A scenic landscape featuring a calm river in the foreground, reflecting the surrounding greenery. A large, leafy tree stands on the left bank, its reflection clearly visible in the water. In the background, a lush green hillside rises, dotted with trees and a few buildings. The sky is a clear, bright blue.

Christophe ANCEY

# Hydraulique à surface libre

**Crues, vagues, et ruptures de barrage**  
Phénomènes de propagation, outils de  
simulations, applications

C. ANCEY,  
EPFL, ENAC/IIC/LHE,  
Ecublens, CH-1015 Lausanne, Suisse  
christophe.ancey@epfl.ch, lhe.epfl.ch



Hydraulique à surface libre / C. ANCEY  
version 19.1 du 17 janvier 2025, Lausanne



Attribution: pas d'utilisation commerciale, pas de modification, 3.0.  
[Licence Creative Common 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/). Ce travail est soumis aux droits d'auteurs. Tous les droits sont réservés ; toute copie, partielle ou complète, doit faire l'objet d'une autorisation de l'auteur. La gestion typographique a été réalisée à l'aide du package *efrench* de Bernard GAULLE. Les clichés sont de Christophe Ancey sauf mention contraire.

**Crédit des illustrations. Première de couverture :** l'Orbe à Orbe (VD). **Table des matières :** Joseph Turner, *Négriers jetant par-dessus bord les morts et les mourants - un typhon approche* (Tate gallery, Londres); Joseph Turner, *tempête de neige dans le val d'Aoste* (Chicago Art Institute). Alexandre Calame, *vue sur le Lac Lemman, 1849* (Villa Vauban, Musée d'art de la ville de Luxembourg). **Chapitre 1 :** Alexandre Calame, *torrent de montagne par orage* (collection privée). **Chapitre 2 :** François Diday, *Rosenlaur bei Meiringen* (collection privée). **Chapitre 3 :** *le déluge asiatique* par Riou dans « La terre avant le déluge » (Louis Figuier, Hachette, Paris 1863). **Chapitre 4 :** Katsushika Hokusai *la grande vague de Kanagawa* (musée Marmottan, Paris). **Bibliographie :** Claude Monet, *impression de soleil couchant* (musée Marmottan, Paris). **Index :** Philip James de Louthembourg, *Une Avalanche dans les Alpes, 1803* (Tate gallery, Londres).



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>1 Équations de base en hydraulique</b>	<b>1</b>
1.1 Courbes de remous à partir de l'équation de Bernoulli . . . . .	1
1.1.1 Charge hydraulique . . . . .	1
1.1.2 Équation de la courbe de remous . . . . .	2
1.1.3 Hauteur critique et régimes associés . . . . .	3
1.1.4 Singularités . . . . .	4
1.2 Équations de Saint Venant . . . . .	14
1.2.1 Obtention des équations . . . . .	14
1.2.2 Forme conservative et non conservative . . . . .	18
1.2.3 Synthèse . . . . .	19
1.2.4 Généralisation des équations de Saint-Venant . . . . .	20
1.2.5 Forme tensorielle et structure des équations . . . . .	23
1.2.6 Ressaut hydraulique mobile . . . . .	27
1.2.7 Application: courbe de remous . . . . .	29
1.3 Limites d'utilisation des équations de Saint-Venant . . . . .	30
1.3.1 Singularité hydraulique . . . . .	31
1.3.2 Courants secondaires . . . . .	35
1.3.3 Interactions morphodynamiques . . . . .	36
1.4 Résistance à l'écoulement . . . . .	42
1.4.1 Mécanismes généraux de dissipation d'énergie . . . . .	42
1.4.2 Loi de Darcy–Weisbach . . . . .	44
1.4.3 Loi de Chézy . . . . .	45
1.4.4 Loi de Manning–Strickler . . . . .	45
1.4.5 Lois de Keulegan et formes similaires . . . . .	48
1.4.6 Loi de Ferguson . . . . .	57
1.4.7 Loi de Rickenmann–Recking . . . . .	58
1.4.8 Loi de Ferro . . . . .	61

1.4.9	Modèles de turbulence et loi parabolique . . . . .	65
1.5	Facteurs de correction des formules de frottement . . . . .	72
1.5.1	Typologie des structures morphologiques . . . . .	72
1.5.2	Effet des structures morphologiques sur l'écoulement . . . . .	76
1.5.3	Lits mineur et majeur . . . . .	78
1.5.4	Définition des variables d'écoulement pour les lits rugueux . . . . .	83
1.5.5	Correction des effets de paroi . . . . .	85
1.5.6	Exemple d'application . . . . .	87
1.5.7	Correction des effets des structures morphologiques . . . . .	91
1.5.8	Exemple des dunes . . . . .	93
1.5.9	Modification due au transport solide . . . . .	101
1.5.10	Cas particulier des rivières de montagne et à forte pente . . . . .	109
1.6	Autres équations utiles en hydraulique . . . . .	119
1.6.1	Équation d'advection (ou de convection) . . . . .	119
1.6.2	Équation d'advection : formation de chocs . . . . .	124
1.6.3	Équation de Burgers . . . . .	127
1.6.4	Équation de diffusion . . . . .	130
1.6.5	Équation d'advection-diffusion . . . . .	133
1.6.6	Équation des ondes . . . . .	136
1.6.7	Processus à l'équilibre : équation de Laplace . . . . .	139
<b>2</b>	<b>Ondes de crue et inondations</b>	<b>141</b>
2.1	Phénomènes physiques . . . . .	141
2.1.1	Inondation et crue . . . . .	141
2.1.2	Domages causés par les inondations . . . . .	147
2.1.3	Crues torrentielles . . . . .	149
2.2	Origine des crues . . . . .	152
2.3	Définition de la période de retour : du problème au calcul mathématique	158
2.3.1	Problématique . . . . .	158
2.3.2	Théorie des valeurs extrêmes . . . . .	160
2.3.3	Définition de la période de retour . . . . .	163
2.3.4	Cas des barrages . . . . .	165
2.4	Estimation du débit par corrélation . . . . .	165
2.4.1	Méthode Crupédix . . . . .	165
2.4.2	Courbe enveloppe . . . . .	166
2.5	Estimation du débit par la méthode du gradex . . . . .	169
2.5.1	Méthode du gradex . . . . .	169
2.5.2	Méthode QdF . . . . .	171
2.6	Estimation du débit par des méthodes de transformation pluie-débit . . . . .	176
2.6.1	Méthode rationnelle . . . . .	177
2.6.2	Méthode SCS . . . . .	179
2.6.3	Méthode Socose . . . . .	182
2.6.4	Modèle réservoir GR4 . . . . .	185

2.7	Calcul de la propagation d'une onde de crue . . . . .	191
2.7.1	Onde cinématique . . . . .	192
2.7.2	Exemple de résolution . . . . .	194
2.7.3	Onde diffusive . . . . .	201
<b>3</b>	<b>Rupture de barrage</b>	<b>203</b>
3.1	Rupture de barrage et phénomènes similaires . . . . .	203
3.1.1	Rupture de grand barrage . . . . .	205
3.1.2	Rupture de petit barrage d'accumulation . . . . .	215
3.1.3	Rupture de lac morainique et glaciaire . . . . .	216
3.1.4	Rupture de digue . . . . .	219
3.1.5	Rupture de terrils et bassins de décantation . . . . .	220
3.2	Rupture de barrage en ingénierie des risques . . . . .	227
3.2.1	Bases réglementaires . . . . .	227
3.2.2	Cas des petites retenues d'accumulation . . . . .	228
3.2.3	Plan des études en ingénierie . . . . .	230
3.2.4	Charges exceptionnelles . . . . .	230
3.3	Mécanismes de rupture et hydrogramme initial . . . . .	232
3.3.1	Barrage en béton . . . . .	233
3.3.2	Barrage en remblai . . . . .	233
3.3.3	Barrage naturel en remblai . . . . .	240
3.3.4	Barrage glaciaire . . . . .	243
3.4	Rupture de barrage en régime laminaire . . . . .	245
3.4.1	Équations du mouvement . . . . .	245
3.4.2	Problème de Riemann: définition . . . . .	246
3.4.3	Problème de Riemann: solution . . . . .	248
3.4.4	Résolution des équations de Huppert . . . . .	250
3.5	Rupture de barrage d'un fluide non visqueux . . . . .	254
3.5.1	Rupture de barrage d'un volume infini (solution de Ritter) . . . . .	254
3.6	Rupture de barrage dans un lit mouillé . . . . .	261
3.7	Effet du frottement . . . . .	265
3.7.1	Méthode de Whitham: rupture de barrage sur fond plat . . . . .	266
<b>4</b>	<b>Vagues</b>	<b>271</b>
4.1	Phénomènes physiques . . . . .	271
4.2	Équations de Saint-Venant et ondes dynamiques . . . . .	281
4.3	Modèle d'Airy . . . . .	282
4.3.1	Équations d'Airy . . . . .	282
4.3.2	Relation de dispersion . . . . .	284
4.3.3	Vitesse de groupe et propagation d'énergie . . . . .	287
4.4	Vague . . . . .	290
4.4.1	Classification . . . . .	290
4.4.2	Ondes linéaires . . . . .	293

vi Table des matières

4.4.3	Ondes de Stokes . . . . .	294
4.4.4	Ondes cnoïdales . . . . .	295
4.4.5	Ondes solitaires . . . . .	297
4.5	Tsunami . . . . .	299
4.5.1	Introduction . . . . .	299
4.5.2	Modèle approximatif de tsunami arrivant de haute mer . . . . .	302
4.6	Vague d'impulsion . . . . .	305
4.6.1	Les premières tentatives d'adimensionalisation . . . . .	306
4.6.2	La contribution du VAW (ETHZ) . . . . .	307
4.6.3	Le problème des avalanches . . . . .	311
4.6.4	Autres paramètres . . . . .	313
4.6.5	Les autres approches . . . . .	316
4.7	Mascaret . . . . .	318
4.7.1	Phénomène physique . . . . .	318
4.7.2	Ressaut mobile . . . . .	320
4.8	Houle et vagues dues au vent . . . . .	324
4.9	Trains d'onde . . . . .	329
4.9.1	Problématique . . . . .	329
4.9.2	Stabilité linéaire des équations de Saint-Venant . . . . .	330
	<b>Bibliographie</b>	<b>343</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>343</b>



# Avant-propos



CE RECUEIL DE NOTES contient les principales notions du cours d'hydraulique avancé. L'objet est ici de fournir les bases mathématiques et les concepts physiques permettant de faire des calculs d'écoulements fortement instationnaires dans les rivières. Les notions essentielles des méthodes numériques sont également vues.

