



Chapitre 3 : rupture de barrage

Hydraulique à surface libre

Christophe Ancely



- Typologie des ruptures
 - rupture des grands barrages
 - autres types de rupture
- Ingénierie des risques
- Définition de l'hydrogramme initial
- Rupture de barrage en régime laminaire
- Rupture de barrage et équations de Saint-Venant
- Effet du frottement

Typologie des ruptures



Cause des rupture des grands barrages

Causes

- *surverse* : trop-plein avec surverse qui cause une érosion du parement aval
- *érosion interne* : infiltration dans le remblai avec plusieurs conséquences : érosion interne (« renard »), suffusion (transport des fines), ou claquage (fracturation hydraulique) le long de conduits préexistants
- *rupture* : rupture de la voûte, tassement différentiel de la fondation, vieillissement de l'ancrage ou des ouvrages traversants
- *vague de submersion* : vague d'impulsion, seiche
- *tremblement de terre*
- *bombardement*

Causes des ruptures (2)



Deux causes principales de rupture

- surverse (40 % des cas) due à une capacité insuffisante de l'évacuateur de crue (75 % des ruptures documentées)
- problème de fondation (25 % des ruptures documentées)

Effet de la hauteur du barrage sur la probabilité de rupture

- barrage en béton : peu dépendante de leur hauteur
- barrage en remblai : probabilité passant de 0,2 % pour les toutes petites hauteurs ($h < 10$ m) à 14 % pour les grands barrages ($h > 50$ m)

Autres remarques :

- la phase de remplissage et les cinq premières années de service sont les plus critiques
- les barrages en remblai = un taux de rupture deux fois plus important que les barrages en béton (1,11 % contre 0,54 %, respectivement)
- adoption de mesures réglementaires et normes :
amélioration de la sécurité des barrages, notamment aux États-Unis

Quelques accidents majeurs



Lieu	Date	pays	cause	nombre de victimes
South Fork Dam	1889	USA	fortes pluies	2200 morts
Gleno	1923	Italie	ancrages insuffisants	356 morts
St. Francis Dam	1928	USA	instabilité géologique	~ 600 morts
Malpasset	1959	France	rupture de la voûte	421 morts
Barrage du Vajont	1963	Italie	vague d'impulsion	~ 2000 morts
Banqiao et Shimantan	1975	Chine	pluies extrêmes	26000 morts
				+ 145,000 (épidémies, famine)
Teton Dam	1976	USA	renard	11 personnes tuées
Lawn Lake Dam	1982	USA	renard	2 morts
Barrage de Shakidor	2005	Pakistan	pluies extrêmes	~ 70 morts
Taum Sauk reservoir	2005	USA	sur-remplissage accidentel	0
Koshi barrage	2008	Népal	mousson	250
Xe-Pian Xe-Namnoy Dam	2018	Laos	fortes pluies	36
Rishiganga dam	2018	Inde	vague de submersion	145



Multiplication des petits ouvrages pour les activités de loisir (plan d'eau), l'irrigation et l'approvisionnement en eau potable, la production hydroélectrique, et la neige artificielle.
Des accidents

- *surverse* : pas d'évacuateur sur la plupart des petits ouvrages
- « *renard* » : infiltration du remblai et érosion interne.
Défaut de suivi du débit de fuite
- *vague de submersion* : vague d'impulsion (avalanche)
- *tremblement de terre*

Enquête menée dans le canton du Valais a révélé que 41 petites retenues avaient déjà construites et que parmi elles, 11 présentaient une menace sérieuse en cas de rupture.

Enquête en Haute-Savoie en 2005 a mis en évidence des carences graves sur les 16 ouvrages de ce département :

- absence d'étude d'impact en cas de rupture du barrage pour la majorité des ouvrages
- absence de qualification du bureau de maîtrise d'œuvre pour ce type d'ouvrage
- étude hydrologique sommaire ;
- évacuateur de crue sous-dimensionné dans 75 % des cas
- défaut d'étanchéité des géo-membranes dans 30 % des cas
- absence de dispositif d'auscultation et de procédure de suivi dans 80 % des cas

Causes de rupture

- rupture de glacier, glissement de terrain, avalanche $\rightsquigarrow$ rupture du talus : lac Dig Tsho (Népal) 1985
- surverse et rupture du talus : lac Ha ! Ha ! (Canada) 1996
- fonte de la glace de la morainique, renard
- seiche : Queen Bess Lake (Canada) 1997 ?
- tremblement de terre : lac Safuna Alta (Pérou) 1970
- obstruction d'un cours d'eau + débâcle : Giétro (VS) 1818

Origine des débâcles

- dans 70 % des cas : des barrages glaciaires
- dans 9 % des cas : des lacs morainiques
- et pour 3 % des cas : des éruptions volcaniques

Quelques accidents en Suisse

Date	Lieu	$V \text{ (}\times 10^6\text{m}^3 \text{)}$	$Q_p \text{ (m}^3\text{/s)}$
1818	Glacier du Giétro (VS)	20	8000 à 20 000
1878	Lac de Märjelen, glacier d'Aletsch (VS)	10,7	300
1913	Lac de Märjelen, glacier d'Aletsch (VS)	4,5	195
1943	Glacier de Ferpècle (VS)	1,6	400
1944	Lac de Gorner, glacier du Gorner (VS)	6	200
1951	lac de Grindelwald (BE)	0,135	74,6
1952	Glacier de Ferpècle (VS)	0,25	230
1968	Lac de Gorner, glacier du Gorner (VS)	2,9	29
2008	Lac de Grindelwald (BE)	0,57	111

Exemple : catastrophe du Giétro (1818)



Rupture de digue

Causes : renard (défaut d'étanchéité), surverse

Exemple : août 2002, l'Elbe et ses affluents entrèrent en crue, entraînant de graves inondations en Tchéquie et en Allemagne (environ 100 morts et 20 millions € de dommages). Plusieurs digues cédèrent entre Dresde et Magdebourg en Allemagne ; notamment, le bassin de rétention près de la bourgade de Glasshütte rompit et libéra 60 000 m³ d'eau qui causa des dommages aux bâtiments de la ville.



Rupture de bassin de décantation

Novembre 2015, Bento Rodrigues

Causes : renard (défaut d'étanchéité), surverse

Effets : outre l'onde de rupture, la pollution (métaux lourds) est importante et durable



Quelques accidents majeurs depuis 2000



<i>Date</i>	<i>Site</i>	<i>Dommages</i>
25 jan. 2019	Brumadinho, Brésil	pollution, 57 morts, 300 disparus
5 nov. 2015	Bento Rodrigues, Brésil	pollution lourde, 17 morts
4 oct. 2010	Kolontár, Hongrie	8 km ² de terres dévastés, 10 morts
29 août 2009	Karamken, Russie	1 mort
14 mai 2009	Huayuan, Chine	3 morts
22 déc. 2008	Usine de Kingston, USA	1,6 km ² de terrain dévastés
8 sep. 2008	Taoshi, Chine	254 morts
30 avr. 2006	Miliang, Chine	17 morts, forte pollution
20 mars 2004	Malvésí, France	pollution du canal du Tauran
22 juin 2001	Sebastião das Águas Claras, Brésil	5 morts
18 oct. 2000	Nandan county, Chine	env. 115 morts

Ingénierie des risques de rupture



Bases légales relatives à la sécurité des ouvrages d'accumulation contenues dans :

- l'article 3bis de la loi fédérale du 22 juin 1877 sur la police des eaux
- l'*ordonnance du 7 décembre 1998 sur la sécurité des ouvrages d'accumulation* (OSOA)

Article 3bis de la loi sur la police des eaux : le Conseil fédéral doit veiller à ce que pour tout barrage, des mesures spécifiques soient mises en œuvre pour prévenir les dangers et les dommages qui pourraient résulter d'un problème dans leur construction, d'un défaut d'entretien, ou d'acte délibéré.

L'ordonnance sur la sécurité des ouvrages d'accumulation (OSOA) complète la police des eaux. Cette ordonnance concerne tout ouvrage :

- dont la hauteur de retenue est supérieure ou égale à 10 m
 - dont la hauteur est comprise en 5 et 10 m, avec $V > 50\,000\text{ m}^3$
 - qui représentent un danger particulier pour les biens et les personnes
- L'OSOA confie la surveillance des petites retenues aux cantons.

Valeurs seuils pour la mesure du danger en cas d'inondation rapide selon l'OFEN

Valeurs seuils	Effets	Règle d'assujettissement
danger élevé : $h > 2 \text{ m}$ ou $q > 2 \text{ m}^2/\text{s}$	Les personnes sont en danger même à l'intérieur des bâtiments. En cas d'érosion du lit et des berges, il y a aussi menace d'effondrement de constructions situées à proximité. Les laves torrentielles par l'effet de pression peuvent aussi conduire à la destruction de bâtiments.	L'ouvrage d'accumulation est assujetti si au moins une habitation, un lieu de travail, un bâtiment public, une place de camping publique, une route très fréquentée ou une ligne de chemin de fer est touchée.
danger moyen : $2 \geq h > 1 \text{ m}$ ou $2 \geq q > 1 \text{ m}^2/\text{s}$	Les personnes à l'extérieur et dans les véhicules sont menacées. La retraite vers les étages supérieurs des bâtiments est la plupart du temps possible. Des bâtiments, selon leur mode de construction, peuvent subir des dégâts.	L'ouvrage d'accumulation est assujetti si une habitation (de construction légère), un lieu de travail (construction légère), une place de camping publique ou si une route très fréquentée est touchée.
danger modéré : $1 \geq h > 0,5 \text{ m}$ ou $1 \geq q > 0,5 \text{ m}^2/\text{s}$	Les personnes à l'extérieur et dans les véhicules sont menacées. La retraite vers les étages supérieurs des bâtiments est la plupart du temps possible. Des bâtiments, selon leur mode de construction, peuvent subir des dégâts.	L'ouvrage d'accumulation est assujetti si une place de camping publique ou si une route très fréquentée est touchée.
danger faible : $h \leq 0,5 \text{ m}$ ou $q \leq 0,5 \text{ m}^2/\text{s}$	Les personnes ne sont pratiquement pas menacées tant à l'extérieur qu'à l'intérieur des bâtiments.	L'ouvrage d'accumulation n'est pas assujetti.

Historiquement : réglementation relative à la sécurité des barrages a longtemps été dictée par la circulaire interministérielle du 14 août 1970, avec la notion de *barrage intéressant la sécurité publique* comme seul classement des retenues.

Depuis 2007 : décret du 11 décembre 2007 relatif à la sécurité des ouvrages hydrauliques.

Classement avec quatre classes d'ouvrages :

Classe Caractéristiques géométriques

A $H \geq 20$ m

B ouvrage non classé en A, et pour lequel $H^2\sqrt{V} \geq 200$ et $H \geq 10$ m H (mesurée

C ouvrage non classé en A ou B et pour lequel $H^2\sqrt{V} \geq 20$ et $H \geq 5$ m

D ouvrage non classé en A, B, ou C et pour lequel $H \geq 2$ m

verticalement entre le terrain naturel et le sommet de l'ouvrage) et V le volume d'eau exprimé en millions de m³

Ce classement a d'importances répercussions tant pour l'instruction du dossier (désignation du service instructeur, éléments du dossier) que pour l'exploitation de l'ouvrage (surveillance et auscultation, visite technique, dossier d'ouvrage, etc.). Notamment le choix de la période de retour :

<i>Classe</i>	<i>Absence d'enjeu Présence d'enjeu</i>	
A	$T = 10\,000$ ans	$T = 10\,000$ ans
B	$T = 5000$ ans	$T = 10\,000$ ans
C	$T = 1000$ ans	$T = 5000$ ans
D avec $H^2V^{1/2} \geq 5$	$T = 500$ ans	$T = 1000$ ans
D avec $H^2V^{1/2} < 5$	$T = 100$ ans	$T = 1000$ ans

Hydrogramme initial



Brèche dans les ouvrages en béton

barrages Malpasset (France, déc. 1959) et
Spencer (Alaska, mars 2019)

Processus : rupture brutale de la voûte ou du mur sous la poussée de l'eau (parfois glace)

Modélisation : effacement du mur sur une largeur ℓ qui doit être comme un paramètre libre (calcul des incertitudes)



Brèche dans les ouvrages en remblai

barrage Teton (Idaho, juin 1976)

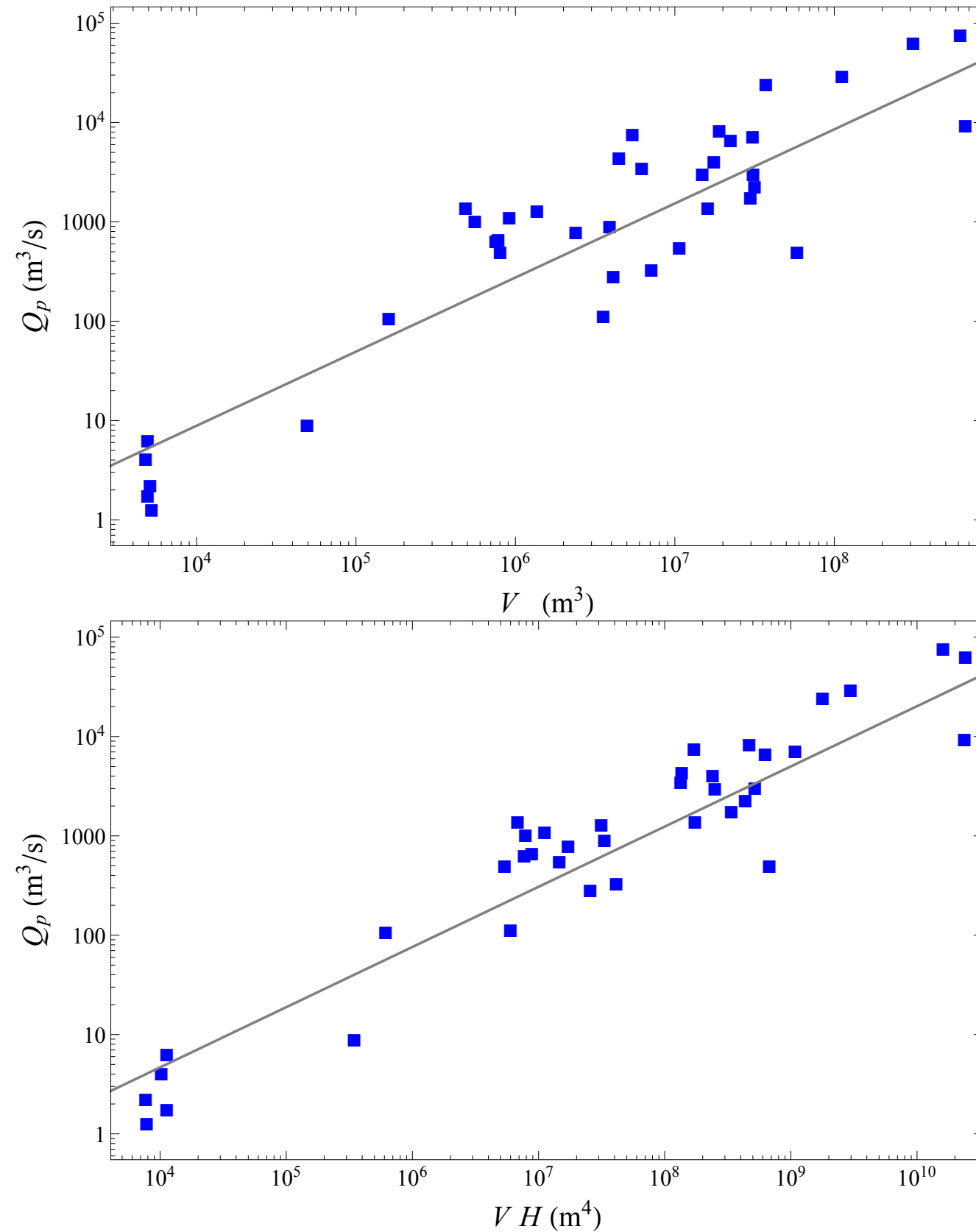


Ouverture progressive d'une *brèche*, sur un temps t_b de plusieurs minutes (parfois quelques dizaines de minutes). Largeur ℓ dans la fourchette $h_b \leq \ell \leq 3h_b$, où h_b est la hauteur du barrage.

Trois approches sont utilisées :

- les *méthodes empiriques* fournissent les principales dimensions de la brèche, le temps de formation, et le débit de pointe de l'hydrogramme de la crue à partir de régressions sur des événements documentés.
- les *modèles conceptuels* prédisent la formation progressive d'une brèche à l'aide d'une série d'équations différentielles traduisant l'érosion d'un remblai et l'écoulement en conditions critiques d'une lame d'eau.
- les *modèles numériques* examinent l'érosion d'un remblai sous l'effet de l'eau.

