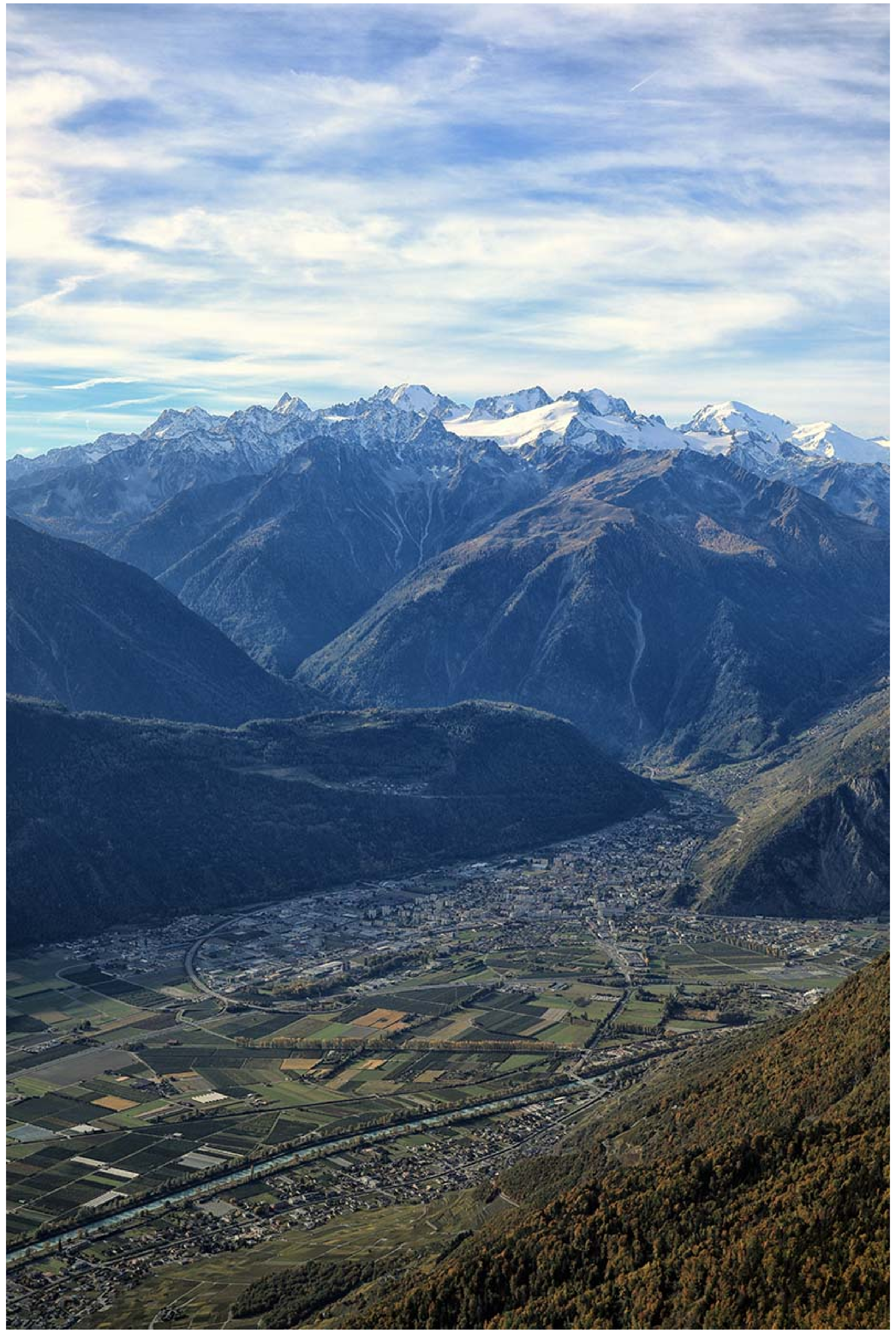
Chapitre 1 : équations de base en hydraulique

Hydraulique à surface libre

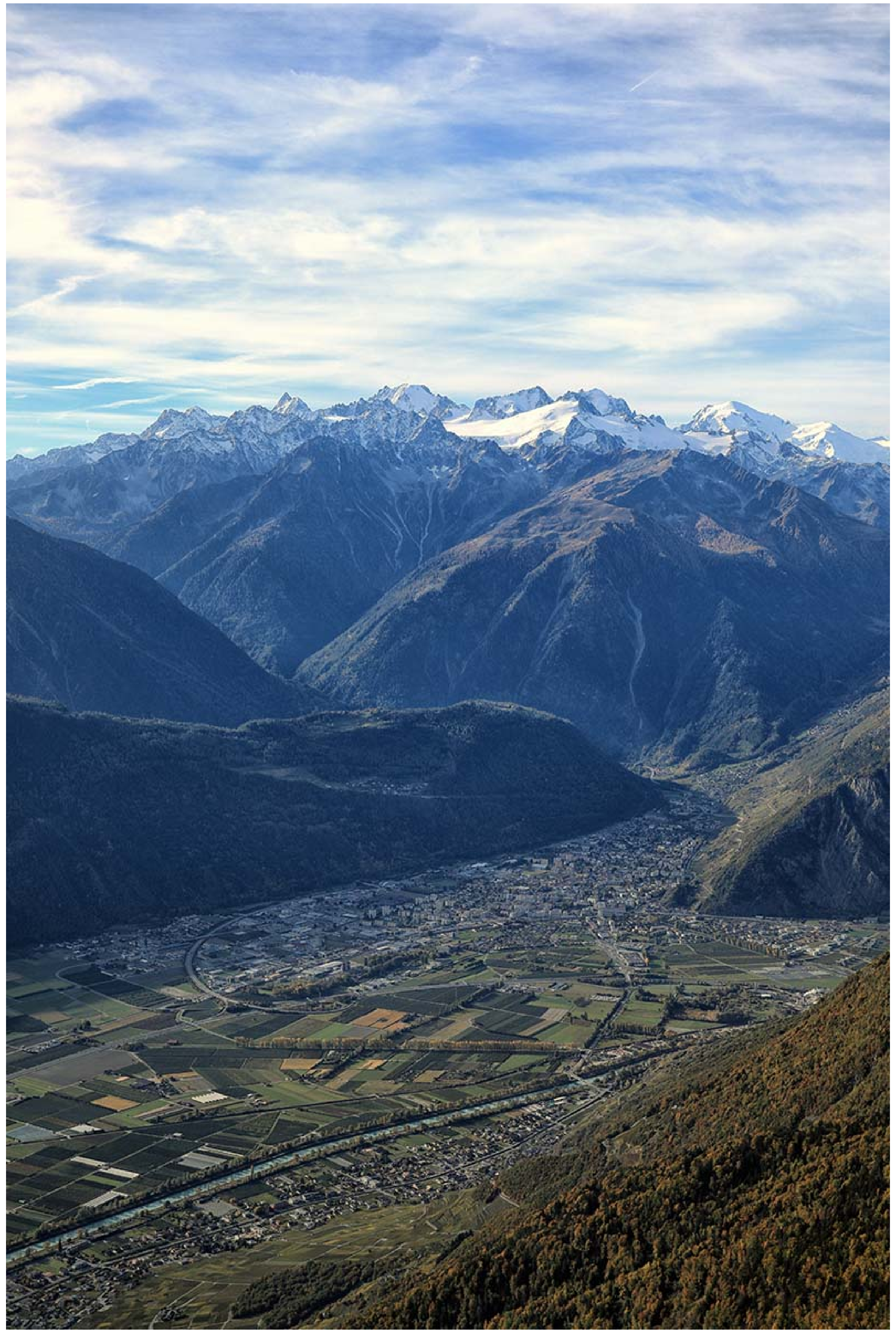
Christophe Ancey

Chapitre 1 : équations de base en hydraulique



- Bernoulli et courbe de remous :
  - courbe de remous
  - ressaut hydraulique
  - chute d'eau
- Équations de Saint-Venant :
  - dérivation
  - forme tensorielle et diagonalisation
  - ressaut mobile
  - modèles morphodynamiques
  - modèles 2D
- Singularités hydrauliques :
  - ouvrages : seuil, vanne, pont
  - écoulement secondaire

Chapitre 1 : équations de base en hydraulique (2)



- Résistance à l'écoulement : frottement de peau
  - considérations générales et lois empiriques
  - loi de Keulegan
  - cas des faibles submersions
- Résistance à l'écoulement : frottement de forme :
  - lit mobile
  - stabilité du lit, structures morphologiques
  - estimation du frottement de forme
- Autres équations en hydraulique :
  - advection
  - diffusion
  - ondes linéaires

Bernoulli et courbes de remous

Équation de la courbe de remous

Principe de conservation de l'énergie

$$E = p + \psi + k$$

avec $p = \varrho g h$ la pression, $\psi = \varrho g z$ (z cote du lit) le potentiel gravitaire, et $k = \frac{1}{2}\varrho \bar{u}^2$ l'énergie cinétique ($\bar{u}$ vitesse moyennée le long de la hauteur) ; ϱ masse volumique de l'eau et h hauteur d'eau. En hydraulique on l'écrit sous forme de charge hydraulique (équivalent en hauteur de colonne d'eau)

$$H = \frac{E}{\varrho g} = h + z + \frac{\bar{u}^2}{2g}$$

Sur de courtes distances, le théorème de Bernoulli nous dit que l'énergie se conserve ($H = cst$), mais cela cesse d'être vrai sur de longues distances

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = -j < 0$$

avec j la pente de frottement.

Équation de la courbe de remous (2)

Application : équation de la courbe de remous

Hypothèses :

- régime graduellement varié $\rightsquigarrow$ pertes de charge régulièrement réparties le long de x
- régime permanent : $q = h\bar{u} = cst$ (débit par unité de largeur)
- canal infiniment large (on ne soucie pas de la section en travers)

Si on examine la perte de charge

$$\mathrm{d}H = -j\mathrm{d}x = \mathrm{d}h + \mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}(\bar{u}^2)}{2g}$$

or $\bar{u} = q/h$ et $\mathrm{d}z = -i\mathrm{d}x$ (i pente du lit), donc

$$\mathrm{d}H = -j\mathrm{d}x = \mathrm{d}h - i\mathrm{d}x - \frac{q^2}{gh^3}\mathrm{d}h$$

soit

$$i - j = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{q^2}{gh^3}\right)$$

Équation de la courbe de remous (3)

En posant le nombre de Froude (canal infiniment large)

$$Fr = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{q}{\sqrt{gh^3}}$$

on obtient l'équation

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{i-j}{1-Fr^2}$$

- équation différentielle du 1er ordre
- nécessite une seule condition aux limites (amont ou aval)
- fermeture nécessaire : loi de résistance pour j
- condition pour obtenir un régime permanent uniforme $j = i$
- singularité quand $Fr \to 1$ (régime rapidement varié)
- deux régimes aux comportements différents : subcritique $Fr < 1$ et supercritique $Fr > 1$
- existence d'une hauteur critique $Fr = 1$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

Traitement des singularités : le ressaut hydraulique

Le Tibre à Rome

Passage supercritique ($Fr > 1$) à subcritique ($Fr < 1$) : forte dissipation d'énergie liée à la recirculation (vorticité). À l'échelle de la rivière, un ressaut est une discontinuité.

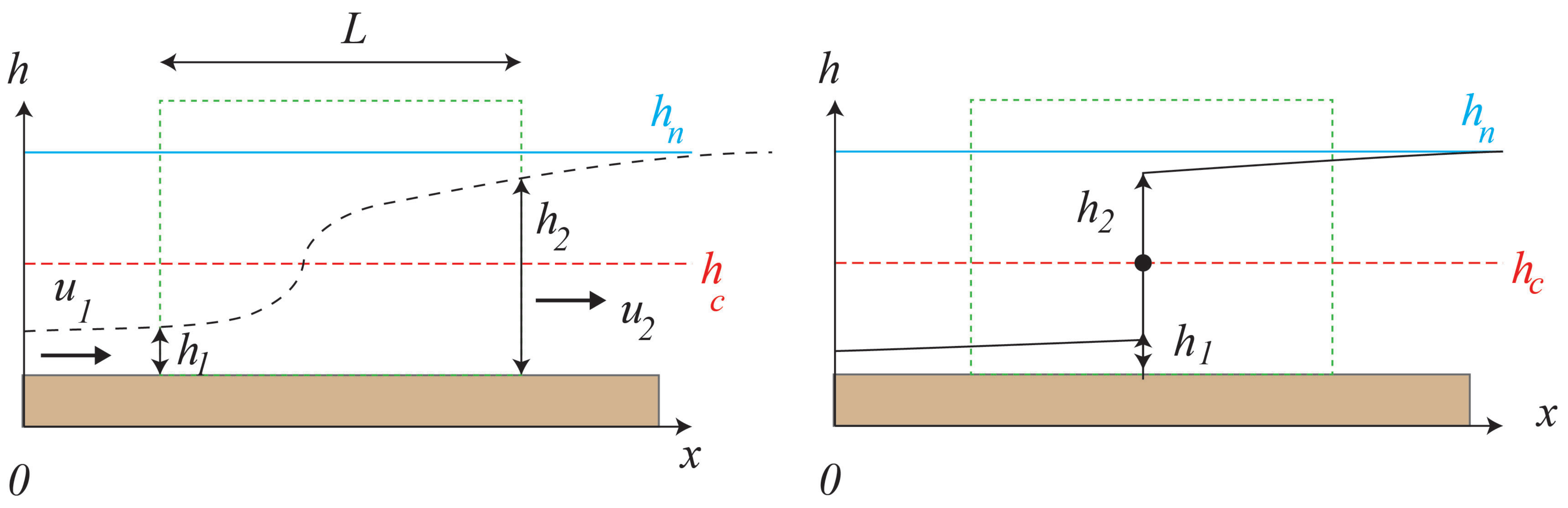
Traitement des singularités : le ressaut hydraulique (2)

On considère un volume de contrôle dont les frontières englobent le ressaut. On applique les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

On fait les hypothèses suivantes

- l'écoulement est permanent et le débit par unité de largeur vaut q
- l'écoulement est unidirectionnel
- le ressaut est immobile (sa vitesse de déplacement est nulle)
- la pression est hydrostatique loin du ressaut
- le profil de vitesse est uniforme
- la dissipation d'énergie sur le fond est négligeable

Traitement des singularités : le ressaut hydraulique (3)



Conservation de la masse : $u_1 h_1 = u_2 h_2 = q$.

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_{\partial V} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}S = \int_V \varrho \boldsymbol{g} \mathrm{d}V - \int_{\partial V} p \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \int_{\partial V} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

projetée le long de la direction d'écoulement :

$$\varrho q(u_2 - u_1) = -L\tau_p + \frac{1}{2}\varrho g(h_1^2 - h_2^2).$$

Traitement des singularités : le ressaut hydraulique (4)

Si on néglige le frottement, alors on obtient l'*équation de conjugaison* :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1\right)$$

avec $Fr_1 = u_1/\sqrt{gh_1}$ le nombre de Froude à l'amont du ressaut. La perte de charge associée s'écrit :

$$\Delta H = H_2 - H_1 = h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2} = h_1 \frac{\left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 3\right)^3}{16\left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1\right)}.$$

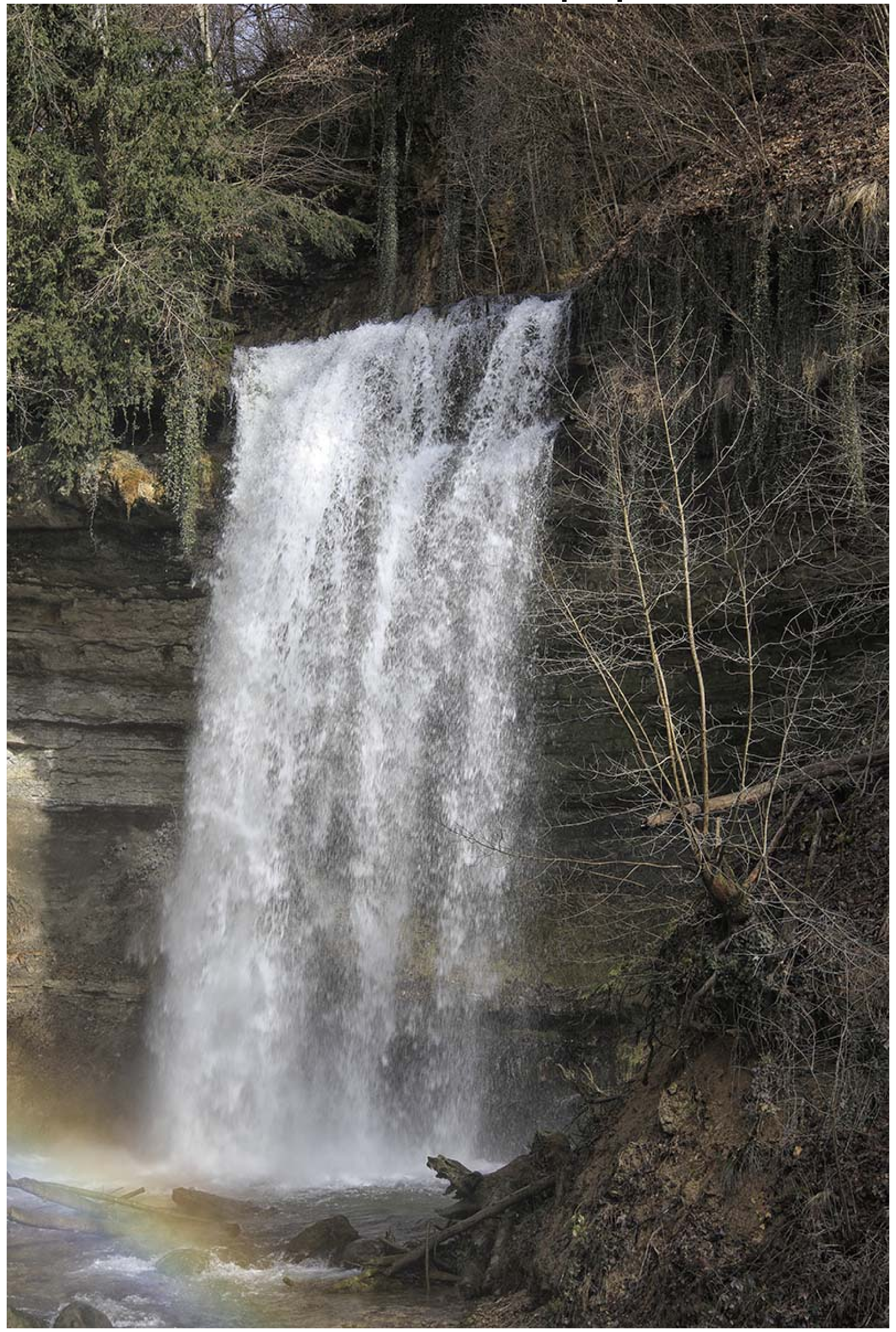
La longueur du ressaut n'est en général pas très grande. Expérimentalement on trouve que :

$$\frac{L}{h_1} = 160 \tanh \frac{Fr_1}{20} - 12$$

pour $2 < Fr < 16$.

Traitement des singularités : chute d'eau

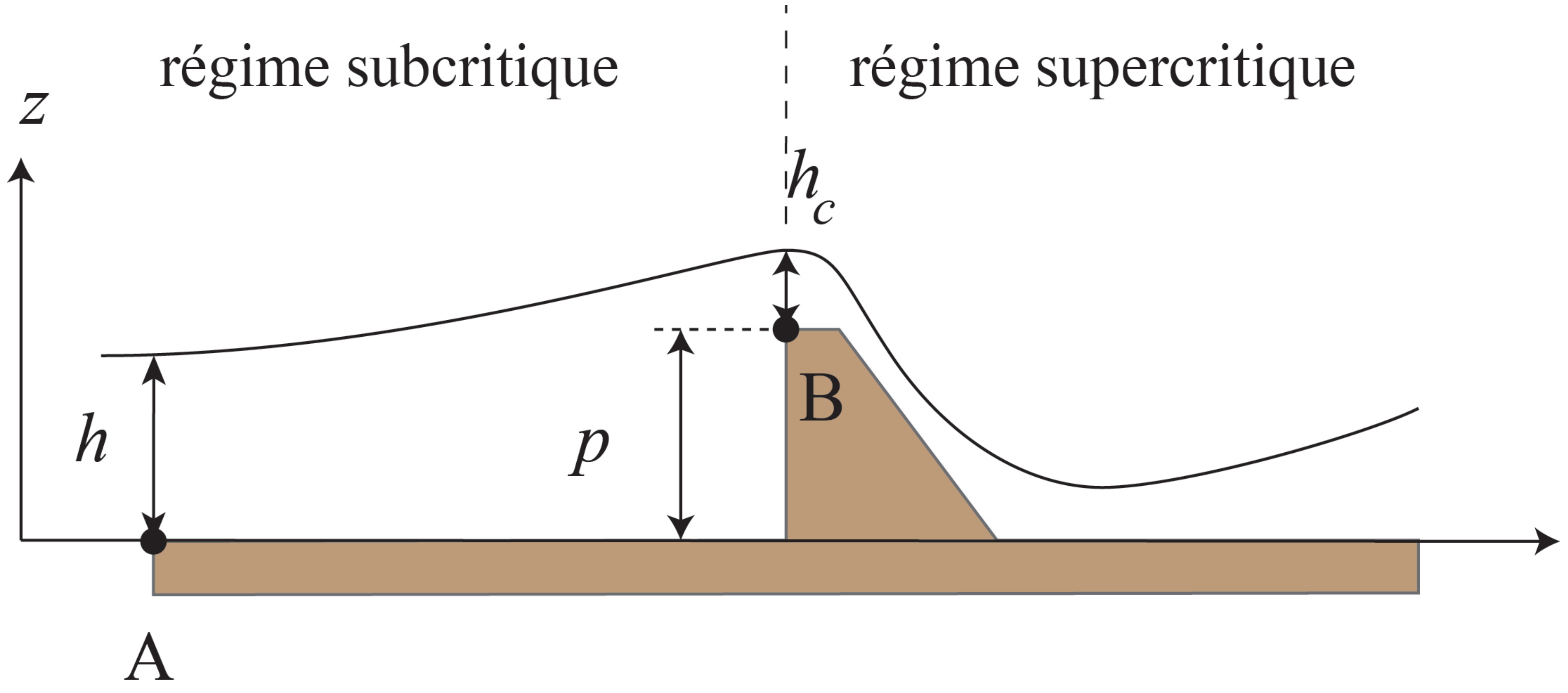
Chute du Nozon à Pompaples



Passage subcritique ($Fr < 1$) à supercritique ($Fr > 1$) : en général, c'est une chute d'eau au passage d'un obstacle naturel (p. ex. cascade) ou artificiel (p. ex. seuil).

Hypothèse : le changement de régime se produit au sommet de l'obstacle.

Traitement des singularités : chute d'eau (2)



Conservation de la charge hydraulique entre A et B :

$$z_A + h_A + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + h_B + \frac{u_B^2}{2g}$$

La hauteur critique est atteinte au sommet de l'obstacle de hauteur p (dite *pelle*)

$$h_B = h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$$

La conservation de la masse implique : $q = u_A h_A = u_B h_B$.