J'utilise la notation tensorielle classique : les vecteurs, matrices et tenseurs sont indiqués par des symboles en caractères gras. J'utilise aussi l'opérateur  $\cdot$  pour désigner le produit une fois contracté et  $:$  pour désigner le produit doublement contracté. Les variables sont en italique. Les fonctions, opérateurs, et nombres sans dimension sont en roman. Les variables aléatoires sont en majuscules, et leurs quantiles en minuscules.

Avec cette notation, nous introduisons les opérations suivantes entre les tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  dont la représentation matricielle est  $A_{ij}$  ( $i$  ligne,  $j$  indice colonne) et  $B_{ij}$ , respectivement  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  deux vecteurs de coordonnées  $v_i$  et  $w_i$  dans une base donnée :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ji}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum_j A_{ij} v_j$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \sum_i w_i v_i$$

J'emploie les notations usuelles modernes :

- le symbole  $O$  ( $O$  majuscule) signifie généralement « est de l'ordre de ». En fait, la définition est plus précise et dans certains cas peut ne signifier pas l'équivalence

des ordres de grandeurs. Lorsque par exemple on a  $u = O(v)$  avec  $u(x)$  et  $v(x)$  deux fonctions continues dans le voisinage d'un point  $M$ , alors cela veut dire que la limite  $\lim_{x \rightarrow M} u/v$  est finie (elle n'est ni nulle ni infinie);

- le symbole  $o$  (o minuscule) signifie « est négligeable devant »;
- je n'emploie pas la notation  $D/Dt$  pour désigner la dérivée particulaire, mais  $d/dt$  (qu'il ne faudra donc pas confondre avec la différentielle ordinaire selon  $t$ ). Je considère que le contexte est suffisant pour renseigner sur le sens de la différentielle et préfère garder le symbole  $D/Dt$  pour d'autres opérations différentielles plus complexes;
- le symbole  $\propto$  veut dire « proportionnel à »;
- le symbole  $\sim$  ou  $\approx$  veut dire « à peu près égal à »;
- les unités employées sont celles du système international: mètre [m] pour les longueurs, seconde [s] pour le temps, et kilogramme [kg] pour la masse. Les unités sont précisées entre crochets;
- pour les logarithmes, je distingue le logarithme népérien  $\ln$  et le logarithme en base 10  $\log$ ;
- pour la transposée d'une matrice ou d'un vecteur, j'emploie le symbole  $\dagger$  en exposant:  $\mathbf{A}^\dagger$  veut dire « transposée de  $\mathbf{A}$  ».

J'utilise également quelques conventions typographiques :

- les exemples sont le plus souvent introduits à l'aide de « ♣ **Exemple.** – » et on indique la fin d'un exemple par le symbole « qed »  $\square$ ;
- les problèmes d'interprétation sont indiqués par le symbole  $\diamond$  dans la marge;
- les notions qui nécessitent des compléments mathématiques sont annoncées à l'aide de la tête de Homer , un hommage aux Simpson;
- les notions qui dépassent le cadre de ce cours et qui ne sont données qu'à titre d'exemple sont signalées par le symbole  $\star$  dans le titre;

Je remercie les relecteurs suivants : Viljami LAURMAA, Pascal VENETZ, et Axel GIBOULOT. La gestion typographique du français a été réalisée avec  $\LaTeX$  à l'aide du package *french.sty* de Bernard Gaulle. Je remercie Valentin Heller (Imperial College, Londres) et Frederic Evers (ETHZ/VAW, Zurich) pour le partage de leurs données. Les notices biographiques qui accompagnent le texte ont été le plus souvent tirées des trois livres de Willi Hager sur les grands hydrauliciens (Hager, 2009, 2015).

Les notes de cours sont accompagnées de cahiers jupyter qui fournissent des exemples de résolution numérique des équations de Saint-Venant à l'aide de la méthode aux volumes finis implémentée dans la bibliothèque Clawpack (LeVeque, 2002; Ketcheson *et al.*, 2020). Un tutoriel consacré à Clawpack (en anglais) est disponible depuis :

[en.ancey.ch/cours/doctorat/tutorial\\_clawpack.pdf](http://en.ancey.ch/cours/doctorat/tutorial_clawpack.pdf)

Les cahiers jupyter sont disponibles depuis github :

[//github.com/cancey/hydraulics](https://github.com/cancey/hydraulics)



## Nomenclature

### *Symboles romans*

---

Variable	Signification
$a$	rayon d'une particule
$B$	largeur au miroir
$C$	coefficient de Chézy
$C_f$	coefficient de frottement
$c$	célérité des ondes
$D$	tenseur des taux de déformation
$f$	coefficient de frottement (Darcy-Weisbach)
$g$	accélération de la gravité
$h$	hauteur d'écoulement
$h_c$	hauteur critique
$h_n$	hauteur normale
$\mathbf{k}$	vecteur normal unitaire
$k_s$	rugosité
$K$	coefficient de Manning-Strickler
$\ell$	échelle de longueur
$l$	largeur
$L_*$	longueur caractéristique
$\mathbf{n}$	vecteur normal unitaire
$p$	pression
$P_*$	échelle de pression
$Q$	débit
$q$	débit par unité de largeur
$R$	rayon de courbure
$R_h$	rayon hydraulique

Variable	Signification
$Re$	nombre de Reynolds
$S$	section d'écoulement
$\mathbf{T}$	tenseur des extra-contraintes (appelé encore partie déviatorique)
$t$	temps
$u$	vitesse, composante de la vitesse dans la direction $x$
$u_*$	vitesse de glissement, vitesse de cisaillement
$\bar{u}$	vitesse moyennée selon la hauteur d'écoulement
$\langle u \rangle$	vitesse moyennée dans le temps
$\mathbf{u}$	vitesse
$\mathbf{u}'$	fluctuation de vitesse
$U_*$	échelle de vitesse
$v$	vitesse, composante de la vitesse dans la direction $y$
$\bar{v}$	vitesse quadratique moyenne
$\mathbf{v}$	vitesse
$\mathcal{V}$	volume de contrôle

## *Symboles grecs*

Variable	Signification
$\chi$	périmètre mouillé
$\delta$	fonction de Dirac
$\delta$	petite variation
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement
$\epsilon$	rapport d'aspect
$\kappa$	constante de von Kármán
$\mu$	viscosité dynamique
$\rho$	masse volumique
$\sigma$	contrainte
$\sigma$	contrainte normale
$\theta$	angle de pente
$\tau$	contrainte de cisaillement
$\tau_p$	contrainte de cisaillement à la paroi
$\xi$	variable de similitude



# Équations de base en hydraulique

**L**ES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT <sup>1</sup> sont une forme intégrée (intégration selon la hauteur) des équations de Navier–Stokes. Elles permettent de calculer les hauteurs d'eau et vitesses moyennes le long de la direction d'écoulement en fonction du temps. Elles ne sont applicables qu'en régime graduellement varié.

Dans ce chapitre, on va voir comment on peut obtenir les équations de Saint-Venant en intégrant les équations de Navier–Stokes. Avant cela, on va rappeler quelques notions fondamentales d'hydraulique vues durant le [cours de bachelor](#) « une introduction à la mécanique des fluides » (voir chap. 5 du cours de bachelor).

## 1.1 Courbes de remous à partir de l'équation de Bernoulli

### 1.1.1 Charge hydraulique

On a vu dans le cours de mécanique des fluides (bachelor GC) que l'énergie totale  $E$  se conserve le long d'une ligne de courant pour un écoulement en régime permanent

---

1. Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1886) était un mécanicien français. Polytechnicien de formation, il étudia aussi à l'École Nationale des Ponts et Chaussée, où il fit l'essentiel de sa carrière. Ses travaux de recherche ont couvert un champ considérable de domaines scientifiques et d'application: hydraulique maritime, navigation le long des canaux et sur route, élasticité, théorie des fluides visqueux, turbulence et perte de charge dans les conduites. Avant Reynolds, il avait pressenti l'importance de la turbulence dans le calcul des pertes de charge. En 1871, il proposa un jeu d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement unidimensionnel d'une onde de crue.

## 2 Chapitre 1 Équations de base en hydraulique

lorsqu'on peut négliger la dissipation d'énergie. Cette énergie s'écrit

$$E = p + \psi + k,$$

avec  $p = \rho gh$  la pression,  $\psi = \rho gz$  ( $z$  cote du lit) le potentiel gravitaire, et  $k = \frac{1}{2}\rho\bar{u}^2$  l'énergie cinétique ( $\bar{u}$  vitesse moyennée le long de la hauteur);  $\rho$  masse volumique de l'eau et  $h$  hauteur d'eau.

En hydraulique à surface libre, il est d'usage d'écrire cette énergie sous forme de charge hydraulique, c'est-à-dire en équivalent de hauteur de colonne d'eau :

$$H = \frac{E}{\rho g} = h + z + \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

Sur de courtes distances, l'énergie se conserve ( $H = cst$ ), mais sur de longues distances, il y a une *perte de charge* due au frottement sur le lit, qui se traduit par une diminution localement faible, mais régulière de la charge le long de l'axe  $Ox$ . On définit la *pente de frottement*  $j$  :

$$j = -\frac{dH}{dx},$$

qui traduit cette petite perte de charge  $dH$  sur une distance  $dx$ .

### 1.1.2 Équation de la courbe de remous

On considère un écoulement unidirectionnel le long d'un lit de cote  $z(x)$ , dont la pente locale est  $i = -z'(x)$ . Cette pente définie par rapport à l'axe horizontal  $Ox$  est faible. Elle varie très faiblement le long de  $x$ .

On pose les hypothèses suivantes :

- (H1) le régime est *graduellement varié* (ce qui veut dire que la pente de la surface libre  $h'(x)$  est faible et proche de  $i$ );
- (H2) la dissipation d'énergie (par frottement le long du lit) se fait de façon continue. Autrement dit, sur une distance  $dx$ , la dissipation d'énergie est  $dH$ . Il n'y a pas de perte de charge singulière;
- (H3) le régime d'écoulement permanent :  $q = h\bar{u} = cst$  où  $q$  est débit le par unité de largeur,  $h(x)$  est la hauteur d'eau, et  $\bar{u}(x)$  est la vitesse moyenne de l'eau (dans ce chapitre, « vitesse moyenne » se comprend comme la vitesse moyennée selon la hauteur d'écoulement);
- (H4) le canal est infiniment large (on ne soucie donc pas de la section en travers).

