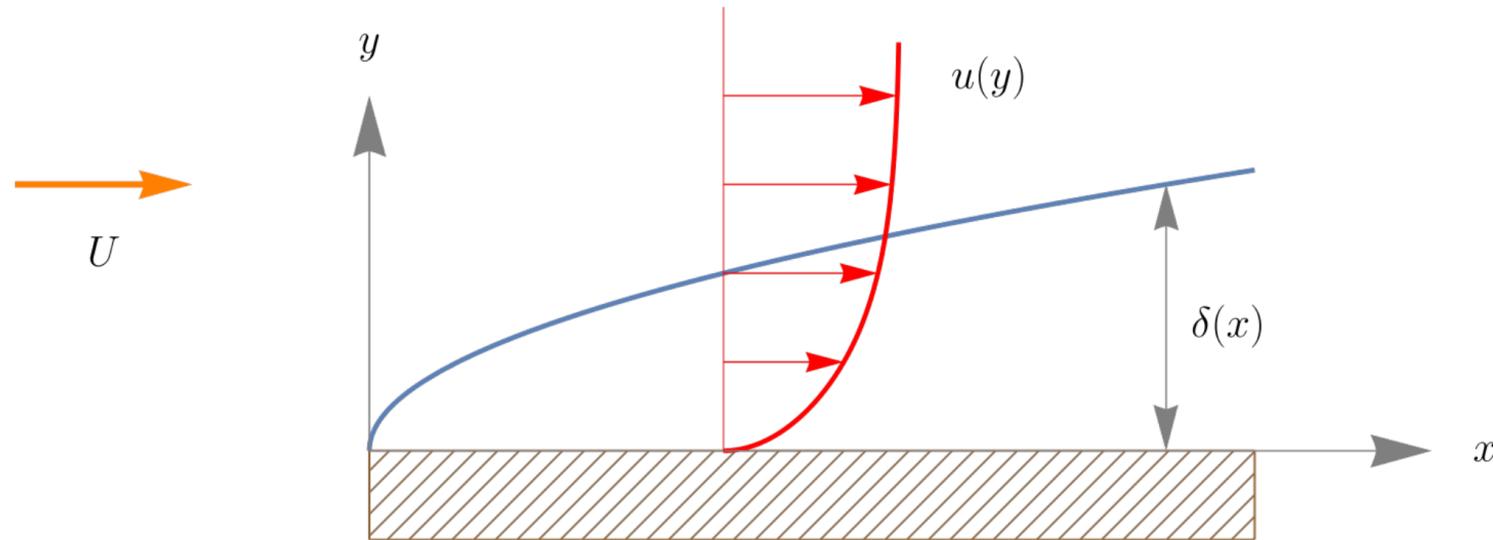
Les équations d'Euler et le théorème de Bernoulli ne permettent pas de calculer les forces de portance et de traînée. Pourquoi ?



Dans les écoulements à grande vitesse près d'une paroi, la condition de non-glissement implique que le nombre de Reynolds local tend vers 0. Il existe une zone de faible épaisseur accolée à la paroi que l'on appelle *couche limite*. Cette notion a été proposée par Prandtl en 1905 :

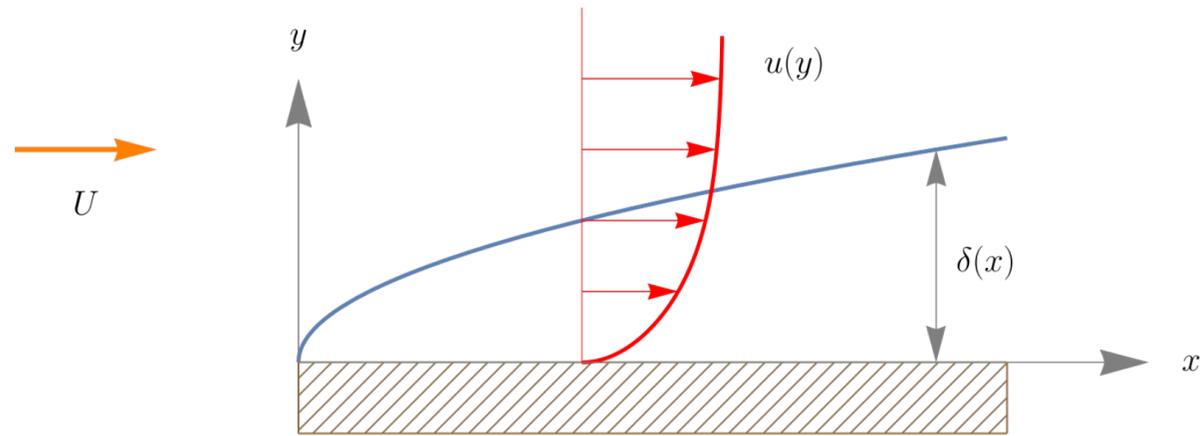
- près d'une paroi solide, il existe une couche de très faible épaisseur dans laquelle les forces de viscosité sont prédominantes ;
- loin des parois, l'écoulement peut être considéré comme turbulent ou non visqueux.

Couche limite : estimation de l'épaisseur δ



Analyse dimensionnelle avec des échelles locales ! Deux échelles de longueur variables : x et $\delta(x)$ car l'épaisseur n'est pas constante. On prend U_* et $T_* = x/U_*$ comme échelles de vitesse et de temps. On suppose que $\epsilon = \delta/x \ll 1$ (la couche est très peu épaisse).