Traitement des singularités : chute d'eau (3)

Conservation de la charge hydraulique entre A et B :

$$h + \frac{q^2}{2gh^2} = p + \frac{q^{2/3}}{\sqrt[3]{g}} + \frac{q^{4/3}}{2g}\sqrt[3]{g}$$

Équation polynomiale de degré 3 en h (ou $q^{2/3}$). En B, on a $h = h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$, soit $q = \sqrt{gh_c^3}$.
L'équation du seuil s'écrit en fonction de la charge hydraulique à l'amont en A (*équation du seuil dénoyé*) :

$$H_A = H_B = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} + p = \frac{3}{2}h_c + p \Rightarrow q = (2/3)^{3/2}\sqrt{g}\,(H_A - p)^{3/2}$$

Lorsque le seuil est noyé lorsque $h_2 - p > \frac{2}{3}(h_1 - p)$:

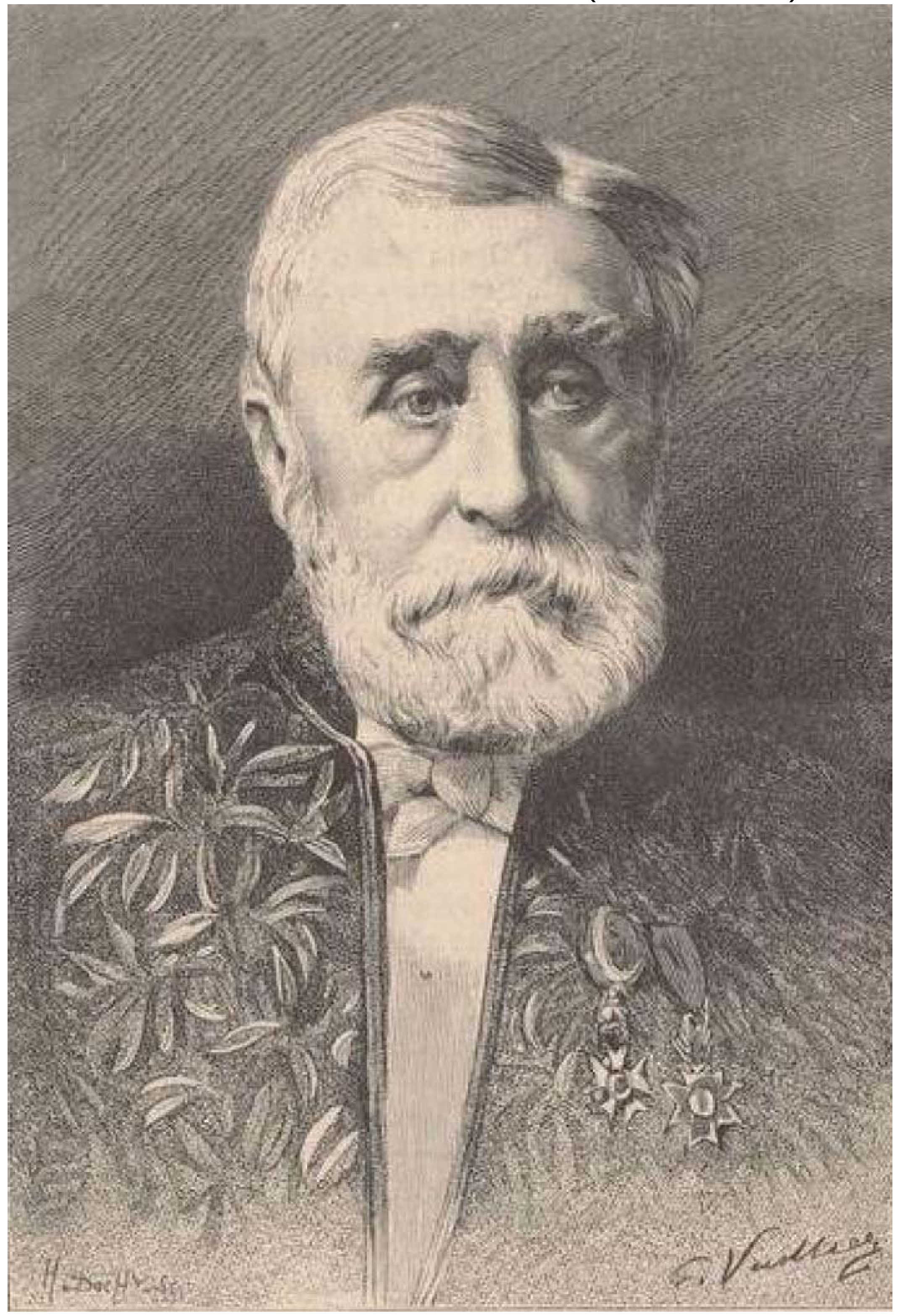
$$q = \sqrt{2g}\,(h_1 - h_2)^{1/2}\,(h_2 - p)$$

En pratique ces débits sont pondérés d'un facteur correctif : $C_D < 1$ (coefficient de débit)

Équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant

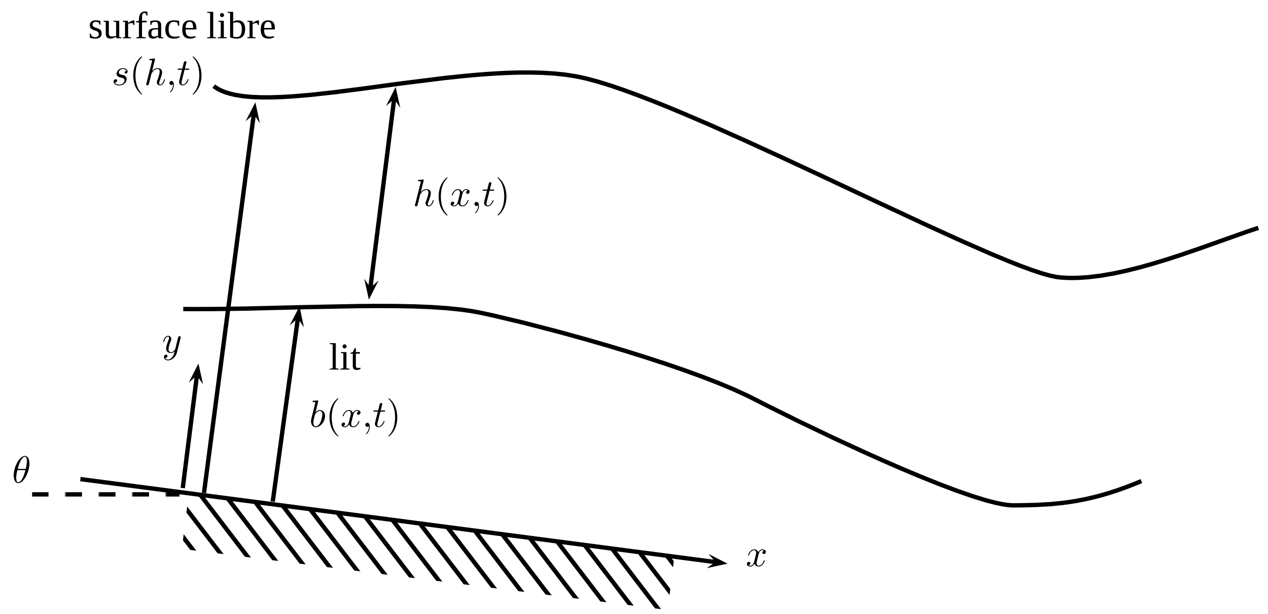
Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1886)



Les stratégies de calcul :

- équations de la courbe de Remous : régime 1D, stationnaire
- équations de Navier-Stokes :
  - résolution directe (DNS) : très gourmand, quantité colossale d'informations à traiter. Usage : industriel et recherche
  - résolution d'équations filtrées : Large Eddy Simulations(LES). Coût de calcul raisonnable. Usage : ingénierie hydraulique (marginal en 2022) et recherche
  - approche « particulaire » : Smooth Particle Hydrodynamics, Particle Point, etc. Usage : recherche
- équations de Saint-Venant : information moyennée selon la hauteur. Coût de calcul intermédiaire. Usage : ingénierie hydraulique (courant en 2022) et recherche

Hypothèses équations de Saint-Venant



H_* échelle de hauteur, L_* échelle de longueur
$O(H_*) = 1 - 10$ m
$O(L_*) = 100 - 10^4$ m

Étude simplifiée :

- (H1) écoulement 1D sur profil topographique régulier
- (H2) pas de section en travers (écoulement infiniment large)
- (H3) régime graduellement varié. Rapport d'aspect $\epsilon = H_*/L_* \ll 1$
- (H4) profil de vitesse régulier (ligne de courant parallèle à peu près)
- (H5) lit exerçant une contrainte τ_p sur l'écoulement
- (H6) masse volumique de l'eau ϱ constante
- (H7) pas de variation de masse d'eau
- (H8) lit fixe (pas de transport solide)
- (H9) pente locale faible à douce ($i = \tan\theta <$ 10–20 % pour éviter les instabilités, voir chap. 4.9).

Conservation de la masse (1)

Équation locale de conservation de la masse (continuité)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \boldsymbol{u}) = 0,$$

avec $\boldsymbol{u} = (u,v)$ la vitesse locale de l'écoulement.

Écoulement incompressible : $\varrho = cste \Rightarrow \partial_t \varrho = 0$.

Intégration de la divergence de $\boldsymbol{u}$ selon la hauteur d'écoulement (selon y)

$$\int_0^{h(x,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathrm{d}y = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(x,y,t) \mathrm{d}y - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(x,h,t) - v(x,0,t) = 0$$

Conservation de la masse (2)

Conditions aux limites : non-pénétration et adhérence au fond $(y=0) \Rightarrow u=v=0$ en $y=0$

La surface libre est une surface matérielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y-h(x,t)) = 0 \Rightarrow v(x,h,t) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x,h,t)\frac{\partial h}{\partial x}$$

Équation moyennée de conservation de la masse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\overline{u}}{\partial x} = 0$$

avec l'opérateur « moyenne » (selon la hauteur)

$$\bar{f}(x,t) = \frac{1}{h(x,t)} \int_0^{h(x,t)} f(x,y,t)\mathrm{d}y$$

La conservation de la masse (moyennée) est une équation exacte (pas d'approximation).

Conservation de la quantité de mouvement (1)

Équation locale de conservation de la quantité de mouvement

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \varrho \boldsymbol{g} - p\mathbf{1} + \nabla \cdot \boldsymbol{T},$$

où $\boldsymbol{T}$ le tenseur des extra-contraintes et p la pression

Adimensionalisation de cette équation avec les échelles H_*, L_* $U_* = \sqrt{gH_* \cos\theta}$, $V_* = \epsilon U_*$, $T = U_*/L_*$, $P_* = \varrho g H_* \cos\theta$. On définit

$$Re = \frac{\varrho U_* H_*}{\mu} \text{ et } Fr = \frac{U_*}{\sqrt{gH_* \cos\theta}}.$$

Hypothèse : régime turbulent $(Re \gg 1)$ et $Fr = O(1)$

$$\hat{u} = \frac{u}{U_*},\ \hat{v} = \frac{v}{V_*},\ \hat{x} = \frac{x}{L_*},\ \hat{y} = \frac{y}{H_*},\ \text{et } \hat{t} = \frac{t}{T_*},$$

Pour les contraintes

$$\hat{T}_{xx} = \frac{\mu U_*}{L_*} T_{xx},\ \hat{T}_{xy} = \frac{\mu U_*}{H_*} T_{xy},\ \hat{T}_{yy} = \frac{\mu U_*}{L_*} T_{yy},\ \text{et } \hat{p} = \frac{p}{P_*}.$$

Conservation de la quantité de mouvement (2)

Équations locale adimensionnelle selon x et y

$$\epsilon Re \frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\left(\frac{1}{\epsilon}\tan\theta - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}}\right) + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{xx}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{y}}$$

$$\epsilon^3 Re \frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\left(-1 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}}\right) + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{x}} + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{yy}}{\partial \hat{y}}$$

Hypothèses : $\epsilon \ll 1$ et $Re \gg 1$ (écoulement turbulent), $\epsilon Re = O(1)$, et $\epsilon^2 Re \ll 1$. En supprimant les termes « petits »

$$-1 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = 0$$

La distribution de pression est hydrostatique

$$p = \varrho g (h - y) \cos\theta$$

Conservation de la quantité de mouvement (3)

Projection selon x

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \tan\theta - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{y}}$$

Et sous forme dimensionnelle

$$\varrho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varrho g\sin\theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}$$

Intégration entre y entre 0 et h :

$$\varrho\left(\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\overline{u^2}}{\partial x}\right) = \varrho g h\sin\theta - \frac{\partial h\bar{p}}{\partial x} - \tau_p$$

Contrainte de frottement (appelée aussi *contrainte pariétale*) : $\tau_p = T_{xy}(x,0,t)$.

Approximation de Boussinesq

$$\overline{u^2} = \frac{1}{h}\int_0^h u^2(y)\,\mathrm{d}y = \alpha\bar{u}^2 \approx \bar{u}^2$$

Conservation de la quantité de mouvement (4)

Approximations supplémentaires :

- approximation de Boussinesq $\rightsquigarrow$ le terme d'advection devient

$$\frac{\partial h\overline{u^2}}{\partial x} = \frac{\partial \alpha h\bar{u}^2}{\partial x} \approx \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x}$$

- approximation d'onde longue $\rightsquigarrow$ toute tranche d'écoulement peut être traitée comme localement uniforme. La contrainte au fond τ_p en fonction de $\bar{u}$ et h est identique à celle du régime permanent (p. ex. Manning-Strickler ou Chézy).

On obtient finalement

$$\varrho\left(\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{u}^2)}{\partial x}\right) = \varrho g h \sin\theta - \varrho g h \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_p$$

ou bien sous forme non-conservative

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g\sin\theta - g\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\varrho h}.$$

Mise sous forme tensorielle

Équations de Saint-Venant à faible pente ($\sin\theta \sim i = \tan\theta$ et $\cos\theta \sim 1$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + gh\frac{\partial}{\partial x}h = igh - \frac{\tau_p}{\varrho}$$

On introduit le vecteur $\boldsymbol{U} = (h,\, hu)$, la fonction de flux $\boldsymbol{F} = (hu,\, hu^2 + gh^2/2)$, son jacobien $\boldsymbol{A}$ et le vecteur source $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ igh - \tau_p/\varrho \end{pmatrix}$$

On peut écrire les équations de Saint-Venant sous forme tensorielle

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{S}$$

Diagonalisation

La matrice $\boldsymbol{A}$ a deux valeurs propres $\lambda_1 = \bar{u} - c$ and $\lambda_2 = \bar{u} + c$ avec $c = \sqrt{gh}$ (vitesse des ondes en eaux peu profondes) associées aux *vecteurs propres à gauche* $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$:

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{A} = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

avec

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -c/h \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} c/h \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche de nouvelles variables $\boldsymbol{r} = \{r_1, r_2\}$ telles que

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{U} = \mu_1 \mathrm{d}r_1$$

$$\boldsymbol{v}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{U} = \mu_2 \mathrm{d}r_2$$

avec μ_i facteur intégrant tels que $\mathrm{d}r_i$ est une différentielle exacte

Diagonalisation (2)

On trouve

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, r_1 = u - 2c \text{ et } r_2 = u + 2c$$

En multipliant les équations de Saint-Venant par $\boldsymbol{v}_1$, on a

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{A} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{S}$$

soit encore

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} \right) = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{S}$$

On peut interpréter le terme entre parenthèses comme une dérivée $\mathcal{C}_1$ le long de la courbe dite *caractéristique*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda_1$$

Diagonalisation (3)

En effet, la différentielle de f

$$\mathrm{d}f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$$

et pour toute quantité $f(x(t),t)$ définie le long de $\mathcal{C}_1$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t),t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial f}{\partial x}$$

On peut donc écrire

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{U} \text{ le long de } \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda_1$$

Le terme différentiel dans les équations de Saint-Venant peut alors s'écrire

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}\right) = \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}$$

Diagonalisation (4) : forme caractéristique

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial r_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{S} = igh - \frac{\tau_p}{\varrho}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial r_2}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial r_2}{\partial x} = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{S} = igh - \frac{\tau_p}{\varrho}$$

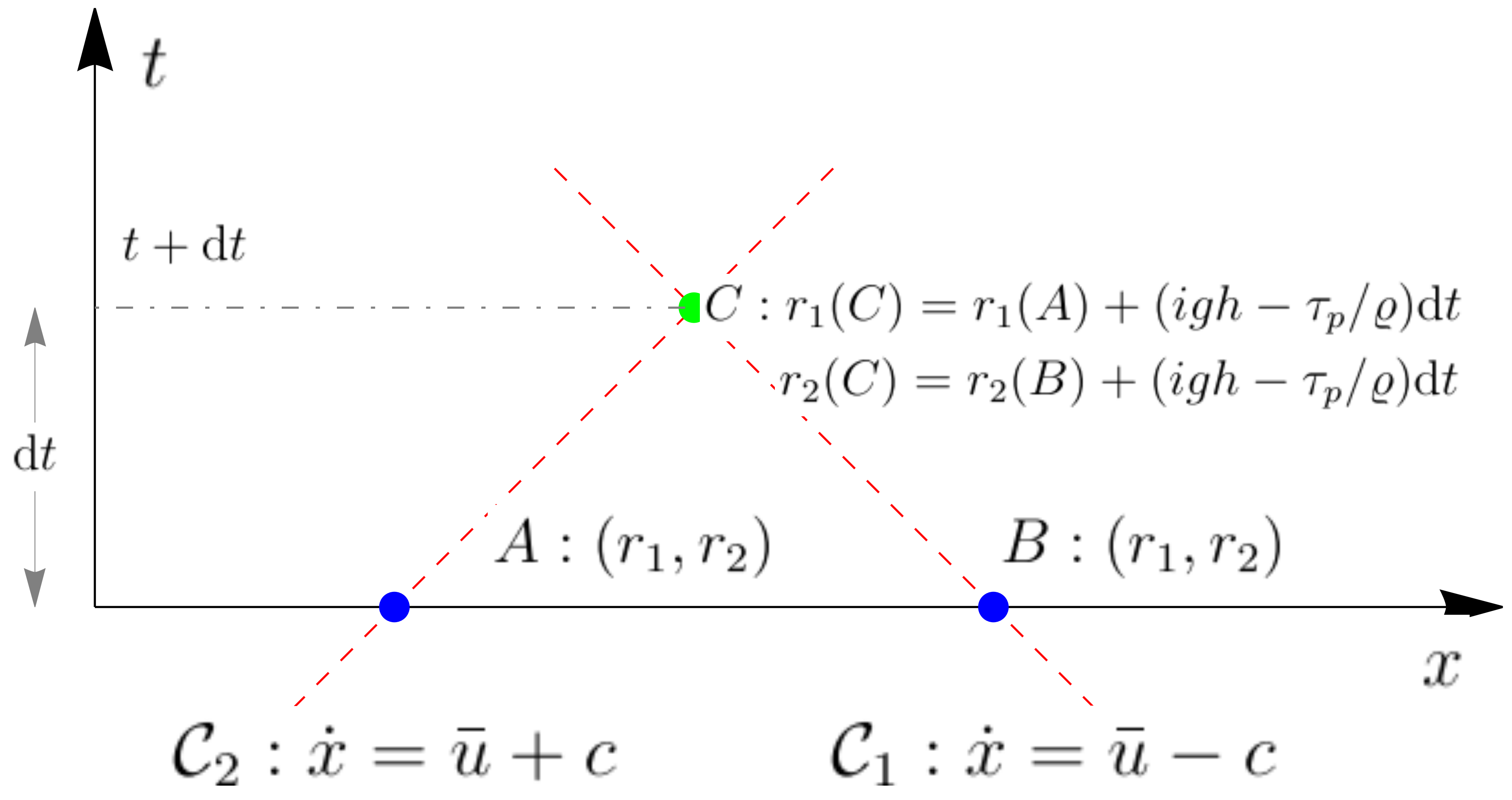
ou sous forme condensée d'EDP

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm 2c) + (u \pm c)\frac{\partial}{\partial x}(u \pm 2c) = igh - \frac{\tau_p}{\varrho}$$

ou sous une forme dite *caractéristique*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u \pm 2c) = igh - \frac{\tau_p}{\varrho} \text{ le long de } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \pm c$$

Diagonalisation (5) : conséquences



Conséquences :

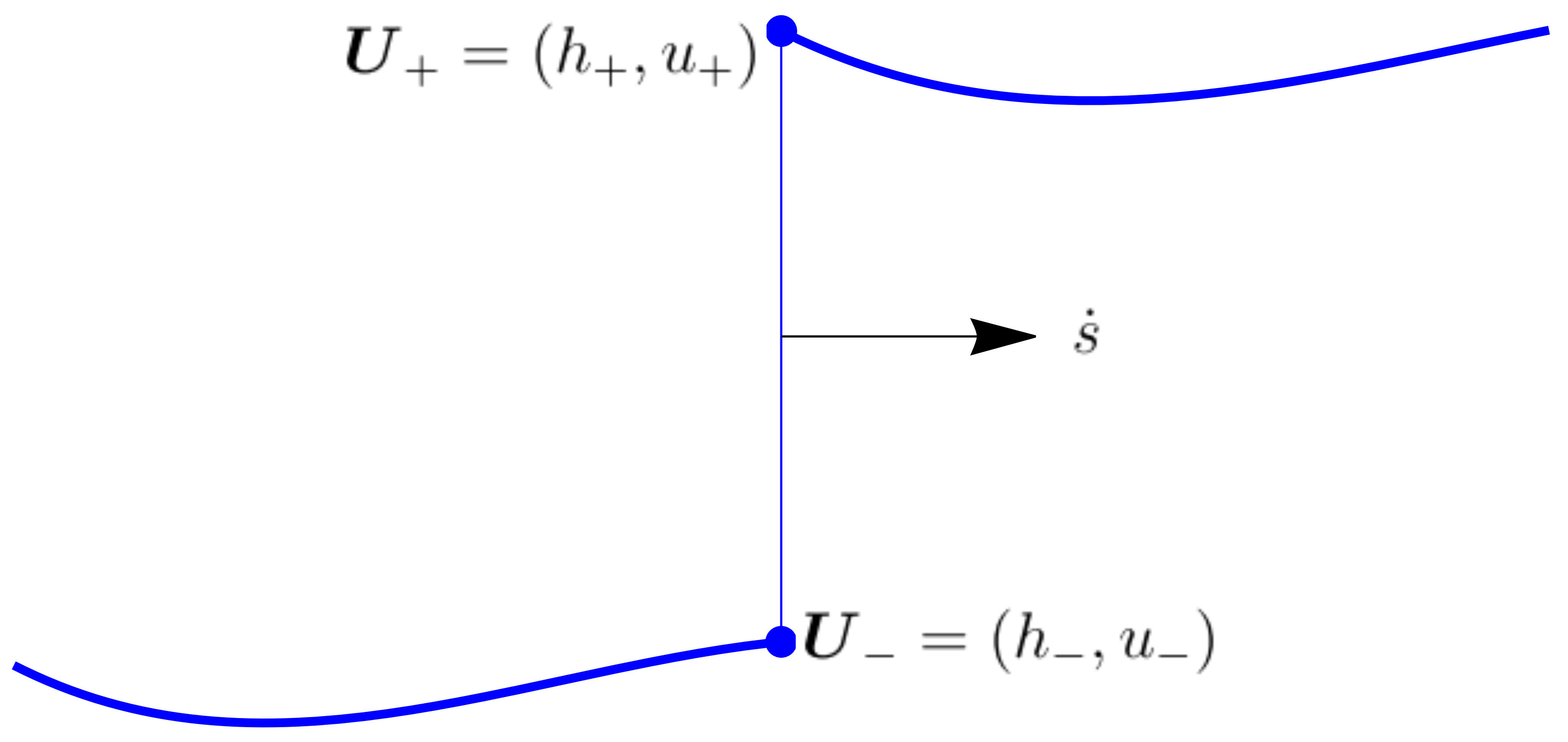
- l'information se propage le long de courbes dont la vitesse est $u \pm c$
- la mise sous forme caractéristique permet de proposer une méthode de résolution numérique dite méthode des caractéristiques
- dans certains cas il y a des solutions analytiques (voir chap. 3)

Diagonalisation (6) : conséquences

Conséquences :

- quand deux courbes caractéristiques de la même famille se croisent, l'information transmise devient contradictoire : il se forme une discontinuité
- cette discontinuité mathématique reflète l'existence d'*ondes de choc*, c.-à-d. des ondes dont les variables h et/ou $\bar{u}$ varient fortement sur de courtes distances (comme les ressauts hydrauliques)
- il s'agit d'une propriété importante des équations différentielles appelés *hyperboliques* : une solution initialement continue peut devenir au bout d'un temps fini discontinu

Équations du ressaut mobile



Toute discontinuité située en $x = s(t)$ se propage à la vitesse $\dot{s}$ donnée par la *condition de Rankine-Hugoniot*

$$\dot{s}[\![\boldsymbol{U}]\!] = [\![\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})]\!],$$

où les doubles crochets représentent la variation brutale de $\boldsymbol{U}$ au passage du choc

$$[\![\boldsymbol{U}]\!] = \boldsymbol{U}^+ - \boldsymbol{U}^- = \lim_{x \to s, x > s} \boldsymbol{U} - \lim_{x \to s, x < s} \boldsymbol{U},$$

les signes $+$ et $-$ sont employés pour désigner ce qui se passe à droite et à gauche respectivement de la discontinuité $x = s(t)$.

Équations du ressaut mobile (2)

Conditions de Rankine-Hugoniot pour les équations de Saint-Venant :

$$\dot{s}[\![h]\!] = [\![hu]\!]$$
$$\dot{s}[\![hu]\!] = [\![hu^2 + gh^2/2]\!]$$

Dans un repère lié à l'onde de choc, on pose $v = u - \dot{s}$. On élimine $\dot{s}$ pour obtenir (h_2,v_2) en fonction de (h_1,v_1)

$$h_1v_1 = h_2v_2$$
$$h_1v_1^2 + gh_1^2/2 = h_2v_2^2 + gh_2^2/2$$

La vitesse du choc est

$$\dot{s} = \frac{h_2v_2 - h_1v_1}{h_2 - h_1}$$

Équations du ressaut mobile (3)

Et on a une relation de conjugaison généralisée

$$\frac{(h_2u_2 - h_1u_1)^2}{h_2 - h_1} = h_2u_2^2 + \frac{gh_2^2}{2} - h_1u_1^2 - \frac{gh_1^2}{2}$$

ce qui donne la vitesse de propagation du ressaut et $u_2(h_2|h_1 \quad v_1)$:

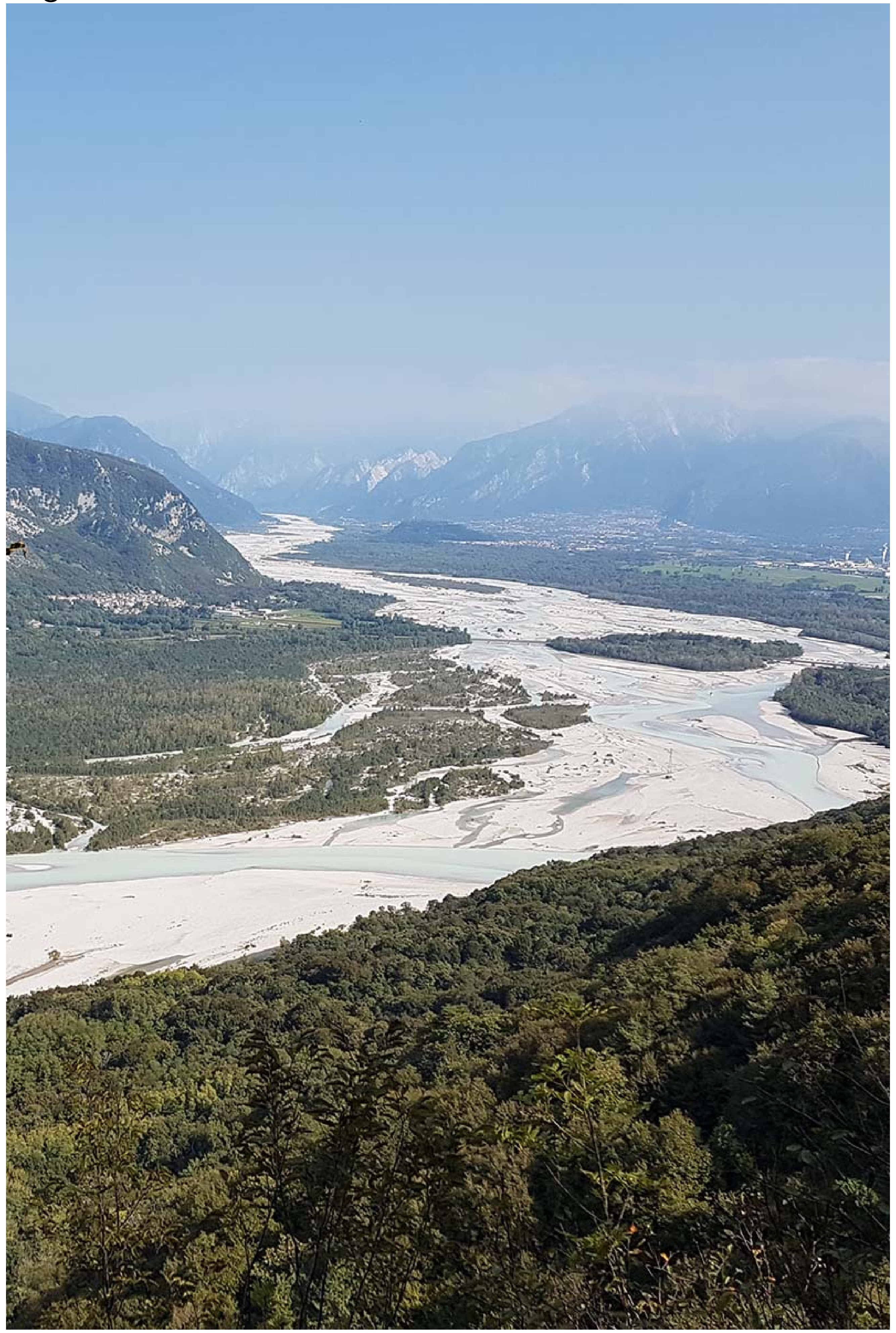
$$u_2 = u_1 \mp (h_2 - h_1)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h_1 + h_2}{h_1h_2}}$$

$$\dot{s} = u_1 \mp \sqrt{\frac{g}{2}(h_1 + h_2)\frac{h_2}{h_1}}$$

On peut vérifier que lorsque $\dot{s} = 0$ (ressaut immobile), on retombe sur les équations du ressaut fixe.