Différentions la charge hydraulique  $H(x)$  par rapport à  $x$  :

$$dH = -jdx = dh + dz + \frac{d(\bar{u}^2)}{2g},$$

or comme  $\bar{u} = q/h$  et  $dz = -i dx$ , on a aussi :

$$dH = -j dx = dh - i dx - \frac{q^2}{gh^3} dh,$$

soit encore :

$$i - j = \frac{dh}{dx} \left( 1 - \frac{q^2}{gh^3} \right).$$

En définissant le nombre de Froude pour un canal infiniment large :

$$\text{Fr} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{q}{\sqrt{gh^3}},$$

on obtient l'équation différentielle dite *équation de la courbe de remous* :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - j}{1 - \text{Fr}^2}. \quad (1.1)$$

Quelques remarques :

- c'est une équation différentielle non linéaire du 1<sup>er</sup> ordre, qui nécessite une seule condition aux limites (amont ou aval) ;
- pour un écoulement subcritique ( $\text{Fr} < 1$ ), la condition aux limites doit être posée à l'aval ;
- pour un écoulement supercritique ( $\text{Fr} > 1$ ), la condition aux limites doit être posée à l'amont ;
- il faut fermer l'équation (1.1) en fournissant une loi de résistance pour la pente de frottement  $j$  ;
- un régime permanent uniforme (caractérisé par  $h'(x) = 0$ ) est atteint lorsque  $j = i$ . La hauteur atteinte durant le régime permanent uniforme est appelée *hauteur normale*  $h_n$  ;
- l'équation (1.1) admet une singularité quand  $\text{Fr} \rightarrow 1$  (le régime est dit alors *régime rapidement varié*) ;
- la hauteur croît ou décroît selon le signe respectif du numérateur et du dénominateur dans l'équation différentielle (1.1) ;
- la singularité correspond à la *hauteur critique*  $h_c$  atteinte lorsque  $\text{Fr} = 1$ .

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (1.2)$$

### 1.1.3 Hauteur critique et régimes associés

Si le nombre de Froude prenait la valeur 1 dans l'équation (1.1), le dénominateur serait nul et en ce point la dérivée deviendrait infinie, ce qui est physiquement impos-

sible et cela violerait l'hypothèse de régime graduellement varié. En fait au voisinage de ce point, il se forme

- soit une discontinuité de la surface libre appelée *ressaut* qu'il faut étudier avec des outils spécifiques (cf. § 1.1.4) lorsqu'on passe d'un régime super- à subcritique ;
- soit une « chute » d'eau, c'est-à-dire une accélération brutale et un raidissement de la surface libre (passage d'un seuil par exemple, avec transition d'un régime sub- à supercritique).

La hauteur critique permet de distinguer deux régimes aux comportements différents :

- régime *subcritique* (ou fluvial)  $Fr < 1$  ;
- régime *supercritique* (ou torrentiel)  $Fr > 1$ .

Pour un canal infiniment large ou bien un canal rectangulaire, la hauteur critique est donnée par l'équation (1.2). Pour un canal quelconque, la hauteur critique est définie comme la hauteur pour laquelle  $Fr(h_c) = 1$ , on tire que :

$$h_c = \left( \frac{1}{g \cos \theta} \frac{Q^2}{B^2} \right)^{1/3},$$

avec  $Q$  le débit total et  $B$  la largeur au miroir. Le hauteur critique ne dépend que peu de la pente (car au premier ordre en  $\theta$ ,  $\cos \theta = 1$ ) et de façon peu marquée du débit liquide (puisque  $h_c \propto Q^{2/3}$ ).

### 1.1.4 Singularités

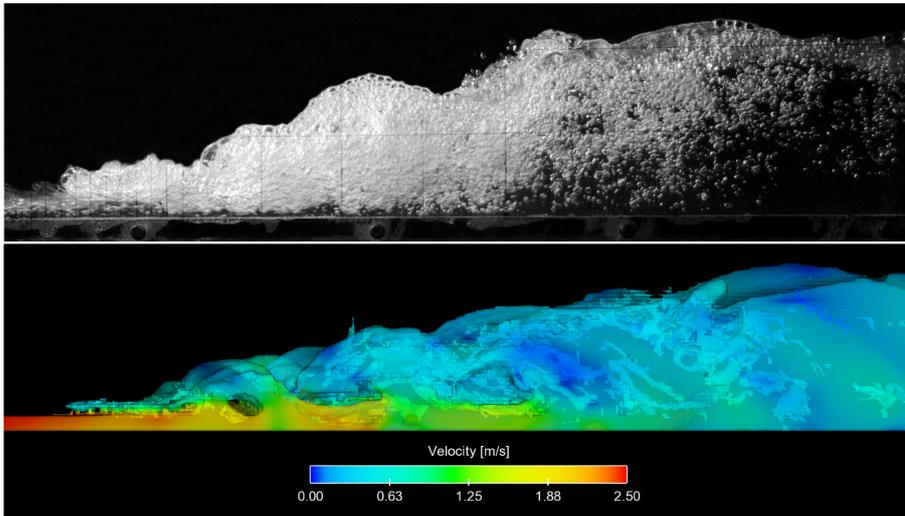
#### Ressaut hydraulique stationnaire

Au niveau d'un ressaut, la courbure de la ligne d'eau est importante et il se produit une intense recirculation (vorticité importante). On ne peut alors plus utiliser l'équation de la courbe de remous (1.1) puisque la hauteur critique est franchie<sup>2</sup> La figure 1.1 montre un exemple en laboratoire (ainsi qu'une simulation numérique) qui met en évidence l'augmentation de hauteur sur une courte distance accompagnée par une vorticité importante (qui se traduit ici par une incorporation d'air).

Une façon d'attaquer le problème est d'utiliser le théorème de conservation de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle qui entoure le ressaut (sur un volume de contrôle). On verra plus loin que cette approche peut être généralisée ; ce sera

---

2. On verra plus loin que deux des hypothèses (les hypothèses H4 et H5) qui seront utilisées pour dériver les équations de Saint-Venant au § 1.2.1 cessent également d'être valables. Donc les équations de Saint-Venant ne permettent pas ici de faire mieux que l'équation de la courbe de remous, mais on verra que le traitement des singularités se fait de façon plus simple avec les équations de Saint-Venant.



**Figure 1.1** – Ressaut hydraulique ( $Fr_1 \approx 6$ ). L'écoulement va de la gauche vers la droite. En haut : vue de côté d'un canal expérimental ; en bas : simulation numérique. (Viti *et al.*, 2018).

l'équation de Rankine–Hugoniot<sup>3</sup>-Hugoniot<sup>4</sup> qui permet à la fois de traiter le cas du ressaut stationnaire et celui du ressaut mobile (voir § 1.2.6). On considère un volume de contrôle (par unité de largeur) dont les frontières sont situées de part et d'autre du ressaut. Notons que l'écoulement va de la gauche vers la droite et il faut se souvenir que dans ce sens d'écoulement, un ressaut provoque toujours une augmentation de hauteur, jamais une diminution (en effet le ressaut est associé à une dissipation d'énergie, donc à un ralentissement de l'écoulement). La tranche amont (resp. aval) est référencée par l'indice 1 (resp. 2). La longueur du volume de contrôle est  $L$ .

On fait les hypothèses suivantes (voir figure 1.2) :

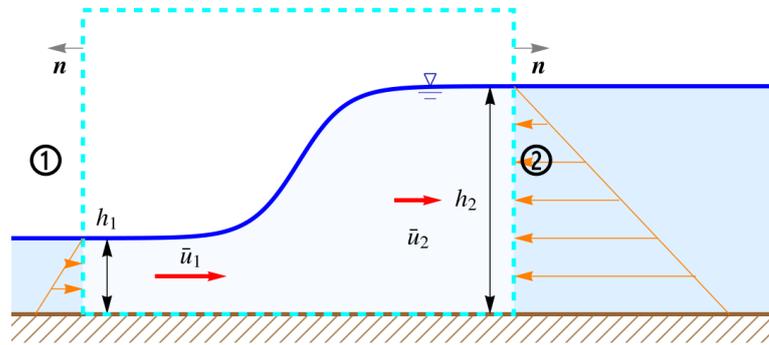
- (H1) l'écoulement est permanent. Le débit par unité de largeur se conserve donc, et il vaut  $q$  ;
- (H2) l'écoulement est unidirectionnel ;

3. William John Macquorn Rankine (1820–1872) était un physicien écossais. Avec le physicien allemand Rudolf Clausius et son compatriote William Thomson (lord Kelvin), il est à l'origine de la thermodynamique moderne. Rankine s'intéressa plus particulièrement aux applications de cette théorie pour concevoir des machines à vapeur. Homme curieux, il s'intéressa également à des domaines aussi variés que la botanique, la théorie de la musique, les mathématiques, la fatigue des métaux, et la mécanique des sols. Sa publication scientifique a été extrêmement importante.

4. Pierre-Henri Hugoniot (1851–1887) était un autodidacte féru de mathématiques et de mécanique des fluides. Il s'est spécialement intéressé aux problèmes d'onde de choc dans les gaz.

6 Chapitre 1 Équations de base en hydraulique

- (H3) le ressaut est immobile (sa vitesse de déplacement est nulle);
- (H4) la distribution de pression est hydrostatique loin du ressaut :  $p = \rho g(h - y)$ ;
- (H5) le profil de vitesse est uniforme loin du ressaut;
- (H6) le fond est peu rugueux, et donc en première approximation on peut négliger le frottement sur le fond par rapport aux pertes de charge singulières (dus à la vorticité);
- (H7) la pente du lit est faible.



**Figure 1.2** – Schématisation d'un ressaut. Pour étudier le ressaut hydraulique, on considère un volume de contrôle (cadre tireté de couleur cyan). Sur ce volume de contrôle, on fait un bilan de quantité de mouvement et de forces. Le profil de pression est linéaire (distribution hydrostatique des pressions reportée en orange), et le profil de vitesse est uniforme à travers la hauteur d'écoulement. Sur la face amont ①, la force de pression pousse le fluide, alors que pour la face aval ②, la force de pression retient le fluide.