Brèche dans les ouvrages en remblai (2)



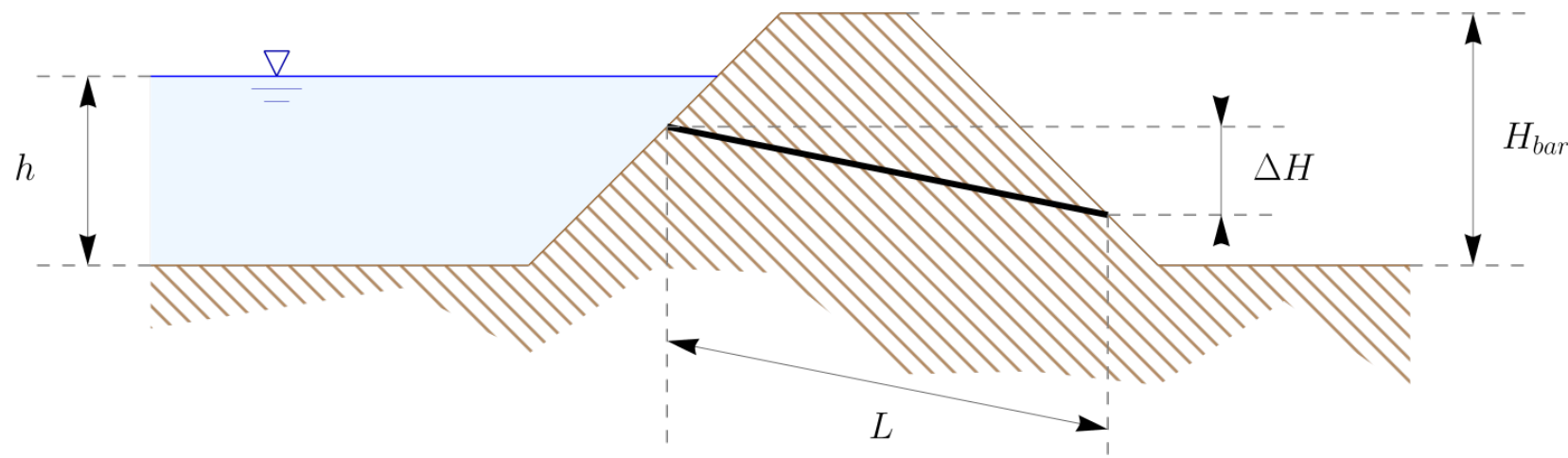
Formules de Pierce et al. (2010) qui donne le débit de pointe en fonction du volume d'eau V (en m^3) contenu derrière le barrage et la hauteur de ce volume H (en m)

$$Q_p = 0,00919V^{0,745}$$

ou bien

$$Q_p = 0,0176(VH)^{0,606}$$

Brèche dans les ouvrages en remblai (3)



Formation d'un conduit traversant un remblai

Cas particulier de la rupture d'un remblai sous l'effet de l'érosion interne (par conduit)

Analyse de Bonelli et col. : définition d'un temps d'érosion

$$t_{er} = 2 \frac{\varrho_s}{\varrho} \frac{L}{g \Delta H k_{er}}$$

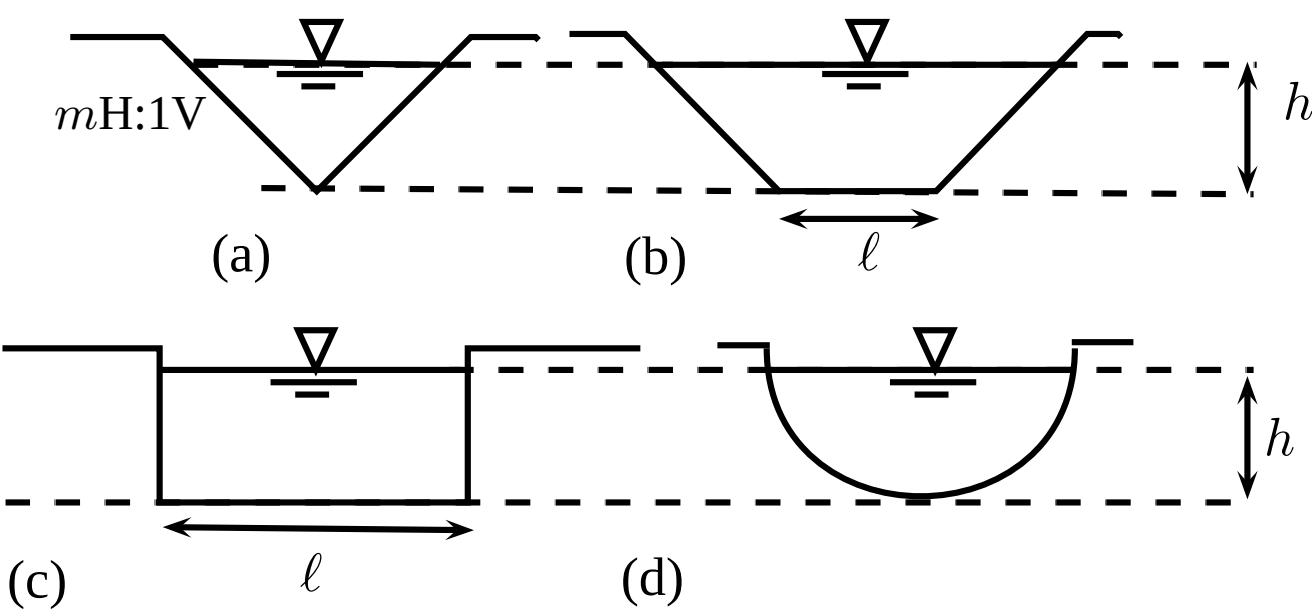
avec ϱ_s la masse volumique du sol, ϱ celle de l'eau, et k_{er} [s/m] le coefficient de cinétique d'érosion ($k_{er} \sim 10^{-3}$ s/m).

Le temps de rupture est

$$t_{rup} \sim 5 \times 10^{I_{er}-2}$$

avec t_{rup} exprimé en minutes et l'indice d'érosion $I_{er} = -\log k_{er}$ (sans unité physique, mais k_{er} exprimé en s/m). Comme $2,7 \leq I_{er} \leq 3,6$ pour les ouvrages en remblai $5 \leq H_{bar} \leq 10$ m, le temps de rupture est compris entre 25 min et 200 min.

Brèche dans les ouvrages en remblai (4)



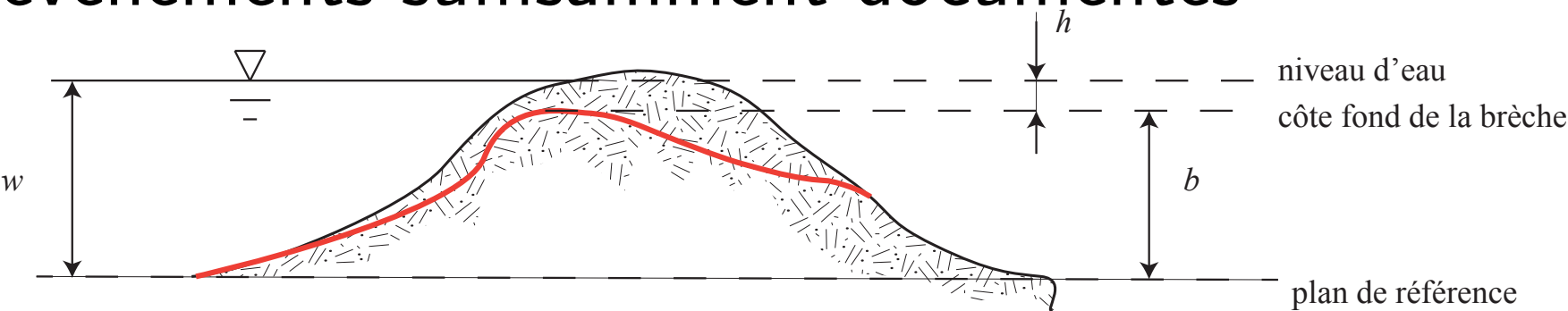
Recommandations OFEN

<i>Forme de la brèche</i>	<i>Débit instantané</i>
triangulaire	(a) $Q_b = 0,72mh^{5/2}$
trapézoïdale	(b) $Q_b = 0,93\ell h^{3/2} + 0,72mh^{5/2}$
rectangulaire	(c) $Q_b = 0,93\ell h^{3/2}$
parabolique	(d) $Q_b = 0,54\ell h^{3/2}$

Brèche dans les remblais naturels



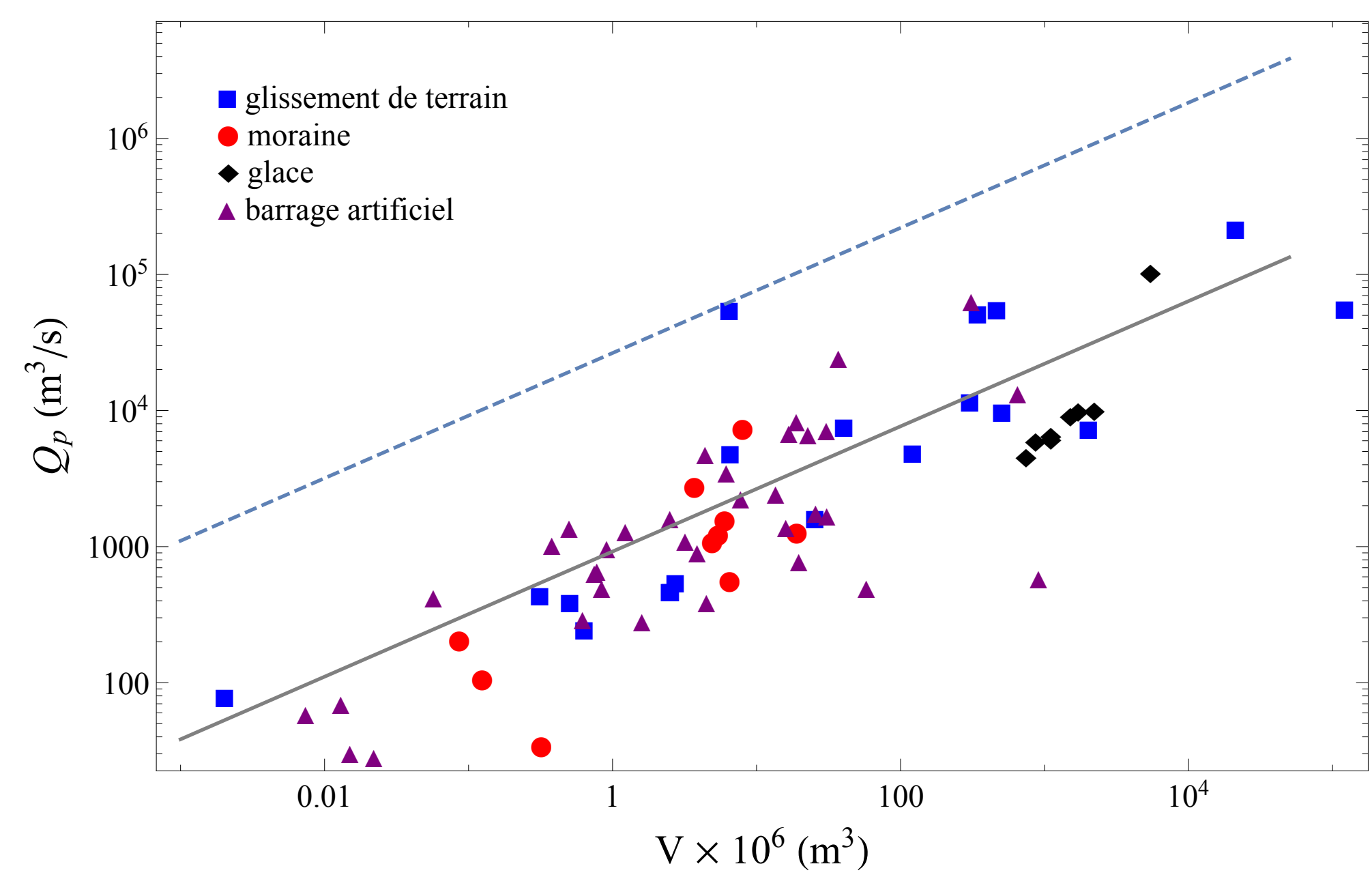
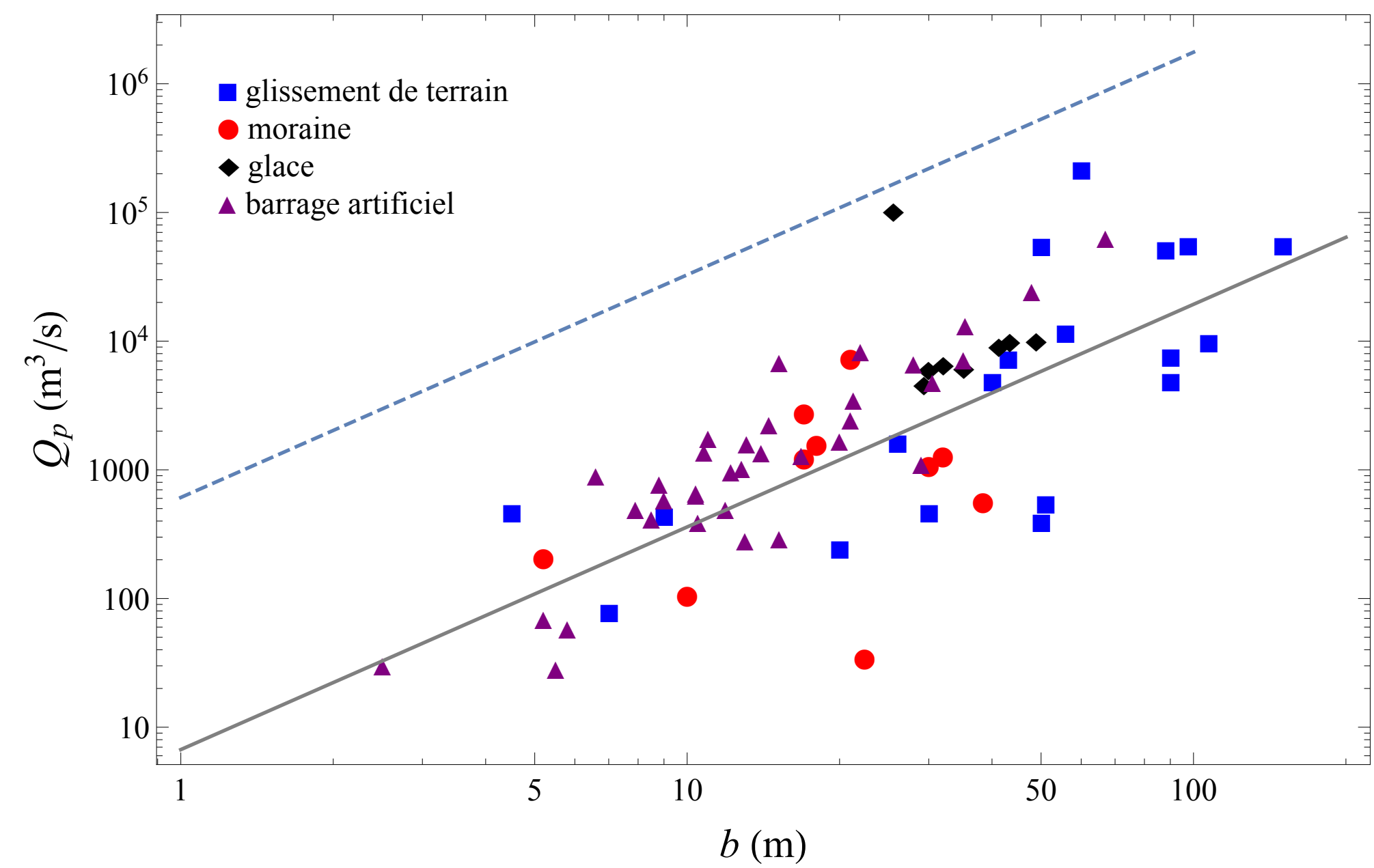
Analyse par Walder et O'Connor (1997) de 72 événements suffisamment documentés



Équations de régression ou d'enveloppe donnant le débit de pointe Q_p et le matériau du remblai. On cale soit une loi de régression, soit une courbe enveloppe. Les valeurs des paramètres selon le type de variable choisie (V volume d'eau vidangé lors de la rupture, b cote de la brèche, bV énergie potentielle) sont indiquées ainsi que le coefficient de détermination R^2 .

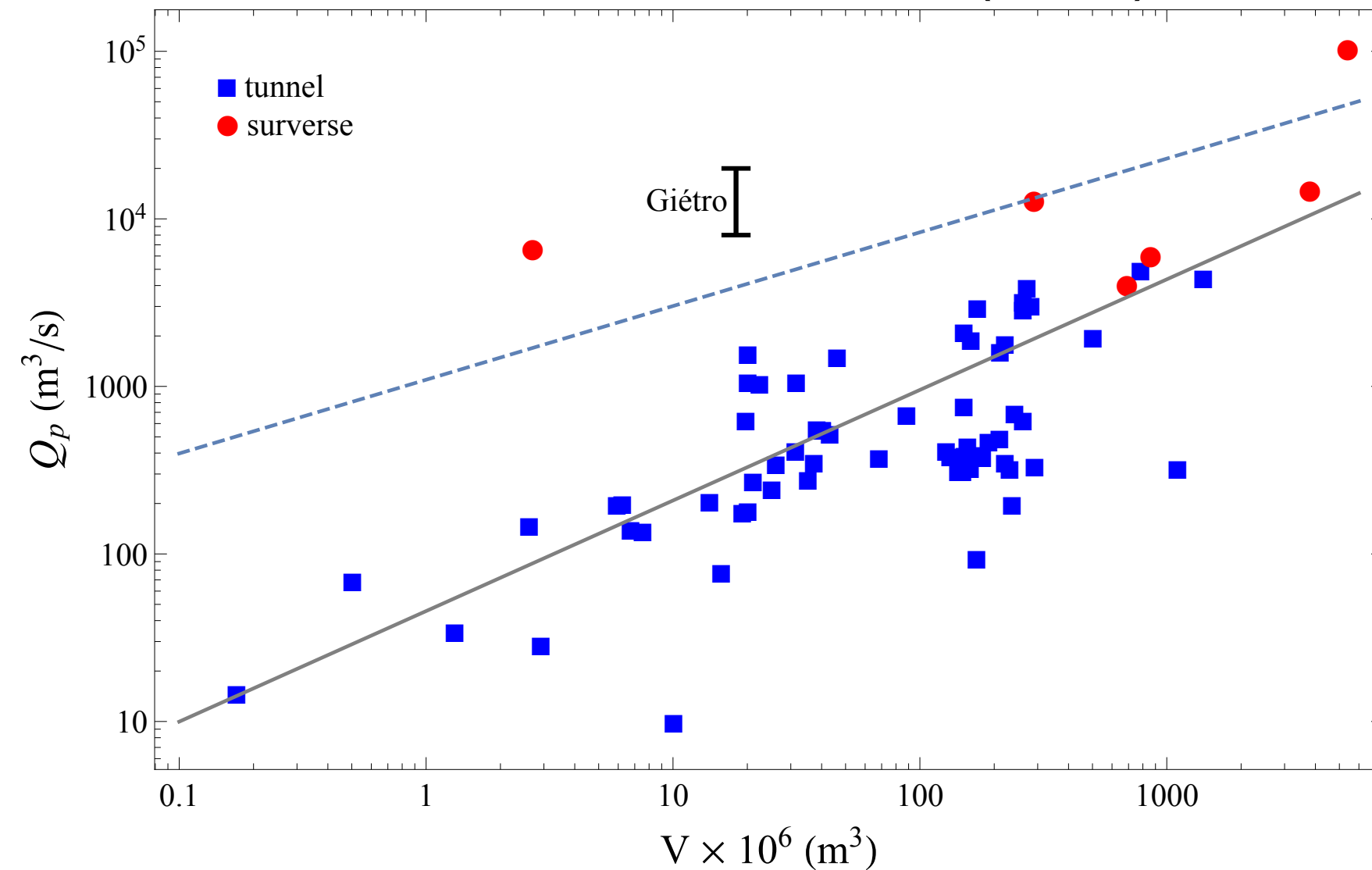
	a	A	c	R^2
équation $Q_p = aV^c$ (rég.) ou $Q_p = AV^c$ (env.)				
<i>glissement de terrain</i>	1,6	46	0,46	0,73
<i>barrage construit</i>	1,16	8,5	0,46	0,60
<i>moraine</i>	0,045	0,22	0,66	0,62
équation $Q_p = ab^c$ (rég.) ou $Q_p = Ab^c$ (env.)				
<i>glissement de terrain</i>	6,7	200	1,73	0,53
<i>barrage construit</i>	2,5	12	2,34	0,82
<i>moraine</i>	60,3	610	0,84	0,09
équation $Q_p = a(bV)^c$ (rég.) ou $Q_p = A(bV)^c$ (env.)				
<i>glissement de terrain</i>	0,99	25	0,4	0,76
<i>barrage construit</i>	0,61	2,9	0,43	0,70
<i>moraine</i>	0,19	1,1	0,47	0,49