Modèle morphodynamique Exner + Saint-Venant

Tagliamento, Italie



Quand le lit est « mobile » on adjoint une équation de conservation de la masse du lit dite *équation d'Exner*

$$(1-\zeta_b)\frac{\partial b}{\partial t} = D - E = -\frac{\partial q_s}{\partial x},$$

avec $b(x,t)$ la cote du lit, E le taux d'érosion du lit, D le taux de déposition, q_s le débit solide (résultat net entre érosion et sédimentation du lit), et ζ_b la porosité du lit.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement doit être modifiée en conséquence

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g\sin\theta - g\cos\theta\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\varrho h}.$$

avec $s = b + h$ la cote de la surface libre .

Modèle filaire des équations de Saint-Venant

Le Lez, Drôme, France

Pour une section $S(x, t)$ et un débit $Q(x, t)$, les équations de Saint-Venant sont

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2 S^{-1}}{\partial x} = gS\sin\theta - gS\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} - \chi\frac{\tau_p}{\varrho}$$

Rappel : $h = S/B$, $\bar{u} = Q/S$, $\chi = S/R_h$ et le nombre de Froude est

$$Fr = \frac{\bar{u}}{c} = \frac{Q\sqrt{B}}{\sqrt{gS^{3/2}}}$$

B largeur au miroir. La célérité des ondes est

$$c = \sqrt{\frac{gS}{B}}$$

Modèle 2D de Saint-Venant

Dans un repère cartésien, les équations de Saint-Venant sont composées de l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0,$$

et de deux équations de conservation de la quantité de mouvement projetées sur les axes Ox et Oy

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} + gh\frac{\partial h}{\partial x} = -gh\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\tau_{px}}{\varrho}$$
$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial y} + gh\frac{\partial h}{\partial y} = -gh\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\tau_{py}}{\varrho}$$

avec $b(x,y)$ cote du lit, $\bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{u},\bar{v})$ les composantes du champ de vitesse selon x et y, et $\boldsymbol{\tau_p} = (\tau_{px},\tau_{py})$ la contrainte au fond

Singularités hydrauliques

Limites d'utilisation des équations de Saint-Venant (1)

Être vigilant... Il y a des limites d'utilisation plus ou moins fortes

- singularité crée par un ouvrage hydraulique
- embranchement de cours d'eau (confluence, jonction et bifurcation)
- courant secondaire
- morphodynamique
- forte courbure de la surface libre

Équations de Saint-Venant et singularité : seuil

Seuil

Seuil dénoyé :

$$q = C_D\sqrt{2g}(H_{am} - p)^{3/2} \approx C_D\sqrt{2g}(h_{am} - p)^{3/2}$$

avec C_D le coefficient de débit, H_{am} est la charge hydraulique à l'amont immédiat de l'ouvrage, h_{am} la hauteur, et p est la pelle.

Seuil noyé :

$$q = C_D\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{2g}(h_{av} - p)\sqrt{h_{am} - h_{av}}$$

soit

$$q \approx 2{,}6 C_D\sqrt{2g}(h_{av} - p)\sqrt{h_{am} - h_{av}}$$

h_{av} hauteur aval

Équations de Saint-Venant et singularité : vanne

Vanne

Vanne dénoyée

$$q = C_D a \sqrt{2gh_1}$$

avec h_1 la hauteur d'eau à l'amont de la vanne, a l'ouverture de la vanne, et C_D le coefficient de débit.

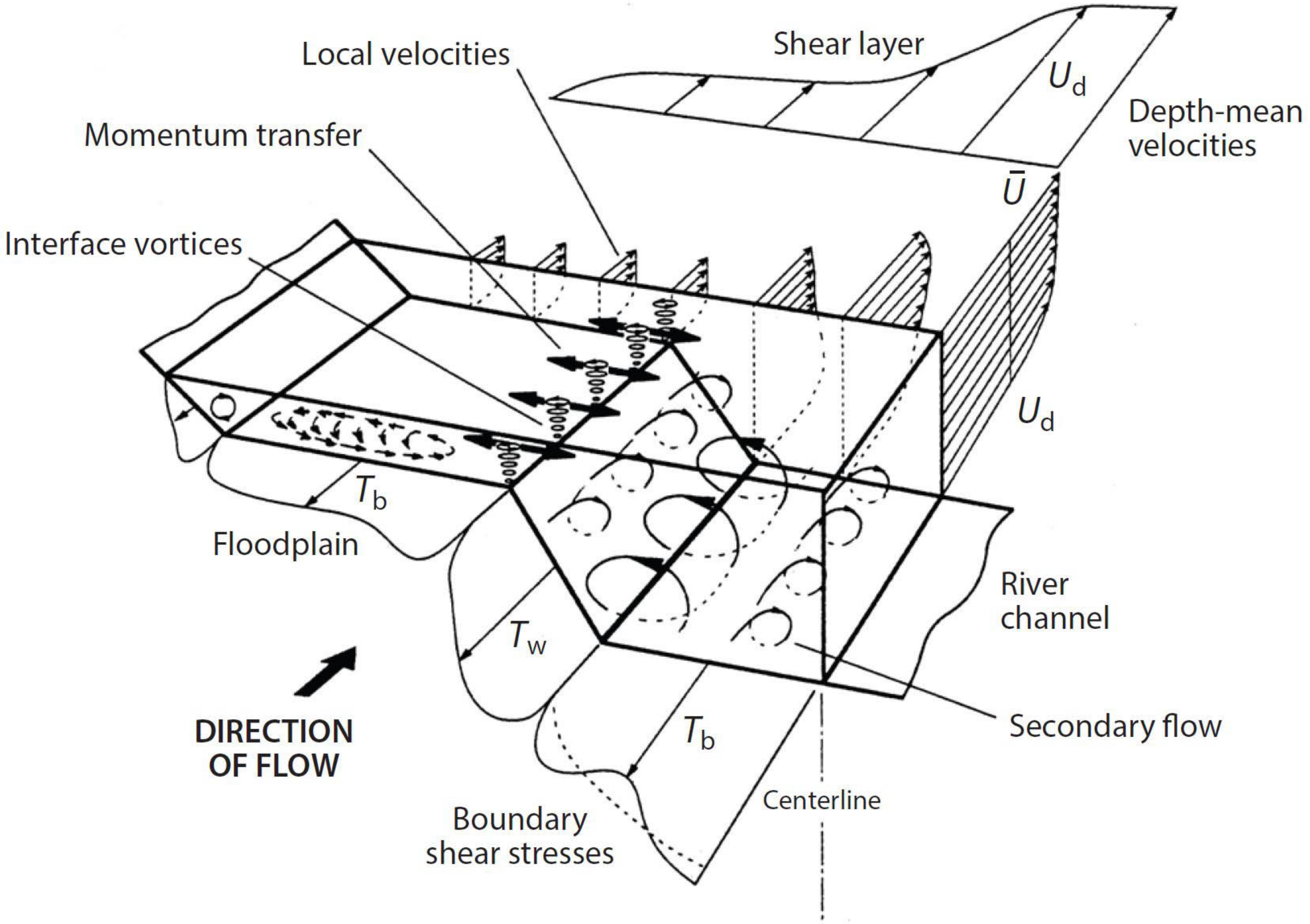
Équations de Saint-Venant et singularité : pont

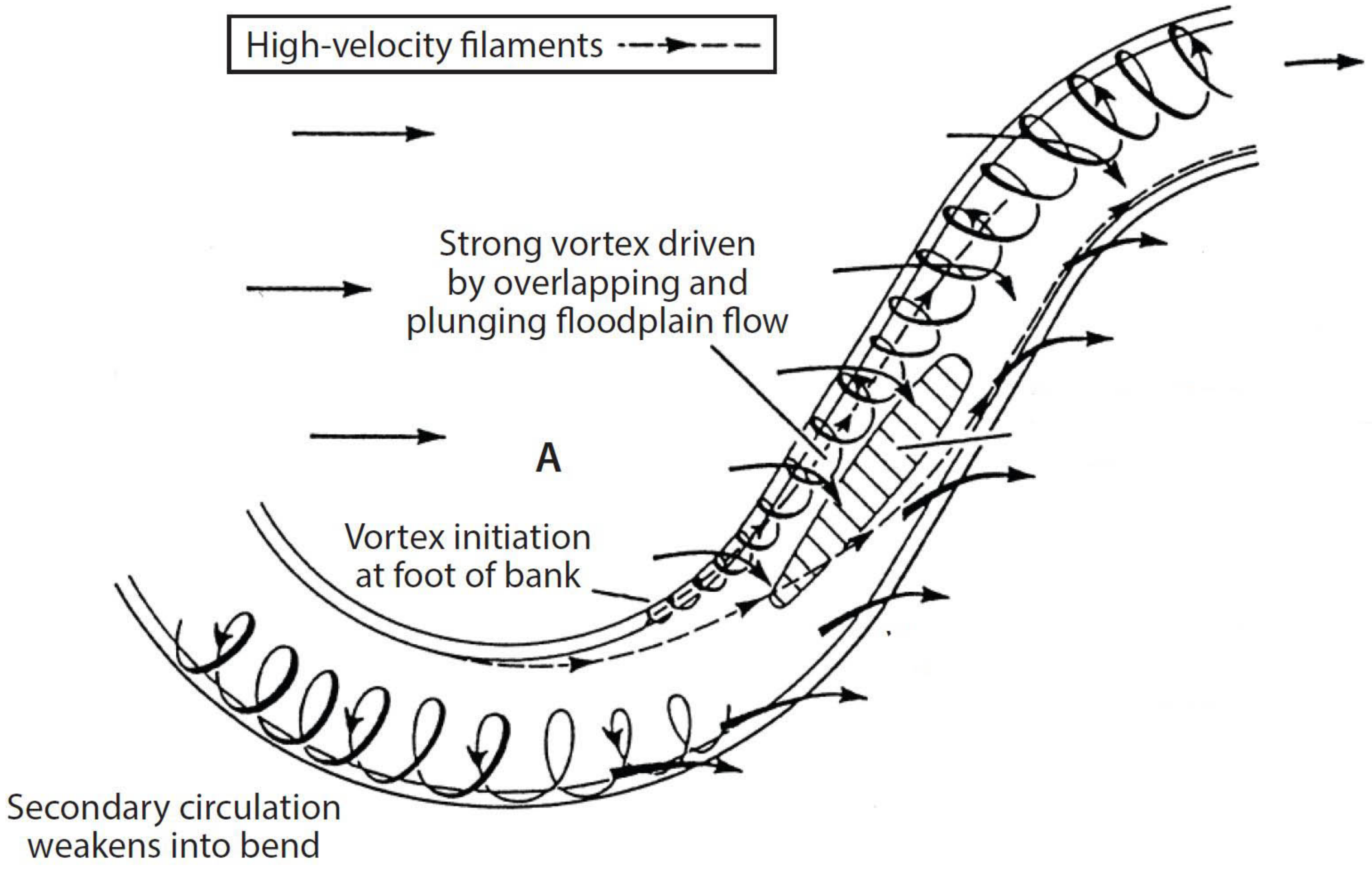
Pont, ponceau, dalot, buse

Problèmes posés par les ponts

- comportement similaire à des vannes à ouverture fixe
- en cas de débordement, perte de contrôle hydraulique
- possible mise en charge des tronçons longs
- pertes de charge singulières

Équations de Saint-Venant et écoulement secondaire





Bates, P.D., Flood Inundation Prediction, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **54**, 287-315, 2022.

Frottement de peau

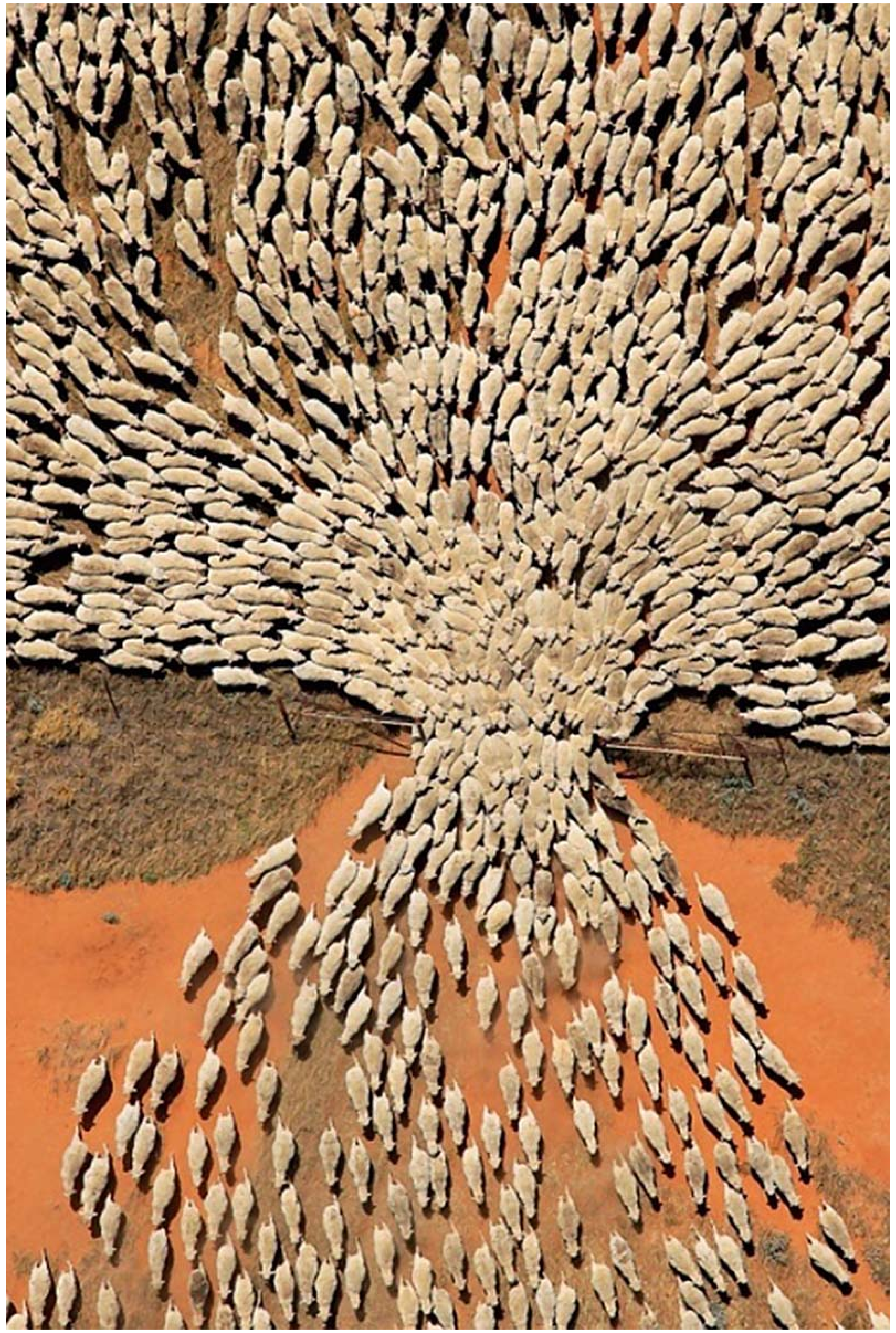
Résistance à l'écoulement : considérations générales



Il existe différentes formes de lit :

- lit fixe : bedrock, coursier en béton
- lit déformable :
  - lit alluvial : lit mobile (transport solide, structure morphologique)
  - lit végétalisé

Résistance à l'écoulement (2)

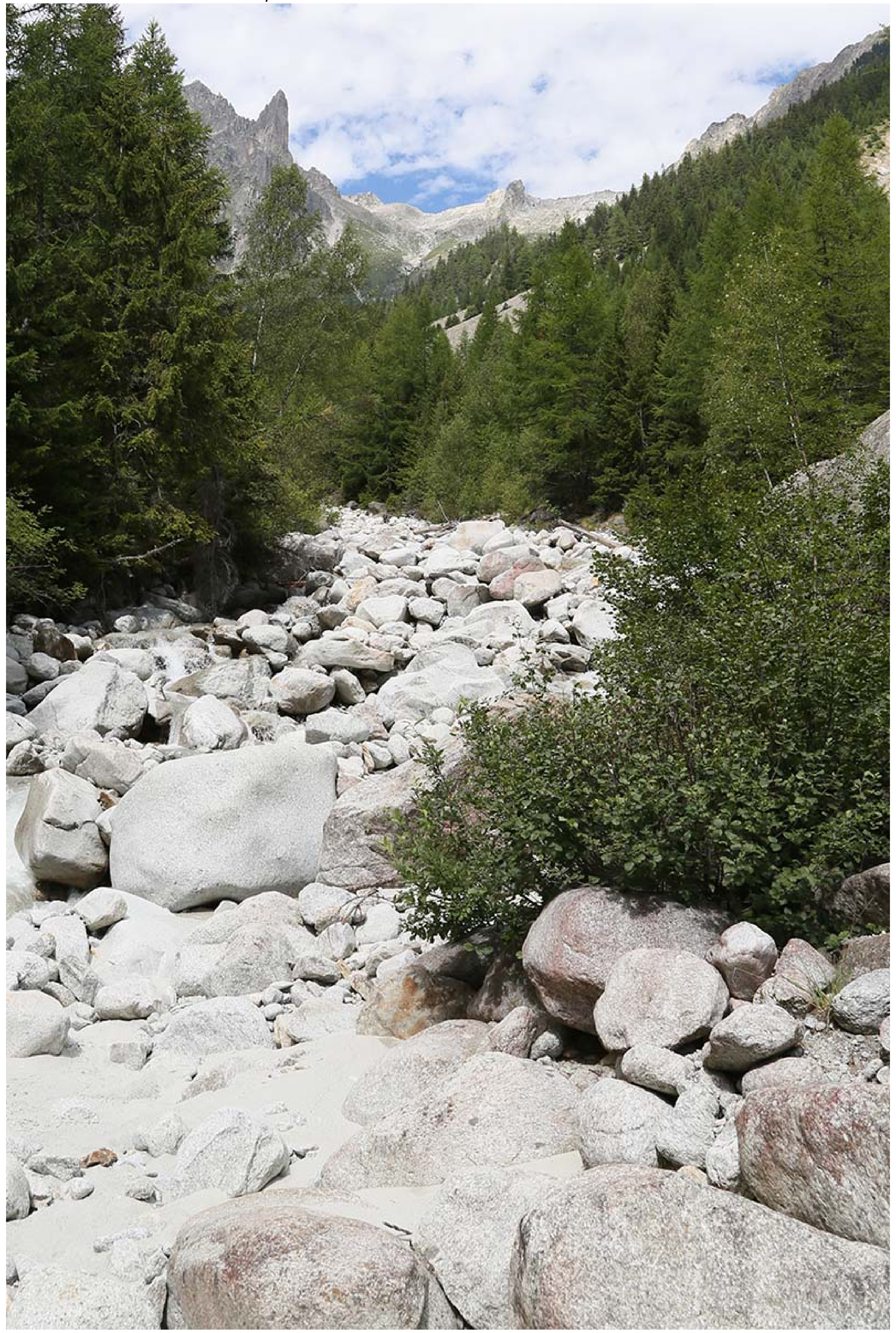


La résistance à l'écoulement traduit la dissipation d'énergie du fait de la résistance exercée par la topographie à l'écoulement. Elle comprend plusieurs mécanismes :

- dissipation à l'échelle du grain (frottement de peau)
- dissipation à l'échelle de la structure du lit (frottement de forme)
- dissipation due à des variations brutales de section (accélération/décélération de l'écoulement, vorticité)
- dissipation de surface (vagues déferlantes)

Résistance à l'écoulement (3)

Torrent de Saleina, Valais



De façon générique, on peut écrire la résistance au frottement sous la forme de la loi de Darcy-Weisbach

$$\tau_p = \frac{f}{8}\varrho\bar{u}^2$$

avec f le coefficient de Darcy-Weisbach

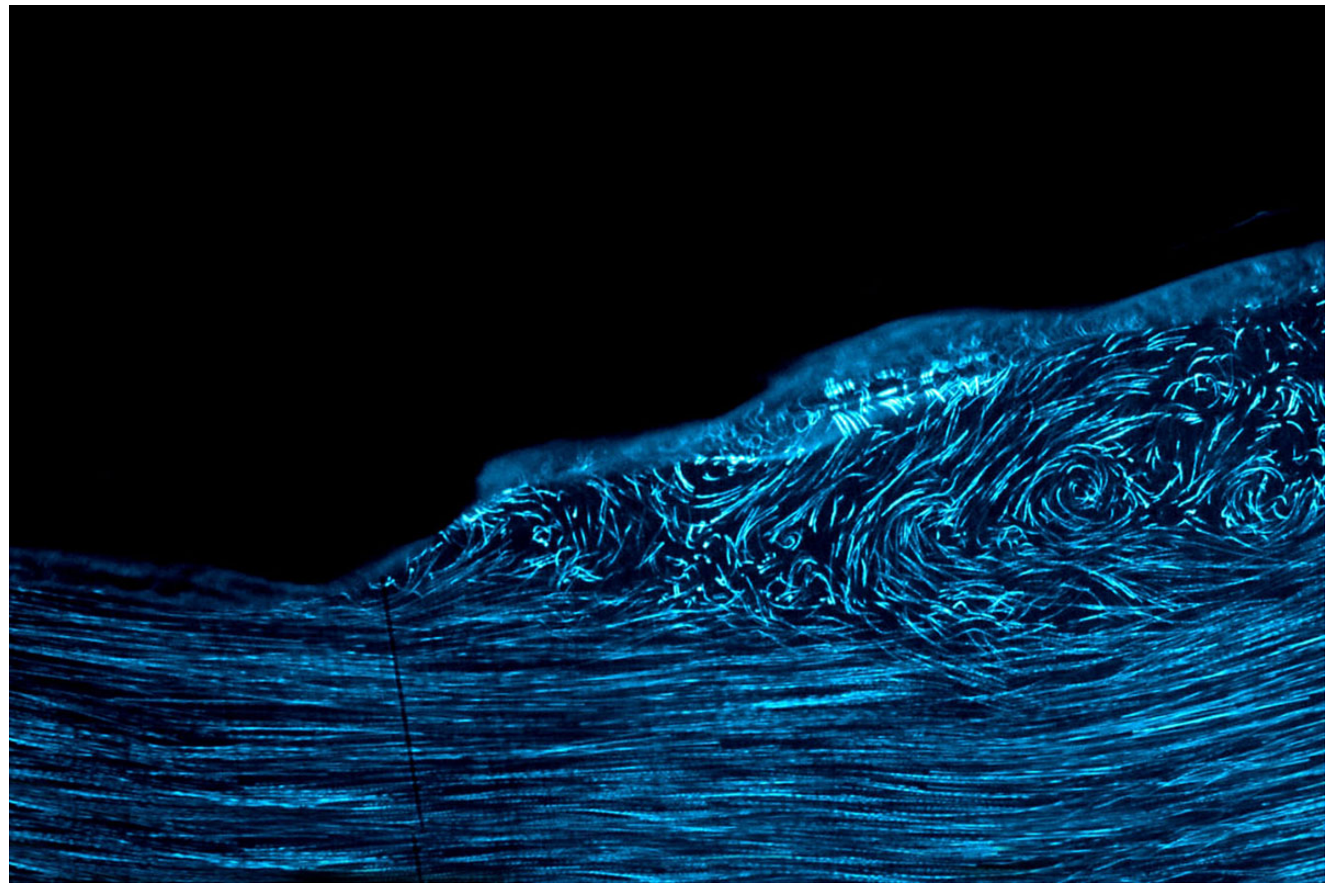
$$f = f(Re, Fr, \xi, \ldots)$$

fonction *a priori* des nombres de Reynolds, de Froude, et de submersion relative (entre autres) :

$$Re = \frac{\bar{u}R_h}{\nu}, Fr = \frac{Q\sqrt{B}}{\sqrt{gS^{3/2}}}, \xi = \frac{R_h}{k_s}$$

avec k_s échelle de rugosité du lit. Ce n'est la seule façon de procéder !