Compte tenu de H1, l'équation de continuité donne :

$$q = \bar{u}_1 h_1 = \bar{u}_2 h_2.$$

L'équation de quantité de mouvement sur le volume de contrôle s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{u} dV = \int_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_S \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \text{somme des forces appliquées},$$

ce qui donne l'équation suivante compte tenu de l'hypothèse de régime permanent H1

$$\int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dont la projection le long de la direction d'écoulement donne :

$$-\int_0^{h_1} \rho u_1^2 dS + \int_0^{h_2} \rho u_2^2 dS = \int_0^{h_1} p dy - \int_0^{h_2} p dy$$

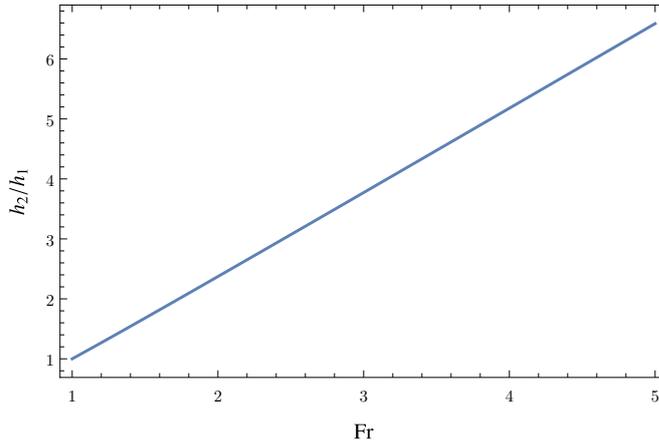
puisque la pente est négligeable (H7), le frottement nul (H6), la distribution de pression est hydrostatique (H4), la vitesse orientée positivement ( $\bar{u}_i > 0$ ),  $\mathbf{n} = (-1, 0)$  sur la face amont ① et  $\mathbf{n} = (1, 0)$  sur la face aval ②.

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\rho q(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) = \frac{1}{2} \rho g(h_1^2 - h_2^2). \quad (1.3)$$

On suppose que l'on connaît les conditions à l'amont et on veut déduire ce qui se passe à l'aval. On déduit la relation donnant le rapport  $h_2/h_1$  (voir figure 1.3) :

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right)}. \quad (1.4)$$



**Figure 1.3** – Variation du rapport  $h_2/h_1$  en fonction du nombre de Froude amont  $\text{Fr}_1$ . Le rapport  $h_2/h_1$  varie de façon à peu près linéaire avec le nombre de Froude amont  $\text{Fr}_1$ .

L'équation (1.4) s'appelle *équation de conjugaison* et les hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  sont dites *conjuguées*. La perte de charge associée se calcule en calculant la différence de charge entre les points 1 et 2, et en éliminant le débit  $q$  à l'aide de la relation (1.3) :

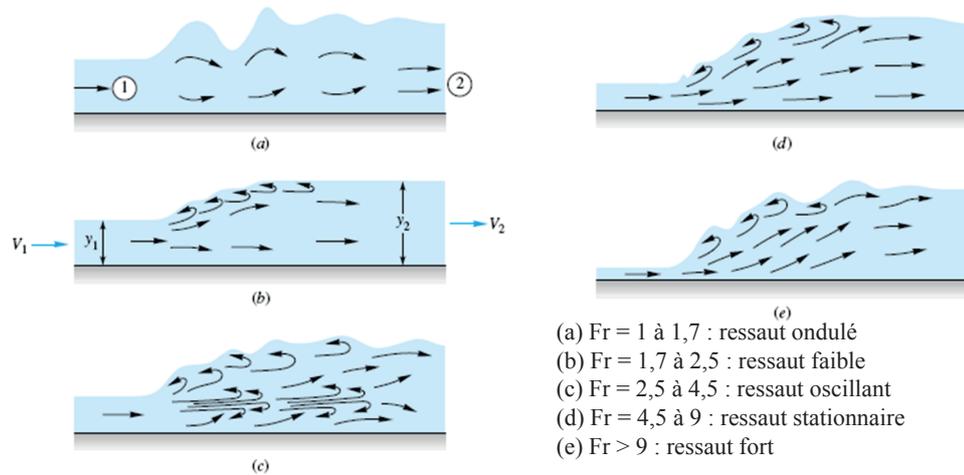
$$\Delta H = H_2 - H_1 = h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = -\frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} = -h_1 \frac{\left( \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 3 \right)^3}{16 \left( \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right)}. \quad (1.5)$$

La longueur du ressaut n'est en général pas très élevée, ce qui permet de justifier notre approximation H6. Expérimentalement, [Hager et al. \(1990\)](#) ont trouvé par exemple que

l'on peut relier la longueur du ressaut et le nombre de Froude à l'amont :

$$\frac{L}{h_1} = 160 \tanh \frac{Fr_1}{20} - 12, \quad (1.6)$$

pour  $2 < Fr_1 < 16$ . Il existe une grande variété de formes des ressauts hydrauliques (voir figure 1.4).



**Figure 1.4** – Classification des ressauts hydrauliques en fonction du nombre de Froude (Chow, 1959).

### Position des ressauts

Les ressauts hydrauliques stationnaires sont souvent observés au pied d'aménagements hydrauliques tels que les évacuateurs de crue des barrages ou les seuils qu'ils soient artificiels ou naturels. La figure 1.5 montre un ressaut au pied d'un seuil, qui sert à alimenter le laboratoire d'hydraulique Saint-Falls (SAFL) à Minneapolis. Dans ce cas-ci, le ressaut est bien visible, mais dans bien des cas, il ne se manifeste pas de façon aussi visible. La figure 1.6(a) montre un petit ressaut au passage d'une vanne ; la présence du ressaut se manifeste surtout par l'apparition d'eau blanche (émulsion d'eau et de bulles d'air), trahissant la forte vorticité associée au passage du seuil et un fort brassage du courant d'eau. La figure 1.6(b) montre un écoulement torrentiel à grand nombre de Froude sur un lit composé de gros blocs ; là encore, la présence de petits ressauts au pied des blocs est mise en évidence par l'eau blanche.

En modélisation hydraulique, il est souvent considéré que beaucoup d'aménagements hydrauliques comme les seuils sont des points singuliers ou *singularités* : la longueur de l'aménagement est tellement petite par rapport à la longueur caractéristique



**Figure 1.5** – Ressaut hydraulique stationnaire sur le Mississippi au pied du seuil du Saint-Falls Laboratory de Minneapolis (États-Unis). Source : [Wikimedia](#).

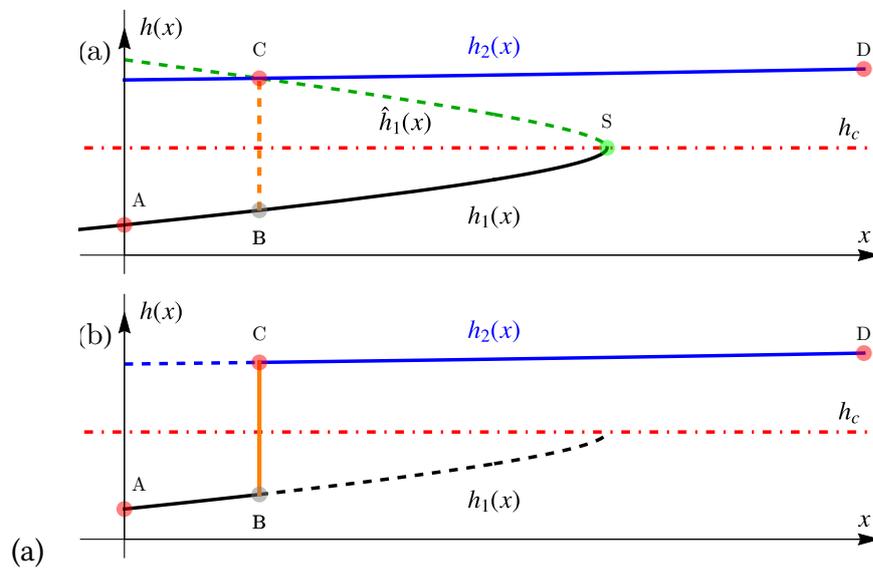


**Figure 1.6** – (a) Ressaut hydraulique au passage du seuil d'une vanne sur la rivière Alphée à Olympie (Grèce). (b) Écoulement tumultueux se caractérisant par une succession de ressauts dans l'Avançon de Nant aux Plans-sur-Bex (VD).

du bief étudié que l'on peut la considérer comme nulle ; la courbe de remous n'est alors pas calculée car c'est juste un point, dont la position coïncide avec la position de l'aménagement. Tous les aménagements hydrauliques ne sont pas aussi simples, et dans certains cas (comme un changement de pente du lit), le ressaut hydraulique peut se positionner à l'aval de l'aménagement. Il faut alors employer des méthodes spécifiques pour déterminer la position du ressaut. La *méthode de la courbe conjuguée* permet de calculer la position d'un ressaut dans la plupart des cas.

Cette méthode repose en effet sur l'équation de conjugaison (1.4). Cette équation

fournit les hauteurs de part et d'autre du ressaut,  $h_2$  (hauteur aval) et  $h_1$  (hauteur amont). Chacune de ces hauteurs doit également se trouver sur la courbe de remous : comme le montre la figure 1.7(a), les points B (hauteur  $h_B = h_1$ ) et C (hauteur  $h_C = h_2$ ) correspondent au ressaut hydraulique, qui apparaît comme discontinuité. La branche AB est la courbe de remous du régime supercritique  $h_1(x)$  (elle se calcule en résolvant (1.1) avec une condition à la limite en A) ; la branche CD est la courbe de remous  $h_2(x)$  du régime subcritique (elle se calcule en résolvant (1.1), qui se résout avec une condition à la limite en D). Positionner le ressaut c'est donc positionner le segment vertical BC de telle sorte que la hauteur  $h_C$  soit sur la courbe de remous de la branche subcritique et que la hauteur  $h_B$  soit sur la branche supercritique.



**Figure 1.7** – (a) Ressaut stationnaire entre deux courbes de remous, l’une en régime subcritique à l’aval, l’autre en régime supercritique à l’amont. (b) Forme de la surface libre. La courbe tiretée verte est la conjuguée de la courbe  $h_1(x)$  (branche supercritique) note  $\hat{h}_1(x)$ . La courbe critique est la droite  $h_c$  à tiretés rouges. Aucune des deux branches ne peut franchir cette courbe critique. Le segment vertical BC schématise le ressaut.

