ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet (à rendre) n$^{\text{o}}$ 1

Hydraulique

Diffusion d'un polluant dans le sol

On étudie la diffusion d'un polluant dans une rivière. Pendant des années, un oxyde métallique lourd a été rejeté dans une rivière, ce qui a entraîné la pollution du sol. La couche superficielle du sol est un lit de sable et de gravier dense, reposant sur une couche d'argile peu perméable. L'épaisseur de la couche graveleuse est $e = 20$ m. Le coefficient de diffusion est $D = 10^{-8}$ m^2/s. La concentration initiale de métaux lourds dans l'eau saturant le lit est $c_0 = 500 \times 10^{-6}$. Cette pollution a entraîné de gros problèmes pour l'activité piscicole, ce qui a conduit les autorités locales à demander l'arrêt des rejets polluants dans la rivière. Se pose maintenant la question de la dépollution du lit. Plusieurs idées ont été proposées, dont l'une est de ne rien faire, c'est-à-dire d'attendre que le lit se décontamine seul sous l'effet de la diffusion moléculaire.

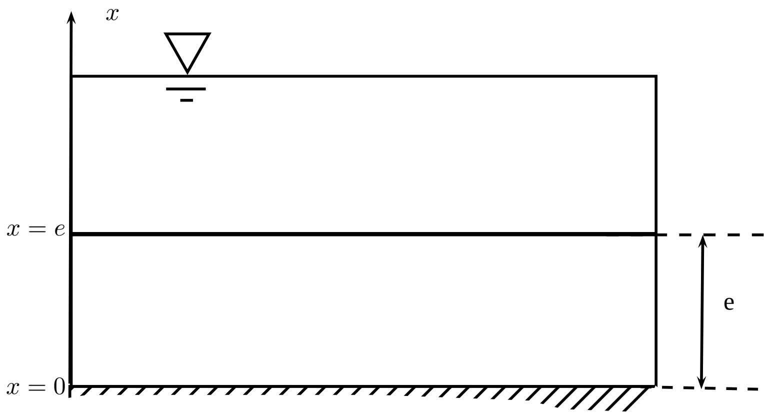

Figure 1 : *configuration du sol.*

Vous devez évaluer le temps nécessaire pour que la concentration en métaux lourds soit sous le seuil de $c_s = 50 \times 10^{-6}$ – retenu comme acceptable par les experts – si on considère que le polluant diffuse librement et sans nouvel apport. Physiquement on est donc amené à résoudre l'équation de diffusion

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \tag{1}$$

avec pour conditions aux limites

$$c(0,\, t) = 0, \tag{2}$$

$$c(e,\, t) = 0, \tag{3}$$

et pour conditions initiales

$$c(x,\, 0) = c_0, \tag{4}$$

pour $0 \leq x \leq e$.

On demande le travail suivant

1. Montrer que

$$c(x,\, t) = \frac{4}{\pi} c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-((2n+1)\pi\sqrt{D})^2 t/e^2) \frac{\sin((2n+1)x\pi/e)}{2n+1},$$

   est une solution du problème considéré.

2. Adimensionnaliser les équations pour avoir un problème à résoudre qui prenne la forme
$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial \hat{x}^2},$$
avec $\hat{c}$, $\hat{t}$, et $\hat{x}$ des variables sans dimensions à préciser.
3. Résoudre l'équation avec un schéma explicite. On prendra $n = 100$ nœuds en $\hat{x}$. Que vaut δt.
4. Résoudre l'équation avec un schéma implicite. On prendra $n = 100$ nœuds en $\hat{x}$. Que vaut δt.
5. Tracer c pour $t = 1$ an et comparer avec la solution analytique.
6. Combien de temps faut-il pour que la concentration maximale soit égale à c_s.

Fournir aussi les scripts lors du rendu du rapport.