Résistance à l'écoulement (4)



Formules courantes (frottement de peau)

- Manning-Strickler

$$\tau_p = \frac{\varrho g}{K^2}\frac{\bar{u}^2}{R_h^{1/3}},$$

avec K le coefficient de Manning-Strickler [m$^{1/3}$·s^{-1}]

- Chézy

$$\tau_p = \frac{\varrho g}{C^2}\bar{u}^2,$$

avec C le coefficient de Chézy [m$^{1/2}$·s^{-1}]

On a la relation d'équivalence

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{\sqrt{g}}{KR_h^{1/3}} = \frac{\sqrt{g}}{C}$$

Résistance à l'écoulement (5)

Vitesse moyenne $\bar{u}$, hauteur normale h_n (pour un canal infiniment large), pente de frottement, j_f, et contrainte pariétale τ_b (R_h rayon hydraulique)

loi de frottement	$\bar{u}$	h_n	j_f	τ_b
Manning-Strikler	$\bar{u} = K\sqrt{i}R_h^{2/3}$	$h_n = \left(\frac{q}{K\sqrt{i}}\right)^{3/5}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{K^2 R_h^{4/3}}$	$\tau_b = \frac{\varrho}{K^2}\frac{\bar{u}^2}{R_h^{1/3}}$
Darcy-Weisbach	$\bar{u} = \sqrt{\frac{8g}{f}}\sqrt{i}R_h^{1/2}$	$h_n = \left(q\sqrt{\frac{f}{8gi}}\right)^{2/3}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{2g}\frac{f(R_h)}{4R_h}$	$\tau_b = \frac{\varrho}{8}f\bar{u}^2$
Chézy	$\bar{u} = C\sqrt{i}R_h^{1/2}$	$h_n = \left(q\frac{1}{C\sqrt{i}}\right)^{2/3}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{C^2 R_h}$	$\tau_b = \frac{\varrho g}{C^2}\bar{u}^2$

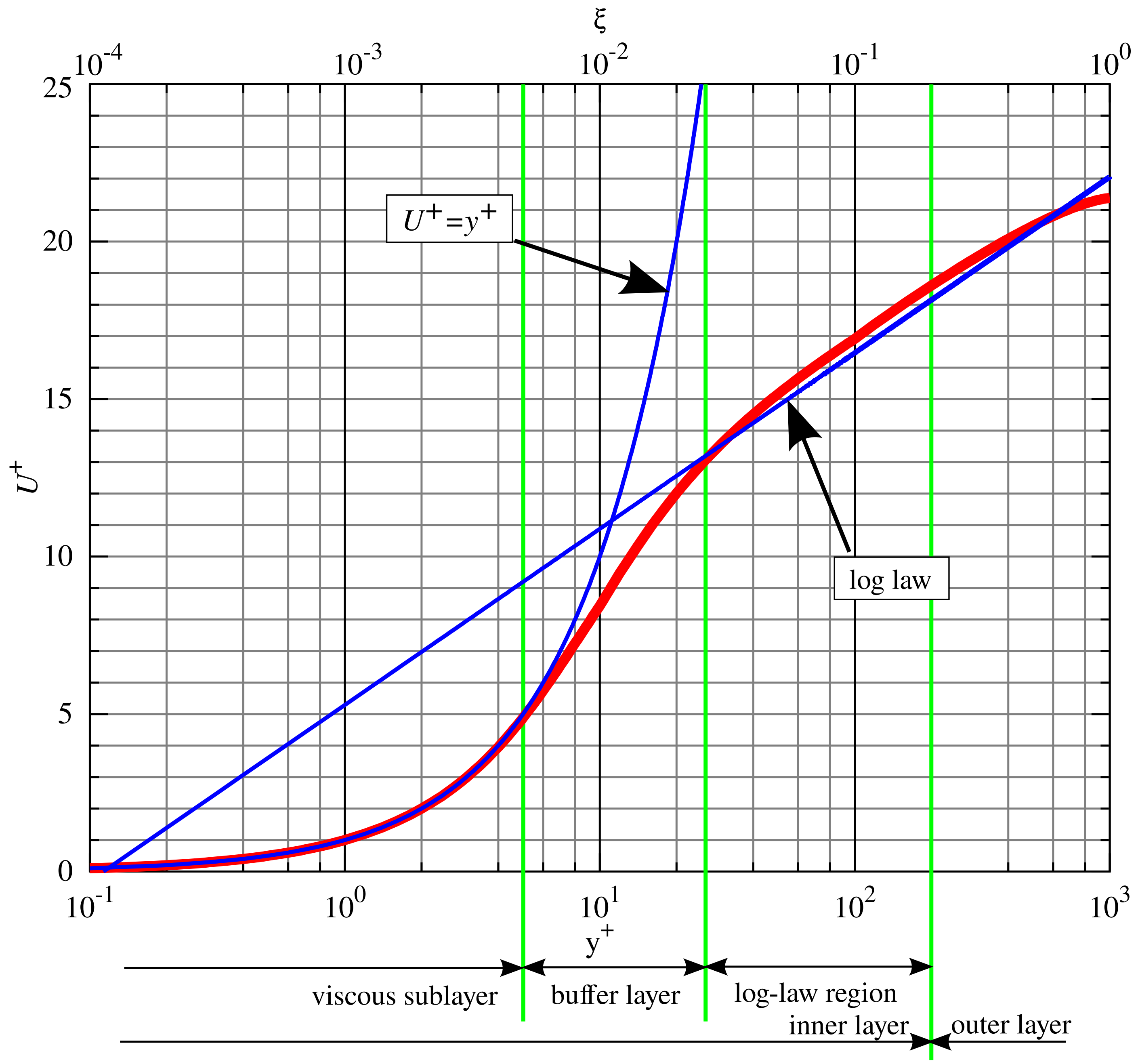
Loi de Meyer–Peter ou Jäggi (n : coefficient de Manning, d_{90} diamètre le plus grossier, $\kappa = 0{,}4$ constante de von Kármán, $c = 11{,}0 - 12{,}2$ constante de Keulegan)

$$K = \frac{1}{n} = \frac{26}{d_{90}^{1/6}} = \frac{23{,}2}{d_{90}^{1/6}}$$

Les coefficients sont reliés entre eux :

$$\frac{g}{C^2} = \frac{g}{K^2 R_h^{1/3}} = \frac{f}{8} = \frac{\kappa^2}{\ln^2(cR_h/k_s)}$$

Résistance à l'écoulement (6)



Loi de Keulegan : la forme préférée de nos jours

Intégration de la loi logarithmique (Prandtl) :

$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}$$

avec $u_* = \sqrt{\tau_p/\varrho}$. Selon Keulegan : $y_0 = k_s/a$ avec $a \approx 30$ pour des rivières de gravier. La vitesse moyenne est

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\left(\ln \frac{ch}{k_s} - 1\right) = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{ah}{\mathrm{e}k_s}$$

avec $\mathrm{e} = 2{,}718$ et $c = a/e \approx 11$. La loi est souvent donnée en base logarithmique 10

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 6{,}25 + 5{,}75 \log \frac{h}{k_s} \Rightarrow \tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{ch}{k_s}\right)} \varrho \bar{u}^2$$

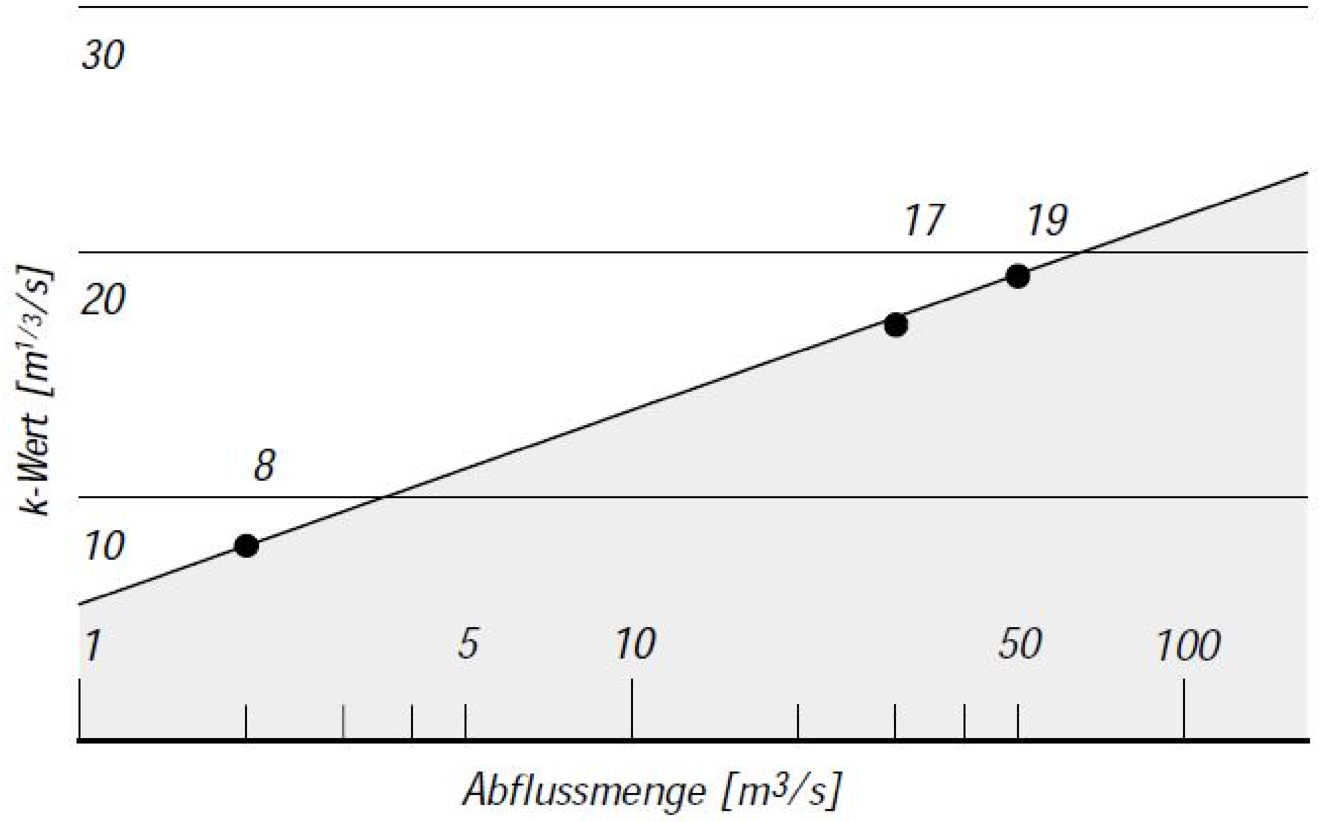
Résistance de peau/de forme (1)

Rauheiten in ausgesuchten schweizerischen Fliessgewässern (en allemand) du Bundesamt für Wasser und Geologie (maintenant rattaché à l'Office fédéral de l'environnement) pour une analyse de 12 cours d'eau en Suisse pour différents débits.

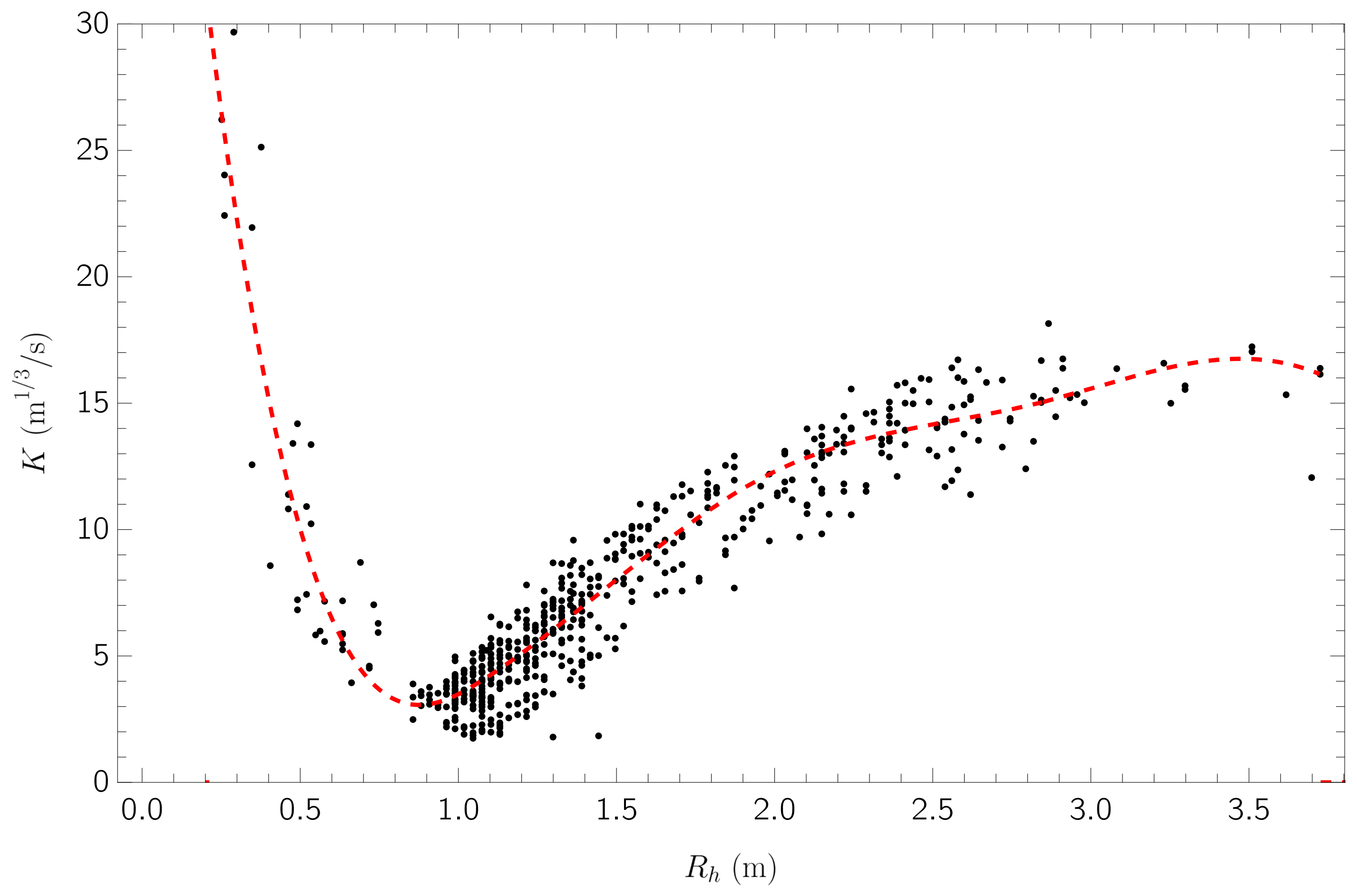
Variation du coefficient de Manning-Strickler en fonction du débit...

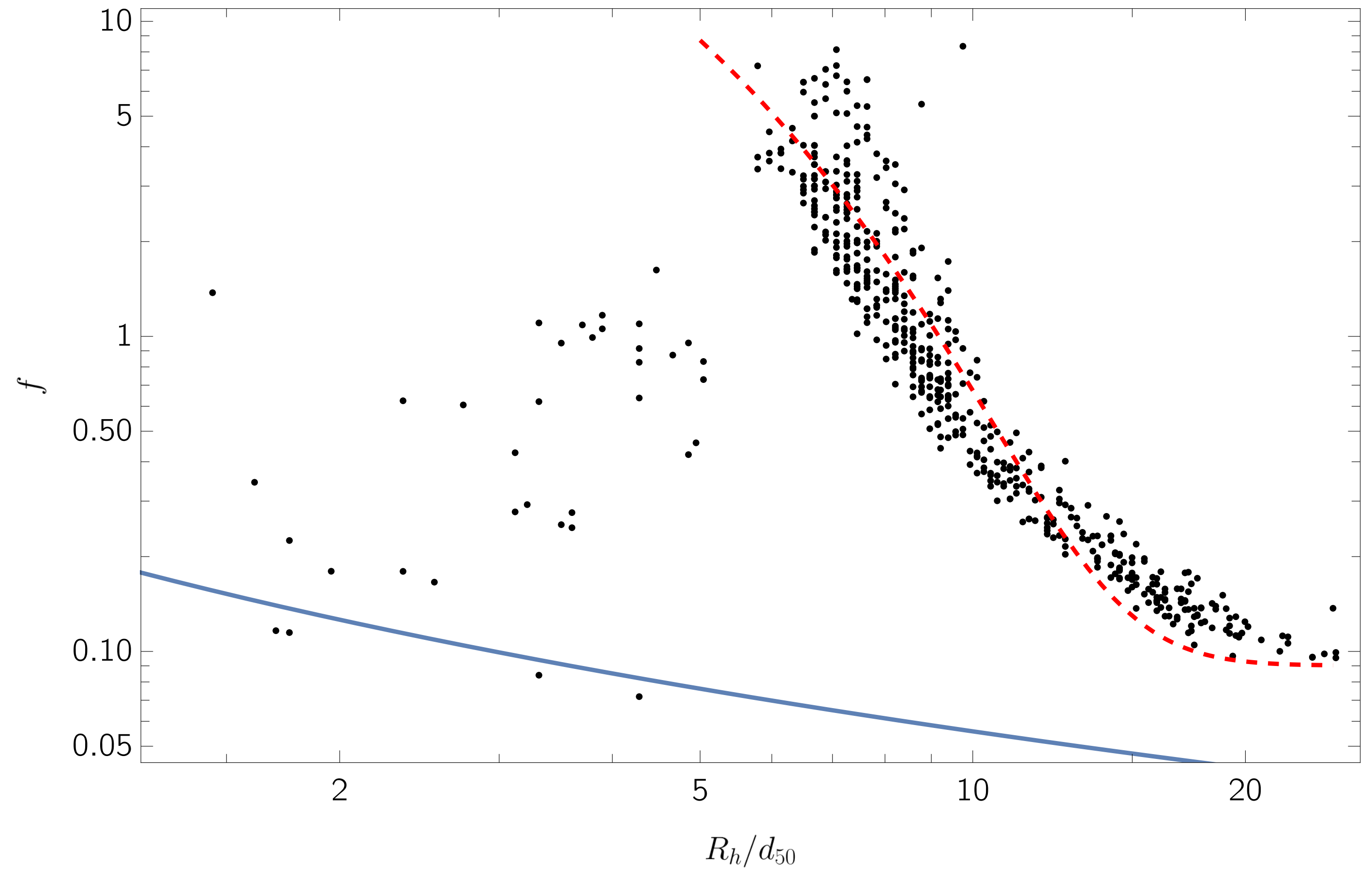
Hydrometrische Station:	Birse – Moutier, La Charrue
Einzugsgebiet:	183 km^2
Regimetyp:	nivo-pluvial jurassien
Mittlerer Abfluss:	3.3 m^3/s
10-jährliches Hochwasser:	45 m^3/s
Gefälle:	18 ‰
Abflussgerinne:	Künstliches geradliniges Trapezprofil mit Ufern aus Blocksatz. Kiessohle mit Blöcken. Am Ufer vereinzelt Büsche und Bäume.

Rauigkeitswerte nach Strickler



Résistance de peau/de forme (2)





Variations du coefficient de Manning–Strickler et Darcy–Weisbach pour la rivière Lochsa près de Lowell (États-Unis, Idaho).

Les valeurs de K et de f ont été obtenues à partir des mesures de débit Q, de surface mouillée A, de rayon hydraulique R_h, et de l'estimation de la vitesse de frottement $u_* = \sqrt{gR_h i}$: $K = Q/(AR_h^{2/3}\sqrt{i})$ et $f = 8(u_*/\bar{u})^2$.

Paramètres : pente $i = 0{,}23$ %, $d_{50} = 126$ mm, et $d_{90} = 338$ mm.

Leçon : attention au choix d'une valeur de K ou f sur la seule base du frottement de peau !

Pour aller plus loin : la loi de Keulegan

Loi empirique de Prandtl (ou de longueur de mélange)

$$\tau(y) = \mu_t \frac{\mathrm{d}\langle u\rangle}{\mathrm{d}y} = \varrho \ell_m^2 \left(\frac{\mathrm{d}\langle u\rangle}{\mathrm{d}y}\right)^2 = \varrho\kappa^2 y^2 \left(\frac{\mathrm{d}\langle u\rangle}{\mathrm{d}y}\right)^2,$$

La viscosité turbulente μ_t est une fonction du gradient de vitesse moyenne $\langle u\rangle$, de la longueur de mélange $\ell_m = \kappa y$, et de la constante de von Kármán $\kappa \approx 0{,}41$

$$\mu_t = \varrho \ell_m^2 \frac{\mathrm{d}\langle u\rangle}{\mathrm{d}y}.$$

Près de la paroi, la contrainte de cisaillement tend vers une constante τ_p. On appelle *vitesse de frottement* :

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\varrho}}.$$

En régime permanent uniforme ($\tau_p = \varrho g R_h \sin\theta$), on a : $u_* = \sqrt{gR_h \sin\theta} \approx \sqrt{gR_h i}$ (ou $\sqrt{ghi}$ pour un canal infiniment large).

Pour aller plus loin : la loi de Keulegan (2)

Approximation près de la paroi $\tau(y) = \tau_p = \varrho u_*^2$. L'équation de Prandtl

$$\tau(y) = \varrho u_*^2 \Rightarrow \kappa y \frac{\mathrm{d}\langle u \rangle}{\mathrm{d}y} = u_*,$$

ce qui donne

$$u(y) = \kappa^{-1} u_* \ln y + c_1,$$

avec c_1 une constante d'intégration. Supposant la condition de non-glissement $u(y_0) = 0$ à y_0, on obtient le *profil de vitesse logarithmique* :

$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0},$$

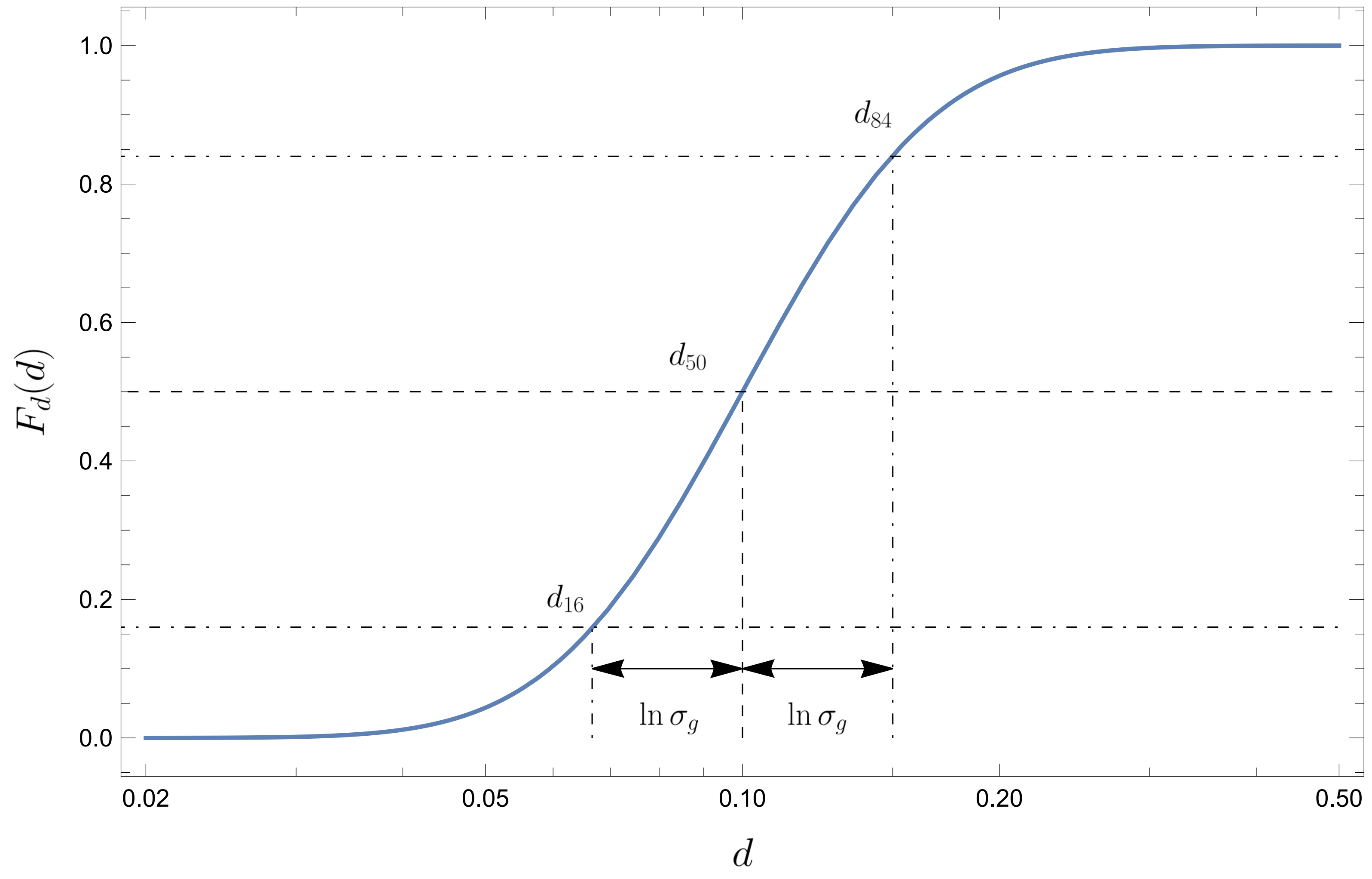
qui est valable pour des nombres de Reynolds (fct de la rugosité k_s) tels que

$$Re_* = \frac{u_* k_s}{\nu} > 70.$$

Pour aller plus loin : la loi de Keulegan (3)

Que valent k_s et y_0 ? Pour des rivières de gravier $y_0 = k_s/a$ avec $a \approx 30$ et k_s est la taille caractéristique des plus grosses rugosités du lit. On prend souvent : $k_s \approx 2d_{90}$. Il existe d'autres propositions : $k_s = 3{,}5 d_{84}$, $k_s = 3d_{84}$, $k_s = 5{,}9 d_{50}$, ou $k_s = 2{,}4 d_{90}$.