Ce problème peut se résoudre simplement en traçant la conjuguée d’une des branches et en cherchant son intersection avec l’autre branche. Par exemple, comme le montre la figure 1.7(b), admettons que l’on ait calculé la courbe de remous subcritique  $h = h_2(x)$  partant du point D en résolvant (1.1) ; on peut calculer la courbe conjuguée  $h = \hat{h}_1(x)$  (le chapeau désignant la hauteur conjuguée) en se servant de (1.4) :

$$\frac{h_2}{\hat{h}_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right) \quad (1.7)$$

avec  $Fr_1 = q/\sqrt{g\hat{h}_1^3}$ . L'intersection de la courbe conjuguée  $h = \hat{h}_1(x)$  avec la branche supercritique  $h = h_1(x)$  se fait au point B. Comme ce point appartient à la courbe de remous supercritique et qu'il vérifie la relation de conjugaison (1.4), il nous fournit la position du ressaut.

On aurait pu procéder avec l'autre branche, ce qui conduit strictement au même résultat. Il faut noter au passage que c'est même une stratégie plus efficace car on note que dans la précédente méthode, l'inconnue  $\hat{h}_1(x)$  apparaît à la fois dans le dénominateur du membre de gauche et dans la définition du nombre de Froude, ce qui demande un peu plus de travail numérique pour trouver la solution.

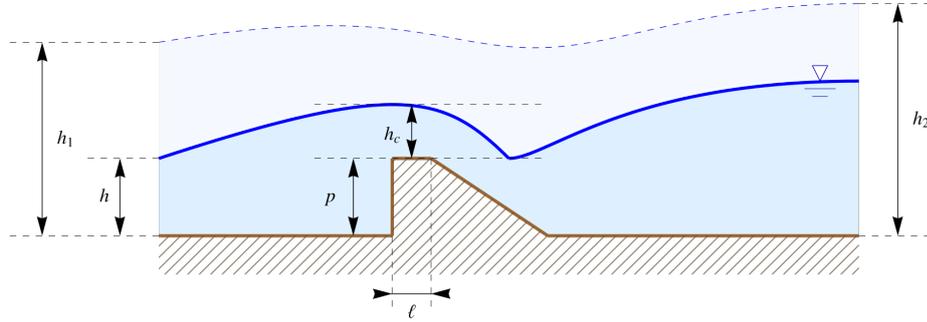
### Passage d'un obstacle

On s'intéresse ici à un obstacle naturel (p. ex. une rupture de terrain causant la formation d'une cascade) ou artificiel (p. ex. seuil). Le passage d'un obstacle de type seuil entraîne souvent le passage d'un subcritique ( $Fr < 1$ ) – à l'amont immédiat de l'obstacle – à supercritique ( $Fr > 1$ ) – à l'aval de l'obstacle. En général, ce passage se traduit par une chute d'eau au passage de la crête de l'obstacle. La photographie 1.8 montre un seuil sur la Reuss à Lucerne.



**Figure 1.8** – Seuil placé à l'exutoire du lac de Lucerne au débouché de la Reuss.

On fera ici, dans le cadre d'un traitement simplifié, que le changement de régime se produit au sommet de l'obstacle. En pratique, cela dépendra fortement de la géométrie de l'ouvrage. C'est la raison pour laquelle les formules théoriques sont appliquées aux cas pratiques avec des facteurs correctifs.



**Figure 1.9** – Passage d'un seuil. Trait continu : seuil dénuyé; trait pointillé : seuil noyé. Les échelles de longueur ne sont pas respectées.

Considérons le seuil droit de la figure 1.9 qui barre un canal rectangulaire. Sa hauteur par rapport à la cote du lit est notée  $p$  (*pelle* dans le jargon des hydrauliciens), et il est supposé épais<sup>5</sup>. La hauteur est notée  $h_1$  à l'amont de l'ouvrage, et  $h_2$  à l'aval; la vitesse vaut  $u_1$  à l'aval, et la cote du fond est  $z_1$  qu'on posera arbitrairement à 0 sans perte de généralité. Comme le passage de  $Fr < 1$  à  $Fr > 1$  se fait sur la crête du seuil, la hauteur vaut  $h_c$ . La conservation de la masse implique:  $q = u_1 h_1 = u_c h_c$ .

La conservation de la charge hydraulique entre l'amont et la crête du seuil implique que:

$$H_1 = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} + p = \frac{3}{2}h_c + p \Rightarrow h_c = \frac{2}{3}(H_1 - p),$$

soit si on retourne au débit  $q = \sqrt{gh_c^3}$  sur le seuil:

$$q = \sqrt{g} \left( \frac{2}{3}(H_1 - p) \right)^{3/2}. \quad (1.8)$$

Notons qu'en pratique, on tient compte de pertes de charge singulières au passage de l'obstacle, et on pondère le débit d'un coefficient  $C_D$  appelé *coefficient de débit*:

$$q = C_D \sqrt{g} \left( \frac{2}{3}(H_1 - p) \right)^{3/2}, \quad (1.9)$$

avec  $C_D < 1$  (Chanson, 2004; Hager, 2010; Castro-Orgaz & Hager, 2019).

Lorsque la hauteur  $h_2$  à l'aval du seuil devient suffisamment grande par rapport  $h_1$ , les conditions hydrauliques à l'aval modifient ce qui se passe à l'amont. Cela se produit

5. c'est-à-dire Un seuil est dit épais quand sa largeur vérifie  $\ell > 3(H-p)$ . Pour les seuils minces, on obtient des formules structurellement similaires à celles montrées ici, mais le principe d'obtention est différent, et les coefficients de débit  $C_D$  diffèrent également.

lorsque :

$$\frac{h_2 - p}{h_1 - p} \geq \frac{2}{3}. \quad (1.10)$$

Le débit devient alors (Rajaratnam & Muralidhar, 1969):

$$q = C_D \sqrt{2g} (h_1 - h_2)^{1/2} (h_2 - p). \quad (1.11)$$

## 1.2 Équations de Saint Venant

### 1.2.1 Obtention des équations

#### Hypothèses

Nous allons utiliser ici les hypothèses simplificatrices suivantes :

- (H1) On s'intéresse à un écoulement d'eau le long d'un profil bidimensionnel curviligne (voir fig. 1.10), dont les variations sont faibles (rayon de courbure infini), c'est-à-dire la surface d'écoulement est à peu près plane, d'inclinaison  $\theta$  par rapport à l'horizontale. On rattache un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  à ce repère ( $x$  est orienté selon la ligne de plus grande pente,  $y$  est normale au plan de glissement,  $z$  représente une direction latérale).
- (H2) On considère un mouvement essentiellement bidimensionnel ( $z$  n'intervient pas dans les calculs). Les calculs peuvent être généralisés à la dimension 3.
- (H3) Il n'y a pas de variation significative de la section d'écoulement sur de courtes distances (les variations sont toujours progressives). Il en est de même pour les hauteurs d'écoulement, qui varient doucement d'un point à l'autre de l'écoulement sur un même bief. Autrement dit, la courbure de la surface libre est faible et on s'attend à une distribution hydrostatique de pression. On parle de *régime graduellement varié* ou bien d'approximation des grandes longueurs d'onde pour désigner ce régime ou cette approximation. Il s'agit donc d'un régime peu éloigné du régime permanent uniforme. Les lignes de courant sont donc parallèles à la surface libre, elle-même à peu près parallèle à la ligne de fond. Le rapport caractéristique

$$\epsilon = H_*/L_*$$

est appelé rapport d'aspect (avec  $H_*$  : échelle de hauteur et  $L_*$  échelle de longueur). Il est supposé être petit devant 1 ( $\epsilon \ll 1$ ); typiquement pour une rivière de 10 km et profonde de 10 m, on a  $\epsilon = 10^{-3} \ll 1$ .

- (H4) Les lignes de courant au sein de l'écoulement ne subissent pas de bifurcation brutale. Autrement dit, le profil de vitesse est relativement proche de celui observé pour un régime permanent uniforme.
- (H5) La surface d'écoulement exerce une contrainte de frottement  $\tau_p$  sur le fond de la rivière (lit). Une des conséquences de la régularité du profil de vitesse (H4) est que la contrainte au fond est proche de celle exercée par un écoulement permanent uniforme avec la même hauteur et la même vitesse.
- (H6) La masse volumique de l'eau  $\rho$  est constante (pas d'effet du transport solide en suspension).
- (H7) Il n'y a pas de variation de masse durant l'écoulement (apport ou perte d'eau).
- (H8) Le lit est fixe (pas de transport solide, pas d'érosion, pas de dépôt) et de rugosité uniforme tout le long du bief considéré. On va donc essentiellement ici consi-

dérer le cas  $b(x,t) = 0$ . Le cas d'un lit mobile peut également être traité dans le présent cadre théorique (mais on ne fournira ici aucune démonstration, voir (Gray, 2001)).

- (H9) La pente locale n'est pas trop forte ( $\tan \theta$  doit être inférieur à 10–20 %) sinon il y a un risque d'instabilité de la surface libre (« roll waves » ou *train d'onde*, voir § 4.9).

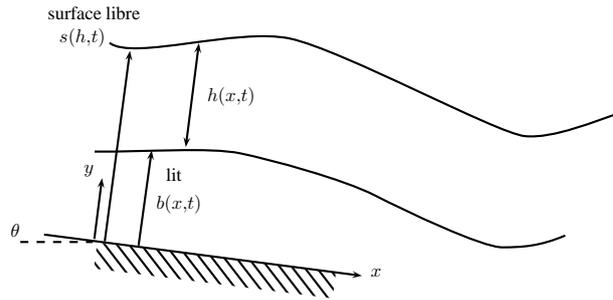


Figure 1.10 – Notation employée dans la description des profils en long.

Le principe de base dans les modèles de type Saint-Venant est de partir des équations locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, de les intégrer suivant la verticale pour les moyenner, puis de les simplifier en supprimant les termes de faible influence.

### Conservation de la masse

Considérons l'équation de conservation de la masse (appelée aussi équation de continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

où  $\mathbf{u}$  désigne la vitesse locale de l'écoulement. L'intégration de cette équation selon la hauteur d'écoulement, c'est-à-dire le long de la direction  $y$ , donne :

$$\int_0^{h(x,t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(x,y,t) dy - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(x,h,t) - v(x,0,t), \quad (1.12)$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse selon les directions  $x$  et  $y$ . À la surface libre et au fond, la composante normale de la vitesse  $v$  doit satisfaire respectivement

$$v(x,h,t) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x,h,t) \frac{\partial h}{\partial x} \text{ et } v(x,0,t) = 0 \quad (1.13)$$

compte tenu de la définition de la surface libre (voir le livret « complément de cours » pour plus de détails). D'où l'on déduit l'équation moyennée de conservation de la masse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (1.14)$$

où l'on a défini les valeurs moyennes selon la hauteur de la façon suivante :

$$\bar{f}(x,t) = \frac{1}{h(x,t)} \int_0^{h(x,t)} f(x,y,t) dy,$$

pour toute fonction  $f$ .