Brèche dans les remblais naturels (2)



Brèche dans les remblais glaciaires

Analyse par Walder et O'Connor (1997)



Vidange du lac glaciaire lorsque

- l'eau creuse un tunnel entre la base rocheuse et le barrage de glace
- la poussée de l'eau ou bien sur la surverse provoque l'effondrement du barrage de glace

Selon Clague et Mathews, le débit de pointe Q_p est corrélé au volume vidangé V

$$Q_p = KV^b,$$

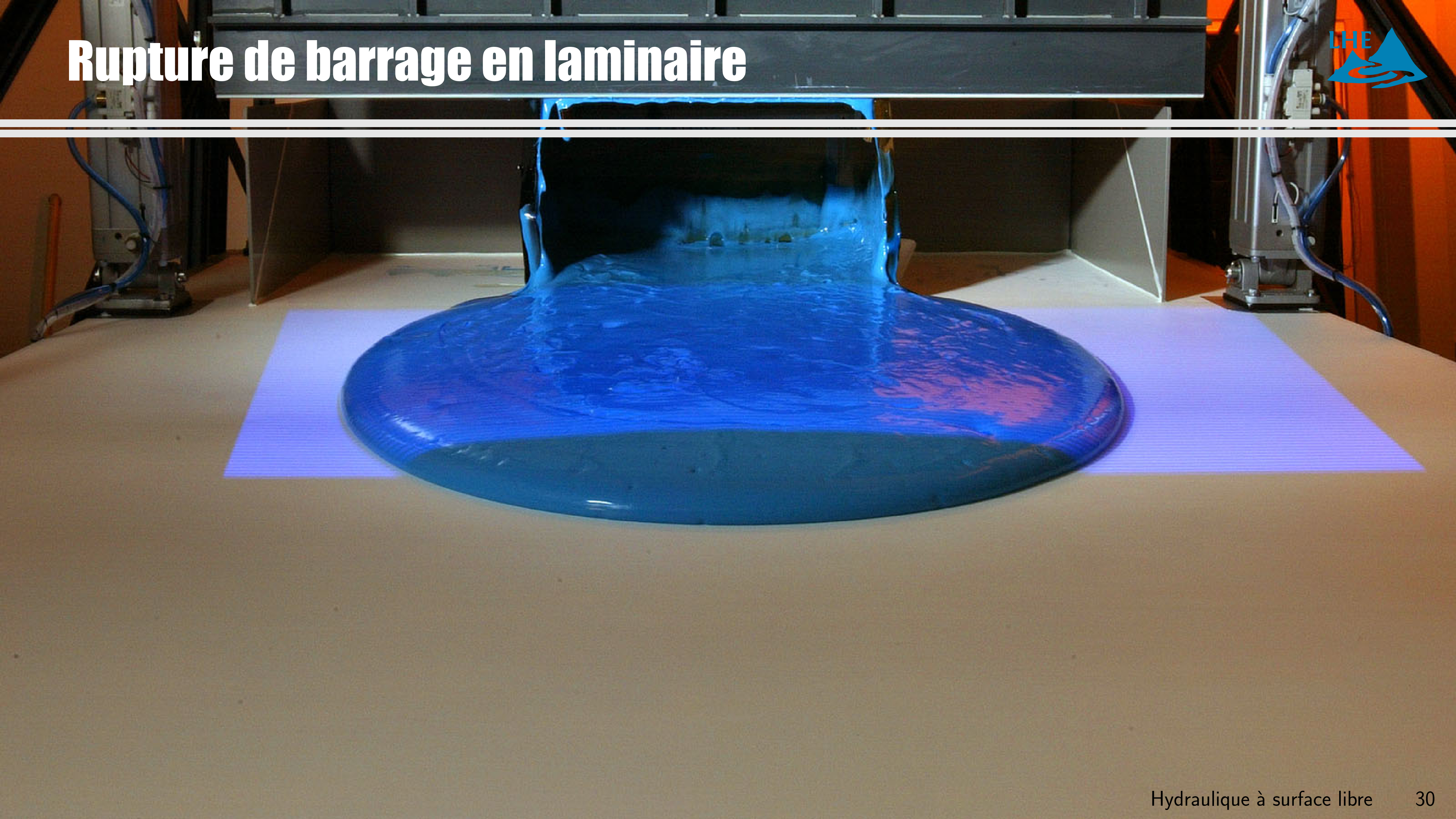
avec Q_p en m³/s, V exprimé en 10^6 m³/s, $K = 75$ et $b = 0,67$

Selon Walder, la vidange par tunnel est le scénario le plus probable (avec 90 % des occurrences) et le débit de pointe Q_p en m³/s est

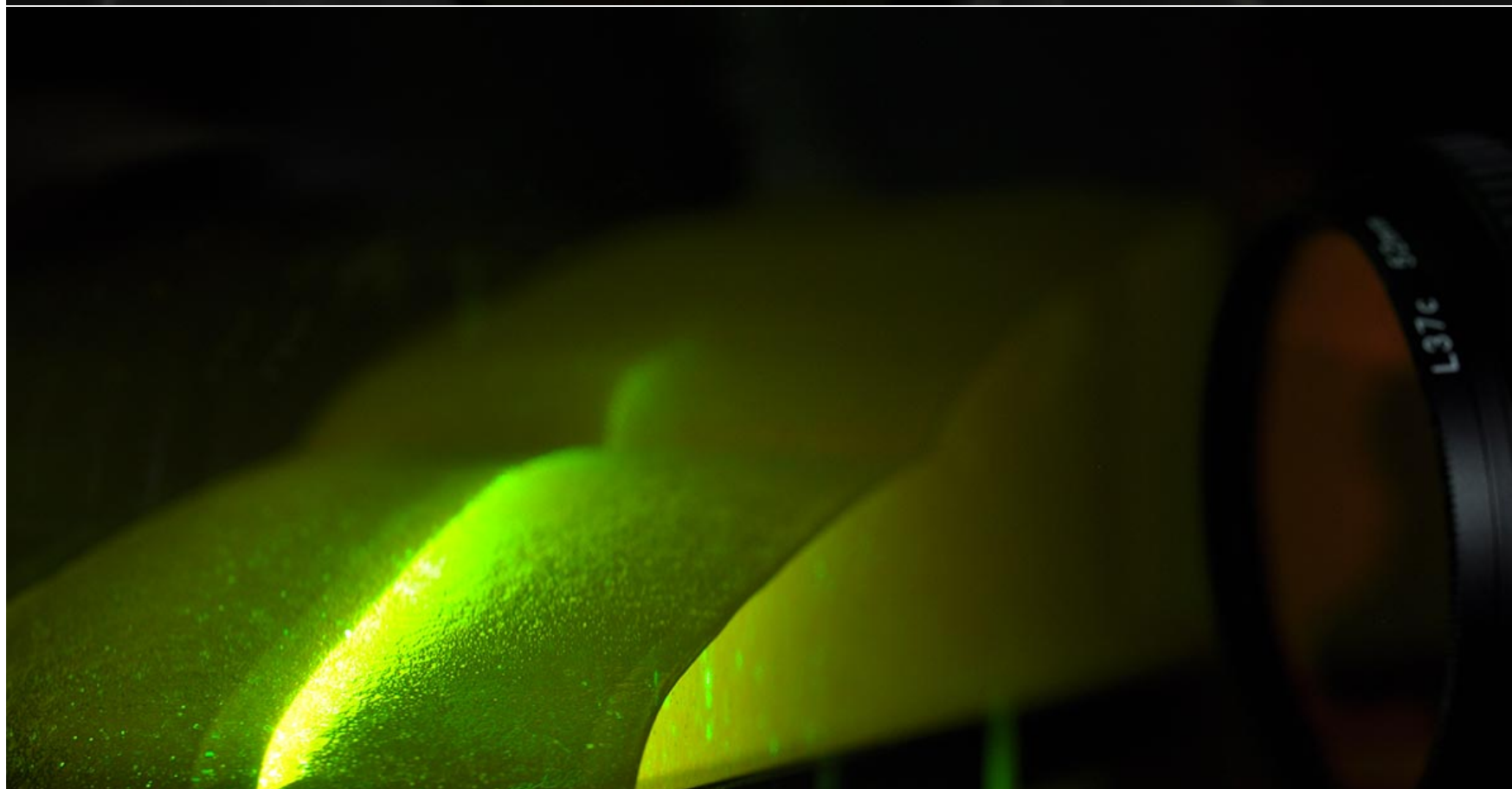
$$Q_p = 0,005V^{0,66} \text{ avec } R^2 = 0,70$$

avec V exprimé en 10^6 m³/s

Rupture de barrage en laminaire



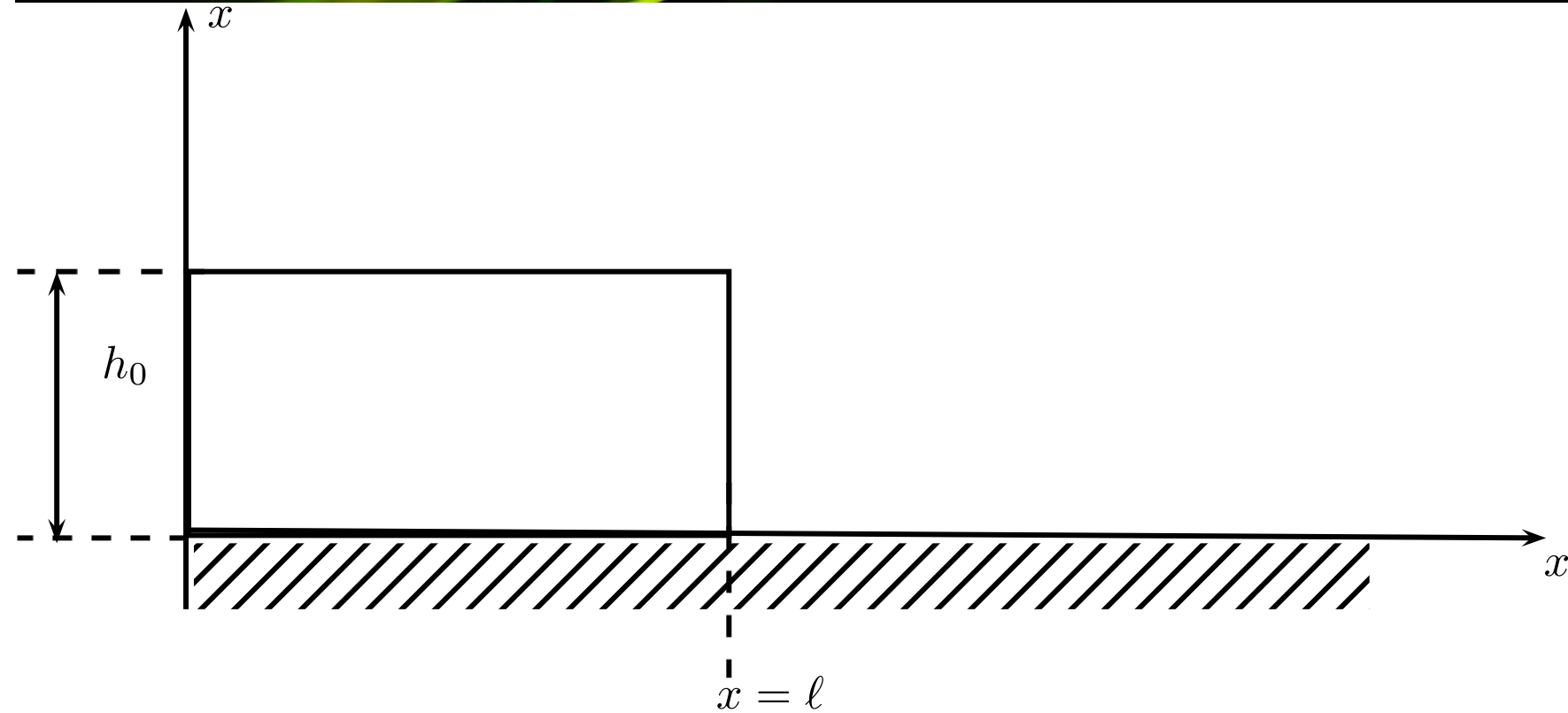
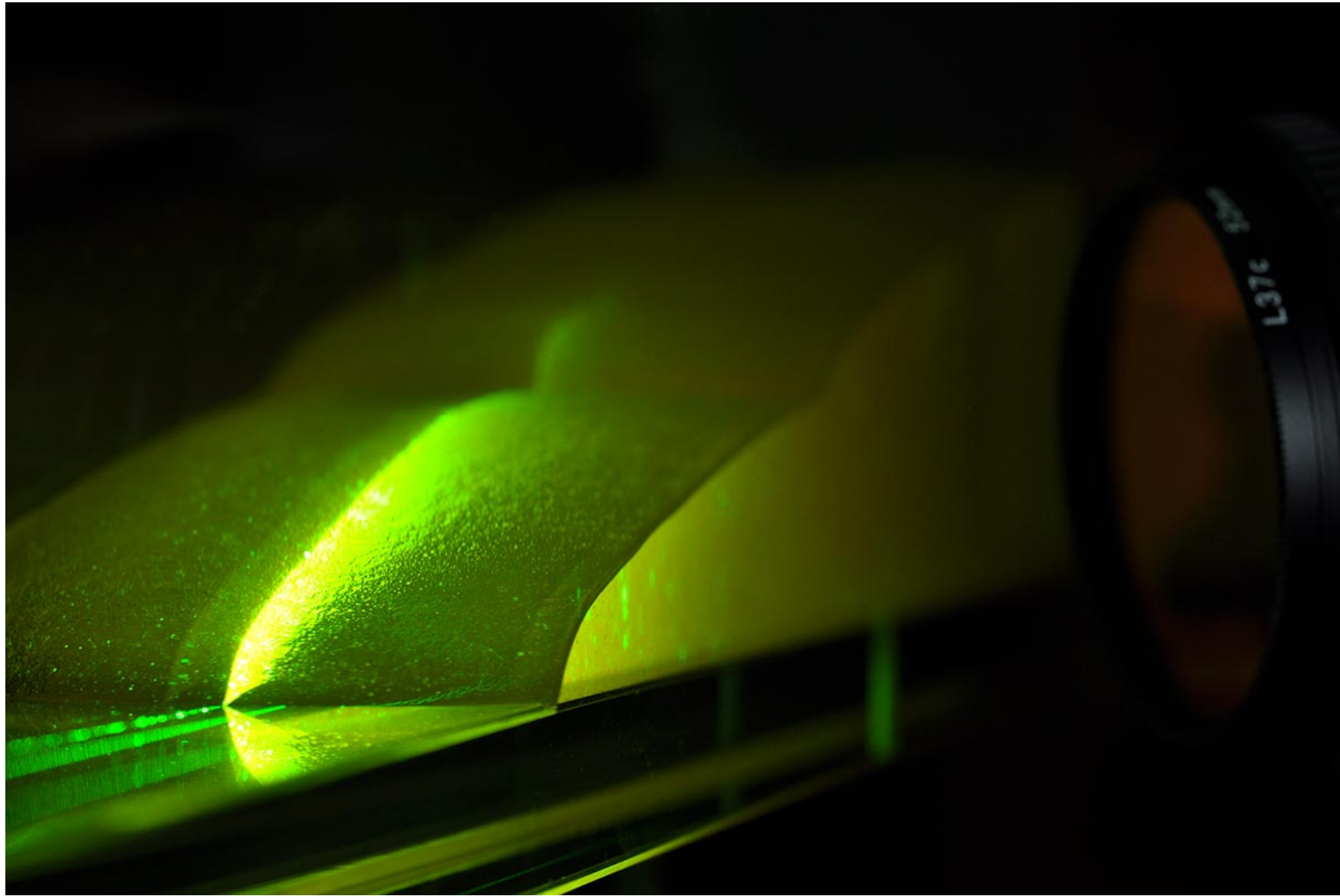
Rupture de barrage en régime laminaire



Approximation utile :