Utilisation de la loi lognormale pour la distribution granulométrique



Gradation $\sigma_g = d_{84}/d_{50} = d_{50}/d_{16}$

Pour aller plus loin : la loi de Keulegan (4)

Keulegan intègre le profil de vitesse logarithmique (avec $y_0 = k_s/a$ où $a = 33$ et $\kappa = 0{,}40$) sur toute la hauteur h :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{ah}{\mathrm{e}k_s} = 6{,}0 + 2{,}5 \ln \frac{h}{k_s}.$$

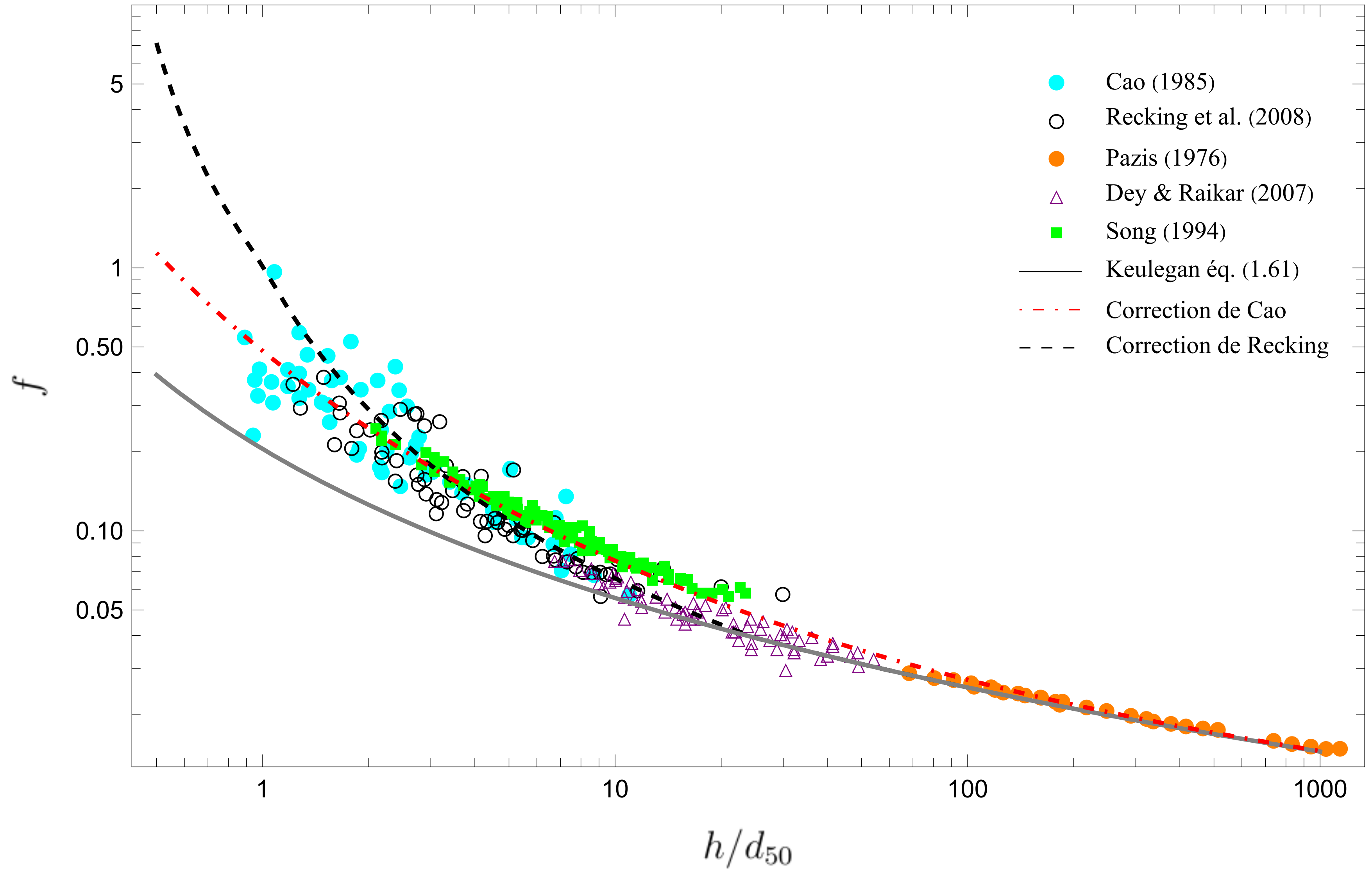
avec $\mathrm{e} = 2{,}718$ et l'hypothèse $h \gg k_s$. En base logarithmique 10, cela donne

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 6{,}25 + 5{,}75 \log \frac{h}{k_s}.$$

Ou bien encore :

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8ghi}{f}} \text{ avec } f = 8 \left(6{,}25 + 5{,}75 \log \frac{h}{k_s}\right)^{-2} = \left(2{,}03 \log \frac{12{,}2h}{k_s}\right)^{-2}.$$

Loi de Keulegan à faible submersion



Variation du coefficient de frottement f avec la submersion relative h/d_{50}. On compare la loi de Keulegan aux corrections proposées par Recking (2008) et Cao (1985).

Recking et al. (2008) considèrent qu'à faible submersion, la rugosité effective est plus importante que $k_s = 3d_{84}$ (ou un multiple de d_{50}). Il faut donc introduire un coefficient correctif

$$\alpha_{rl} = 4\left(\frac{h}{d}\right)^{-0{,}43} \quad \text{avec } 1 < \alpha_{rl} < 4$$

qui est borné entre 1 et 4. La loi de Keulegan devient alors

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 6{,}25 + 5{,}75 \log \frac{h}{\alpha_{rl} d_{50}}.$$

Cao pondère la loi de Keulegan

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \left(6{,}25 + 5{,}75 \log \frac{h}{d_{50}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-Y}\right)$$

avec une dépendance vis-à-vis de la submersion relative

$$Y = \alpha\left(\frac{h}{d_{50}}\right)^{\beta} \quad \text{où } \alpha = 1{,}053 \text{ et } \beta = 0{,}255.$$

Faibles submersions : loi de Ferguson

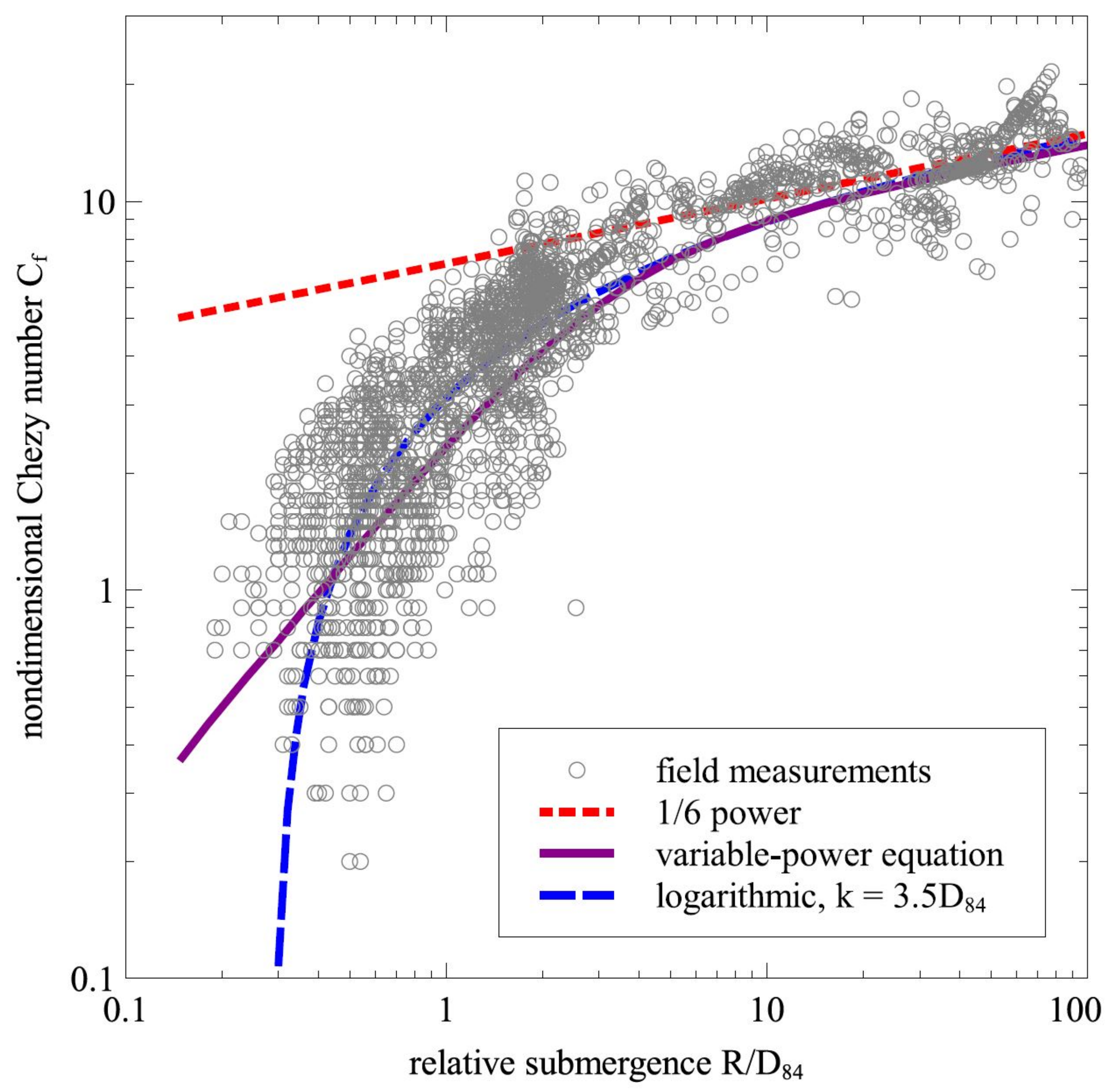


Figure 2. Nondimensional plot of within-reach and between-reach variation in velocity with relative submergence in coarse-bed streams. Author's plot using 2,183 data points from the compilation analyzed by Rickenmann and Recking (2011). Curves are trends predicted by different flow resistance equations.

Ferguson, R.I., Roughness calibration to improve flow predictions in coarse-bed streams, *Water Resources Research*, 57, e2021WR029979, 2021.

Cas des faibles submersions

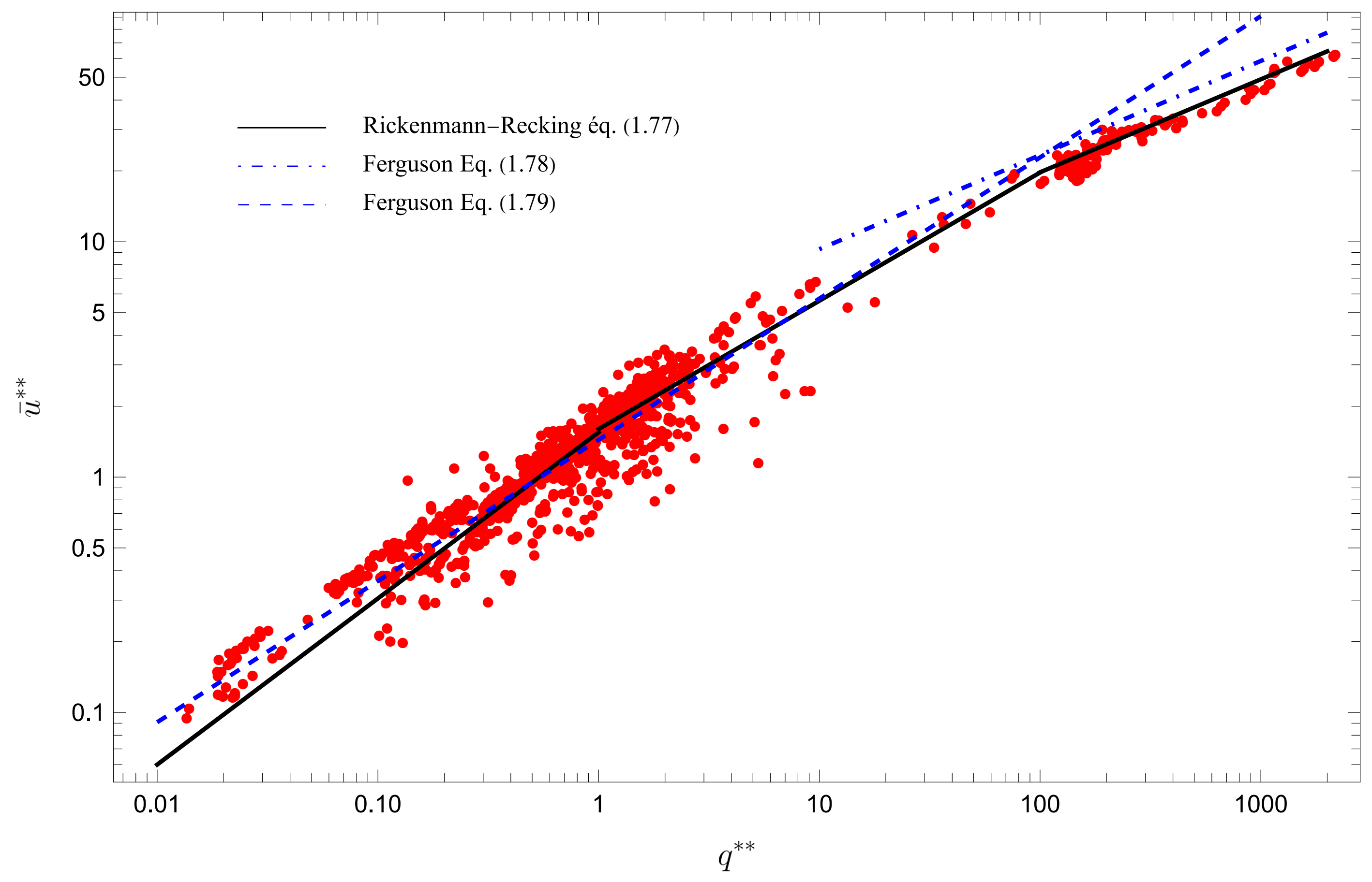
Méta-analyse de Rickenmann et Recking (Evaluation of flow resistance in gravel-bed rivers through a large field data set, *Water Resources Research*, 47, W07538, 2011) pour des pentes $0{,}004 \leq i \leq 24$ %, des granulométries $3 \times 10^{-4} \leq d_{84} \leq 1{,}35$ m, et des débits par unité de largeur $3 \times 10^{-3} \leq q \leq 25$ m^3/s/ml.

On distingue :

- les petites rugosités (ou grandes submersions) : $R_h/d_{84} > 7$. On applique Manning-Strickler, Keulegan ou Darcy-Weisbach
- les grandes rugosités (ou faibles submersions) : $R_h/d_{84} < 2$. Ferguson (2007) propose la loi dite de puissance variable avec $k_s = d_{84}$, $a_1 = 6{,}5$ et $a_2 = 2{,}5$:

$$C_f = \frac{C}{\sqrt{g}} = \frac{a_1 a_2 \dfrac{R_h}{k_s}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 (R_h/k_s)^{5/3}}}$$

Faibles submersions : loi de Rickenmann & Recking



Rickenmann & Recking, Evaluation of flow resistance in gravel-bed rivers through a large field data set, *Water Resour. Res.*, 47, W07538, 2011.

Méta-analyse de Rickenmann et Recking (Evaluation of flow resistance in gravel-bed rivers through a large field data set, *Water Resources Research*, 47, W07538, 2011) pour des pentes $0{,}004 \leq i \leq 24$ %, des granulométries $3 \times 10^{-4} \leq d_{84} \leq 1{,}35$ m, et des débits par unité de largeur $3 \times 10^{-3} \leq q \leq 25$ m^3/s/ml.

$$\bar{u}^{**} = 1{,}5471 q^{**0{,}7062} \left(1 + \left(\frac{q^{**}}{10{,}31}\right)^{0{,}6317}\right)^{-0{,}4930}.$$

avec

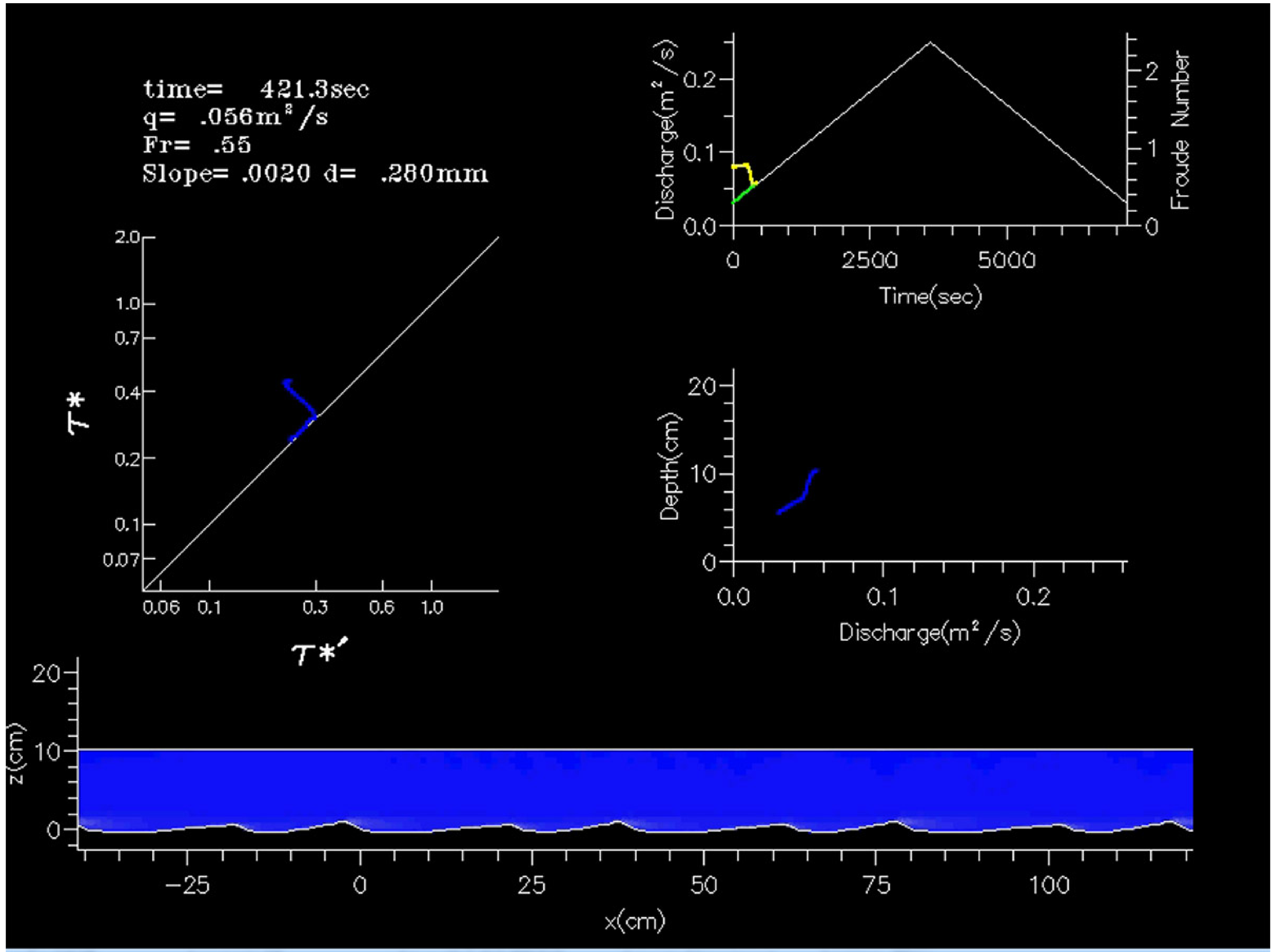
$$\bar{u}^{**} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gid_{84}}} \text{ et } q^{**} = \frac{q}{\sqrt{gid_{84}^3}}$$

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \begin{cases} 6{,}84 \left(\dfrac{h}{d_{84}}\right)^{0{,}152} & \text{si } q^{**} > 100, \\ 2{,}82 \left(\dfrac{h}{d_{84}}\right)^{0{,}696} & \text{si } 1 \leq q^{**} \leq 100, \\ 4{,}42 \left(\dfrac{h}{d_{84}}\right)^{1{,}90} & \text{si } q^{**} < 1. \end{cases}$$

Frottement de forme

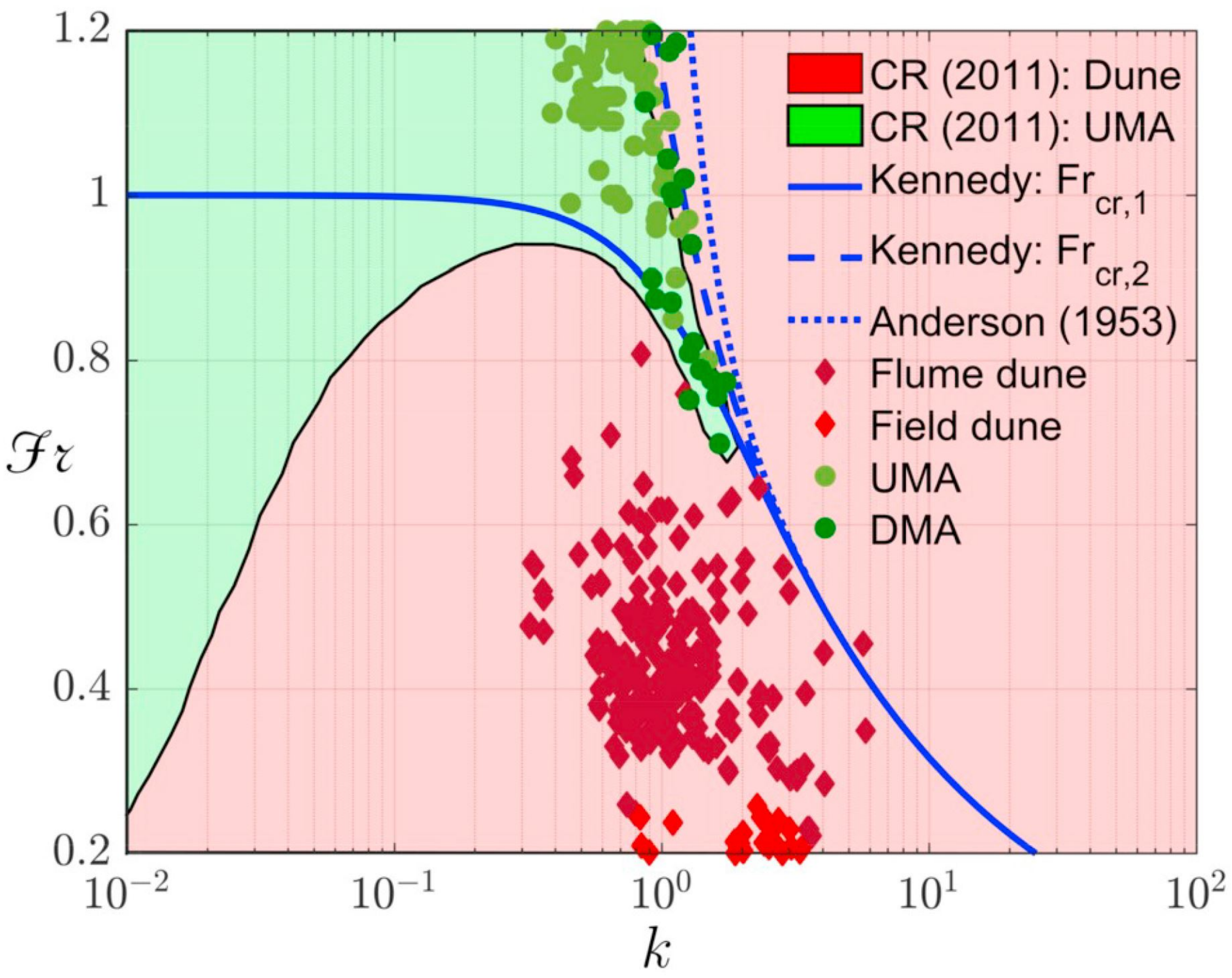
Mobilité du lit

Conséquence du transport solide : les lits sont mobiles, des structures morphologiques se forment, la résistance à l'écoulement varie



Shimizu, Y., S. Giri, S. Yamaguchi, and J. Nelson, Numerical simulation of dune-flat bed transition and stage-discharge relationship with hysteresis effect, *Water Resources Research*, 45, W04429, 2009.

Stabilité du lit



Structures dans un diagramme Froude – nombre d'onde adimensionnel

Bohorquez, P., P. Cañada-Pereira, P.J. Jimenez-Ruiz, and J.D. del Moral-Erencia, The fascination of a shallow-water theory for the formation of megaflood-scale dunes and antidunes, *Earth-Science Reviews*, 193, 91-108, 2019.