Couche limite : estimation de l'épaisseur δ



Considérons la conservation de la quantité de mouvement selon x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_*}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Le terme d'inertie (et de pression) est d'ordre

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} \sim \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho \frac{U^2}{x}$$

Les termes de viscosité ont les ordres de grandeur suivants

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \mu \frac{U}{x^2} = \mu \epsilon^2 \frac{U}{\delta^2} \text{ et } \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}$$

Couche limite : estimation de l'épaisseur δ



Les forces de viscosité contrebalancent localement l'inertie du fluide

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \delta = x \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}},$$

On définit un nombre de Reynolds local sous la forme

$$\text{Re}_x = \frac{\rho U x}{\mu}.$$

On a

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}} \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U}} x$$

Couche limite : équations du mouvement



On part des équations de Navier–Stokes en régime permanent

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$
$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).$$

avec les conditions aux limites

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x).$$

Couche limite : équations du mouvement



On introduit les échelles et variables adimensionnelles suivantes

$$u \rightarrow U_* U \quad v \rightarrow V_* V \quad x \rightarrow L_* X, \text{ et } y \rightarrow H_* Y$$
$$t \rightarrow \frac{L_*}{U_*} \tau, \text{ et } p \rightarrow \rho U_*^2 P$$

avec U_* , V_* , L_* , et H_* des échelles de vitesse, de longueur, et de hauteur de la couche limite, respectivement. On pose

$$\text{Re} = \frac{\rho U_* L_*}{\mu}, \epsilon = \frac{H_*}{L_*}, V_* = \epsilon U_* \text{ et } H_* = L_* \text{Re}^{-1/2}$$

Couche limite : équations du mouvement



La forme adimensionnelle des équations de Navier–Stokes est alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ \epsilon \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Re}^{-2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}.\end{aligned}$$

Au premier ordre en ϵ , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial Y}.\end{aligned}$$

Couche limite : équation de Blasius



Considérons un écoulement externe uniforme (u_e constant et pas de gradient de pression). Les équations de couche limite sous forme dimensionnelle sont

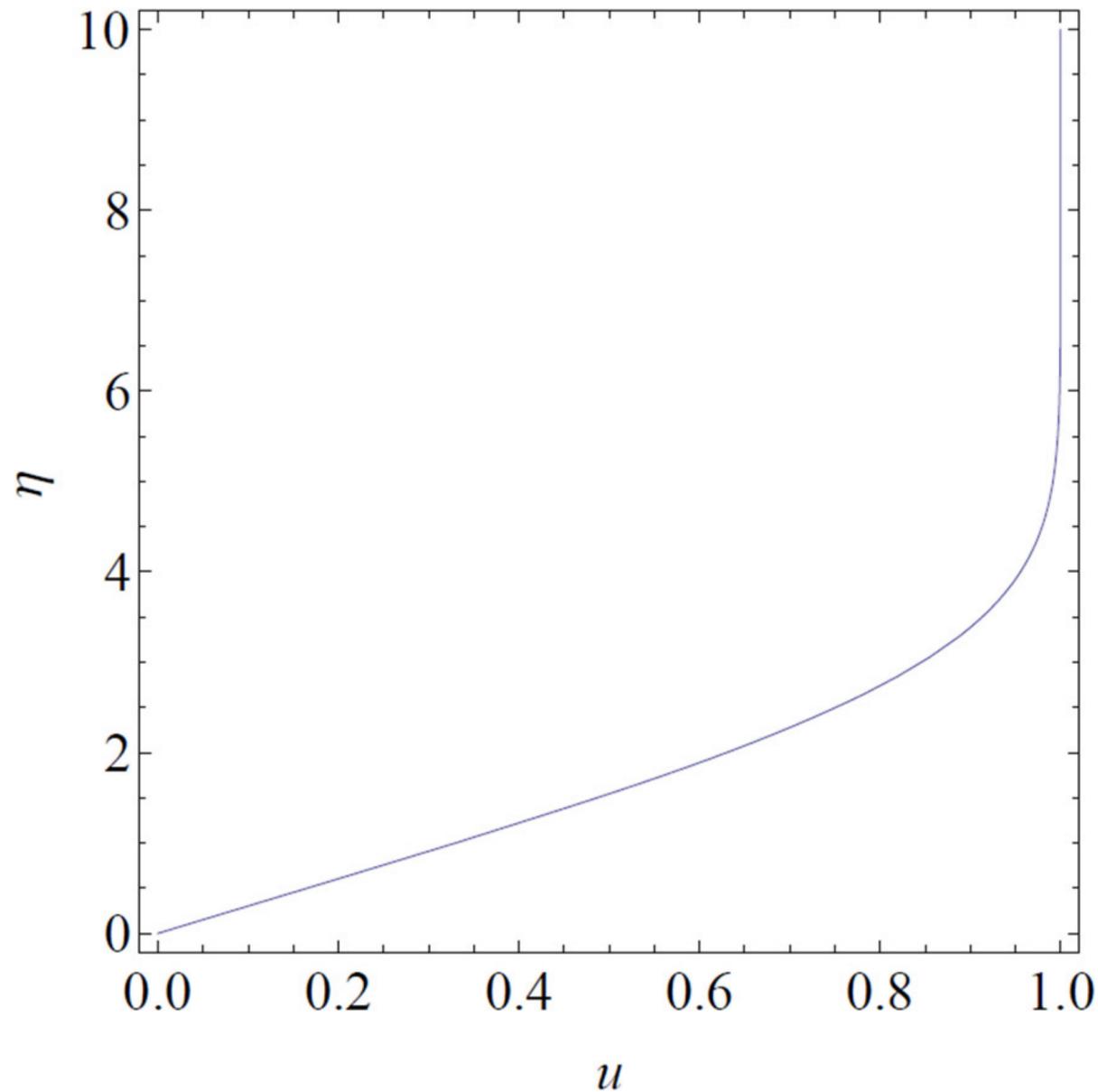
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

On introduit la fonction de courant ψ définie telle que $u = \psi_y$ et $v = -\psi_x$.