- mélange d'eau et sédimentation en suspension, à faible vitesse
- écoulement de type lahar (cendres volcaniques + eau)
- avalanche de neige mouillée
- lave torrentielle très fluide

Rupture de barrage en régime laminaire



Équation de Huppert : mouvement d'un fluide de viscosité dynamique μ sur un plan incliné

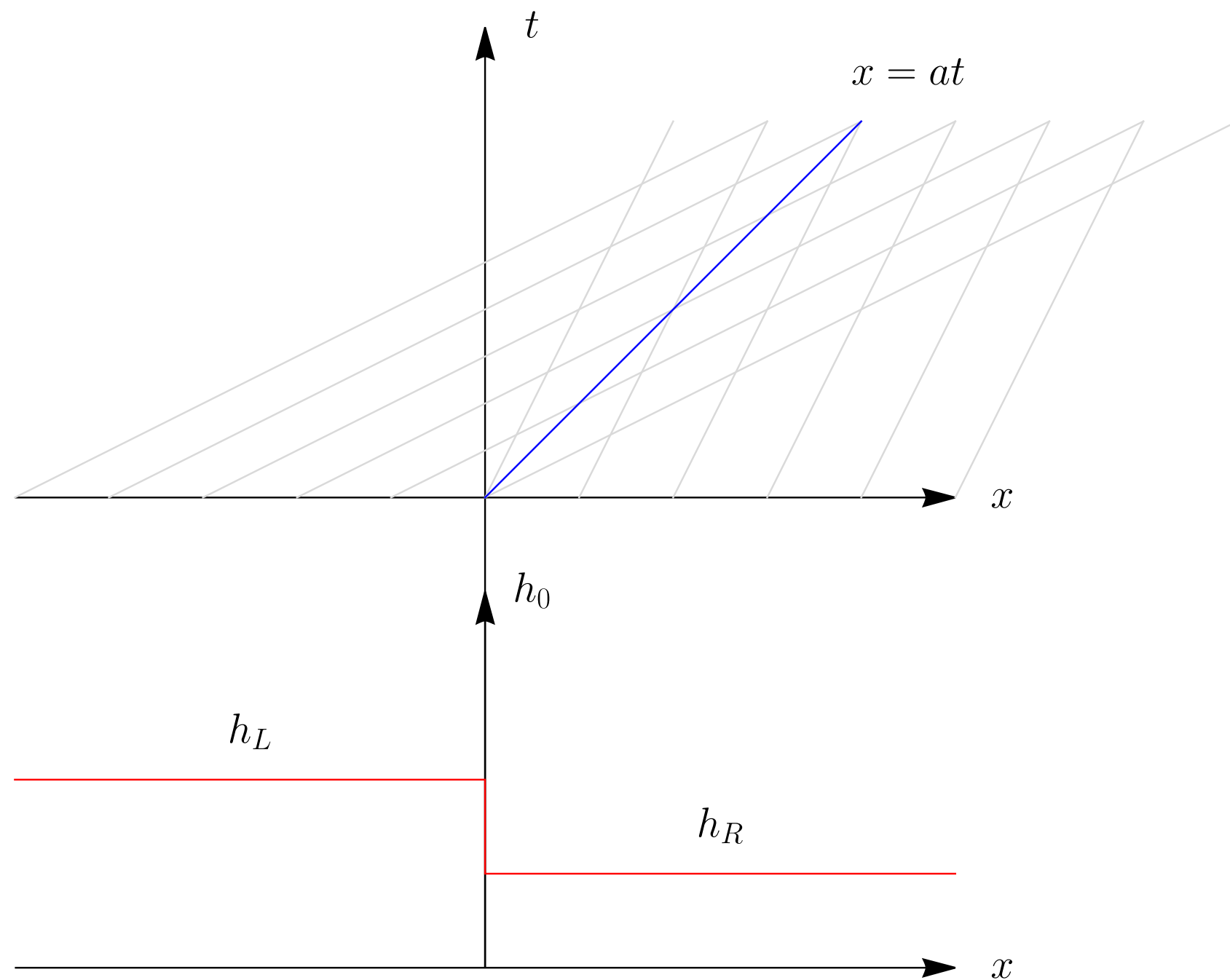
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

avec $h(x)$ la hauteur de fluide

Condition initiale (double problème de Riemann)

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell, \\ 0 & \text{si } x > \ell \text{ ou } x < 0, \end{cases}$$

Aparté 1 : problème de Riemann linéaire



On appelle *problème de Riemann* :

$$\partial_t h + \partial_x [f(h)] = 0,$$

soumis à la condition initiale

$$h(x, 0) = h_0(x) = \begin{cases} h_L & \text{si } x < 0, \\ h_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

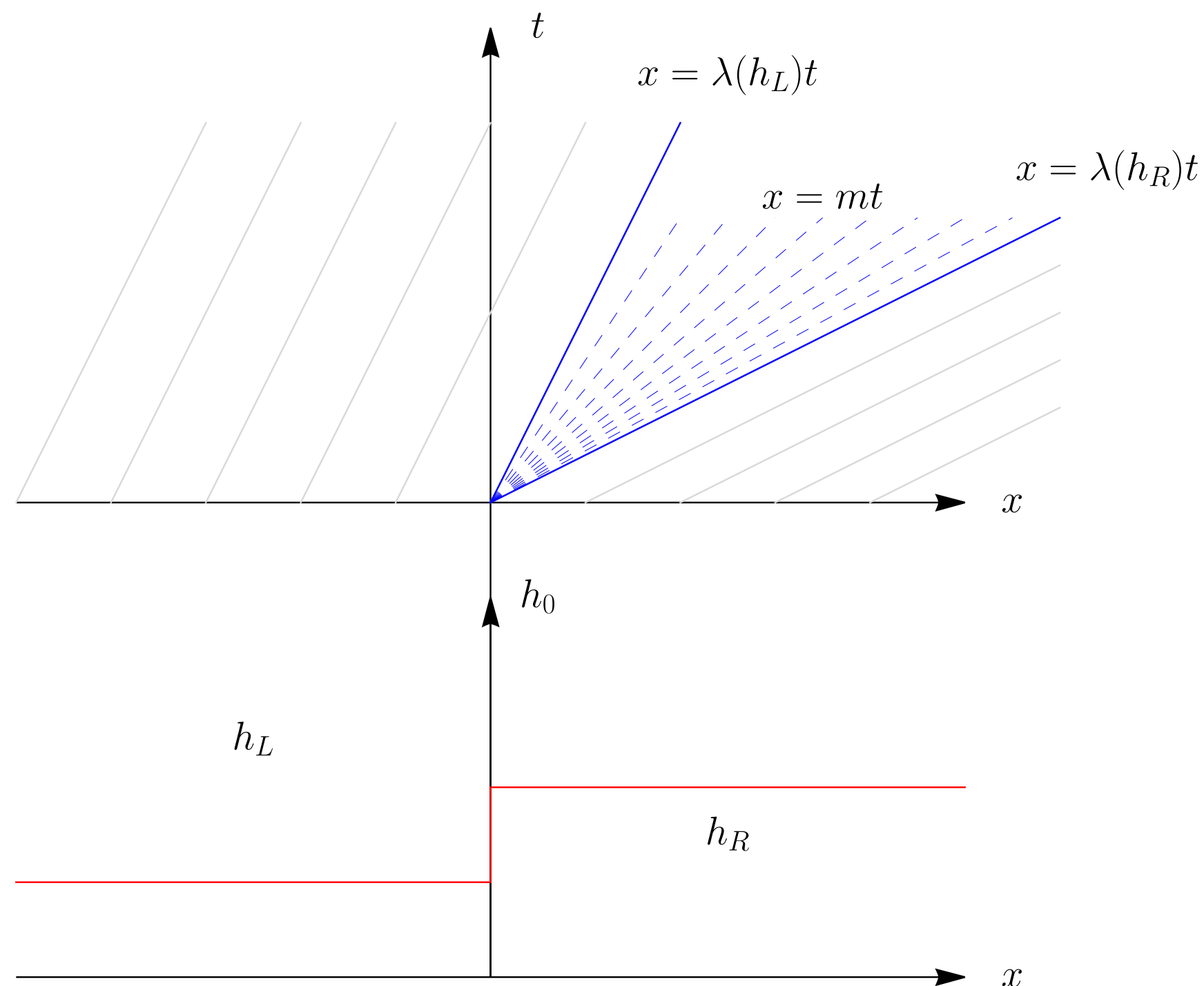
Cas linéaire : $f(h) = ah$, avec a une constante.

La solution est triviale :

$$h(x, t) = h_0(x - at) = \begin{cases} h_L & \text{si } x - at < 0, \\ h_R & \text{si } x - at > 0. \end{cases}$$

Le choc initial se propage.

Aparté 2 : problème de Riemann non linéaire



On suppose que $f'' > 0$ en tout premier lieu ; le cas d'un flux non convexe ne sera pas considéré ici. Il existe deux types possibles de solution :

- soit une solution appelée *onde de détente* (ou bien onde simple) qui est continue
- soit une solution discontinue qui représente la propagation de la discontinuité initiale (*onde de choc*).

Physiquement, une seule de ces solutions est possible et le choix sera dicté par une condition (dite d'entropie) selon la valeur respective de h_L et h_R .

Onde de détente

L'équation est invariante si on transforme $x \rightarrow \lambda x$ et $t \rightarrow \lambda t$. Cela pousse à chercher la solution sous la forme $H(\xi)$ avec $\xi = x/t$. Ce faisant, on obtient une EDO :

$$(f'(H(\xi)) - \xi) H' = 0$$

Deux solutions à cette équation :

- *onde de détente* : $(f'(H(\xi)) - \xi) = 0$. Si $f'' > 0$, alors $f'(h_R) > f'(h_L)$; l'équation $f'(H) = \xi$ admet une seule solution lorsque $f'(h_R) > \xi > f'(h_L)$. On dit que h_L est relié à u_R par une onde de détente : $\xi = f'(H(\xi))$. En inversant f' , on trouve la solution

$$h(x, t) = f'^{(-1)}(\xi) ;$$

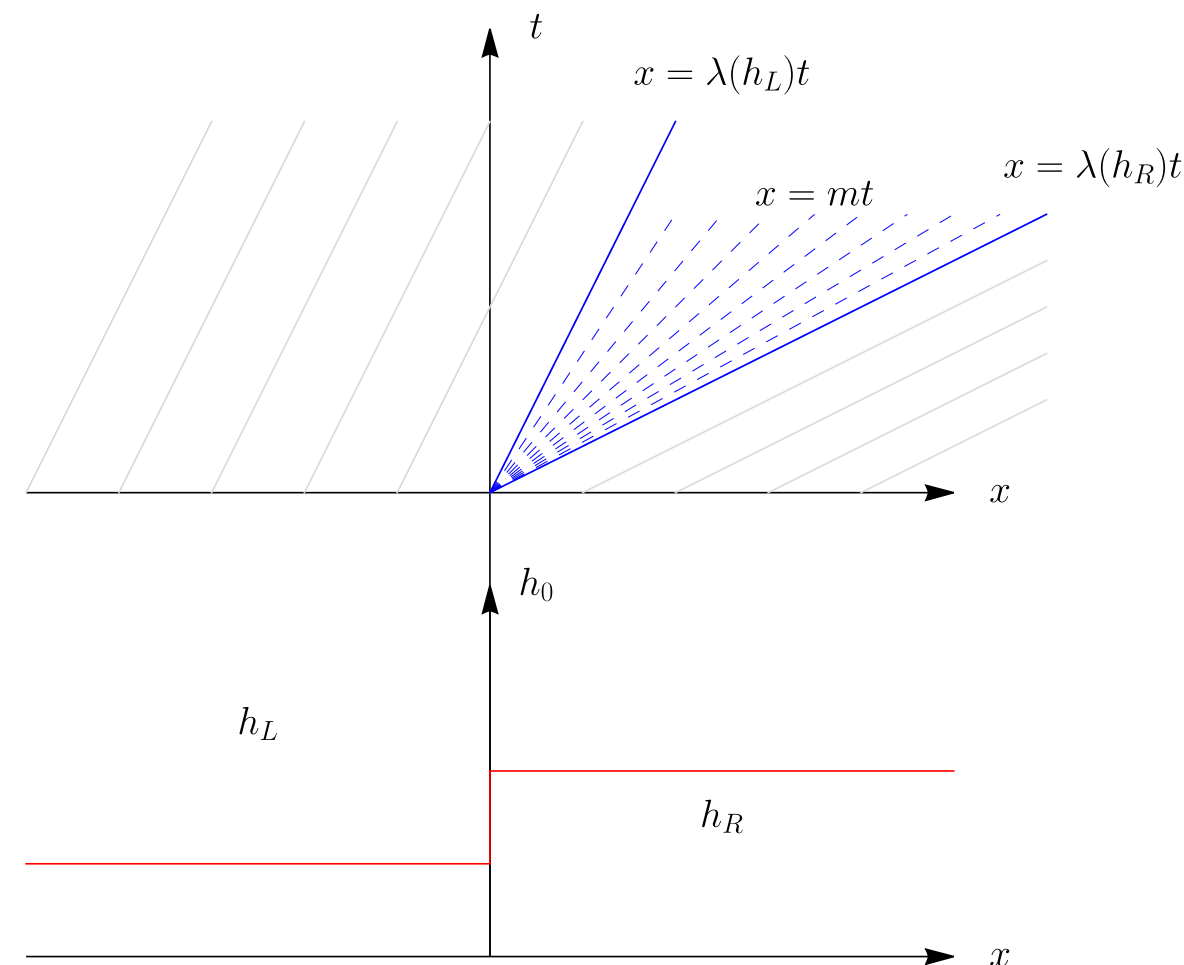
- *état constant* : $H'(\xi) = 0$. C'est la solution triviale $h(x, t) = \text{cte}$. Cette solution ne vérifie pas le problème initial.

Aparté 2 : problème de Riemann non linéaire (3)

La solution s'écrit donc

$$h(x, t) = \begin{cases} h_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq f'(h_L), \\ f'^{(-1)}(\xi) & \text{si } f'(h_L) \leq \frac{x}{t} \leq f'(h_R) \\ h_R & \text{si } \frac{x}{t} \geq f'(h_R). \end{cases}$$

L'onde de détente tend à briser la discontinuité initiale.



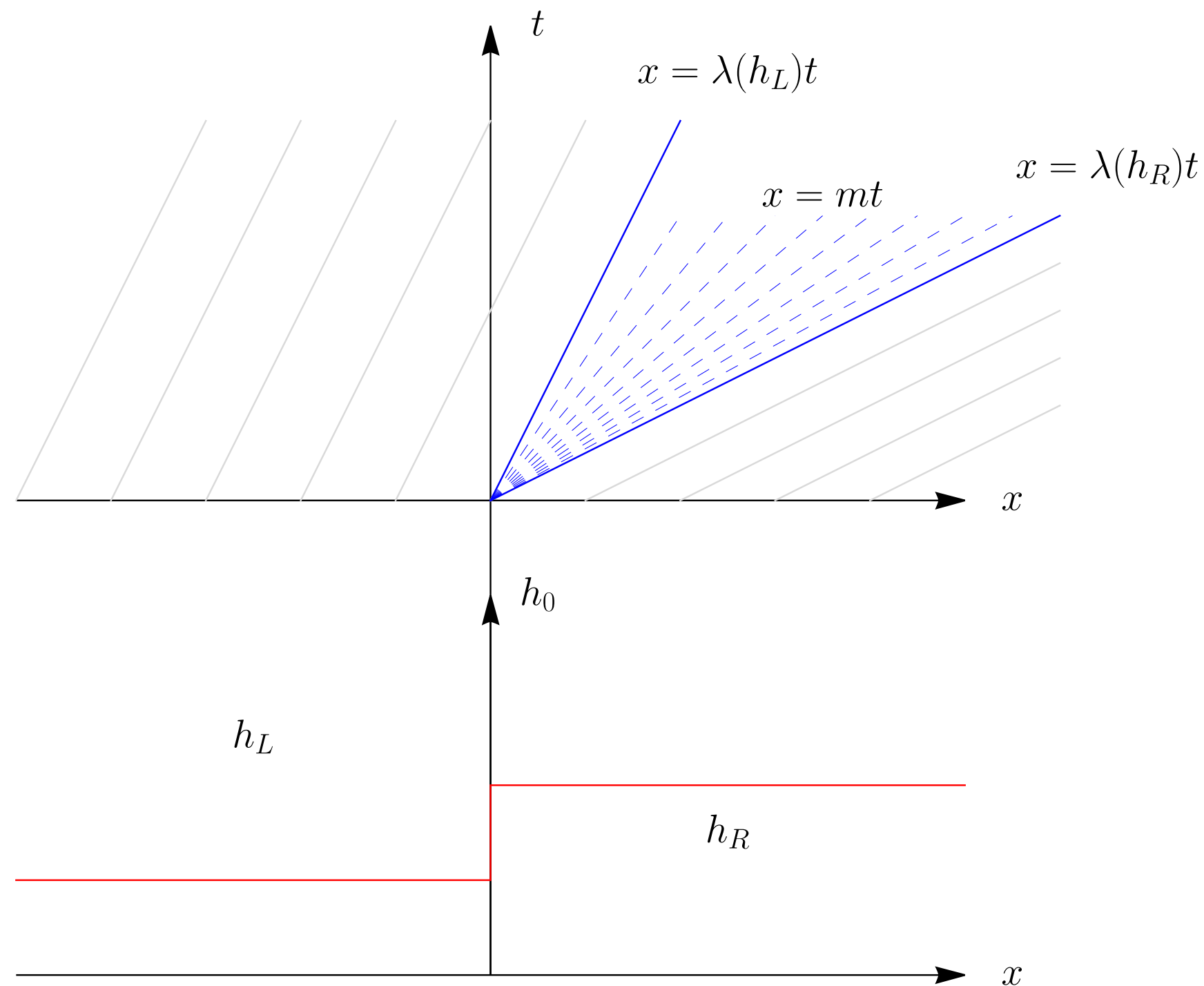
Onde de choc. Le choc doit satisfaire la relation de Rankine-Hugoniot $[[f(h)]] = \dot{s}[[h]]$. La solution est alors :

$$h(x, t) = \begin{cases} h_L & \text{si } x < \dot{s}t, \\ h_R & \text{si } x > \dot{s}t. \end{cases}$$