Développement de structures morphologiques vu comme une perte de stabilité. On part des équations de Saint-Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0,$$

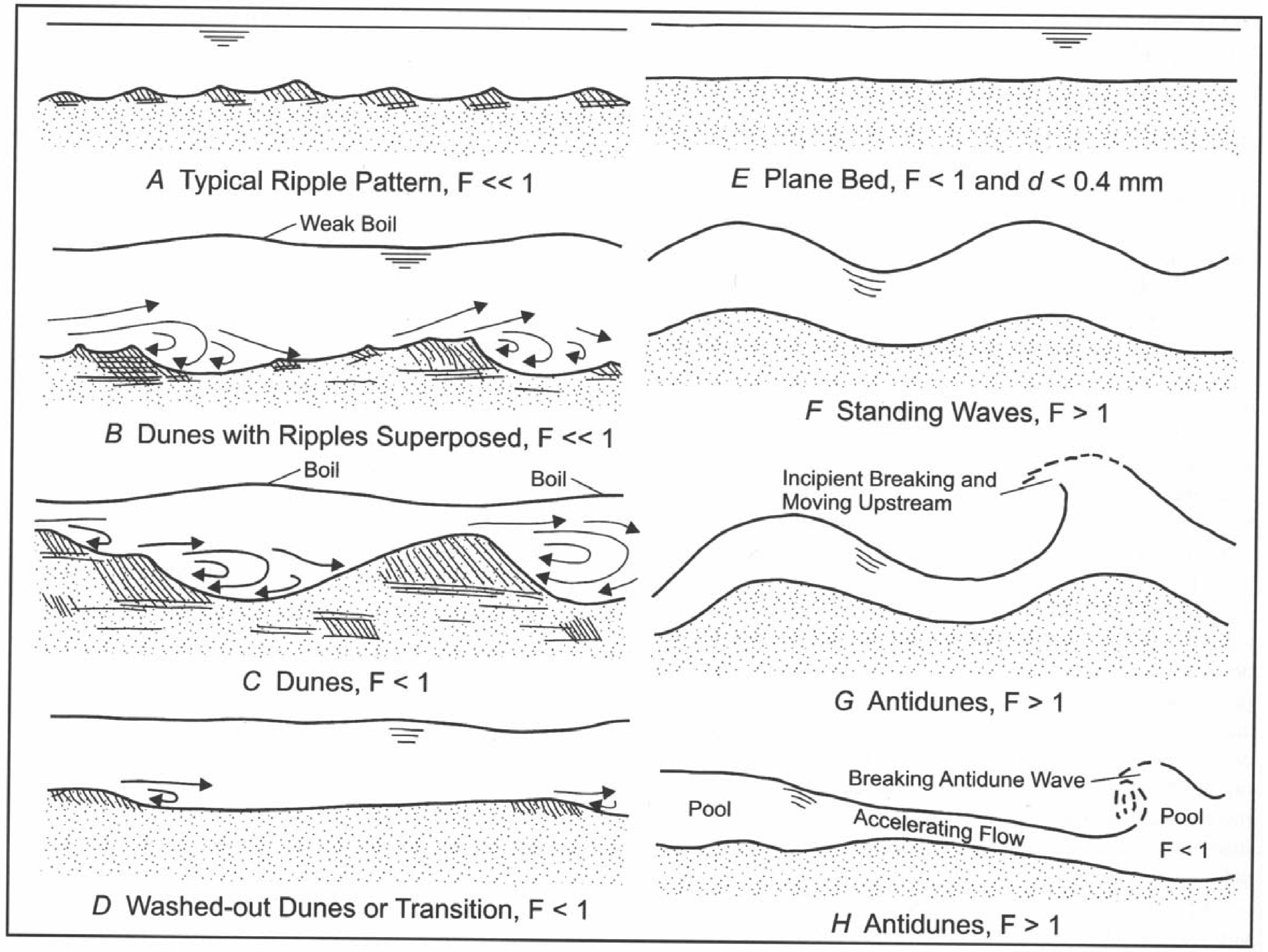
$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} = gh\sin\theta - gh\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\varrho} + \frac{\partial}{\partial x}\left(h\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right).$$

et d'Exner

$$(1-\zeta_b)\frac{\partial b}{\partial t} = D - E = -\frac{\partial q_s}{\partial x},$$

h hauteur d'eau, $\bar{u}$ vitesse moyenne, θ pente, τ_p contrainte pariétale, b cote du lit, ζ_b porosité du lit, D taux de déposition, E taux d'entraînement, q_s débit solide, ν viscosité parabolique.

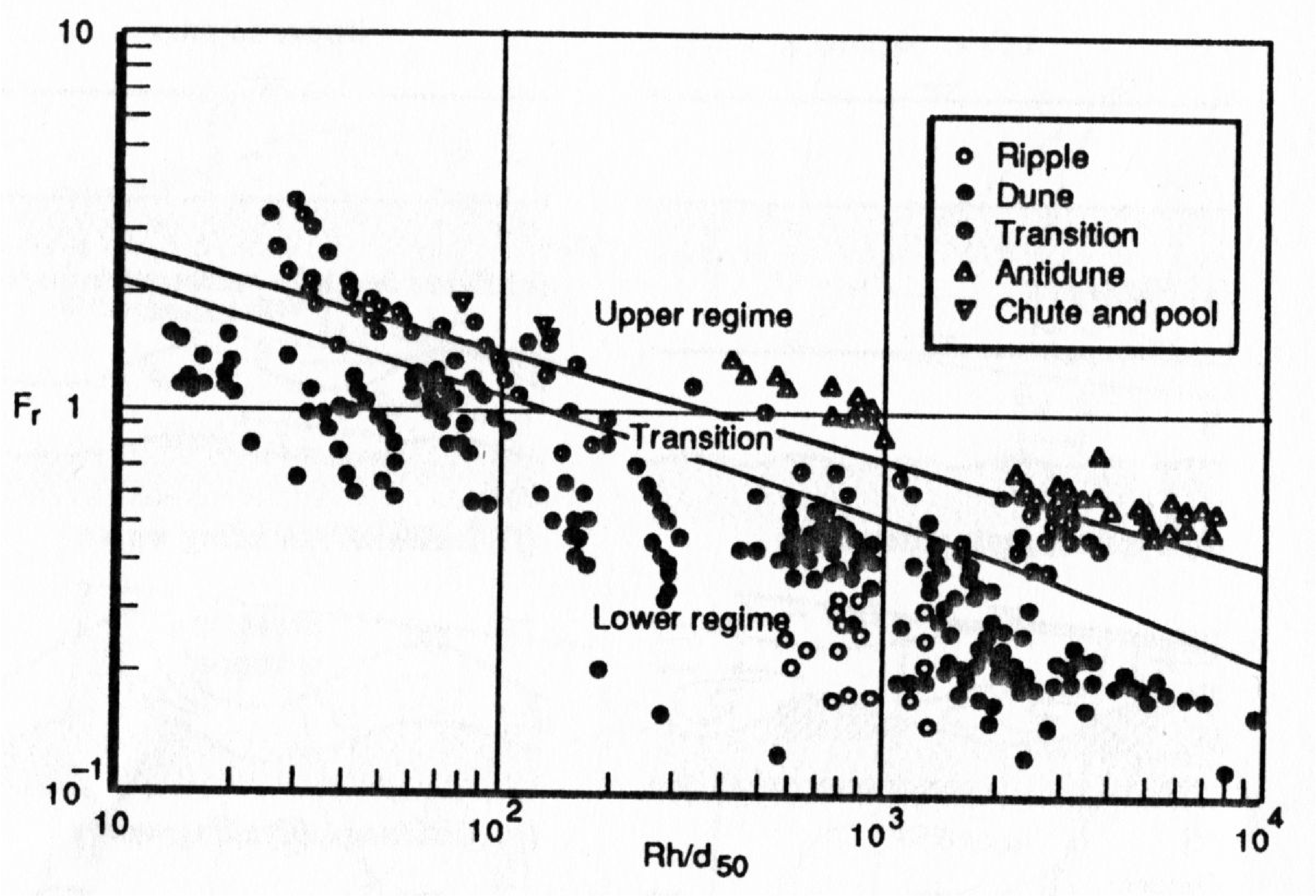
Classification des structures morphologiques



Évolution des structures morphologiques (longitudinales)

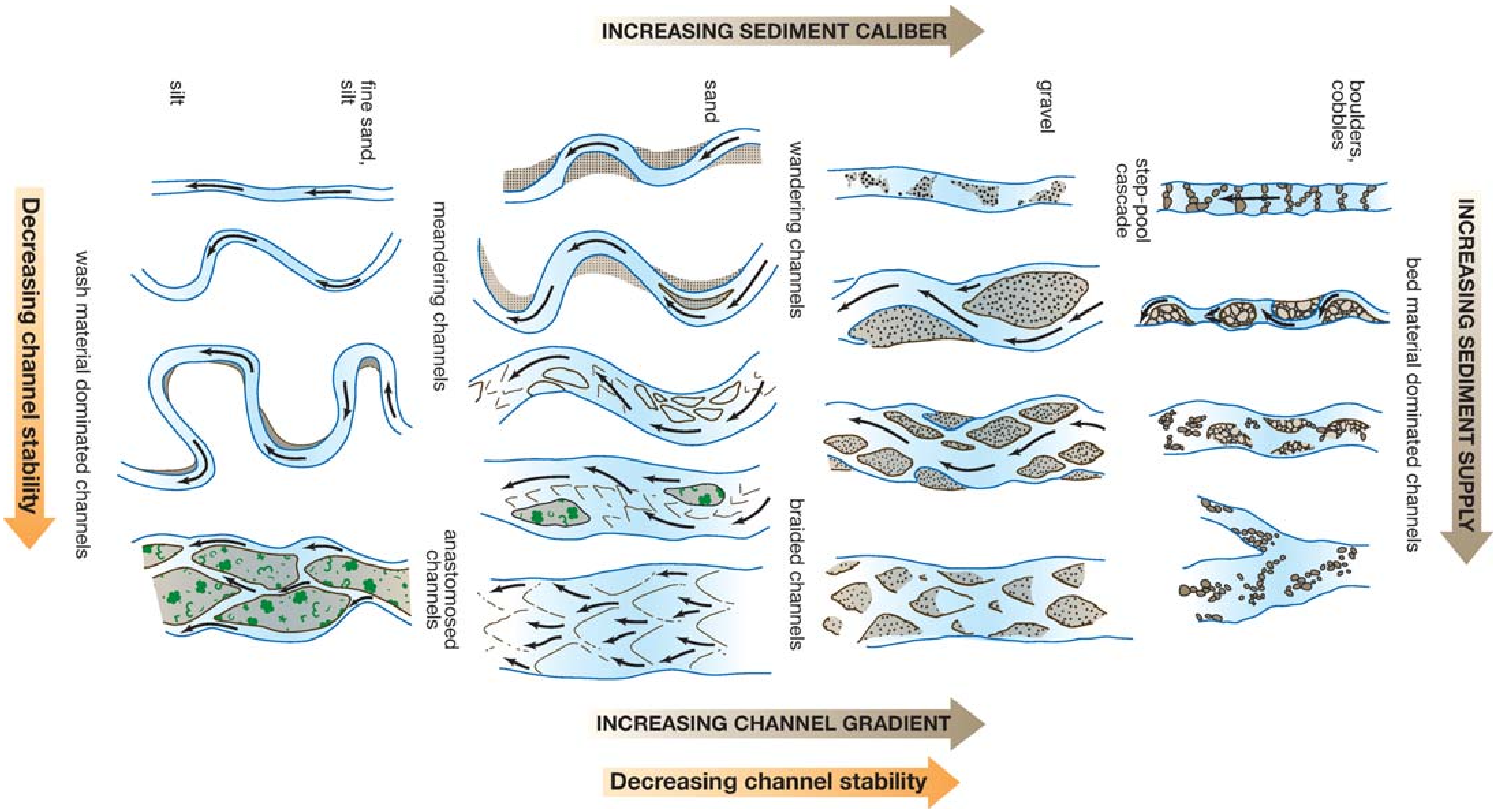
Classification des structures morphologiques (2)

Type de structures morphologiques longitudinales en fonction du nombre de Froude



Classification des structures morphologiques (3)

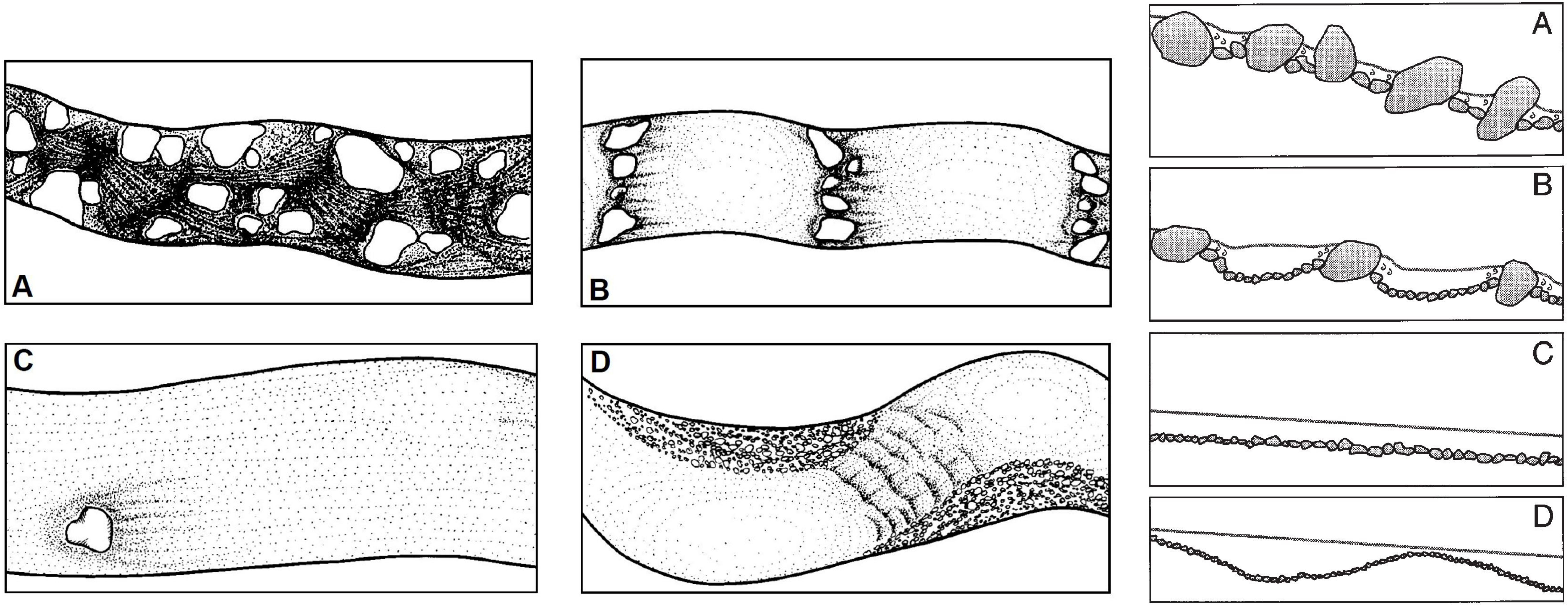
Diagramme montrant la forme d'une rivière alluviale. Les zones préférentielles de dépôt sont représentées en grisé



Church, M., Bed material transport and the morphology of alluvial river channels, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 34, 325-354, 2006.

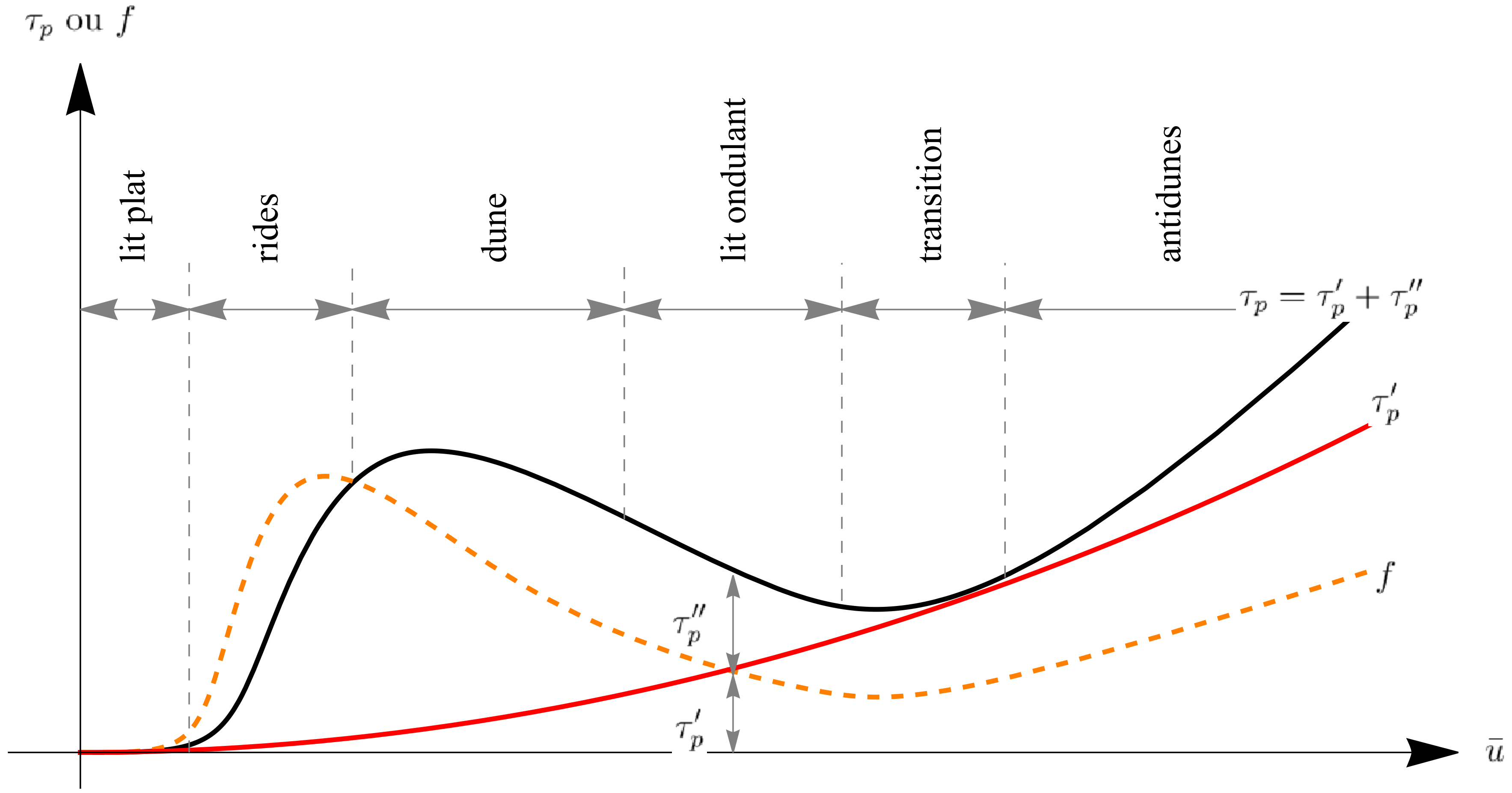
Classification des structures morphologiques (4)

Cas particulier des rivières de montagne

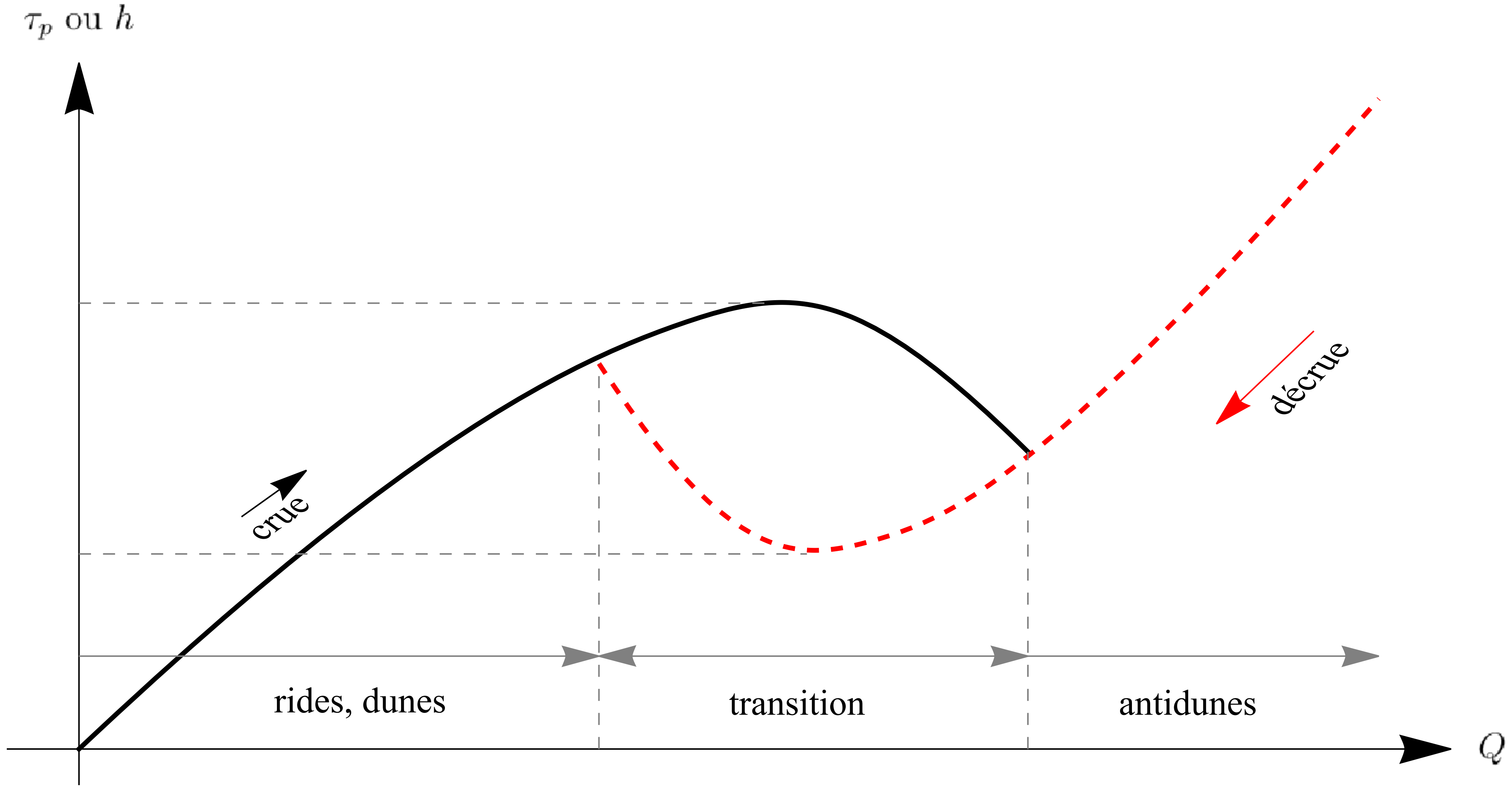


Montgomery, D.R., and J.M. Buffington, Channel-reach morphology in mountain drainage basins, *Geological Society of America Bulletin*, 109, 596-611, 1997.

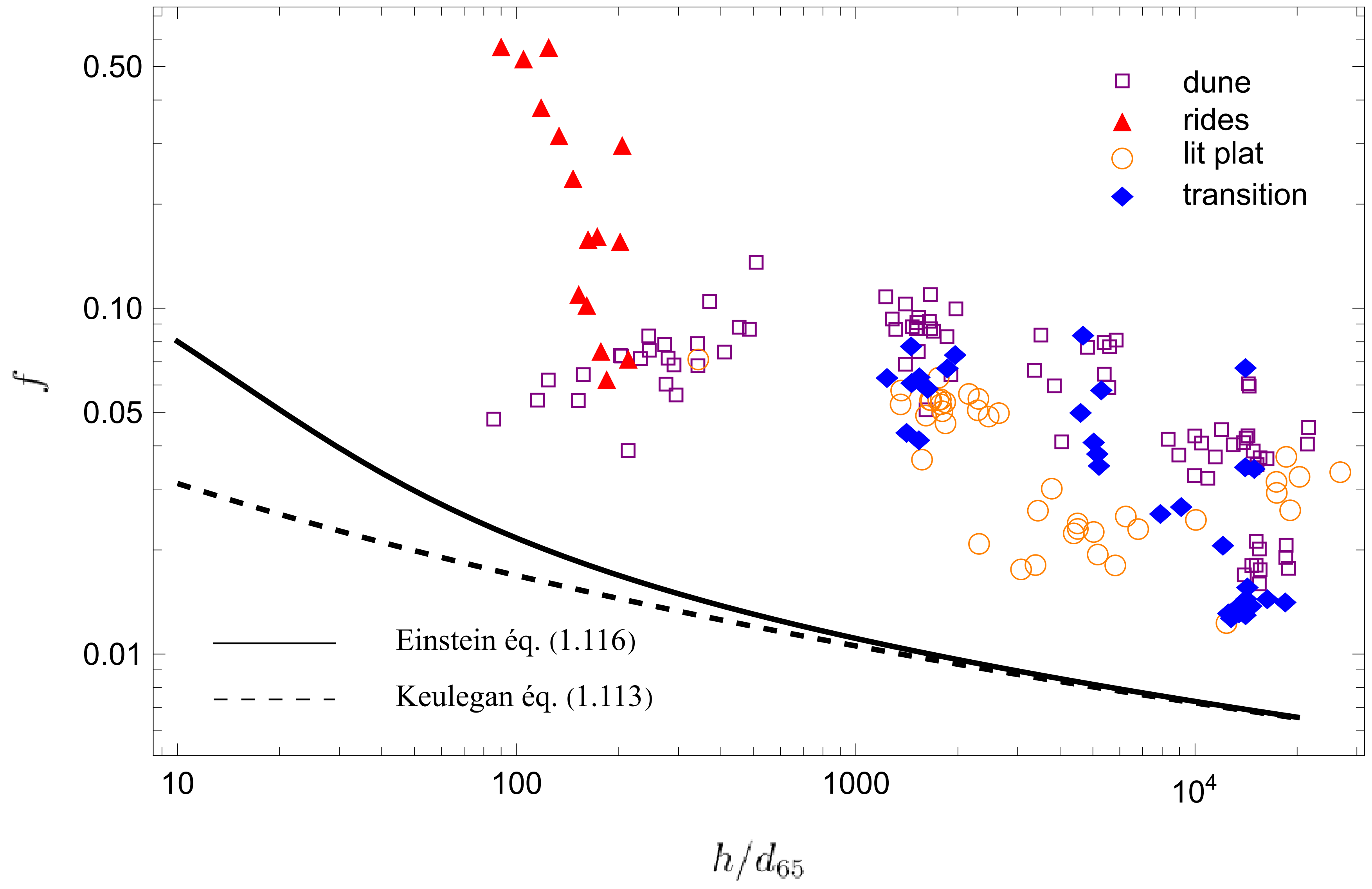
Conséquences



résistance = résistance de peau + résistance de forme



Calcul du frottement de forme



variation du frottement f avec la submersion relative h/d_{50} (données de terrain compilées par Brownlie [1981])

Modèle historique : modèle d'Einstein (1950)

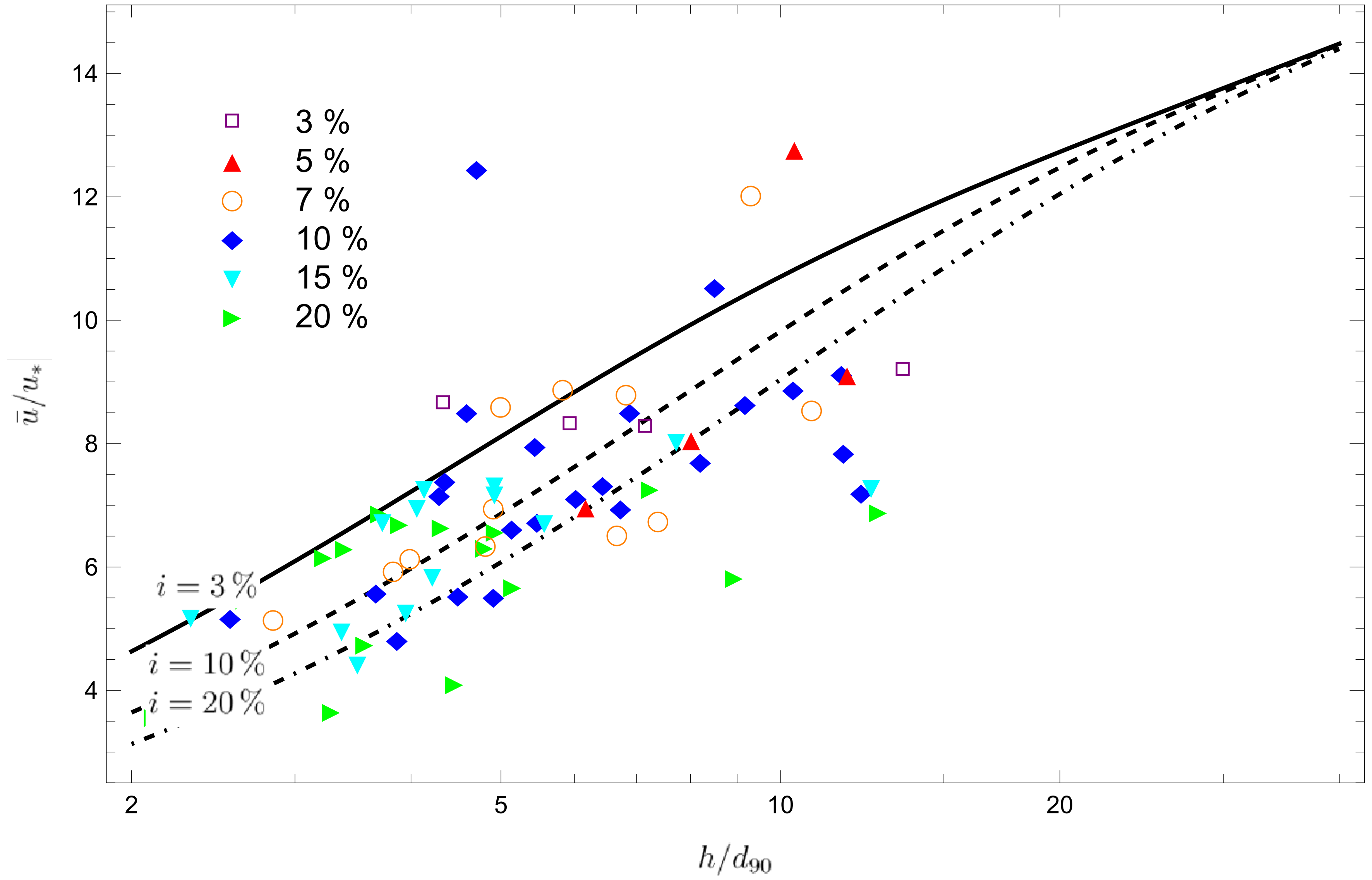
$f = f' + f''$ (frottement total = frottement de peau + frottement de forme)

Modèles ultérieurs (van Rijn, Brownlie, etc.) :

$j = j' + j''$ (calcul à partir des pertes de charge) ou

$k_s = k_s' + k_s''$ (calcul à partir de rugosités équivalentes)

Effet du charriage : loi de Smart & Jaeggi



Smart & Jaeggi, *Sedimenttransport in steilen Gerinnen*, Mitteilungen 64 der Versuchanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, 1983.