L'équation de quantité de mouvement devient alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

Couche limite : équation de Blasius



Il existe des solutions auto-similaires de la forme

$$\psi = \sqrt{u_e x \nu} f(\eta), \text{ avec } \eta = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}$$

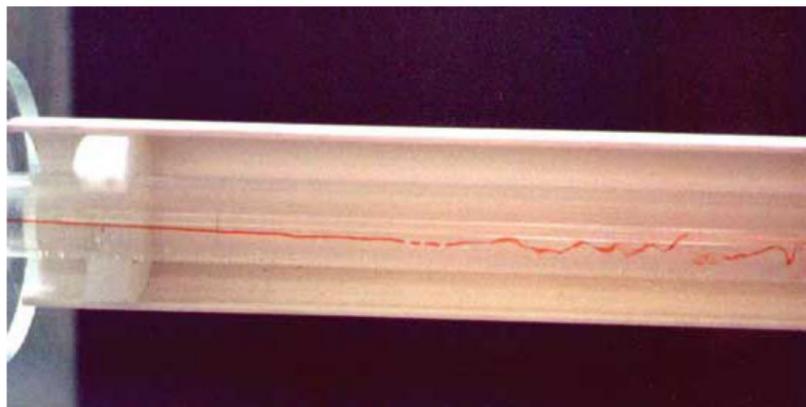
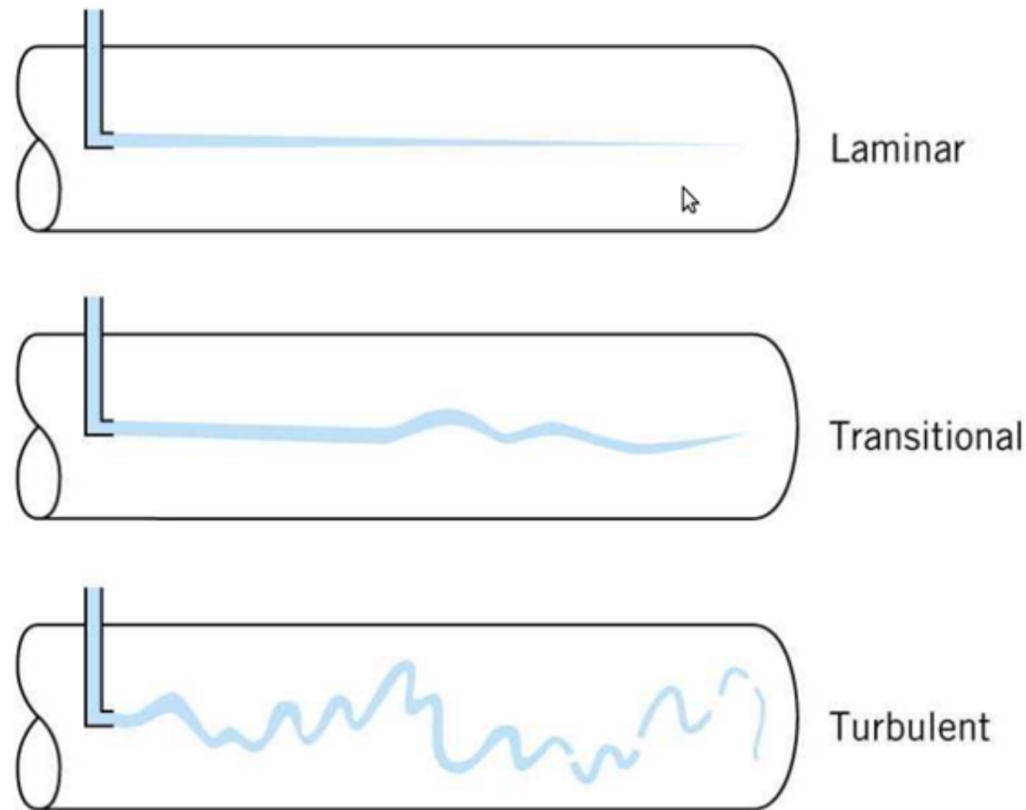
où f est solution de l'équation différentielle ordinaire (qui se résout numériquement)

$$2f''' + ff'' = 0,$$

Une fois cette équation intégrée, on peut calculer le champ de vitesse

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e f'(\eta),$$

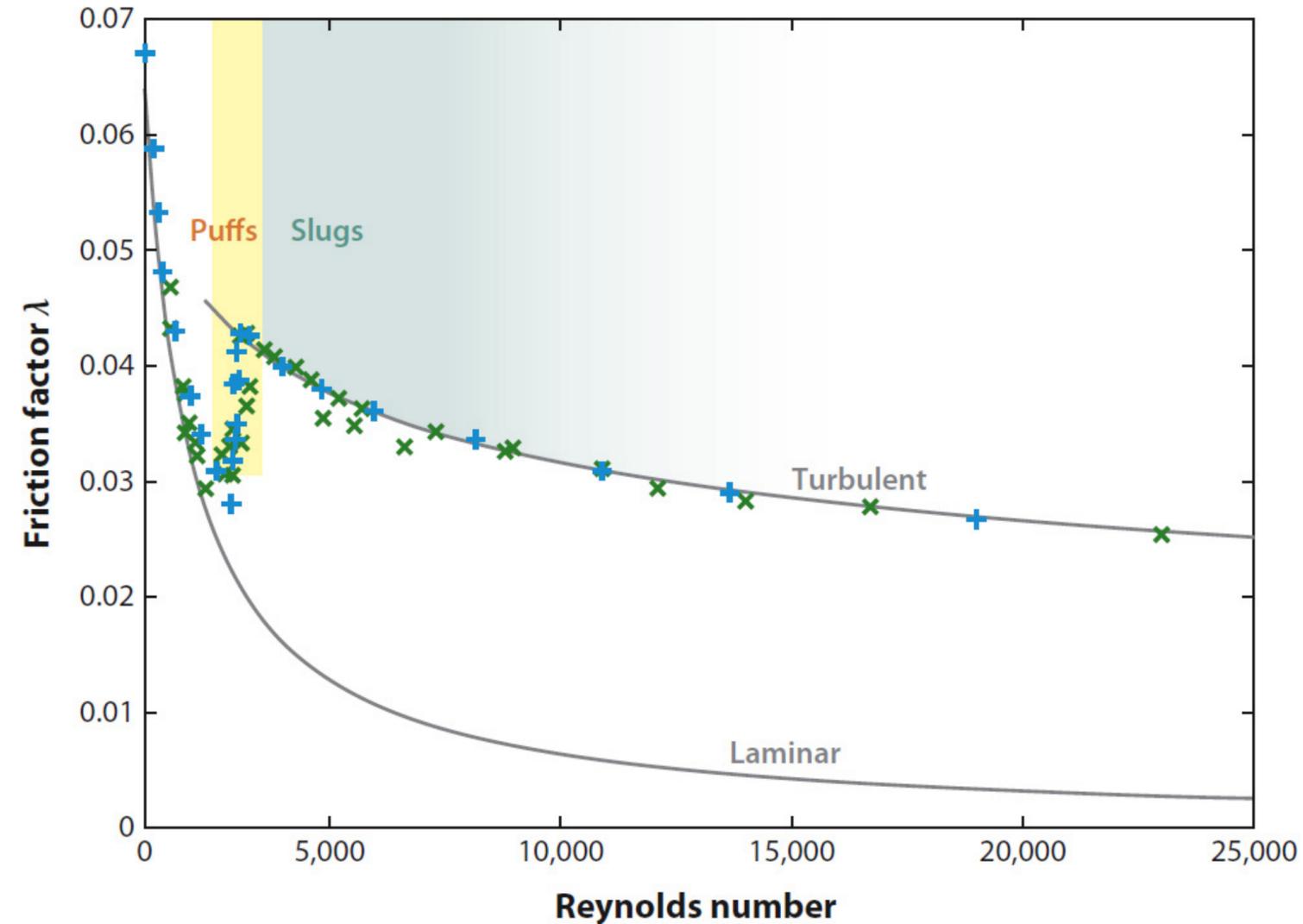
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} u_e \sqrt{\frac{\nu}{u_e x}} (\eta f' - f).$$