L'onde de choc de vitesse $\dot{s}$ a une vitesse $\dot{s}$

$$\dot{s} = \frac{[[f(h)]]}{[[h]]} = \frac{f(h_R) - f(h_L)}{h_R - h_L}.$$

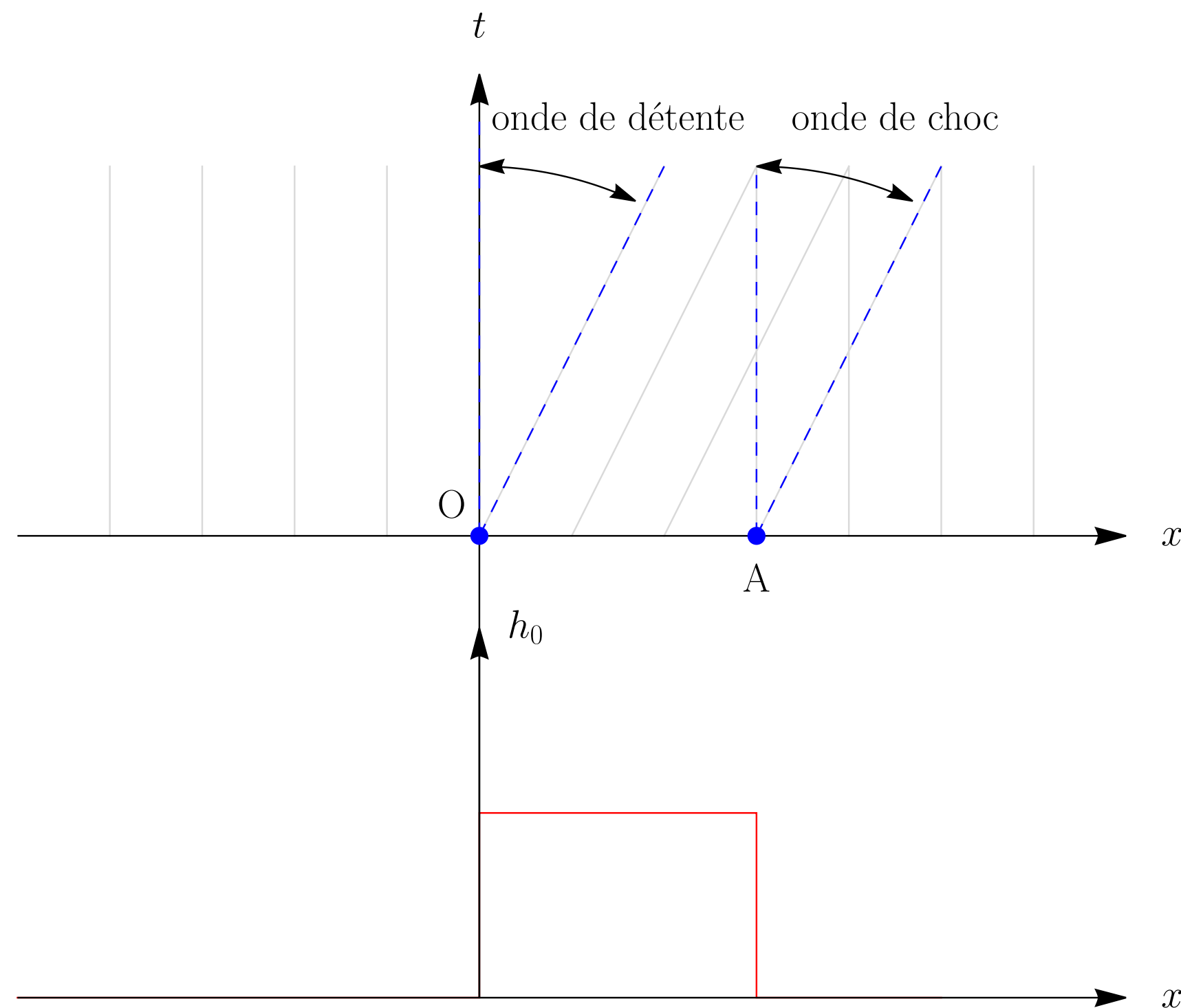
Aparté 2 : problème de Riemann non linéaire (5)



Sélection de la solution physique. Deux cas de figures peuvent se présenter

- cas 1 : $h_R > h_L$. Puisque $f'' > 0$, alors $\lambda(h_R) > \lambda(h_L)$. À l'instant initial $t = 0$, les deux caractéristiques définissent un cône. La solution est une onde détente
- cas 2 : $h_R < h_L$. Les caractéristiques se croisent dès le temps initial $t = 0$. Le choc est la seule solution physiquement admissible.

Solution à l'équation de Huppert



Pour les chocs en $x = s(t)$, on a une relation qui donne h de part et d'autre de s

$$\dot{s}[[h]] = [[f(h)]]$$

en fonction de $\dot{s}$ la vitesse de la discontinuité.

Les ondes de détente sont des solutions auto-similaires de la forme $\mathcal{H}(\xi)$ avec $\xi = x/t$:

$$\mathcal{H}'(-\xi + c(\mathcal{H})) = 0,$$

ce qui veut dire qu'on a soit $\mathcal{H}' = 0$, soit

$$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta}} \xi.$$

Solution à l'équation de Huppert (2)



Dans les tout premiers temps, il se développe

- à droite un choc

$$\dot{s}_0[[h]] = [[f(h)]]$$

$$\dot{s}_0(0 - h_0) = f(0) - f(h_0) \Rightarrow \dot{s}_0 = \frac{f(h_0)}{h_0} = \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{3\mu}$$

donc la caractéristique émanant de A a pour équation

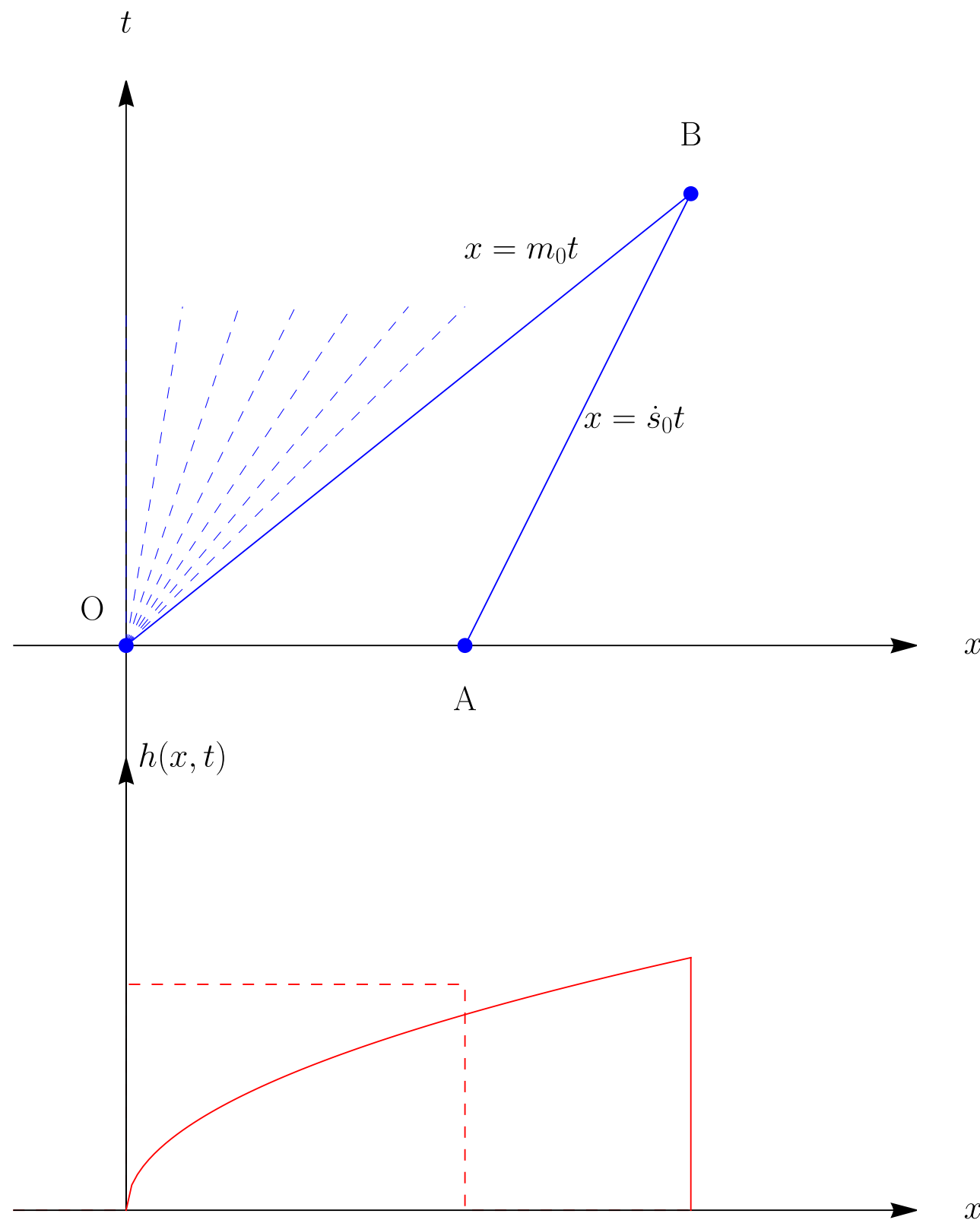
$$x = \ell + \dot{s}_0 t = \ell + \frac{1}{3} \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{\mu} t$$

- à gauche une onde de détente. Du point O, il part un faisceau en éventail de droites caractéristiques

$$x = mt$$

avec m un réel variant entre 0 et $m_0 = \rho g h_0^2 \sin \theta / \mu$.

Solution à l'équation de Huppert (3)



Les deux caractéristiques $x = m_0 t$ et $x = \ell + \dot{s}_0 t$ se rencontrent au point B au temps t_B

$$t_B = \frac{\ell}{m_0 - \dot{s}_0} = \frac{3}{2} \frac{\mu \ell}{\rho g h_0^2 \sin \theta}.$$

L'abscisse de B sera

$$x_B = m_0 t_B = \frac{3}{2} \ell.$$

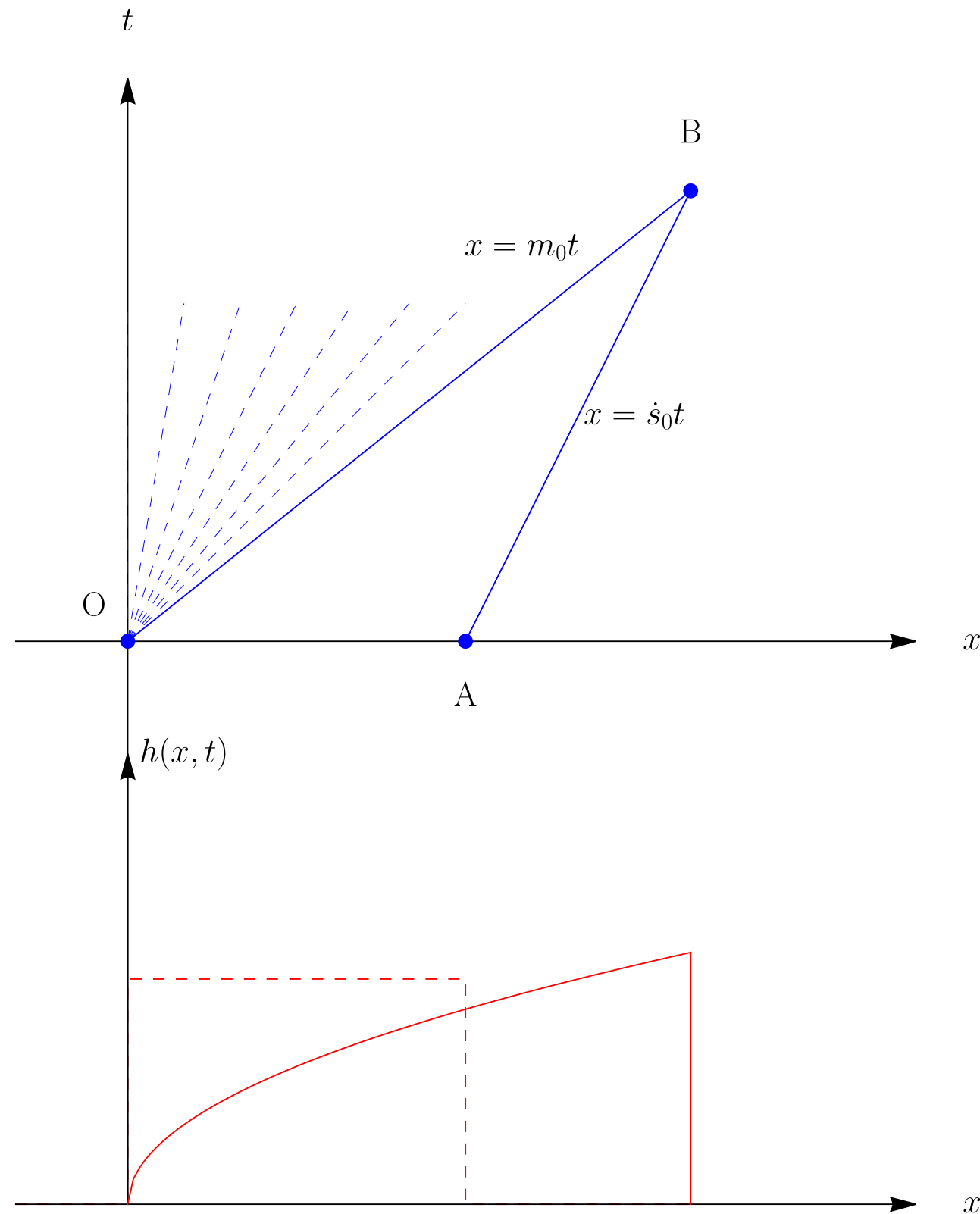
La solution aux temps courts ($0 \leq t \leq t_B$) est donc

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq m_0 t$$

$$h(x, t) = h_0 \text{ pour } m_0 t \leq x \leq \ell + \dot{s}_0 t$$

$$h(x, t) = 0 \text{ pour } x > s(t) = \ell + \dot{s}_0 t \text{ ou } x < 0$$

Solution à l'équation de Huppert (4)



Pour $t > t_B$, la hauteur à droite de $x = s(t)$ est toujours 0, mais à gauche la hauteur a diminué

$$h_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{s}{t}}$$

d'où l'on déduit la nouvelle vitesse de choc

$$\begin{aligned} \dot{s}[[h]] &= [[f(h)]], \\ \dot{s}(0 - h_s) &= f(0) - f(h_s), \\ \dot{s} &= \frac{f(h_s)}{h_s} = \frac{\rho g h_s^2 \sin \theta}{3\mu} = \frac{1}{3} \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

La caractéristique associée au choc est

$$s(t) = x_B \left(\frac{t}{t_B} \right)^{1/3} = \frac{3}{2} \left(\frac{2 \rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{\mu} t \right)^{1/3} = A t^{1/3},$$

avec $A = \left(\frac{9 \rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{4 \mu} \right)^{1/3}$. Aux temps longs ($t > t_B$) on a donc

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq A t^{1/3}, \\ h(x, t) &= 0 \text{ pour } x > s(t) = A t^{1/3} \text{ ou } x < 0. \end{aligned}$$

Solution à l'équation de Huppert (5)



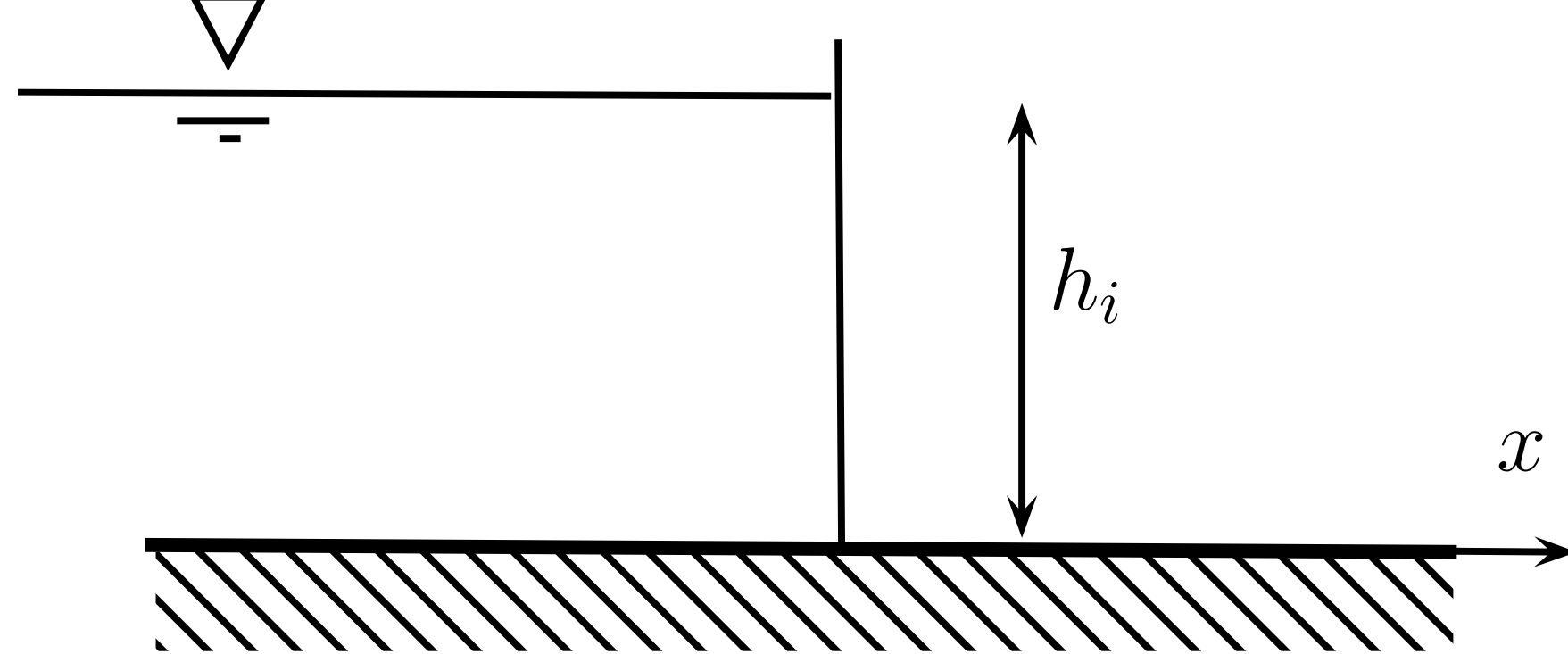
Solution numérique

Rupture de barrage et équations de Saint-Venant



Problème de Ritter

Barrage semi-infini sur fond horizontal, sans frottement



Équations de Saint-Venant sous forme non conservative

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Conditions initiales

$$-\infty < x < \infty, u(x,0) = 0,$$

$$x < 0, h(x,0) = h_i,$$

$$x > 0, h(x,0) = 0.$$

Solutions auto-similaires. On recherche une solution sous la forme d'une solution auto-similaire

$$\bar{u} = t^{\beta/\alpha} U(\zeta) \text{ et } h = t^{\gamma/\alpha} H(\zeta),$$

avec $\zeta = x/t^\alpha$ la variable de similarité, H et U deux fonctions à déterminer. En remplaçant $\bar{u}$ et h par leur forme auto-similaire dans les équations de Saint-Venant, on trouve :

$$\beta + \alpha = 1 \text{ et } \gamma + 2\alpha = 2$$

Les conditions initiales imposent $\beta = \gamma = 0$, d'où $\alpha = 1$. On a donc

$$\begin{aligned} H \frac{dU}{d\zeta} + (U - \zeta) \frac{dH}{d\zeta} &= 0, \\ (U - \zeta) \frac{dU}{d\zeta} + g \frac{dH}{d\zeta} &= 0 \end{aligned}$$