### Conservation de la quantité de mouvement

Considérons maintenant l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{T}$  représente le tenseur des extra-contraintes et  $p$  la pression. Lorsque le tenseur des extra-contraintes varie linéairement avec le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  (partie symétrique du tenseur gradient de vitesse  $\nabla \mathbf{u}$ ) :  $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{D}$  avec  $\mu$  la viscosité dynamique, alors cette équation de conservation est appelée *équation de Navier-Stokes*.

La même procédure que précédemment peut être appliquée à l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement. Comme il y a plus de termes que dans l'équation de conservation de la masse et comme certains ont un effet mineur sur la dynamique de l'écoulement, on va se servir de l'analyse dimensionnelle pour simplifier l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Outre les échelles de longueur et de hauteur ( $L_*$  et  $H_*$ ) introduites précédemment, on définit également une échelle de vitesse  $U_* = \sqrt{gH_* \cos \theta}$  (de telle sorte que  $\text{Fr} = O(1)$ ) dans la direction de l'écoulement,  $V_* = \epsilon U_*$  l'échelle de vitesse dans la direction normale au lit ( $y$ ), une échelle de temps  $T = U_*/L_*$ , une échelle de pression  $P_* = \rho g H_* \cos \theta$  (écoulement à surface libre, donc l'ordre de grandeur de la pression est la pression hydrostatique), et les nombres sans dimension de Reynolds et de Froude

$$\text{Re} = \frac{\rho U_* H_*}{\mu} \text{ et } \text{Fr} = \frac{U_*}{\sqrt{g H_* \cos \theta}}.$$

On suppose qu'on est en régime turbulent :  $\text{Re} \gg 1$ . On suppose que le nombre de Froude n'est ni très grand, ni très petit :  $\text{Fr} = O(1)$  (il peut être plus petit ou plus grand que 1). On peut alors adimensionnaliser toutes les variables

$$\hat{u} = \frac{u}{U_*}, \hat{v} = \frac{v}{V_*}, \hat{x} = \frac{x}{L_*}, \hat{y} = \frac{y}{H_*}, \text{ et } \hat{t} = \frac{t}{T_*},$$

tandis que les contraintes sont transformées de la façon suivante

$$\hat{T}_{xx} = \frac{\mu U_*}{L_*} T_{xx}, \hat{T}_{xy} = \frac{\mu U_*}{H_*} T_{xy}, \hat{T}_{yy} = \frac{\mu U_*}{L_*} T_{yy}, \text{ et } \hat{p} = \frac{p}{P_*}.$$

L'équation locale de quantité de mouvement s'écrit donc

$$\epsilon \text{Re} \frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = \frac{\epsilon \text{Re}}{\text{Fr}^2} \left( \frac{1}{\epsilon} \tan \theta - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{xx}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{y}}, \quad (1.16)$$

$$\epsilon^3 \text{Re} \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = \frac{\epsilon \text{Re}}{\text{Fr}^2} \left( -1 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{x}} + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{yy}}{\partial \hat{y}}. \quad (1.17)$$

On va maintenant utiliser le fait que  $\epsilon \ll 1$  et que le nombre de Reynolds  $\text{Re} \gg 1$  (écoulement turbulent). On note que dans les équations apparaît parfois le produit  $\epsilon \text{Re}$ , dont la valeur est indéfinie ; on va ici supposer que  $\epsilon \text{Re} = O(1)$  (ce qui implique donc  $\epsilon^2 \text{Re} \ll 1$ ). L'équation (1.17) se simplifie considérablement puisque la plupart des termes sont négligeables sauf la pression et le terme de gravité

$$-1 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = 0,$$

qui une fois remise sous forme dimensionnelle et après intégration, nous montre que la distribution de pression est hydrostatique

$$p = \rho g (h - y) \cos \theta.$$

Dans l'équation (1.16) seule la composante avec  $T_{xx}$  disparaît ; les autres termes sont *a priori* du même ordre de grandeur

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = \tan \theta - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{y}},$$

qui remise sous forme dimensionnelle donne

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}.$$

Sans difficulté nous obtenons l'équation moyennée de conservation de la quantité de mouvement après avoir intégré l'équation précédente selon  $y$  entre 0 et  $h$  :

$$\rho \left( \frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}^2}{\partial x} \right) = \rho g h \sin \theta - \frac{\partial h \bar{p}}{\partial x} - \tau_p, \quad (1.18)$$

où la contrainte de frottement (appelée aussi contrainte pariétale) est  $\tau_p = T_{xy}(x, 0, t)$ , la pression moyenne est  $\bar{p}$ .

Le système d'équations (1.14–1.18) n'est pas fermé car le nombre d'inconnues dépasse le nombre d'équations. Une approximation courante est d'introduire un paramètre, appelé parfois le paramètre de quantité de mouvement de Boussinesq ou *coefficient de Boussinesq*, qui relie le carré de la vitesse moyenne à la moyenne du carré de la vitesse

$$\overline{u^2}(x, t) = \frac{1}{h} \int_0^h u^2(x, y, t) dy = \alpha \bar{u}^2. \quad (1.19)$$

Généralement on a  $1 \leq \alpha \leq 5/4$ . Une approximation courante est d'écrire  $\alpha = 1$ . On peut ainsi transformer le terme  $\partial h \overline{u^2} / \partial x$  dans l'équation (1.18)

$$\frac{\partial h \overline{u^2}}{\partial x} = \frac{\partial \alpha h \bar{u}^2}{\partial x} \approx \frac{\partial h \bar{u}^2}{\partial x}.$$

Une autre approximation, que nous avons implicitement utilisée ci-dessus, est relative au calcul des contraintes. Puisque nous avons supposé que les variations de hauteur le long de l'axe  $x$  sont faibles (approximation d'onde longue), cela implique que, pour toute quantité  $m$  relative au mouvement de l'écoulement, nous avons :  $\partial m / \partial y \gg \partial m / \partial x$ . Cela implique que toute tranche d'écoulement peut être traitée comme localement uniforme. Avec une telle hypothèse, il est possible de calculer la contrainte à la paroi en considérant que son expression en fonction de  $\bar{u}$  et  $h$  est identique à celle du régime permanent ; on utilise alors les formules classiques telles que celles de Manning–Strickler ou Chézy pour calculer  $\tau_p$ .

## 1.2.2 Forme conservative et non conservative

Le jeu d'équations du mouvement moyen composé de la conservation de la masse (1.14) et de la quantité de mouvement (1.18) est appelé la forme conservative des équations de Saint-Venant car leur obtention et leur forme finale reflètent directement le principe général de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle ; elles peuvent d'ailleurs être obtenues de cette façon sans passer par une intégration de la forme locale des équations du mouvement.

On utilise souvent en pratique une *forme dite non conservative* de l'équation de la quantité de mouvement, qui consiste à se servir de l'équation (1.14) pour transformer les termes  $\partial h \bar{u}$  en  $\partial \bar{u}$ . On obtient facilement en faisant ainsi

$$\varrho h \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = \varrho g h \sin \theta - \varrho g h \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_p.$$

Formes conservative et non conservative sont strictement équivalentes sur le plan mathématique tant que les solutions  $\bar{u}$  et  $h$  sont continues. En revanche, dans le cas de solutions discontinues (formation d'un ressaut hydraulique par exemple), la forme non conservative fournit une solution fautive au niveau de la discontinuité. Pour la



résolution numérique des équations, il est préférable d'employer la forme conservative lorsque des solutions discontinues sont possibles.

### 1.2.3 Synthèse

#### Écoulement unidirectionnel

Dans le cas d'un écoulement unidirectionnel sur fond fixe et sans transport solide, les équations de Saint-Venant sont composées :

- d'une équation de conservation de la masse

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0,} \quad (1.20)$$

- d'une équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.} \quad (1.21)$$

Pour boucler ces équations, il faut connaître la loi de frottement  $\tau_p(\bar{u}, h)$ . Il faut aussi préciser des conditions aux limites, qui dépendent principalement du type de régime (super- ou subcritique) :

- pour un régime *supercritique*, l'information se propage uniquement de l'amont vers l'aval (il n'y a pas de remontée d'information). La condition à la limite doit être posée à l'amont. Dans un problème d'évolution, il est nécessaire de spécifier à la fois les conditions initiales et les conditions aux limites ;
- pour un régime *subcritique*, l'information se propage non seulement de l'amont vers l'aval, mais également de l'aval vers l'amont (il y a une remontée d'informations). La condition à la limite doit être posée à l'aval pour un simple problème de type courbes de remous. Dans un problème d'évolution, il faut préciser principalement les conditions initiales. Selon le problème, les conditions aux limites peuvent être superflues ou bien non compatibles avec les conditions initiales.



Les équations de Saint-Venant permettent de résoudre un grand nombre de problèmes hydrauliques dès lors que la courbure de la surface libre n'est pas trop forte, en particulier lorsqu'il n'y a pas de ressaut hydraulique séparant un régime supercritique d'un régime subcritique ou bien lorsqu'il y a une chute d'eau au niveau d'un seuil. En pratique, les types de problème que l'on peut résoudre sont très divers, par exemple :

- propagation d'une crue dans une rivière ;
- rupture de barrage dans une rivière ;
- évolution d'une ligne d'eau en fonction du débit fourni.

C'est ce que l'on va voir dans le reste de ce cours.

### Formulation conservative

Sur le plan physique, ce n'est pas la vitesse et la hauteur qui se conservent quand on écrit les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, mais le débit et la hauteur. Il peut alors être nécessaire de formuler les équations de Saint-Venant non pas en fonction de la hauteur et de la vitesse, mais en fonction de la hauteur et du débit. Cette formulation est dite *conservative*. Dans le cas d'un écoulement unidirectionnel sur fond fixe, infiniment large, et sans transport solide, les équations de Saint-Venant sous forme conservative sont :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} = gh \sin \theta - gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho}. \quad (1.23)$$

Formulations conservatives (1.22)–(1.23) et non conservatives (1.20)–(1.21) sont équivalentes tant que les solutions sont continues. Si des discontinuités apparaissent (ressaut hydraulique), il est impératif de travailler avec la formulation conservative (1.22)–(1.23) sous peine de trouver de mauvaises solutions.