Expérience de Reynolds : injection dans un écoulement le long d'un tube cylindrique un filet d'encre colorée.

Si l'écoulement est laminaire, la trajectoire des particules est rectiligne. Dans un écoulement turbulent, en revanche, les trajectoires sont erratiques, ce qui conduit à une dispersion rapide de l'encre et la formation de structures (*tourbillons*).

La turbulence : expérience de Reynolds



Variation du facteur de frottement $\lambda = \frac{d}{\rho u^2/2} \frac{\Delta p}{L}$ (d diamètre de la conduite, L sa longueur, Δp la différence de pression, u la vitesse du fluide) en fonction du nombre de Reynolds

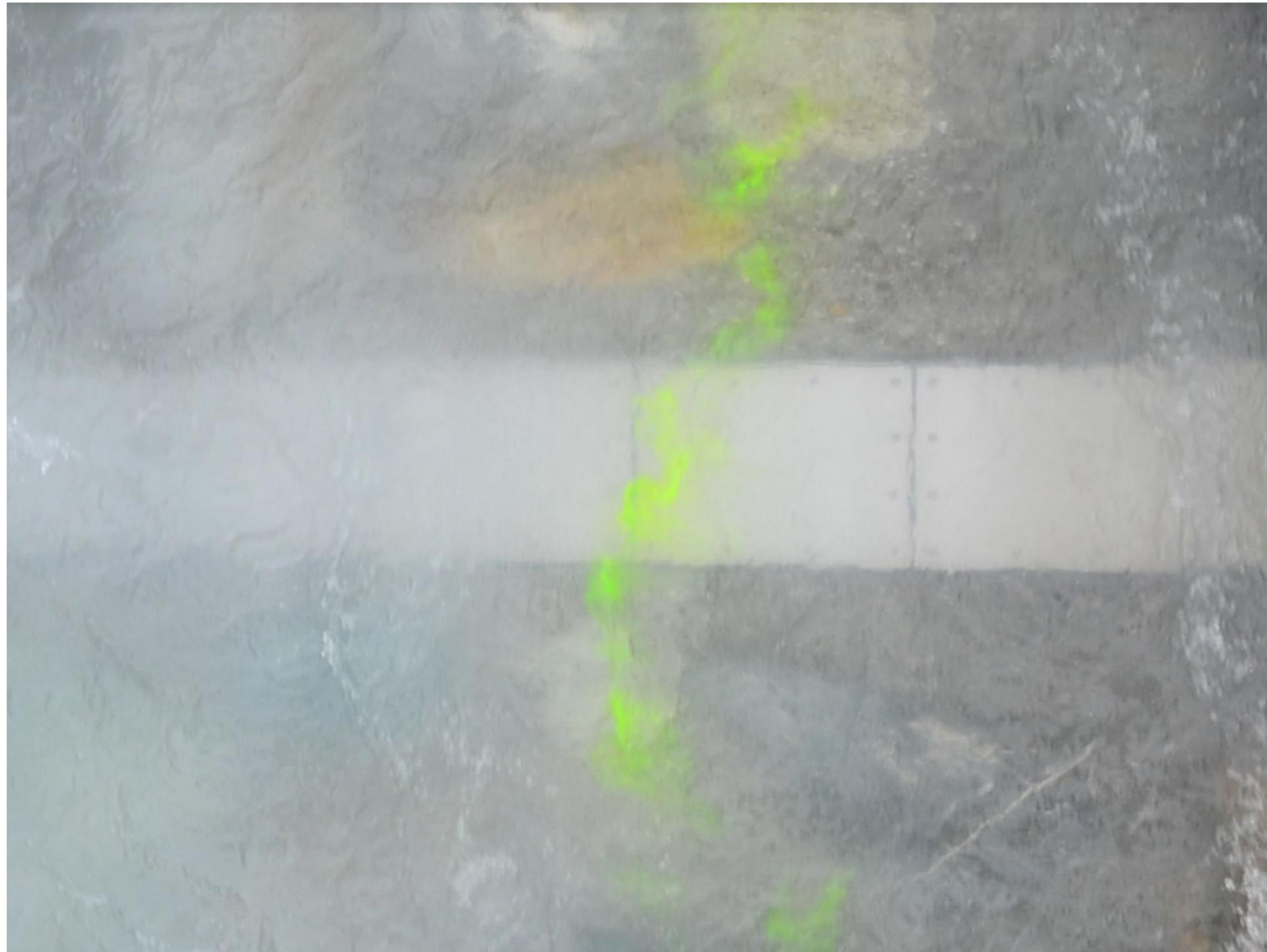
Les fluides newtoniens ont une loi de comportement linéaire $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$, mais leur équation du mouvement est non-linéaire