Solutions auto-similaires. Sous forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} H & U - \zeta \\ U - \zeta & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U' \\ H' \end{pmatrix} = 0,$$

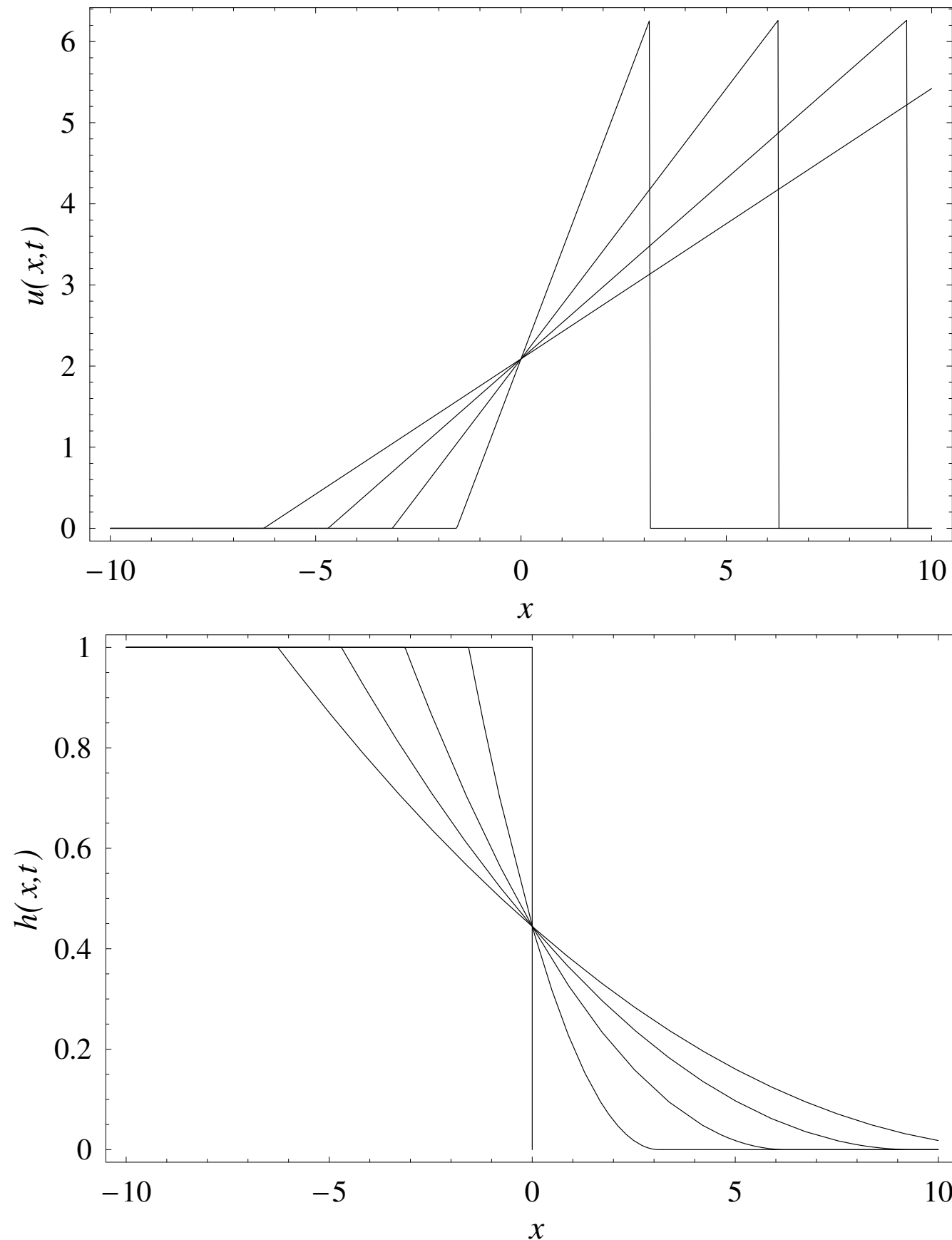
Pour que ce système admette une solution non triviale, il faut que son déterminant s'annule

$$gH = (U - \zeta)^2$$

On déduit ensuite $U' = 2\zeta/3$, d'où $U = 2(\zeta + c)/3$, où c est une constante d'intégration, $H = 4(c - \frac{1}{2}\zeta)^2/(9g)$. Les conditions aux limites donnent : $c_0 = \sqrt{gh_i}$. On déduit finalement la solution dite de Ritter des équations de Saint-Venant

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \bar{u} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \\ h(x, t) &= \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2 \end{aligned}$$

Problème de Ritter (4)



Solution dite de Ritter des équations de Saint-Venant

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right),$$
$$h(x, t) = \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2.$$

Remarques :

- le front est le point où $h = 0$: $x = 2c_0t$
- la forme du front est parabolique
- toutes les courbes $h(x, t)$ et $u(x, t)$ passent par un point pivot. Cela revient à injecter un débit constant et égal à $uh = 8\sqrt{gh_i^3}/27$.

Problème de Ritter (5)



Solution numérique

Méthode des caractéristiques. Les équations de Saint Venant :

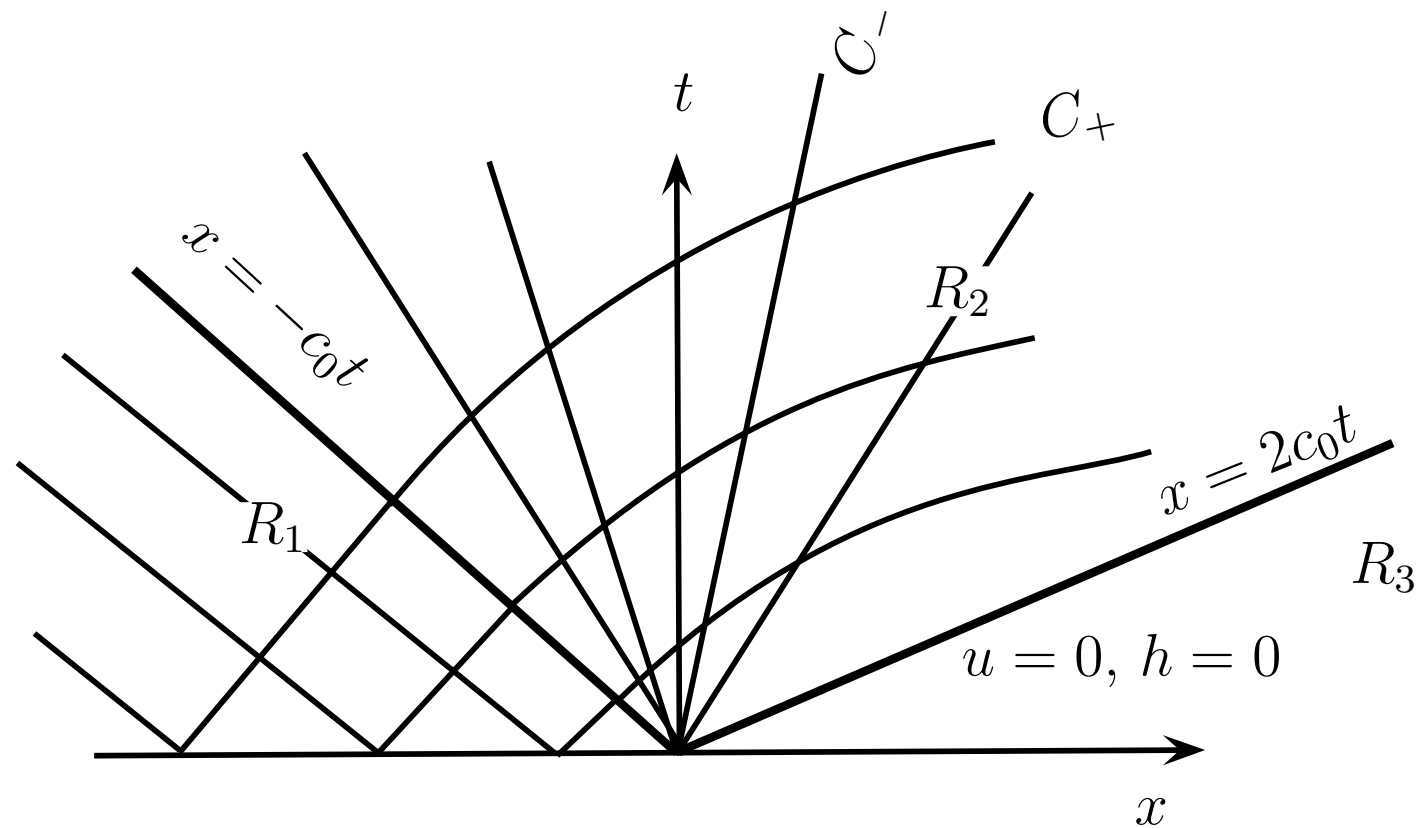
$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

sont équivalentes

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh} \\ \frac{ds}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh}\end{aligned}$$

avec $r = u + 2\sqrt{gh}$ et $s = u - 2\sqrt{gh}$ (*variables de Riemann*)

Problème de Ritter (7)



Les équations de Saint-Venant sont équivalentes au système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d}{dt}(u \pm 2\sqrt{h}) = 0,$$

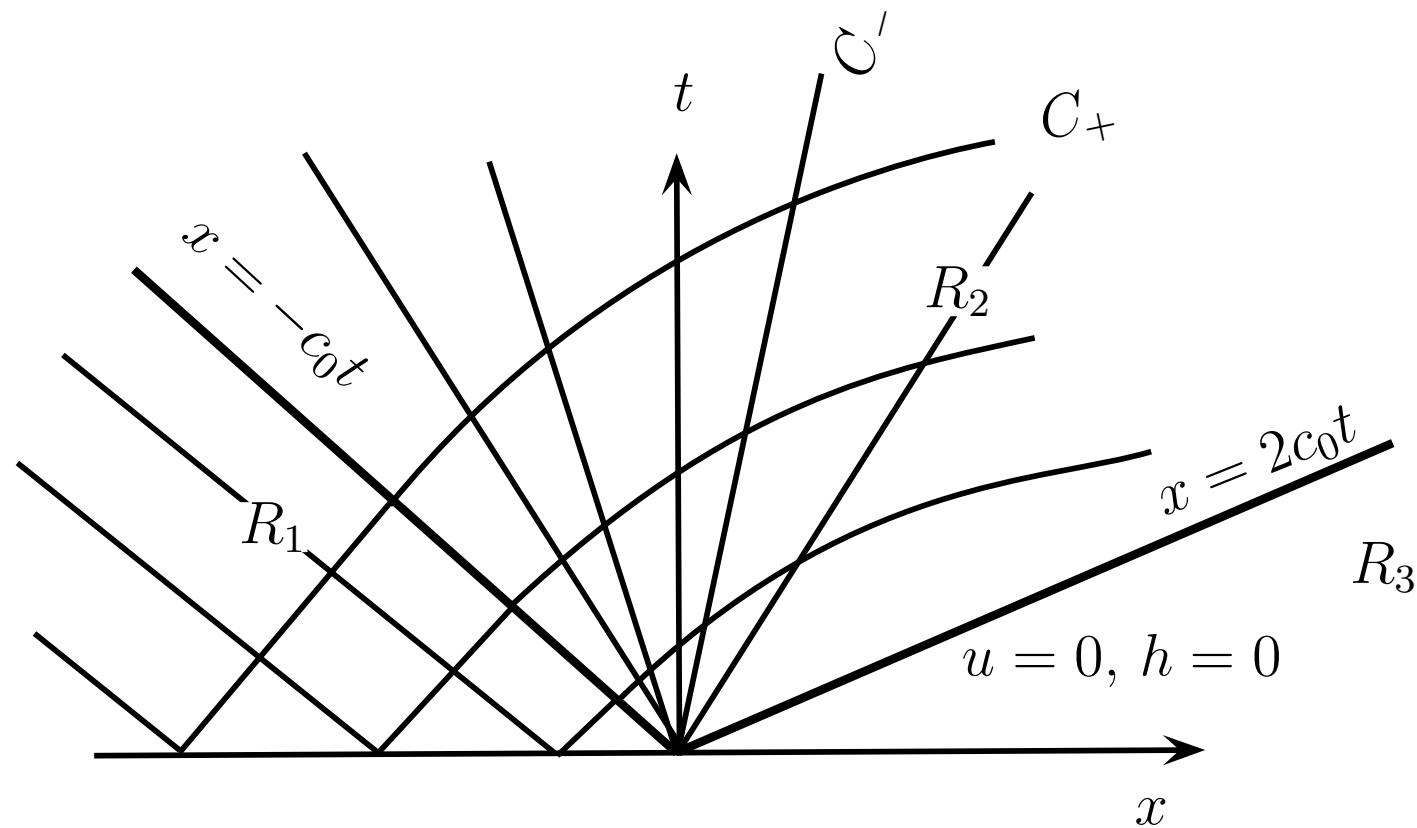
le long des courbes caractéristiques $C_{\pm}$:

$dx/dt = u \pm \sqrt{h}$. Conditions initiales :

- pour la vitesse : $-\infty < x < \infty$, $u(x,0) = 0$
- pour la hauteur : si $x < 0$, $h(x,0) = h_0$ et si $x > 0$, $h(x,0) = 0$

La perturbation engendrée à $t = 0$ et $x = 0$ par la rupture va se propager à l'amont et à l'aval.

Problème de Ritter (8)



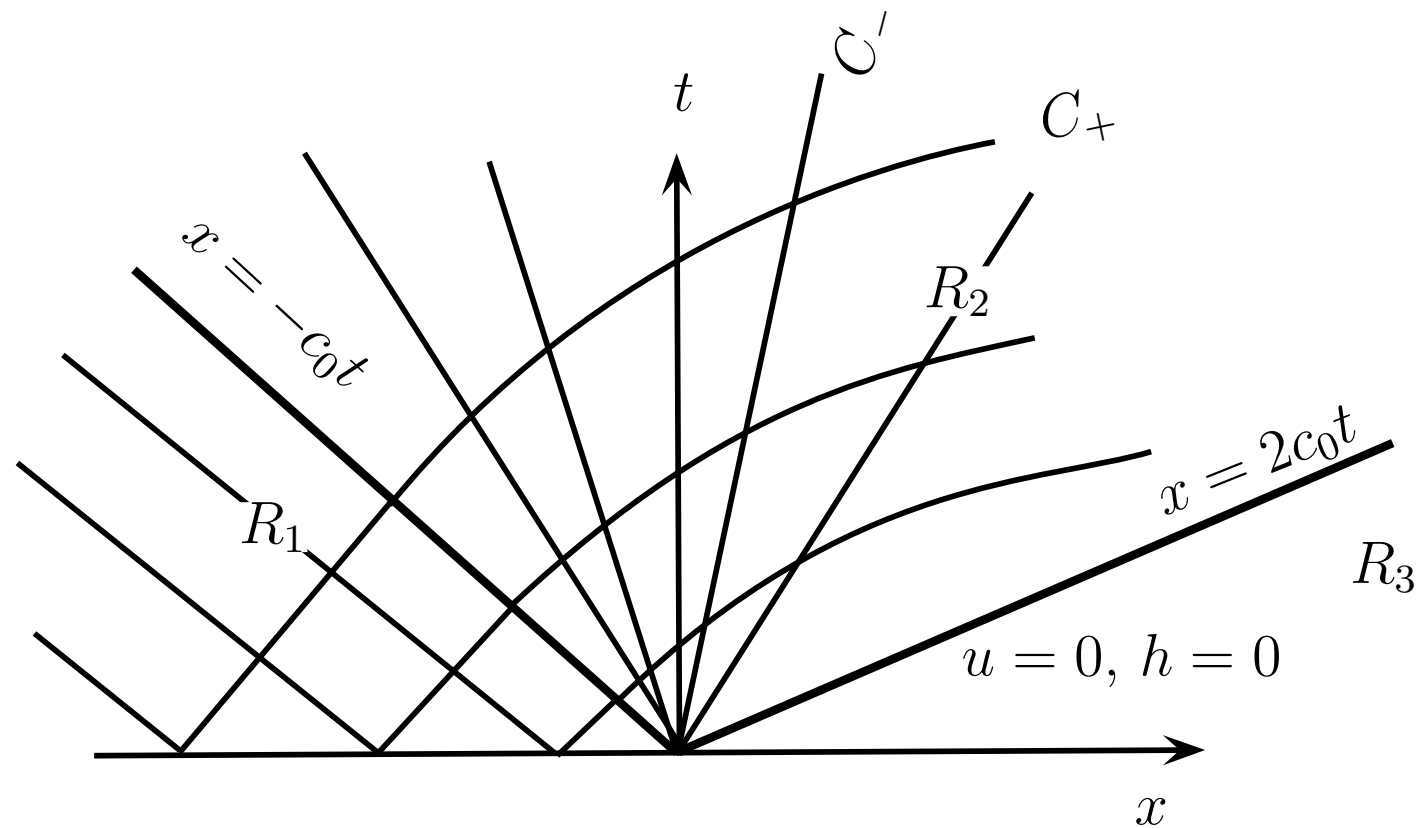
Initialement, u et h sont constants, donc variables r et s le sont aussi.