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = 2{,}50\left(1 - \exp\left(-0{,}05\frac{h}{d_{90}\sqrt{i}}\right)\right)^{1/2} \ln\left(8{,}2\frac{h}{d_{90}}\right).$$

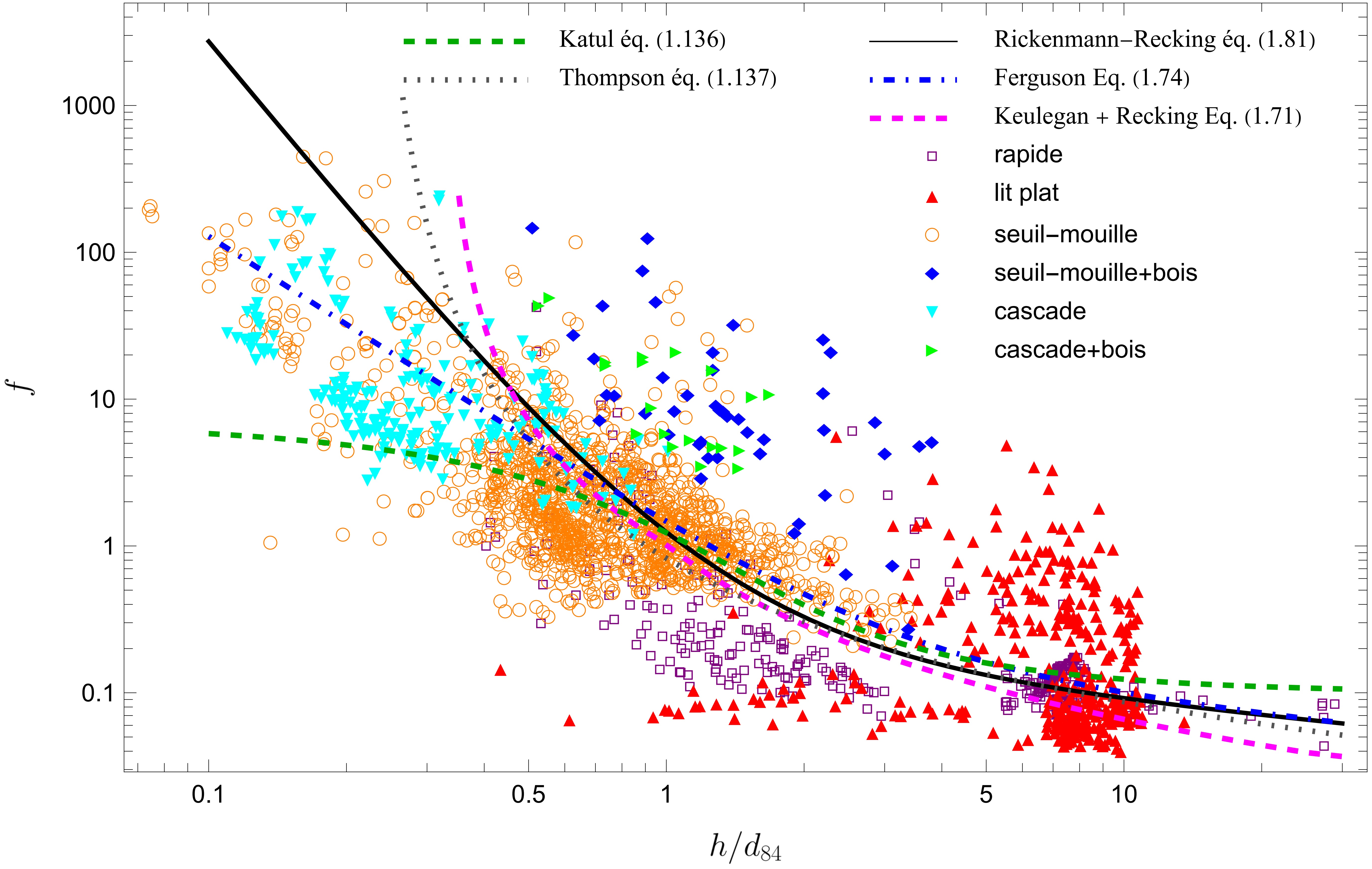
Effet du charriage : loi de Recking

Pour les deux autres mécanismes de dissipation : Recking (Simple method for calculating reach-averaged bed-load transport, *Journal of Hydraulic Engineering*, 139, 70-75, 2013.) propose la contrainte pariétale (sous forme adimensionnelle)

$$\tau^* = \frac{\tau_p}{(\varrho_s - \varrho) g d_{84}} = \frac{i}{(s-1)d_{84}\left(2/W + 74p^{2,6}(gi)^p q^{-2p} d_{84}^{3p-1}\right)}$$

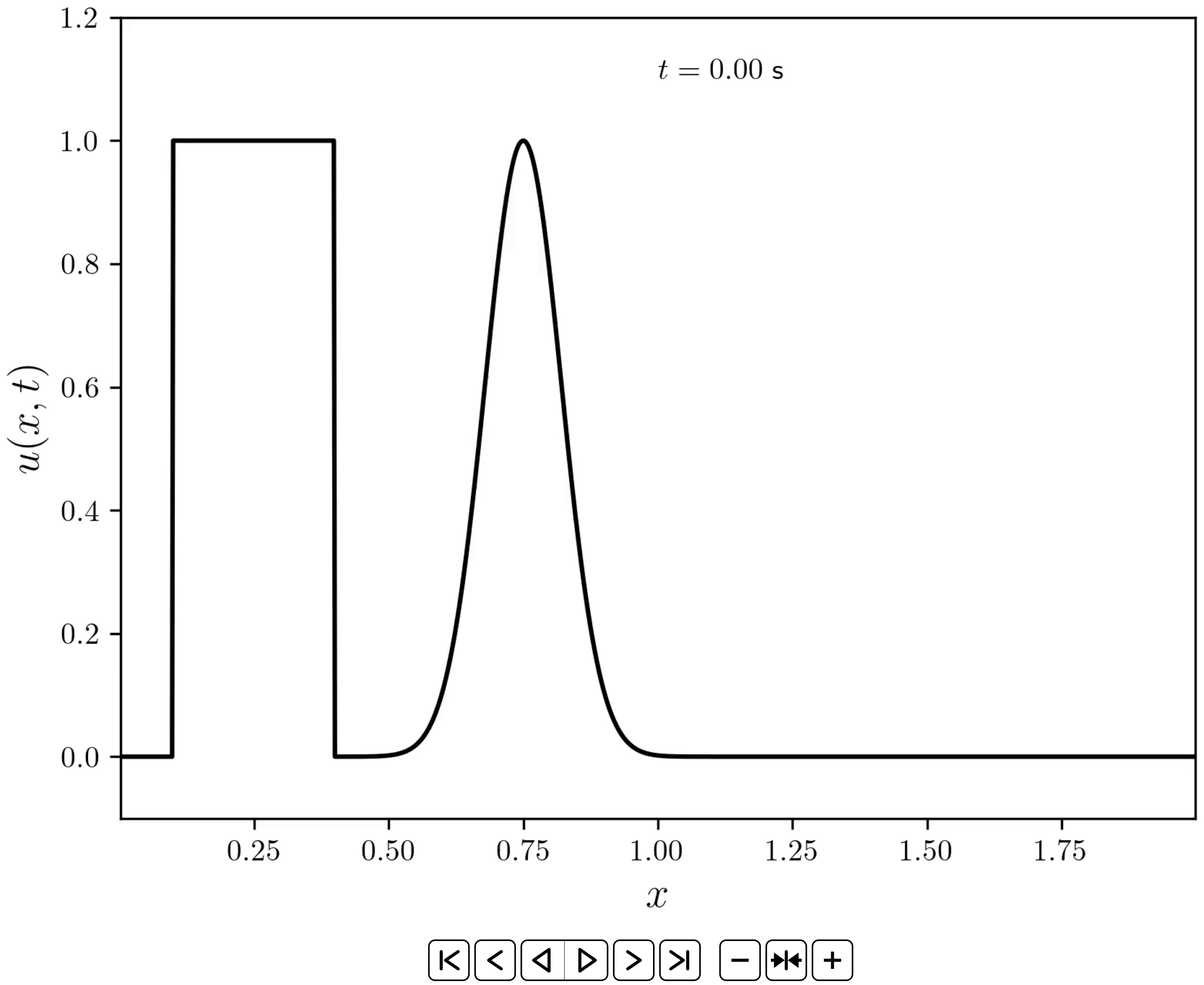
avec $q = Q_w/W$ le débit par unité de largeur et $p = 0{,}23$ quand $q/\sqrt{gid_{84}^3} < 100$ et $p = 0{,}3$ sinon.

Effet des structures morphologiques



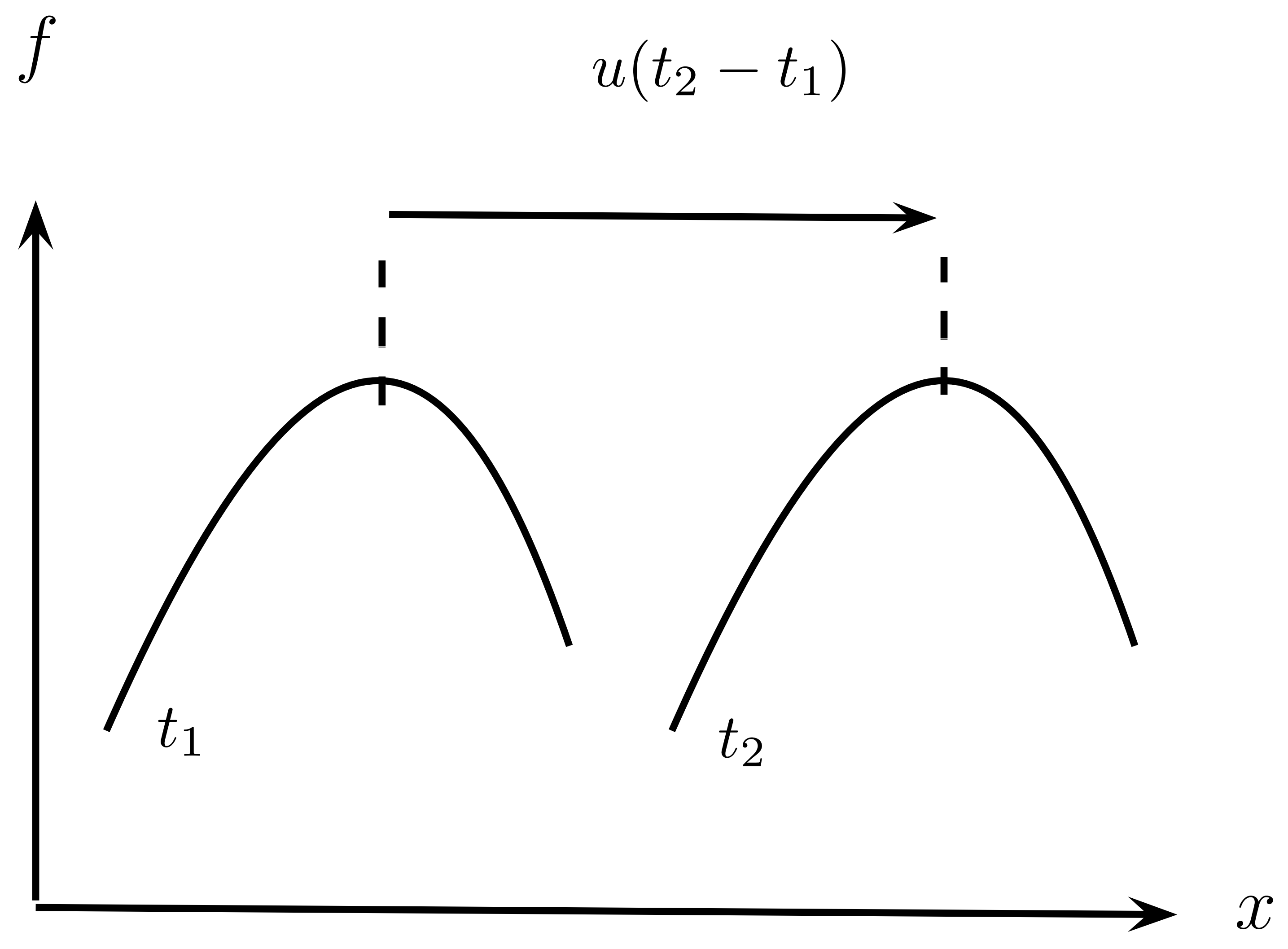
Autres équations en hydraulique

Advection



Advection d'une quantité f avec ici $u = 0{,}5$ m/s. Quand l'advection est linéaire et se fait sans amortissement, le transport est une simple translation sans changement de forme.

Advection (2)



Advection linéaire homogène

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

avec u la vitesse d'advection constante. C'est une équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire du premier ordre

Advection non linéaire avec terme source

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u(f,x,t)\frac{\partial f}{\partial x} = s(f,x,t)$$

Il existe des formes équivalentes qui permettent de trouver des solutions ou interpréter physiquement

Advection (3)

Forme caractéristique 2 : l'EDP est équivalente à un système de deux EDO

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}f}{0}$$

La première paire d'équations nous conduit à définir la première intégrale solution du problème

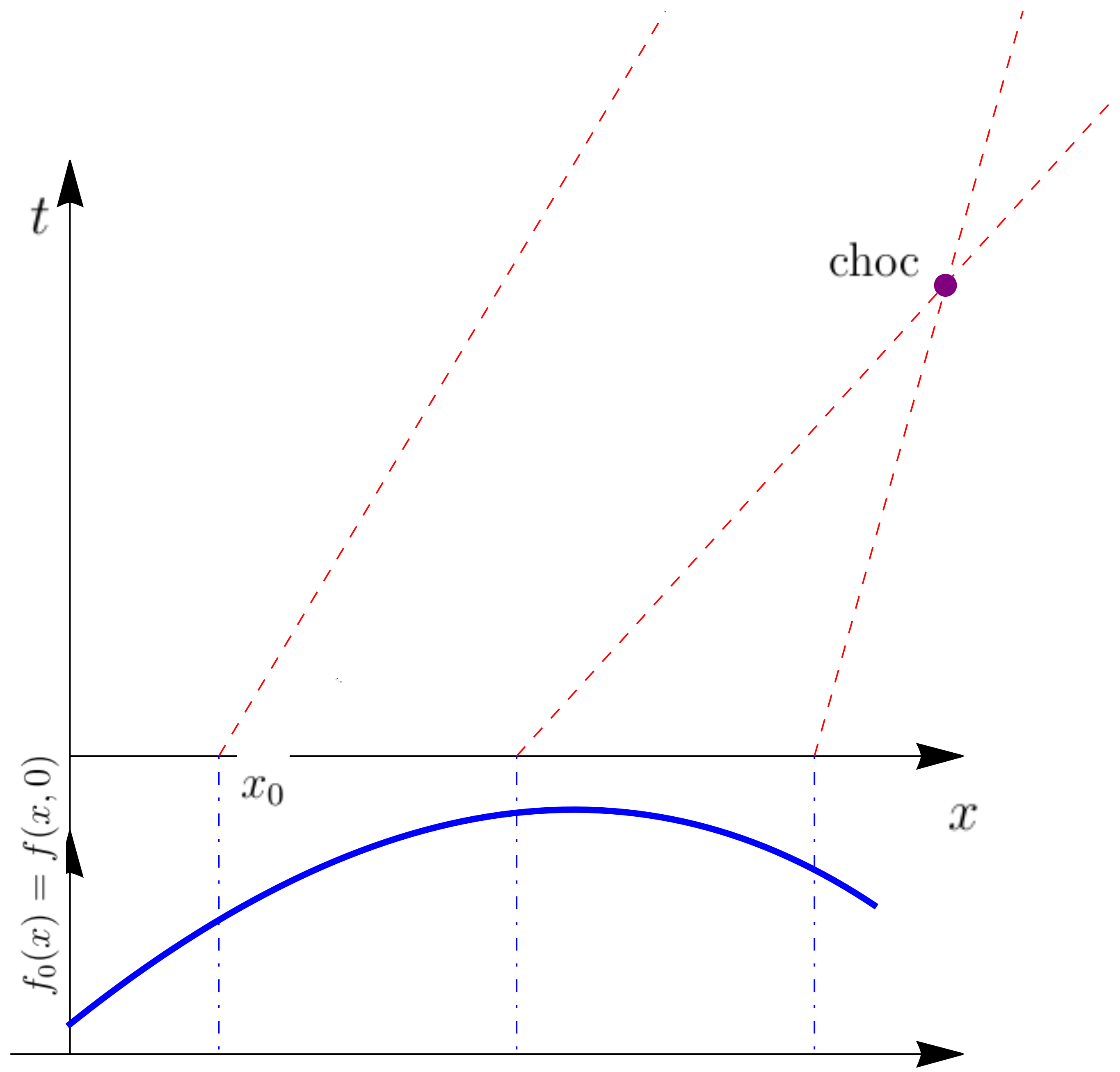
$$\xi = x - ut$$

La seconde (un peu inhabituelle sous cette forme) amène à $\mathrm{d}f = 0$, donc f est constante F, qui ne dépend que la première intégrale :

$$f = F(\xi) = F(x - ut)$$

Toute fonction F d'argument $\xi = x - ut$ est solution de l'EDP d'advection linéaire (avec un terme source nul)

Advection (4)



(cliquer pour une animation)

Advection non linéaire : si le terme source est nul, les courbes caractéristiques sont des droites puis f est constante et fixée par la condition initiale $f_0(x)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ le long de la droite } \mathcal{C} : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(f)$$

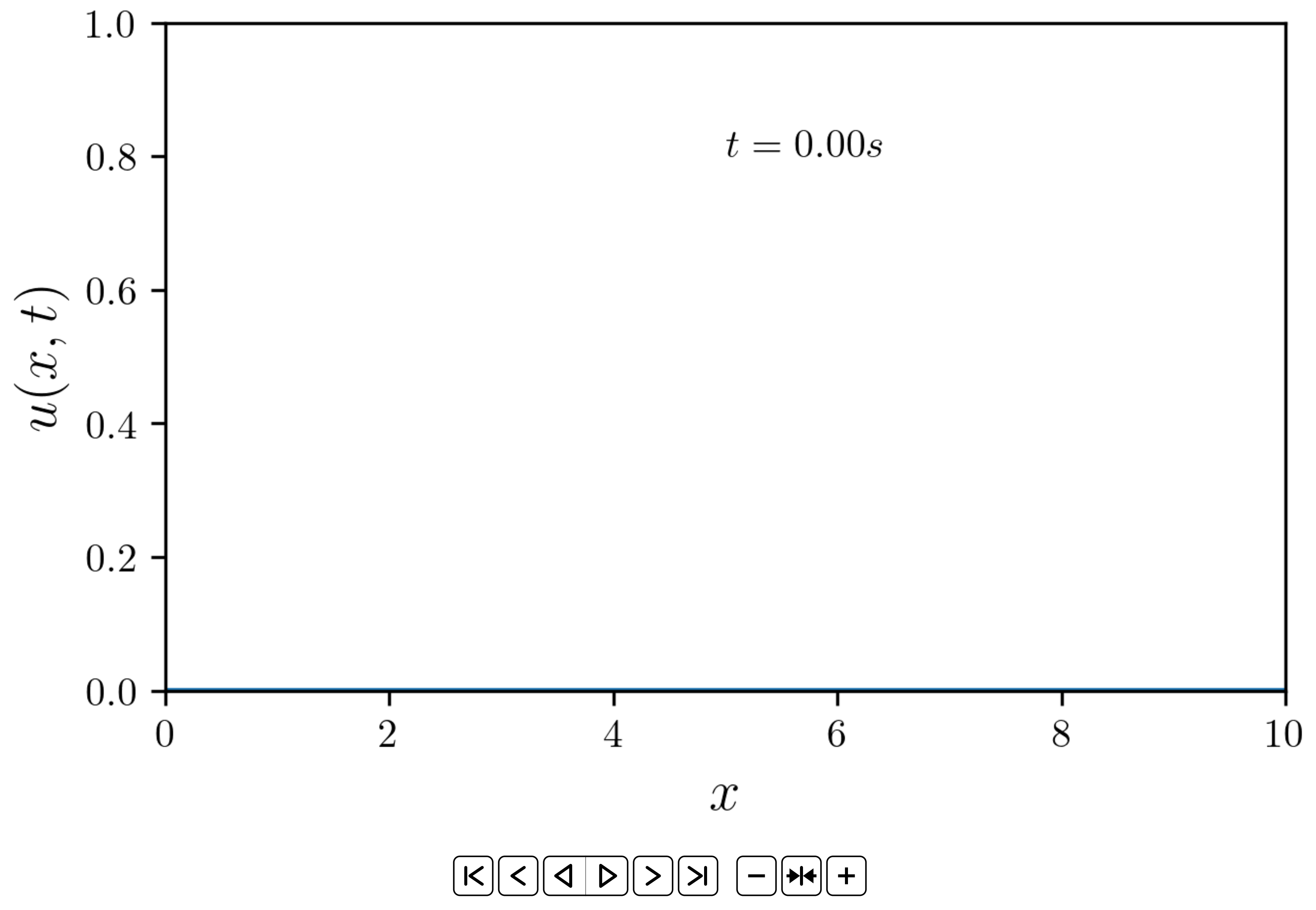
En dépit de la non-linéarité de la vitesse d'advection $u(f)$, la solution est simple à déterminer, mais elle peut réserver de mauvaises surprises... si deux caractéristiques se croisent, alors il y a formation d'un choc. La vitesse du choc en $x = s(t)$ est donné par la *relation de Rankine-Hugoniot*

$$\dot{s} = \frac{[\![u(f)]\!]}{[\![f]\!]},$$

avec $[u]\!]$ le saut de $u(f)$ de part et d'autre du choc.

Si le terme source est non nul, les courbes caractéristiques ne sont plus des droites.