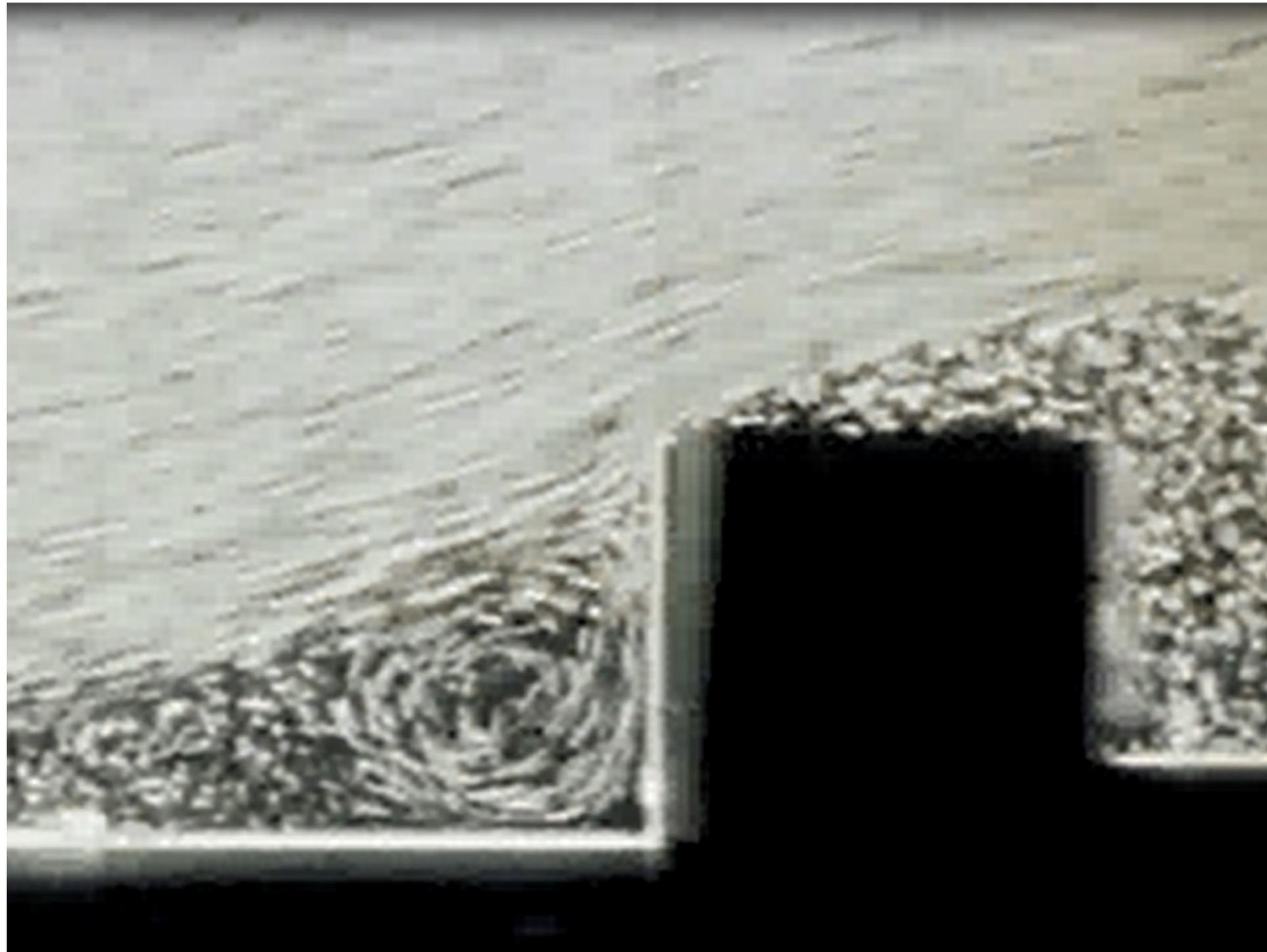
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} \right) = -\nabla p_* + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