## 1.2.4 Généralisation des équations de Saint-Venant

### Écoulement bidimensionnel

Pour les écoulements bidimensionnels sur fond fixe  $z = z(x, y)$  et sans transport solide, les équations de Saint-Venant (dans leur forme non conservative) sont composées :

- d'une équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (1.24)$$

- de deux équations de conservation de la quantité de mouvement selon  $x$  :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = g \frac{\partial z}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_{px}}{\rho h}. \quad (1.25)$$

et selon  $y$  :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = g \frac{\partial z}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\tau_{py}}{\rho h}. \quad (1.26)$$

où  $h(x, y, t)$  est la hauteur d'eau,  $\bar{u}(x, y, t)$  la vitesse moyenne selon la direction  $x$ ,  $\bar{v}(x, y, t)$  la vitesse moyenne selon la direction  $y$ ,  $\boldsymbol{\tau}_p = (\tau_{px}, \tau_{py})$  la contrainte pariétale.

### Forme filaire

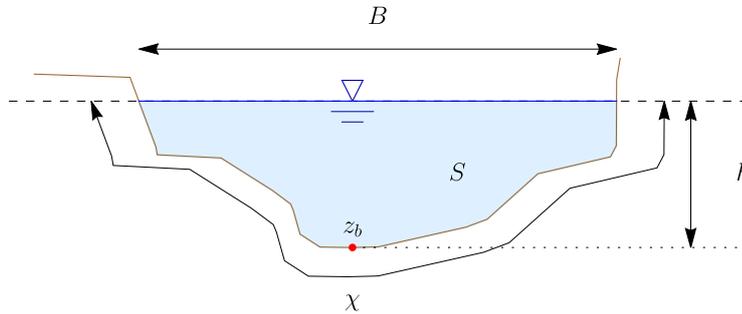
Il n'est pas toujours nécessaire, possible ou utile d'utiliser les équations (1.24)–(1.26) pour des écoulements bidimensionnels. On peut parfois se contenter d'une modélisation dite *filare* où l'on considère un écoulement unidirectionnel à travers des sections quelconques. Précédemment, les équations (1.20)–(1.21) avaient été écrites pour un canal infiniment large et  $q = h\bar{u}$  représente le débit par unité de largeur. On peut les écrire de façon plus générale pour une section (appelée *section mouillée*)  $S(x, t)$  par laquelle transite un débit  $Q(x, t)$ . Les variables ne sont donc plus  $h$  et  $q$ , mais  $S$  et  $Q$ .

La formulation non conservative des équations de Saint-Venant sous forme filaire s'écrit (Cunge *et al.*, 1980) :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2 S^{-1}}{\partial x} = gS \sin \theta - gS \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \chi \frac{\tau_p}{\rho}. \quad (1.28)$$

Il existe une forme conservative, qui est plus complexe (Cunge *et al.*, 1980). La *forme filaire* des équations de Saint-Venant est une formulation intermédiaire entre les équations (1.20)–(1.21) à une dimension spatiale et les équations à deux dimensions spatiales (1.24)–(1.26).



**Figure 1.11** – Coupe d'une rivière avec définition des grandeurs caractéristiques:  $\chi$  périmètre mouillé,  $S$  section mouillée,  $h$  profondeur ou tirant d'eau, et  $B$  largeur au miroir.

La *vitesse moyenne* est la *vitesse débitante*, c'est-à-dire vitesse moyennée sur la section :

$$\bar{u} = \frac{Q}{S}.$$

On définit la hauteur comme la *profondeur maximale* appelée *tirant d'eau* (voir figure 1.11). On peut également définir la hauteur comme la *hauteur moyenne*

$$\bar{h} = S/B,$$

avec  $B$  la largeur au miroir, c'est-à-dire la largeur de la section au niveau de la surface libre (voir figure 1.11). En pratique, il est souvent plus facile de travailler avec le tirant d'eau qu'avec la hauteur moyenne lorsqu'on cherche à calculer les valeurs de la section mouillée  $S$  en fonction des caractéristiques géométriques du lit. Il faut alors faire attention à ne pas confondre les deux hauteurs. Une autre grandeur très utile est le rayon hydraulique :

$$R_h = \frac{S}{\chi}, \quad (1.29)$$

avec  $\chi$  le *périmètre mouillé* (voir figure 1.11). En règle générale, les lois de frottement utilisées par les équations de Saint-Venant expriment la contrainte pariétale  $\tau_p$  comme une fonction du rayon hydraulique  $R_h$  et de la vitesse moyenne  $\bar{u}$  :

$$\tau_p = \tau_p(R_h, \bar{u}).$$

Pour un écoulement à travers une section quelconque, la célérité des ondes est

$$c = \sqrt{\frac{gS}{B}},$$

avec  $B$  la largeur au miroir. De là, on déduit que le nombre de Froude est défini comme

$$\text{Fr} = \frac{\bar{u}}{c} = \frac{Q\sqrt{B}}{\sqrt{gS^3}}.$$

### Écoulement sur lit mobile

En présence de transport solide, il faut compléter ces équations par l'équation d'Exner qui décrit l'érosion ou l'engravement du lit :

$$(1 - \zeta_b) \frac{\partial b}{\partial t} = D - E = -\frac{\partial q_s}{\partial x}, \quad (1.30)$$

avec  $b(x,t)$  la cote du lit (par rapport à un niveau de référence),  $E$  le taux d'érosion du lit (nombre de particules par unité de surface et par unité de temps qui sont entraînées par l'écoulement),  $D$  le taux de dépôt,  $q_s$  le débit solide (résultat net entre érosion et sédimentation du lit), et  $\zeta_b$  la porosité du lit. La pente locale peut varier doucement autour de  $\theta$  selon qu'il y a *aggradation* (érosion du lit,  $\partial_t b < 0$ ) ou *déposition* (engravement du lit,  $\partial_t b > 0$ ). L'équation de conservation de la quantité de mouvement doit être modifiée en conséquence

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.$$

avec  $s = b + h$  la cote de la surface libre (Gray, 2001). Pour résoudre l'équation d'Exner, il faut disposer d'une équation supplémentaire qui fournit  $q_s$  (loi de charriage) ou bien

de deux fonctions décrivant l'entraînement  $E$  et la déposition  $D$ . La première alternative est la préférée. Parmi les lois de charriage les plus couramment usitées, il y a la loi de Meyer-Peter–Müller<sup>6</sup> (Meyer-Peter & Müller, 1948; Wong & Parker, 2006):

$$\Phi = 8(\tau^* - \tau_c^*)^{3/2},$$

où on a utilisé les variables adimensionnelles:

$$\Phi = \frac{q_s}{\sqrt{sgd^3}} \text{ et } \tau^* = \frac{\tau_p}{(\varrho_s - \varrho)gd} = \frac{i}{s} \frac{h}{d},$$

où  $\varrho_s$  est la masse volumique du sédiment,  $d$  un diamètre caractéristique du sédiment (le plus souvent  $d = d_{50}$ ), et  $s$  la densité relative ( $s = \varrho_s/\varrho - 1$ ). Il est usuel d'appeler  $\tau^*$  le *nombre de Shields* ou bien encore la *contrainte de Shields*. Quand la contrainte de Shields dépasse une valeur critique évaluée à  $\tau_c^* = 0.047$  par Meyer-Peter & Müller (1948), l'eau est capable de charrier du sédiment; inversement, quand  $\tau^* < \tau_c^*$ , il n'y a pas de transport de sédiment. Quoique cette loi d'un usage courant, elle n'est valable qu'à des nombres de Shields suffisamment élevés (typiquement  $\tau^* > 0,4$ ), ce qui la rend peu applicable à un grand nombre de situations (Ancey & Recking, 2023).

### 1.2.5 Forme tensorielle et structure des équations

On introduit le vecteur des variables inconnues  $\mathbf{U} = (h, q = h\bar{u})$ , la fonction de flux:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

son jacobien  $\mathbf{A}$  défini comme le gradient du flux par rapport aux variables  $h$  et  $q$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{F}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial_h q}{\partial_h \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right)} & \frac{\partial_q q}{\partial_q \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - \bar{u}^2 & 2\bar{u} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.32)$$

et le vecteur source  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ i gh - \tau_p/\varrho \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

6. Eugen Meyer-Peter (1883–1969) était un ingénieur civil suisse. Il créa le premier laboratoire d'hydraulique de l'ETHZ en 1930 (devenu le *Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie* ou VAW). Il est surtout connu pour la loi de charriage qu'il a élaborée avec son collègue Robert Müller.

On peut écrire les équations de Saint-Venant (1.22) et (1.23) sous forme tensorielle :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}. \quad (1.34)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \bar{u} - c \text{ et } \lambda_2 = \bar{u} + c$$

avec  $c = \sqrt{gh}$  (la vitesse des ondes en eaux peu profondes) associées aux *vecteurs propres à gauche*  $\mathbf{v}_1$  and  $\mathbf{v}_2$  qui, par définition, vérifient :

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i.$$

On a donc :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -c/h \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c/h \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lorsque la matrice  $\mathbf{A}$  a ses deux valeurs propres distinctes et réelles, alors on dit que le système d'équations est *hyperbolique*. Ce système se distingue :

- des équations *paraboliques* (comme l'équation de diffusion) qui ont une seule valeur propre réelle ; et
- des équations *elliptiques* (comme l'équation de Laplace) dont les valeurs propres sont complexes.

Une caractéristique essentielle des systèmes hyperboliques est qu'ils peuvent générer des discontinuités. Leur traitement est donc un peu plus complexe sur le plan mathématique ou numérique. Ces discontinuités reflètent des comportements particuliers des écoulements (tels que les ressauts hydrauliques).