Advection non linéaire



Considérons l'équation d'advection non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}u^3 = 0,$$

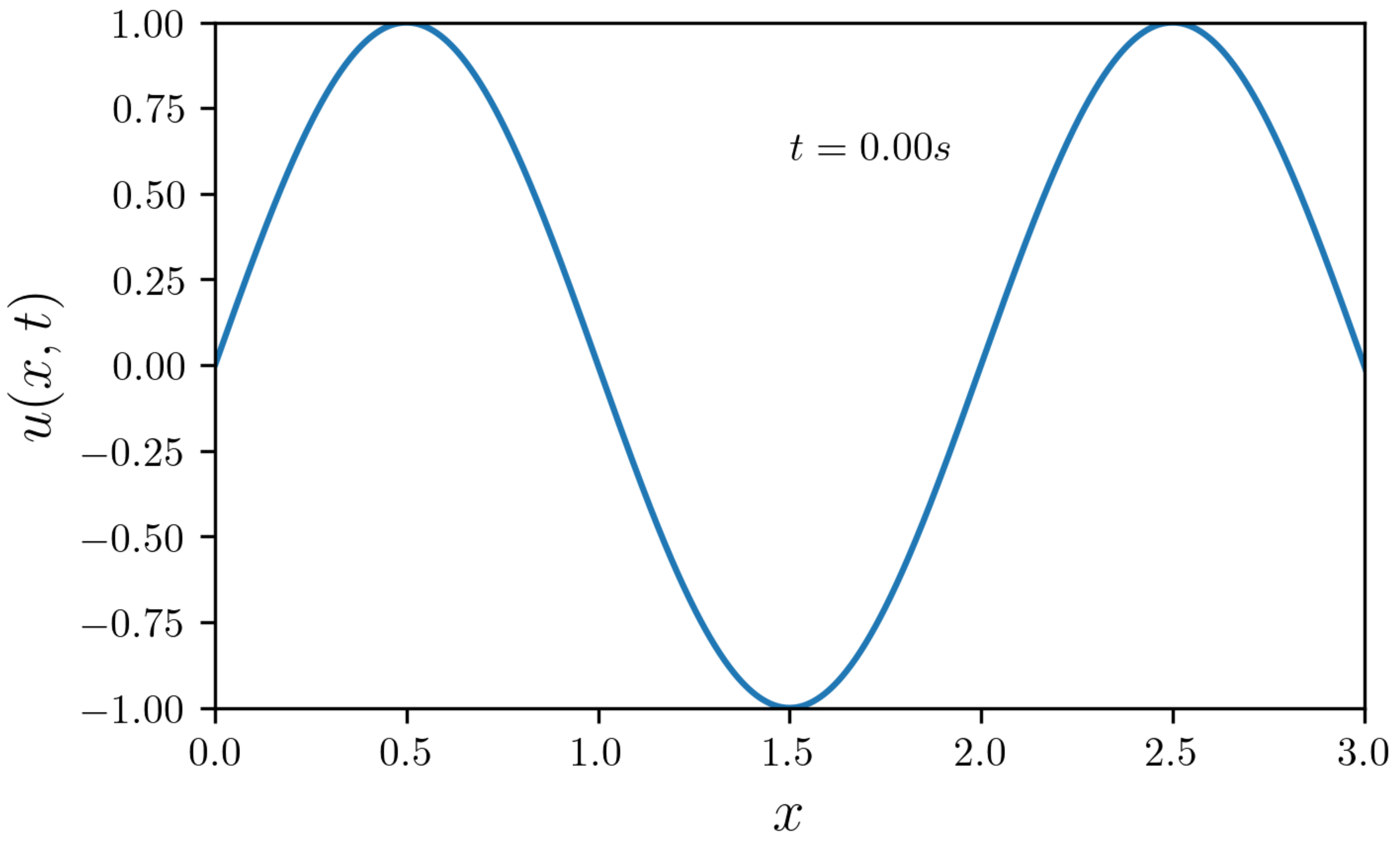
(avec a une constante) sujette aux conditions initiales et aux limites :

$$u(x,0) = 0$$

et

$$u(0,t) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right) & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \text{ s} \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 8 \text{ s} \end{cases}$$

Advection non linéaire (2)



Considérons l'équation d'advection non linéaire de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}u^2 = 0,$$

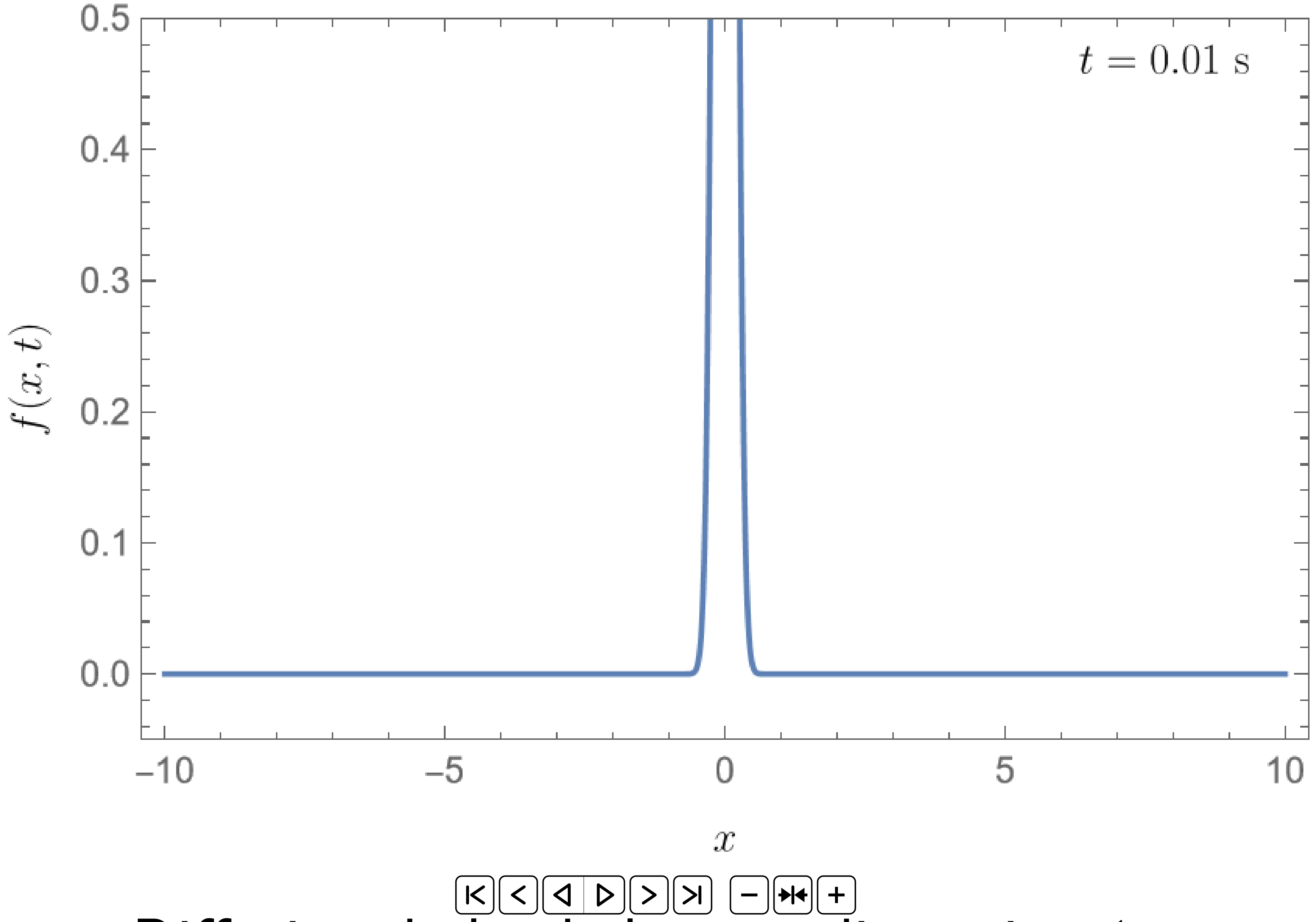
(avec a une constante) sujette aux conditions initiales et aux limites :

$$u(x,0) = u_0(x) = \sin(\pi x)$$

et

$$u(0,t) = 0$$

Diffusion



Diffusion de la chaleur en dimension 1

Qu'est-ce que la diffusion ?

Diffusion : étalement d'une substance jusqu'à ce qu'elle soit uniformément répartie dans le milieu

Exemple diffusion de la chaleur (en dimension 2)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

avec $T(x,\, y\; ;\; t)$ la température, $\alpha = k/(\varrho C)$ la diffusivité thermique, ϱ la masse volumique, k la conductivité thermique, C la chaleur massique.

Diffusion (2)

Équation de diffusion linéaire dimension 1

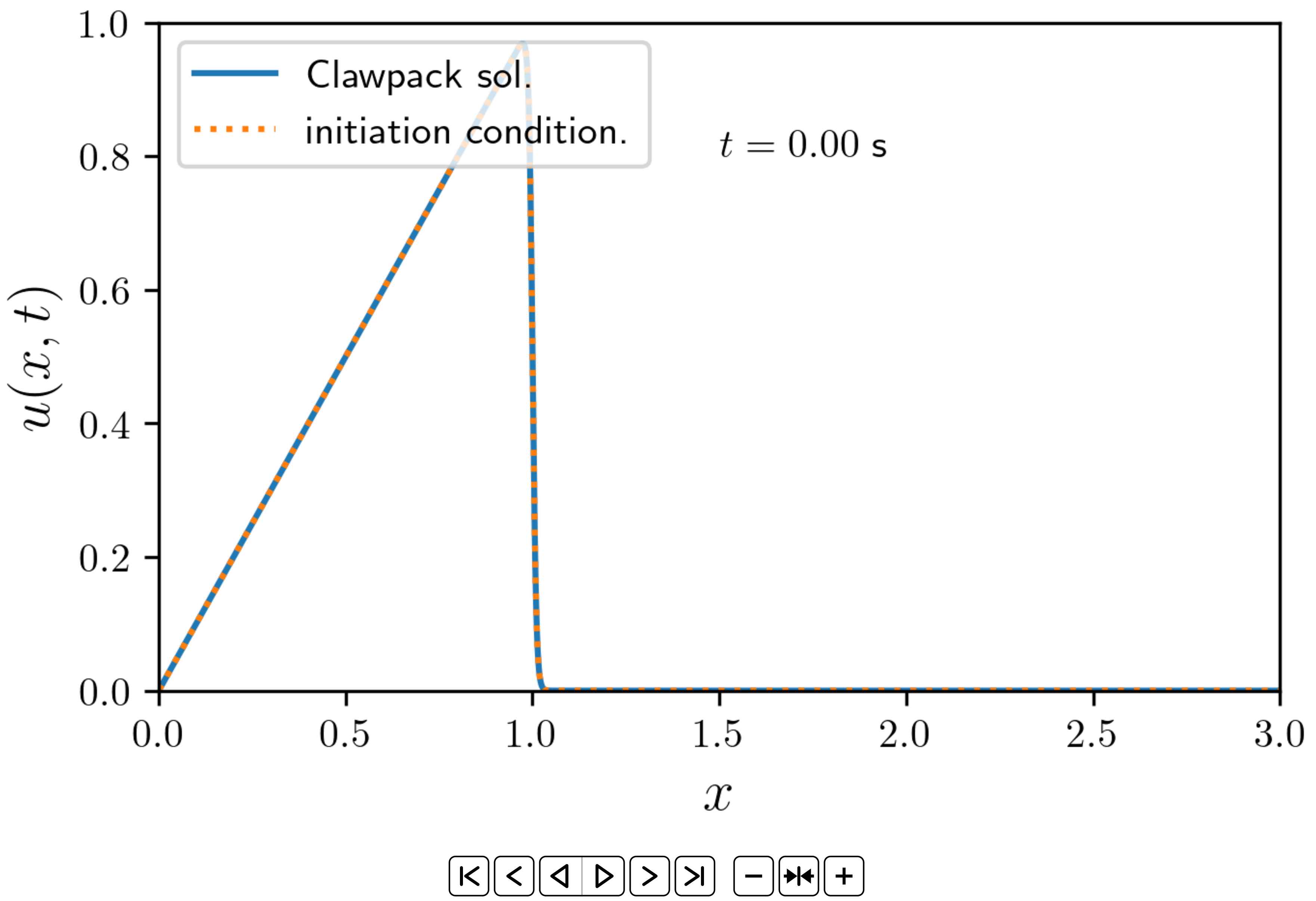
$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{2}$$

avec D le coefficient de diffusion et $f(x,t)$ est ici une quantité telle que la concentration d'un polluant dans une rivière. C'est une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre. Si le coefficient de diffusion n'est pas constant, mais dépend de f, il s'agit alors de *diffusion non linéaire*. Par exemple, lorsqu'on a $D(f) = \kappa f^k$, l'équation de diffusion est

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa\frac{\partial}{\partial x}\left(f^k\frac{\partial f}{\partial x}\right). \tag{3}$$

- $k = 1$ diffusion de gaz dans un milieu poreux (f représente la concentration)
- $k = 3$ diffusion d'un fluide newtonien sur un substrat horizontal (f : hauteur de fluide)
- $k = 5$ diffusion de chaleur lors des premiers instants d'une explosion nucléaire

Advection non linéaire + diffusion



Diffusivité $\nu = 0{,}1$ m^2/s

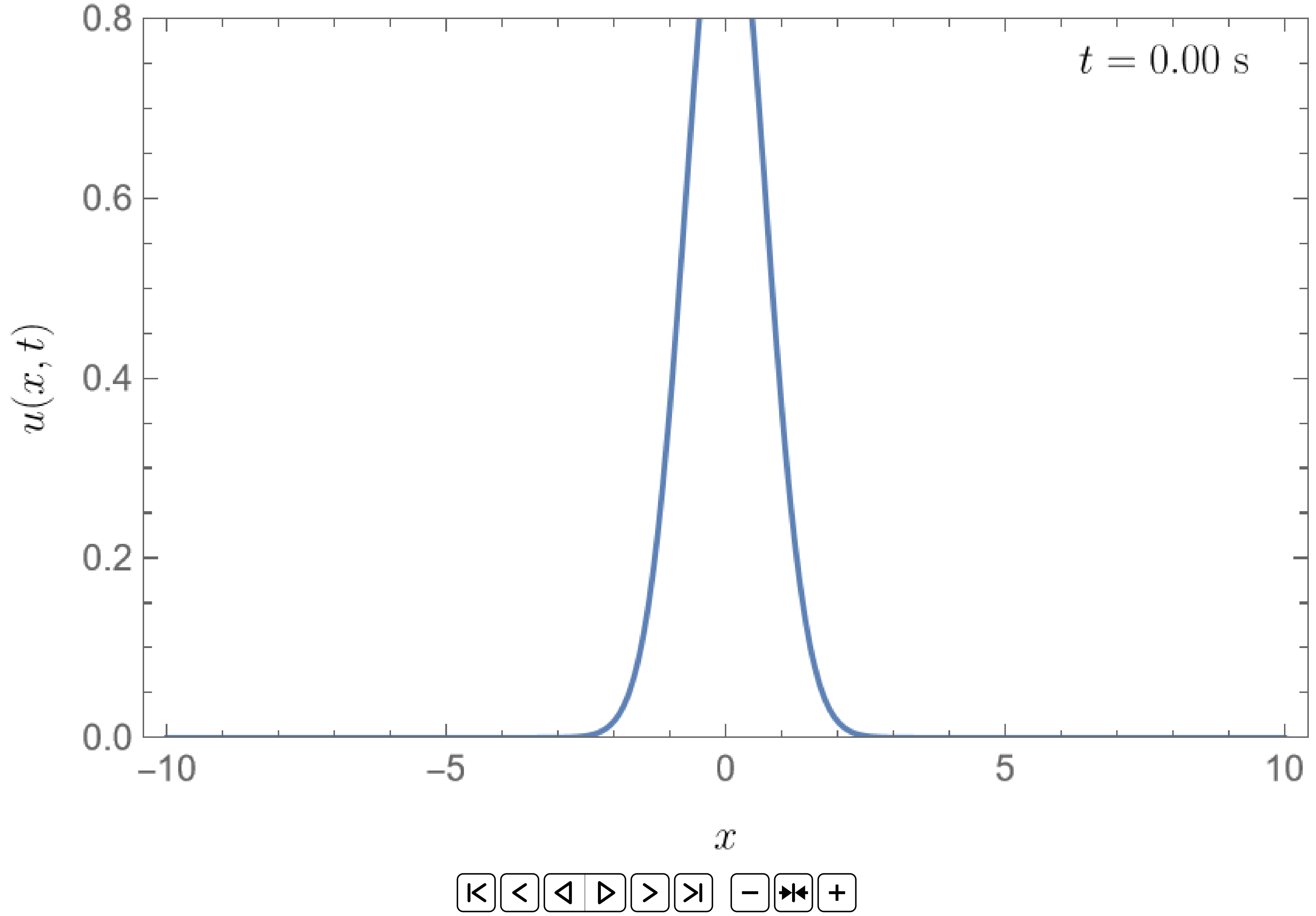
Considérons l'équation d'advection non linéaire avec un terme source diffusif (dite équation de Burgers visqueuse) :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(avec ν une constante appelée *diffusivité*) sujette à la condition initiale :

$$u(0,x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > b \end{cases}$$

Onde linéaire



Diffusivité $\nu = 0{,}1$ m^2/s

Considérons l'équation des ondes linéaires

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

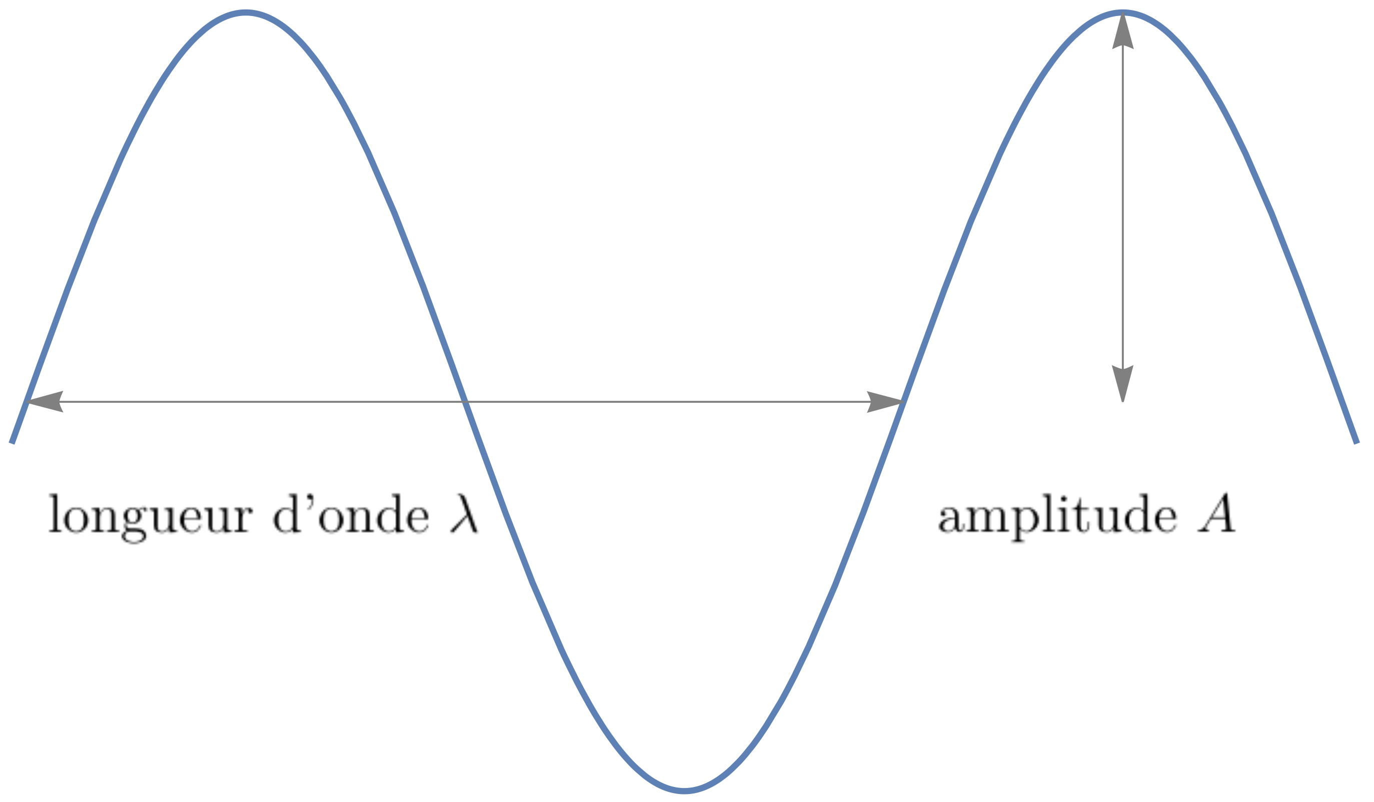
(avec c une constante appelée *célérité*) sujette à la condition initiale :

$$\phi(0,x) = \phi_0(x) = \exp(-x^2)$$

La solution de D'Alembert est

$$\phi(x,t) = \phi_0(x - ct) + \phi_0(x + ct)$$

onde linéaire (2)



Qu'est-ce qu'une onde linéaire ?
C'est un phénomène de propagation d'énergie sans transport de masse sous la forme d'harmoniques (onde périodique) :

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= A\exp[\imath(kx-\omega t)]\\ &= \mathrm{Re}(A)\cos(kx-\omega t) - \mathrm{Im}(A)\sin(kx-\omega t)\end{aligned}$$

- A l'*amplitude*
- k le *nombre d'onde* relié à la *longueur d'onde* $\lambda = 2\pi/k$
- $\omega = 2\pi/T$ la *fréquence angulaire*
- $T = \lambda/c$ la *période*
- c la *célérité*

onde linéaire (3)

Vitesses des ondes

La *vitesse d'une onde linéaire* est

$$c = \omega/k$$

La *relation de dispersion* $\omega(k)$ est la relation entre fréquence (angulaire) et nombre d'onde. Pour des ondes linéaires

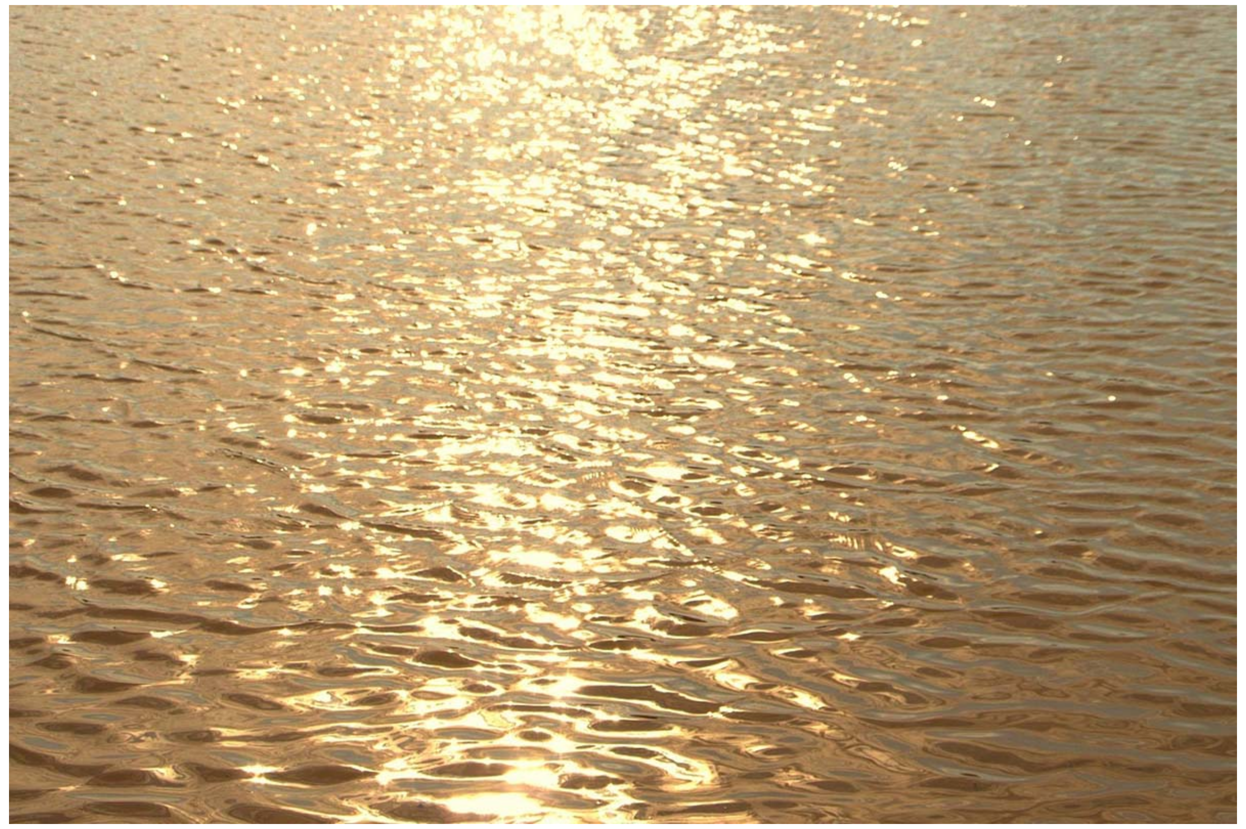
$$\omega(k) = ck$$

La vague se déplace à une vitesse constante indépendante de la longueur d'onde.

Les *ondes non linéaires* sont des ondes pour lesquelles la relation de dispersion n'est pas linéaire (et donc la vitesse des crêtes dépend de la longueur d'onde). On définit la *vitesse de phase*

$$c_p = \frac{\omega(k)}{k}$$

onde linéaire (4)



Vitesses des ondes

On définit la *vitesse de groupe*, qui représente la vitesse à laquelle l'énergie associée à l'onde se propage :

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{4}$$

En général, pour la plupart des phénomènes physiques, on a $c_g \leq c_p$, mais pour des ondes linéaires $c_g = c$.

onde linéaire (5)

Équation des ondes linéaires

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Il existe d'autres équations donnant des ondes linéaires, p. ex. l'équation des ondes de surface s'écrit (chap. 4) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

avec ici ϕ le potentiel de vitesse ($\boldsymbol{u}(x, y, t) = \nabla \phi$) et g l'accélération de la gravité

onde linéaire (6)

Vague lors de la tempête Darcy, février 2021

(© John Fatkin)

Domaine fréquentielle

Autovariance $R(s)$ d'une fonction aléatoire stationnaire :

$$R(s) = \langle f'(t) f'(t+s) \rangle,$$

avec $f'(t) = f(t) - \langle f(t) \rangle$ la fluctuation par rapport à la valeur moyenne $\langle f(t) \rangle$. On travaille souvent avec sa transformée de Fourier appelée *spectre de fréquence* :

$$E(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(s) e^{-i\omega s} \mathrm{d}s = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} R(s) \cos(\omega s) \mathrm{d}s$$

L'intégrale

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} E(\omega) \mathrm{d}\omega$$

représente la contribution à la variance $\langle f'^2(t) \rangle$ de tous les modes dans la gamme de fréquence $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$.