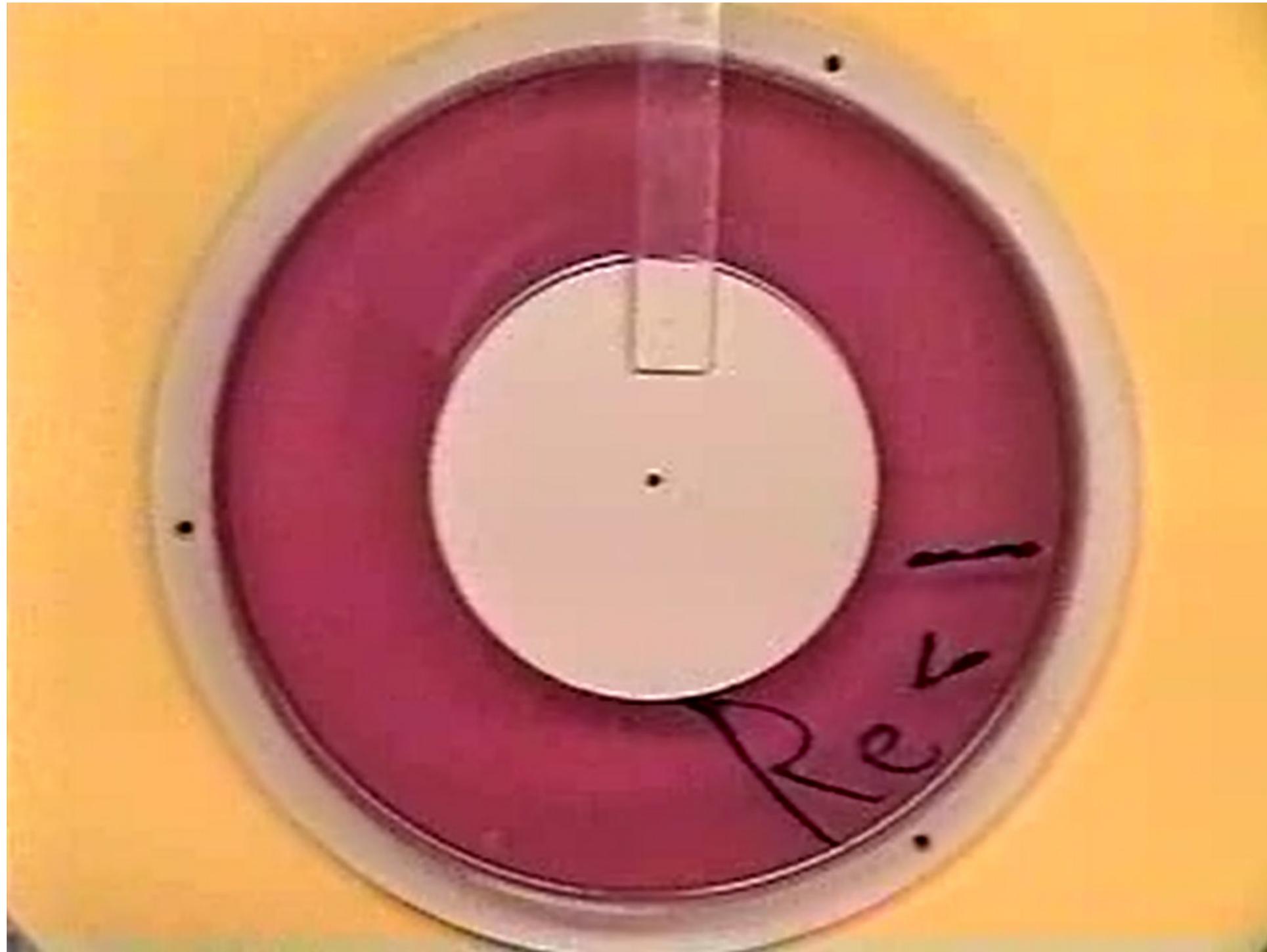
Cela entraîne :

- une perte de stabilité ;
- une irréversibilité ;
- une plus grande dissipation d'énergie ;
- une plus grande diffusion ;
- la création de structures à grande échelle.

La turbulence









Décomposition de Reynolds : $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$ ($\langle \mathbf{u} \rangle$ la vitesse moyenne et \mathbf{u}' la fluctuation). Quand on moyenne cette décomposition, les fluctuations disparaissent $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$, où le symbole $\langle \cdot \rangle$ désigne l'opérateur moyenne.

Quand on prend leur moyenne, les équations de Navier–Stokes deviennent

$$\rho \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle \right) = -\nabla \langle p_* \rangle + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} - \rho \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle,$$

car $\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \neq 0$. Un nouveau terme est apparu

$$\Sigma_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle.$$

C'est le tenseur de Reynolds (qui représente la turbulence). Trouver une dépendance entre Σ_t et $\langle \mathbf{u} \rangle$, c'est *fermer* le problème.

Les plus simples équations sont des relations algébriques où l'on écrit directement une relation entre grandeur fluctuante et grandeur moyenne, par exemple en cisaillement simple (écoulement près d'une paroi) :

$$\tau = \mu_t \frac{d\langle u \rangle}{dy},$$

avec μ_t la viscosité turbulente. Les fermeture algébriques dépendent du problème traité.

Par exemple, pour une paroi solide, on pose

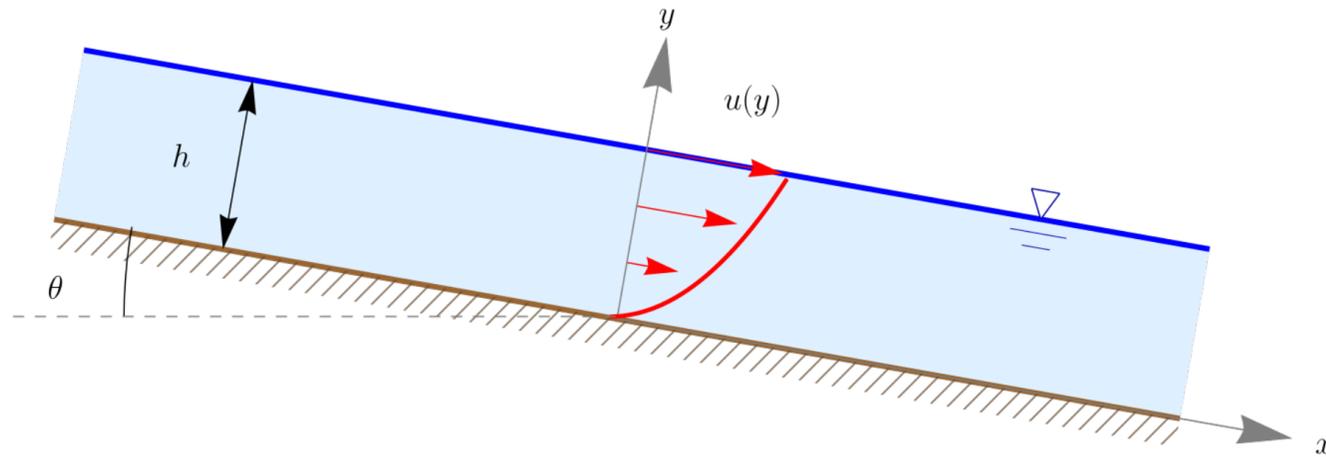
$$\nu_t = \mu_t / \rho = \ell_m^2 \frac{d\langle u \rangle}{dy},$$

avec $\ell_m = \kappa y$ est la *longueur de mélange* introduite par Prandtl et qui représente la taille caractéristique des structures turbulentes près de la paroi, et où $\kappa \approx 0,4$ est la constante de von Kármán. La contrainte de cisaillement s'exprime alors comme

$$\tau = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2,$$

où l'on notera par rapport à la loi en régime laminaire : une dépendance quadratique vis-à-vis de la vitesse et une dépendance vis-à-vis de la distance y .