Après la rupture, toute la partie du volume d'eau qui n'est pas encore mise en mouvement est également caractérisée par des valeurs de r et s constantes.

Il existe un domaine dit « onde simple » (R_2) avec une dépendance $u(h)$ et une famille de caractéristiques qui sont des droites.

Il existe un troisième domaine « vide » (R_3) où l'écoulement n'est pas encore parvenu. On ne connaît pour l'instant pas les limites de ces différents domaines dans le plan $x - t$.

Problème de Ritter (9)



Examinons tout d'abord les caractéristiques C_+ émanant de l'axe $t = 0$ et $x < 0$. Le long de ces caractéristiques, les invariants sont

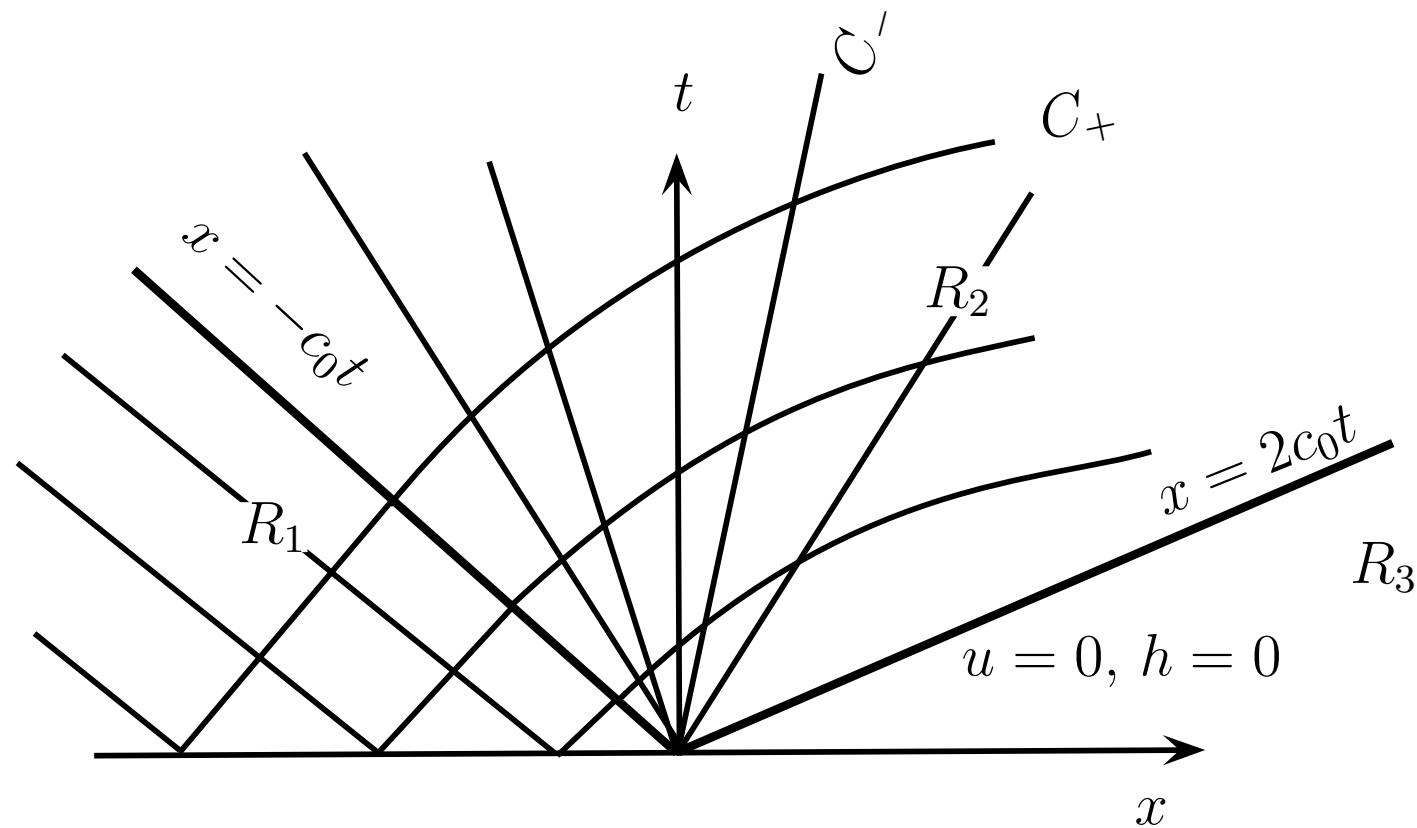
$$r = u + 2\sqrt{gh} = 2c_0$$

avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$ la vitesse initiale de l'onde de rupture. Ces caractéristiques ont pour équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh}$$

qui sont des courbes (que l'on ne connaît pas encore) dans le domaine R_2 , mais des droites dans le domaine R_1 puisque u et h sont constants. L'information est transmise le long de ces caractéristiques du domaine R_1 vers le domaine R_2 .

Problème de Ritter (10)



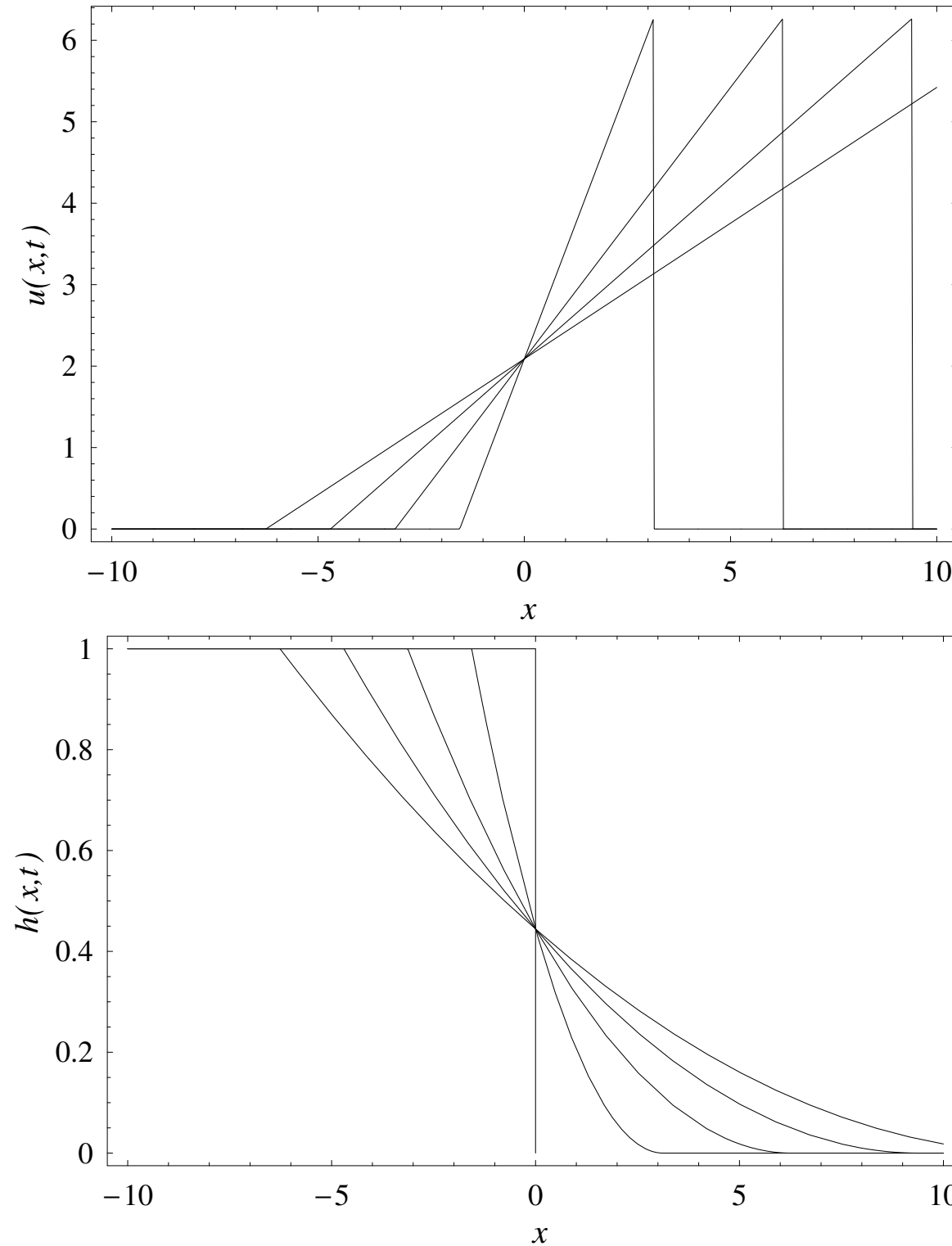
La caractéristique marquant les limites de cette zone non perturbée, que l'on appellera domaine R_1 est la droite $x = -c_0 t$ reportée en gras sur la figure. Cette caractéristique émanant de 0 représente tout simplement la propagation de la discontinuité initiale de h en $x = 0$ (à $t = 0$). Elle appartient à la famille C_- d'équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh}$$

qui avec les valeurs initiale à gauche de 0 donne ici $dx/dt = -c_0$. Dans le domaine R_2 , la famille de caractéristiques C_- forme un réseau en éventail (onde simple centrée) d'équation

$$\frac{x}{t} = \lambda_- = u - \sqrt{gh}$$

Problème de Ritter (11)



Résolution du système d'équation :

$$u = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right),$$

$$h = \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2,$$

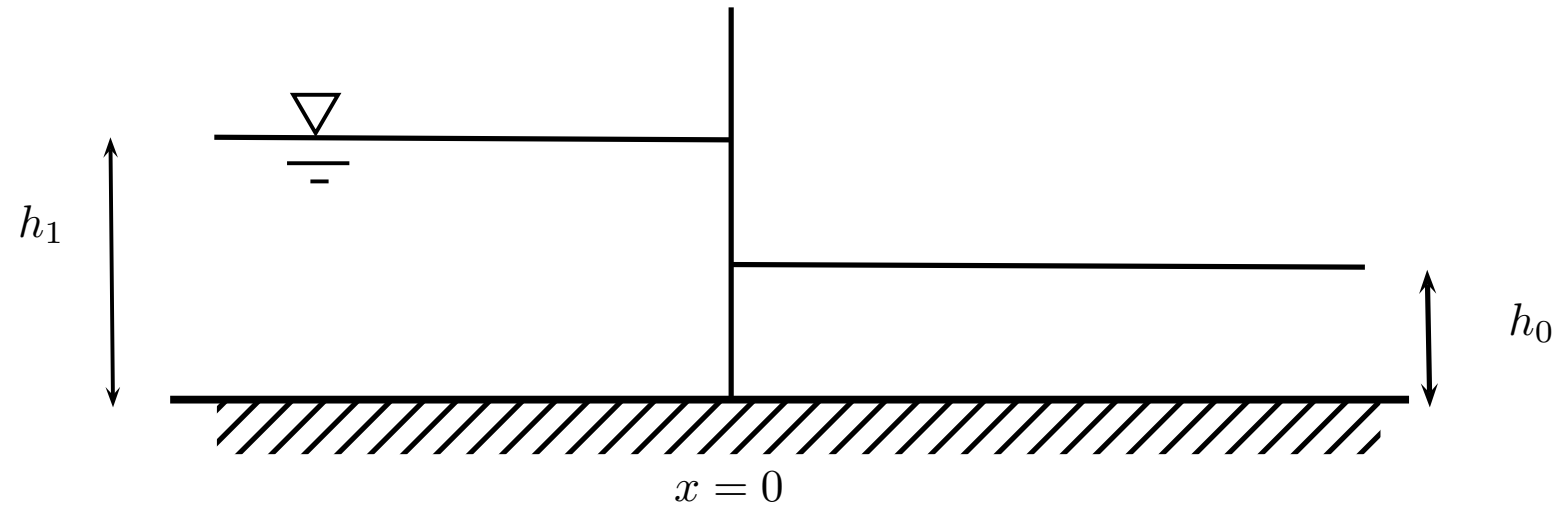
En $x = 2c_0t$, la hauteur devient nulle. Le domaine R_3 représentant le domaine non encore concerné par la rupture de barrage est délimité par la caractéristiques $x = 2c_0t$ qui est à la fois une caractéristique C_- et C_+ .

Remarque : $u = 2(c_0 - \sqrt{gh})$ dans tout le domaine d'écoulement (c'est l'invariant r de Riemann qui se conserve). En reportant cette expression dans l'équation de conservation de la masse, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (2c_0 - 3\sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

qui est l'équation de l'onde cinématique non linéaire avec une vitesse d'advection $2c_0 - 3\sqrt{gh}$.

Rupture de barrage sur lit mouillé



On considère équations de Saint-Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

soumises aux conditions initiales

$$-\infty < x < \infty, u(x,0) = 0,$$

$$x < 0, h(x,0) = h_1,$$

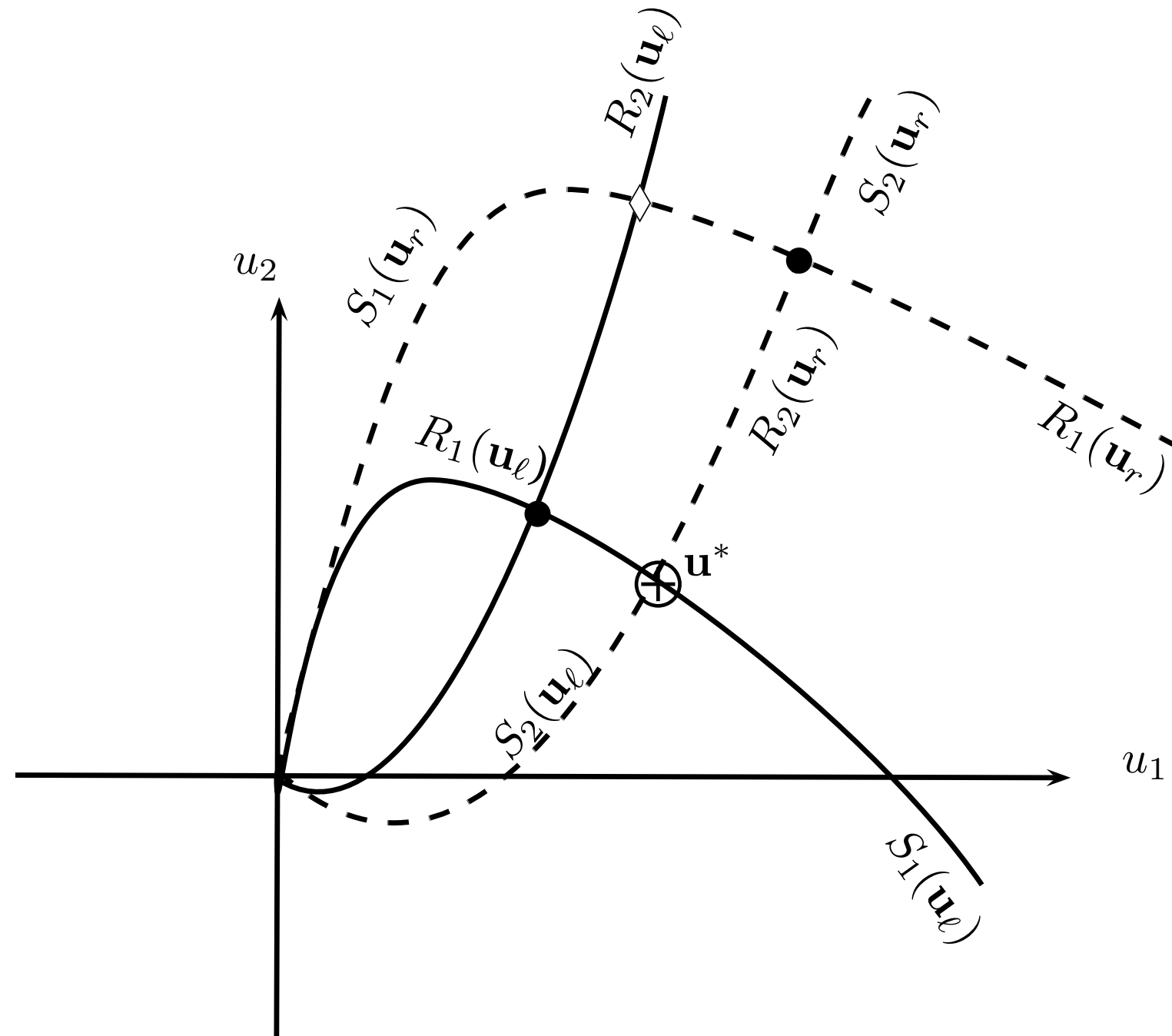
$$x > 0, h(x,0) = h_0.$$

Rupture de barrage sur lit mouillé (2)