Exemple traité : écoulement sur un plan incliné



On considère un écoulement permanent uniforme d'un fluide newtonien incompressible le long d'un plan infini. La hauteur d'écoulement est h .

1. recherche des symétries et simplifications
2. équations du mouvement
3. solution en régime laminaire
4. solution en régime turbulent

Écoulement sur un plan incliné : symétries



La géométrie du problème nous amène à remarquer

1. l'écoulement est bidimensionnel
2. il y a invariance par translation selon x
3. il y a invariance par t (écoulement permanent)
4. solution en régime turbulent

On en déduit que la vitesse selon x s'écrit donc $u(y)$.

Il n'y a pas de vitesse selon y : $v = 0$.

Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

Projection selon x et y de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

soit après simplification

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}.$$

$$0 = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Les conditions aux limites ;

- cinématique : condition d'adhérence au fond

$$u = 0$$

- dynamique : contrainte nulle à la surface libre $\Sigma \cdot \mathbf{e}_y = 0$ (pression atmosphérique négligée)

$$p = 0 \text{ et } \sigma_y = 2\mu \frac{dv}{dy} = 0 \text{ en } y = h$$

Écoulement sur un plan incliné : régime laminaire



En régime laminaire, la viscosité est constante. La pression est hydrostatique

$$p = \rho g \cos \theta (h - y).$$

On déduit donc l'équation de la quantité de mouvement selon (x) que

$$\rho g \sin \theta = -\mu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

qui s'intègre facilement :

$$u(y) = -\frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} y^2 + \alpha y + \beta,$$

avec α et β des constantes d'intégration. La condition aux limites cinématique au fond implique que

$$\beta = 0$$

tandis que la condition aux limites dynamique à la surface libre

$$u'(h) = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} h + \alpha = 0.$$

Le champ de vitesse s'écrit donc

$$u(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} (2hy - y^2).$$

Le profil de vitesse est donc parabolique.

Écoulement sur un plan incliné : régime turbulent



Turbulence : modèle très simple de la *longueur de mélange* de Prandtl.

$$\tau = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy},$$

avec μ_t la viscosité turbulente

$$\mu_t = \rho (\kappa y)^2 \frac{d\langle u \rangle}{dy},$$

Il faut calculer la distribution de cisaillement. La conservation de la quantité de mouvement donne

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

En intégrant cette équation avec pour condition aux limites à la surface libre

$$\tau = \rho g \sin \theta (h - y).$$

Écoulement sur un plan incliné : régime turbulent



L'équation du mouvement est donc

$$\rho g \sin \theta (h - y) = \rho (\kappa y)^2 \left(\frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2,$$

soit

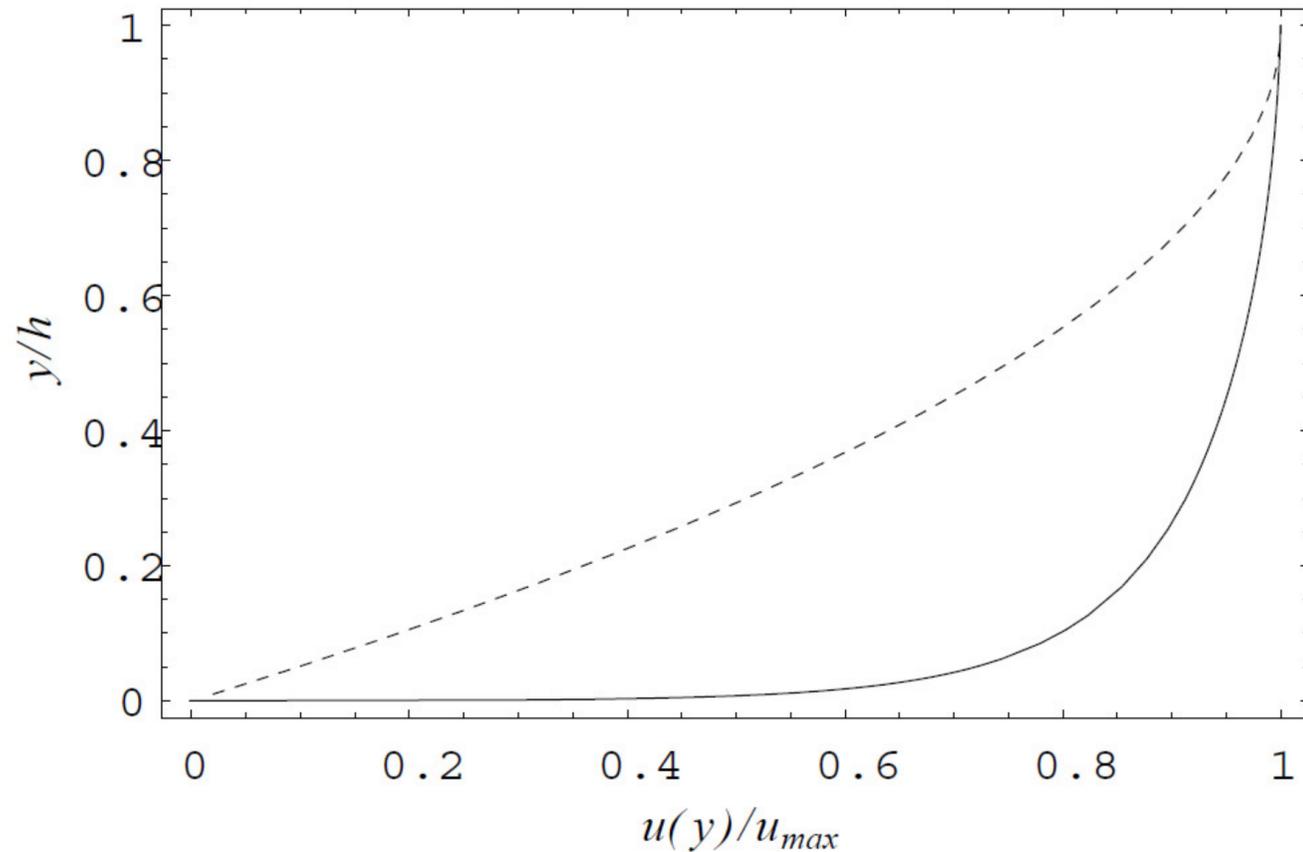
$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} = \frac{\sqrt{g \sin \theta}}{\kappa} \sqrt{\frac{h}{y^2} - \frac{1}{y}},$$

dont l'intégration donne

$$\langle u \rangle = 2 \frac{\sqrt{g \sin \theta}}{\kappa} \left(\sqrt{h - y} - \sqrt{h} \operatorname{arctanh} \left[1 - \frac{y}{h} \right] \right) + c,$$

avec c une constante d'intégration.

Écoulement sur un plan incliné : régime turbulent



Le profil de vitesse n'est plus parabolique et diverge vers $-\infty$ quand $y \rightarrow 0$. Pour éviter cela, on impose une condition d'adhérence à une hauteur $y = y_0$. L'intégrale du champ de vitesse existe et vaut

$$\int_0^h d\langle u(y) \rangle dy = \frac{2\sqrt{gh^3 \sin \theta}}{3\kappa}.$$

La vitesse moyenne est alors

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h d\langle u(y) \rangle dy = \frac{2\sqrt{gh \sin \theta}}{3\kappa}.$$

Écoulement sur un plan incliné : régime turbulent



Si on est suffisamment près du fond, alors $y \ll h$ (ce qui revient à supposer $\tau_p = \rho g h \sin \theta$). Ce faisant, on simplifie l'intégration puisque

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \approx \frac{\sqrt{gh \sin \theta}}{\kappa} \frac{1}{y},$$

soit

$$\langle u \rangle = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \ln y + C,$$

avec C une constante d'intégration. On parle de *profil de vitesse logarithmique* pour décrire un écoulement turbulent près d'une paroi. À noter qu'avec cette loi, la vitesse serait infinie en $y = 0$. Le modèle cesse d'être valide en fait très près de la paroi, où il existe une couche dite très fine *sous-couche visqueuse*, qui fait la jonction entre l'écoulement turbulent (zone logarithmique) et paroi solide.

Dissipation d'énergie au sein d'un fluide

$$\Phi = \text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{T}),$$

ce qui donne ici pour un écoulement en cisaillement simple :

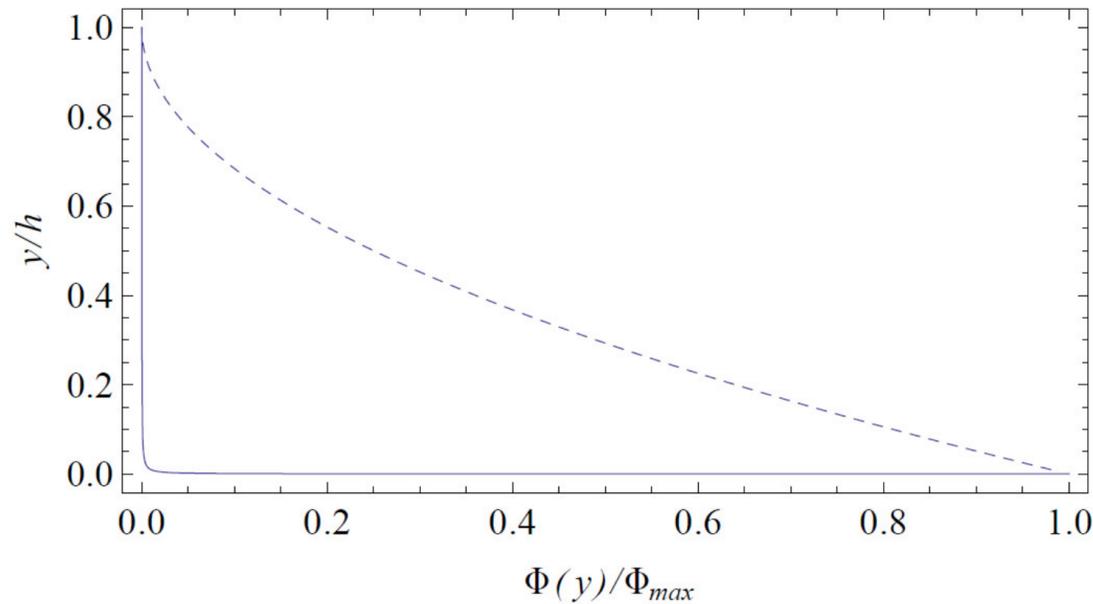
$$\Phi = \tau \dot{\gamma},$$

avec $\tau = \rho g(h - y) \sin \theta$ la contrainte de cisaillement et $\dot{\gamma} = du/dy$ le taux de cisaillement (gradient de vitesse). Pour un fluide newtonien en régime laminaire on a donc :

$$\Phi = \rho g(h - y) \sin \theta \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} (h - y) = \frac{(\rho g \sin \theta)^2}{\mu} (h - y)^2,$$

ce qui montre que la dissipation se produit partout dans l'écoulement, avec une valeur maximale au fond puis une diminution régulière jusqu'à la surface libre.

Écoulement sur un plan incliné : régime turbulent



Pour le régime turbulent, la dissipation d'énergie s'écrit

$$\Phi = \rho g (h - y) \sin \theta \frac{\sqrt{g \sin \theta}}{\kappa} \sqrt{\frac{h}{y^2} - \frac{1}{y}}$$
$$\Rightarrow \Phi = \rho \frac{(g \sin \theta)^{3/2} (h - y)^{3/2}}{\mu y},$$

qui montre que Φ est très grand ($\Phi \rightarrow \infty$ quand $y \rightarrow 0$) dans la couche logarithmique, puis tend rapidement vers 0 au-dessus de la couche logarithmique. Quasiment toute l'énergie se dissipe dans la couche pariétale au fond.



1. Quand parle-t-on de régime laminaire
 - pour désigner un fluide visqueux ?
 - pour décrire un écoulement à faible vitesse lorsque les lignes de courant sont régulières ?
2. Qu'est-ce qui explique une bonne aérodynamique d'un véhicule ?
 - un faible sillage ?
 - une face profilée ?