Solution numérique

Rupture de barrage sur lit mouillé (3)



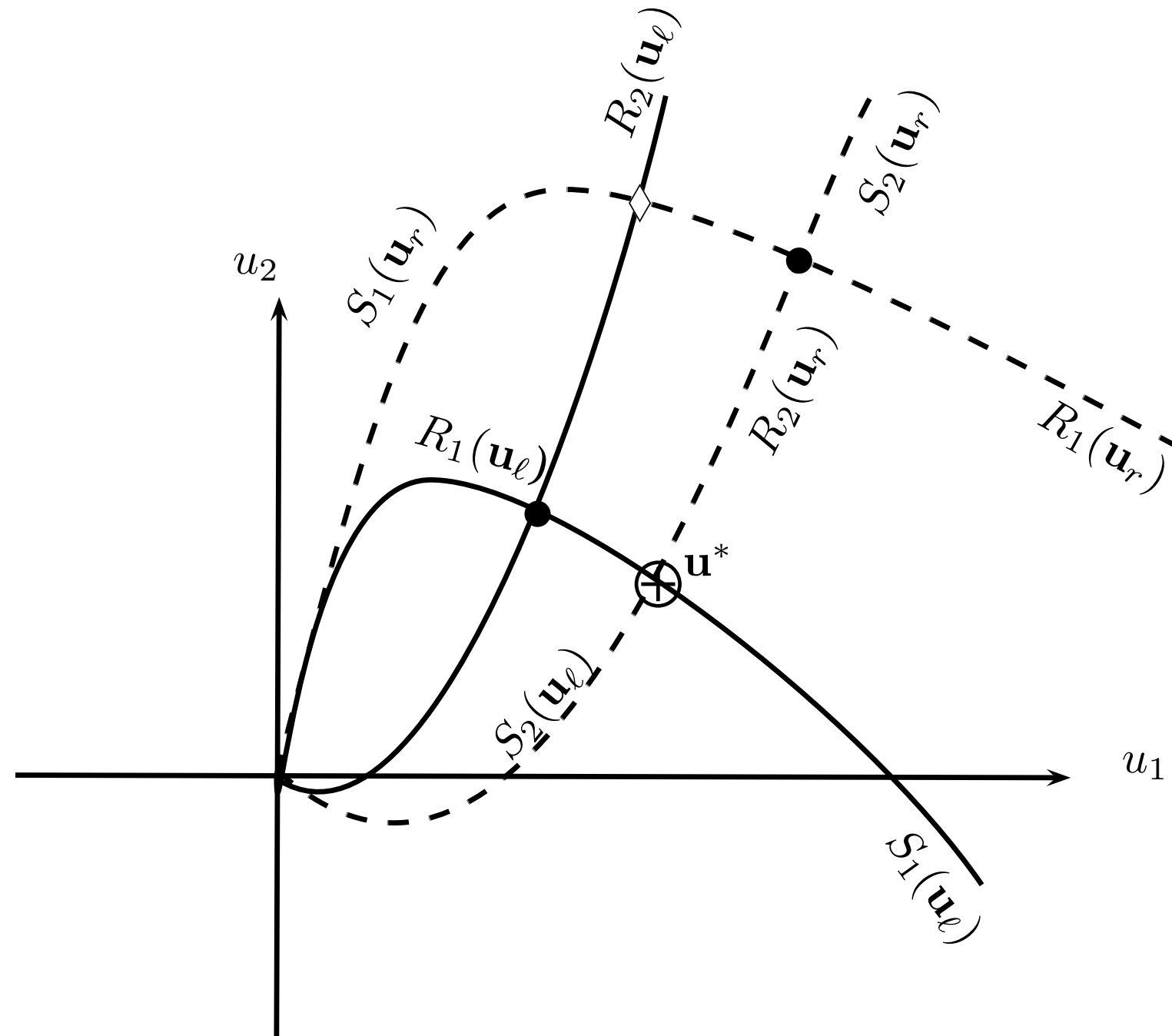
Problème général de Riemann pour une équation de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$$

Si on considère l'espace des états initiaux (u_1, u_2) , on peut se dire que la solution à l'EDP est soit une onde de choc, soit une onde de détente, soit une combinaison des deux.

L'idée de base est de rechercher le chemin qui permet de l'état à gauche $\mathbf{u}_l = (u_{1l}, u_{2l})$ à l'état à droite $\mathbf{u}_r = (u_{1r}, u_{2r})$ en suivant un réseau de courbes de détente ou de choc.

Rupture de barrage sur lit mouillé (4)



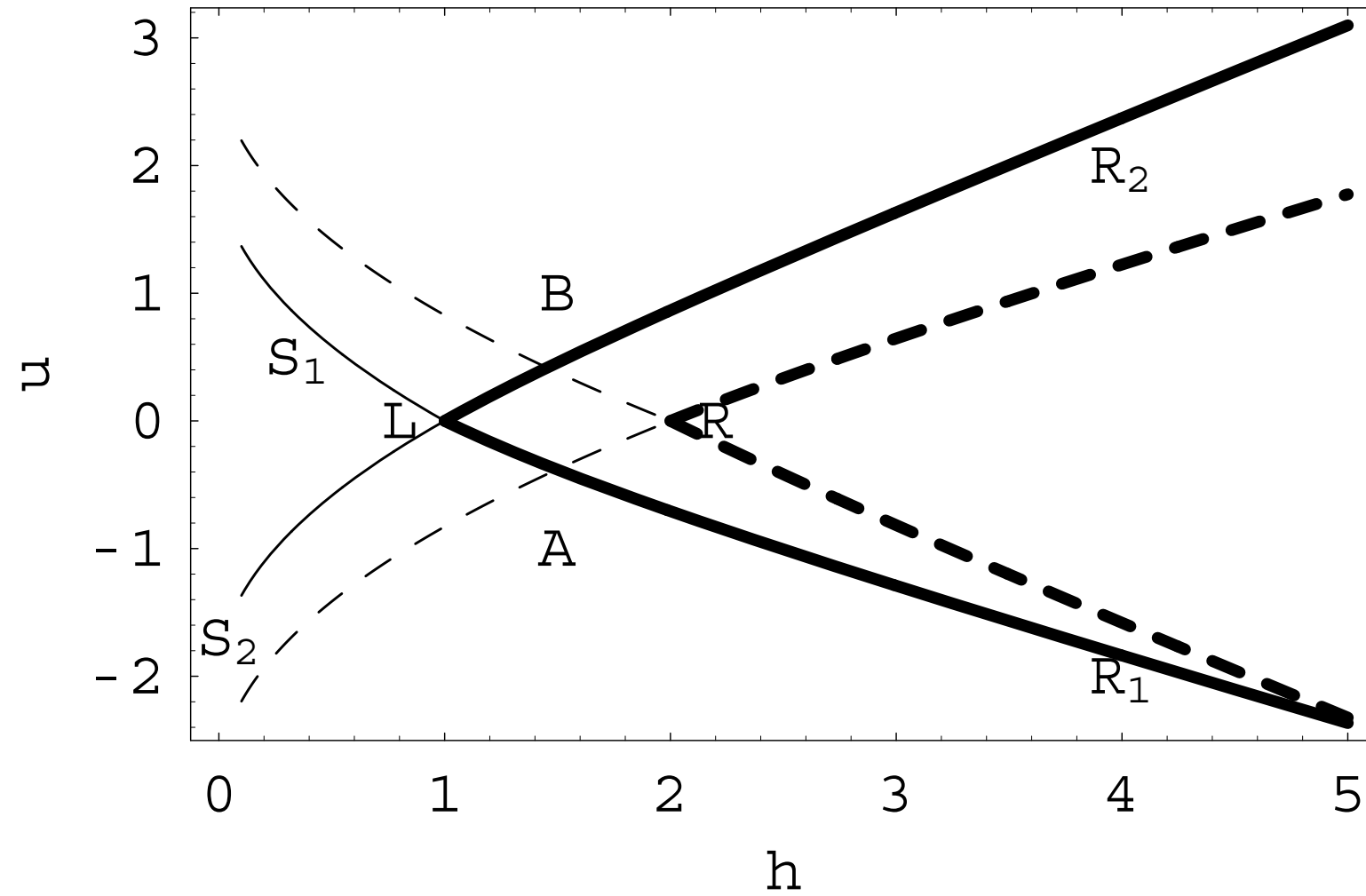
Stratégie. Problème général de Riemann pour une équation de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$$

Si on considère l'espace des états initiaux (u_1, u_2) , on peut se dire que la solution à l'EDP est soit une onde de choc, soit une onde de détente, soit une combinaison des deux.

L'idée de base est de rechercher le chemin qui permet de l'état à gauche $\mathbf{u}_\ell = (u_{1l}, u_{2l})$ à l'état à droite $\mathbf{u}_r = (u_{1r}, u_{2r})$ en suivant un réseau de courbes de détente ou de choc.

Rupture de barrage sur lit mouillé (5)



Courbes de choc S . L'équation de Rankine Hugoniot permet de déterminer l'état (u, h) à partir de l'état (u_*, h_*) :

$$u = u_* \pm (h - h_*) \sqrt{\frac{gh_* + h}{2 h_* h}},$$

et la vitesse de l'onde de choc est donnée par :

$$\dot{s} = u_* \pm \sqrt{\frac{g}{2}(h_* + h) \frac{h_*}{h}}.$$

Courbes de détente R . Les courbes de détente sont données par le lieu décrit par les points (u, h) à partir de l'état (u_*, h_*) :

$$r_i = u \pm 2\sqrt{gh} = u_* \pm 2\sqrt{gh_*}$$

Rupture de barrage sur lit mouillé (6)



La méthode de construction consiste à introduire un état intermédiaire u_* . L'état (h_*, u_*) peut être relié à un état à gauche (h_L, u_L) par une 1-onde :

$$u_* = \begin{cases} S_1(h_* | h_L, u_L) = u_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh_*} & \text{si } h_* < h_L \text{ 1-onde de détente} \\ R_1(h_* | h_L, u_L) = u_L - (h_* - h_L) \sqrt{g \frac{h_* + h_L}{2h_* h_L}} & \text{si } h_* > h_L \text{ 1-onde de choc} \end{cases}$$

Il peut également être relié à l'état à droite (h_R, u_R) par une 2-onde :

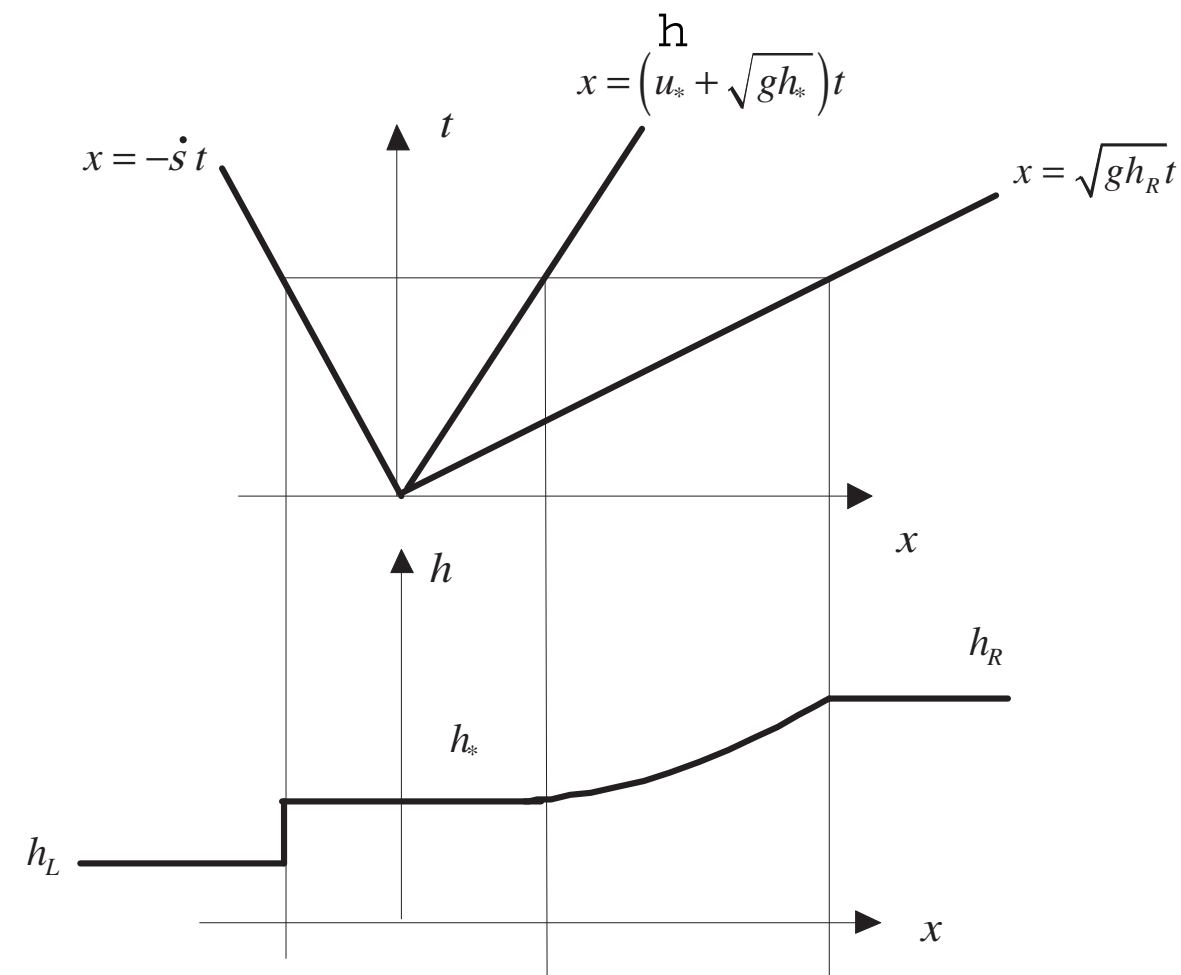
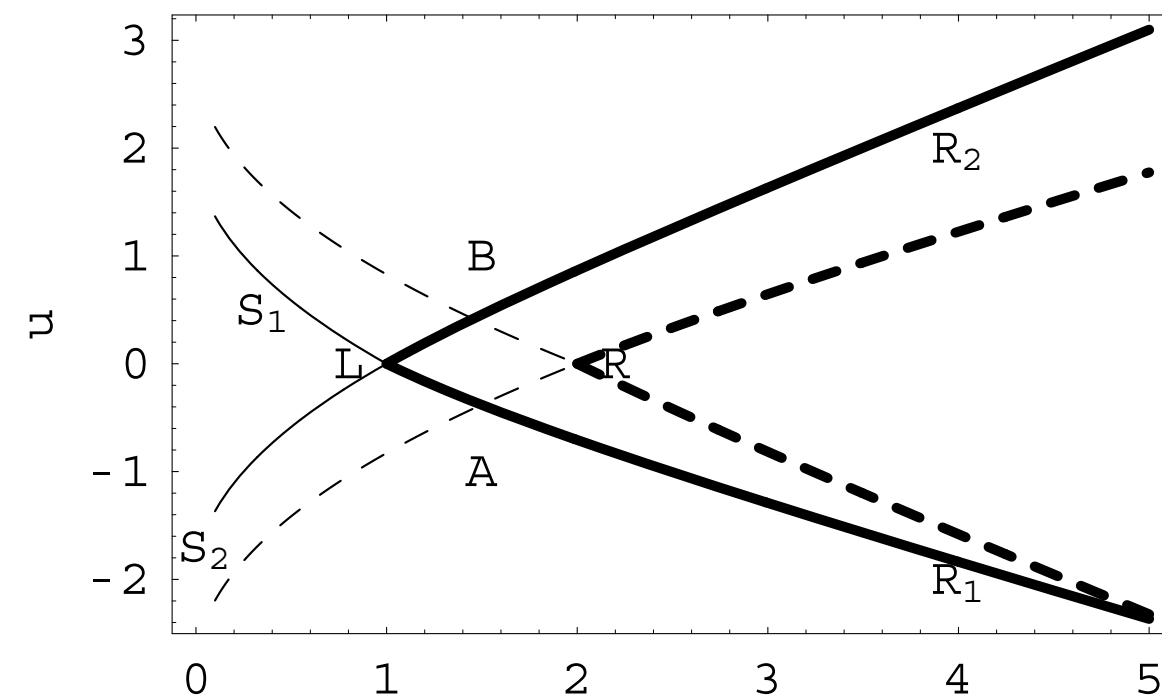
$$u_* = \begin{cases} S_2(h_* | h_R, u_R) = u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\sqrt{gh_*} & \text{si } h_* < h_R \text{ 2-onde de détente} \\ R_2(h_* | h_R, u_R) = u_R + (h_* - h_R) \sqrt{g \frac{h_* + h_R}{2h_* h_R}} & \text{si } h_* > h_R \text{ 2-onde de choc} \end{cases}$$

On commence par cet ordre (1-onde puis 2-onde) car l'information à gauche correspond à celle qui se propage le plus lentement. Par ailleurs, un état intermédiaire n'est possible que si :

$$u_R - u_L < 2(\sqrt{gh_R} + \sqrt{gh_L}).$$

Rupture de barrage sur lit mouillé (7)

Résolution du problème de Riemann pour
 $(h_L, u_L) = (1, 0)$ et $(h_R, u_R) = (2, 0)$



Exemple. Considérons les états initiaux suivants :
 $(h_L, u_L) = (1, 0)$ et $(h_R, u_R) = (2, 0)$. Deux états
 intermédiaires sont possibles : le point A ou B . On voit que le
 point A est sur une 1-onde alors que B est sur une 2-onde
 (émanant de L). Cela veut donc dire que le chemin $L \rightarrow A$ est
 une 1-onde de choc alors que le chemin $A \rightarrow R$ est une
 2-onde de détente.

Effet du frottement, de la pente, du volume fini



Solution numérique (Clawpack) :

- pente 5 %
- hauteur 15 m
- frottement de type Manning–Strickler $K = 40 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$