On cherche de nouvelles variables dites *variables de Riemann*  $\mathbf{r} = \{r_1, r_2\}$  telles que

$$\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{U} = \mu_1 dr_1 \text{ et } \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{U} = \mu_2 dr_2,$$

avec  $\mu_i$  facteur intégrant tels que  $dr_i$  est une différentielle exacte. On peut se référer aux annexes du cours pour un rappel de ces notions mathématiques. On trouve :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_2 = 1, \\ r_1 &= u - 2c, \\ r_2 &= u + 2c. \end{aligned}$$

En multipliant les équations de Saint-Venant (1.34) par  $\mathbf{v}_1$ , on obtient :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S},$$

soit encore :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S}.$$

On peut interpréter le terme entre parenthèses comme une dérivée le long de la courbe dite *caractéristique*  $\mathcal{C}_1$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1.$$

Pour montrer cela, considérons la différentielle de  $f$

$$df(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

et pour toute quantité  $f(x(t), t)$  avec  $x(t)$  variant le long de la courbe caractéristique  $\mathcal{C}_1$ , on a

$$\frac{d}{dt} f(x(t), t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x},$$

puisque par hypothèse,  $\dot{x} = dx/dt = \lambda_1$ . On peut donc écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} U \text{ le long de } \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } \frac{dx}{dt} = \lambda_1.$$

Le terme différentiel dans les équations de Saint-Venant peut alors s'écrire :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = \mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{dr_1}{dt}.$$

On montre ainsi l'équivalence entre les deux équations scalaires et l'équation (1.34) :

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\partial r_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S} = igh - \frac{\tau_p}{\rho},$$

et

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{\partial r_2}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial r_2}{\partial x} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{S} = igh - \frac{\tau_p}{\rho}$$

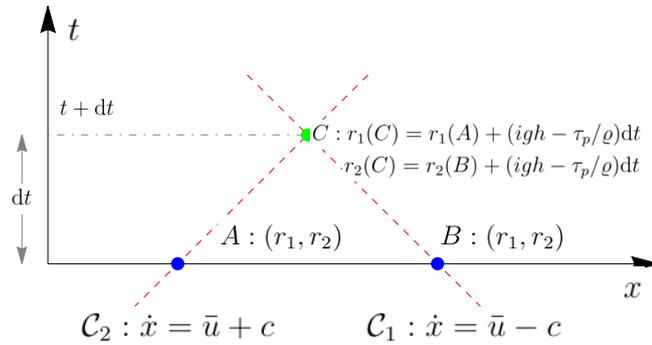
ou sous la forme plus compacte d'équations aux dérivées partielles impliquant les variables  $u$  et  $c = \sqrt{gh}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} (u \pm 2c) + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} (u \pm 2c) = igh - \frac{\tau_p}{\rho}.$$

Ces deux équations aux dérivées partielles qui sont couplées sont équivalentes à un système d'équations différentielles ordinaires découplées qu'on appelle *équations caractéristiques* :

$$\boxed{\frac{d}{dt} (u \pm 2c) = igh - \frac{\tau_p}{\rho} \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = u \pm c.} \quad (1.35)$$

L'équation (1.35) s'interprète physiquement comme la propagation (avec atténuation) de l'information le long du chemin  $\mathcal{C}_i$ . Comme l'illustre la figure 1.12, cette interprétation peut être exploitée pour créer des schémas numériques de résolution des



**Figure 1.12** – Schéma de principe. Ce qui se passe au point C au temps  $t + dt$  peut se déduire de ce qui se passe au temps  $t$  en cherchant les caractéristiques  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  qui aboutissent au point C. Ces caractéristiques relient C aux points A et B situés au temps  $t$ . Chaque caractéristique propage une information  $r_i$  qui est modifiée le long de  $\mathcal{C}_i$ . En résolvant le système d'équations, on peut déterminer les variables  $r_i$  au point C.

équations de Saint-Venant (Cunge *et al.*, 1980). On appelle *méthode des caractéristiques* de tels schémas de résolution. De nos jours, on préfère toutefois des méthodes de résolution numérique plus performantes fondées sur la *méthode des volumes finis* (LeVeque, 1992; Toro, 2001; LeVeque, 2002; Wu, 2007; Guinot, 2010; Ketcheson *et al.*, 2020).

On peut mettre la vitesse de propagation de l'information sous la forme

$$\lambda_i = \bar{u} \pm c = c \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} \pm 1 \right) = c (\text{Fr} \pm 1),$$

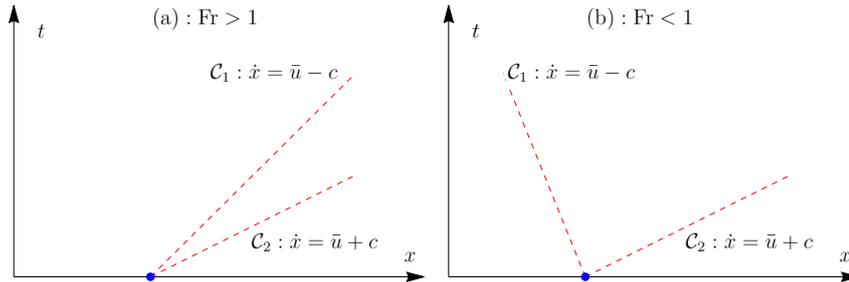
avec pour conséquence :

- Lorsque le régime est supercritique ( $\text{Fr} > 1$ ) alors  $\lambda_1 = \bar{u} - c$  et  $\lambda_2 = \bar{u} + c$  sont positives. L'information se propage dans la même direction à deux vitesses différentes.
- Inversement, lorsque le régime est subcritique ( $\text{Fr} < 1$ ), alors  $\lambda_1 < 0$  mais  $\lambda_2 > 0$ . L'information se propage dans deux directions différentes.

Cela explique pourquoi lorsque l'on veut résoudre l'équation de la courbe de remous (1.48), il faut placer différemment les conditions aux limites (voir figure 1.13) :

- le régime est supercritique, il faut fixer la condition à la limite à l'amont ;
- le régime est subcritique, il faut fixer la condition à la limite à l'aval.

Pour des régimes non stationnaires, le principe de placement des conditions aux limites est similaire : il faut tenir compte du sens de propagation pour savoir où fixer la condition aux limites.



**Figure 1.13** – Courbes caractéristiques en régime supercritique (a) et subcritique (b). Dans le régime supercritique, l’information se propage à des vitesses différentes, mais dans la même direction alors qu’en régime subcritique, elle se propage dans des directions différentes.

### 1.2.6 Ressaut hydraulique mobile

On vient de voir que les équations de Saint-Venant se mettent sous la forme tensorielle suivante

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (1.36)$$

ou bien sous la forme équivalente dite *conservative*

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}, \quad (1.37)$$

avec  $\mathbf{U} = (h, \bar{u}h)$  le vecteur inconnu, le flux  $\mathbf{F}$  défini par l’équation (1.31) et la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  définie par l’équation (1.32). On rappelle la relation qui les lie:  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}(\mathbf{u})$ .

Comme l’information se propage à des vitesses différentes, il se peut que des caractéristiques de la même famille se croisent, ce qui voudrait dire qu’aux points d’intersection, on aurait une information incohérente. En fait, quand les caractéristiques se croisent, cela veut dire que la solution est localement discontinue.

Physiquement, ces discontinuités reflètent des *ondes de choc*, qui en hydraulique, sont appelées *ressauts hydrauliques mobiles*. Le mascaret (qu’on verra au § 4.7) en est un exemple.

On peut montrer que la vitesse de la discontinuité n’est pas quelconque, mais elle est imposée par la structure des équations: une discontinuité située en  $x = s(t)$  se propage à la vitesse  $\dot{s}$  donnée par la *condition de Rankine–Hugoniot*

$$\dot{s} \llbracket \mathbf{U} \rrbracket = \llbracket \mathbf{F}(\mathbf{U}) \rrbracket, \quad (1.38)$$

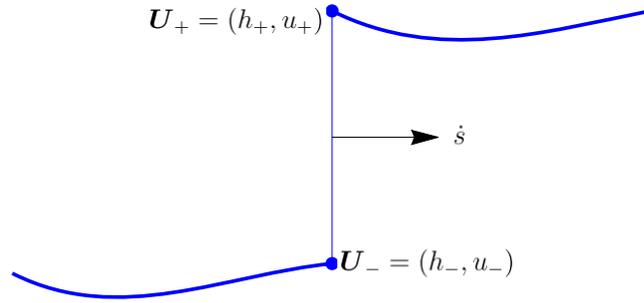


Figure 1.14 – Schéma de principe d'un choc.

où les doubles crochets représentent la variation brutale de  $u$  au passage du choc (voir figure 1.14):

$$[[U]] = U^+ - U^- = \lim_{x \rightarrow s, x > s} U - \lim_{x \rightarrow s, x < s} U,$$

les signes  $+$  et  $-$  sont employés pour désigner ce qui se passe à droite et à gauche respectivement de la discontinuité  $x = s(t)$ . Notons que le terme source  $S$  des équations de Saint-Venant – défini par l'équation (1.32) – n'a pas d'influence sur la valeur de la vitesse du choc  $\dot{s}$ .

Pour les équations de Saint-Venant sous forme conservative (1.22)–(1.23), les conditions de Rankine–Hugoniot s'écrivent:

$$\dot{s}[[h]] = [[hu]], \tag{1.39}$$

$$\dot{s}[[hu]] = [[hu^2 + gh^2/2]], \tag{1.40}$$

avec  $\dot{s}$  la vitesse de propagation du choc. On déduit de l'équation (1.39) la vitesse du choc  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = \frac{h_2 u_2 - h_1 u_1}{h_2 - h_1}, \tag{1.41}$$

et en reportant cette expression de  $\dot{s}$  dans l'équation (1.40), on en tire une expression indépendante de  $\dot{s}$  sous la forme d'un polynôme du second ordre en  $u_2$ :

$$\frac{(h_2 u_2 - h_1 u_1)^2}{h_2 - h_1} = h_2 u_2^2 + \frac{gh_2^2}{2} - h_1 u_1^2 - \frac{gh_1^2}{2}, \tag{1.42}$$

Quand on résout l'équation polynomiale, on déduit l'expression de  $u_2(h_2|h_1, v_1)$ , et de là la vitesse du choc:

$$u_2 = u_1 \mp (h_2 - h_1) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}}, \tag{1.43}$$

$$\dot{s} = u_1 \mp \sqrt{\frac{g}{2} (h_1 + h_2) \frac{h_2}{h_1}}. \tag{1.44}$$

Si l'on écrit ces relations dans un repère lié à l'onde de choc, alors on a  $v = u - \dot{s}$ . On peut éliminer la vitesse du choc pour obtenir un système d'équations qui fournit la valeur de  $(h_2, v_2)$  lorsque l'on connaît  $(h_1, v_1)$ . On substitue  $u$  par  $v + \dot{s}$  dans les équations (1.39)–(1.40) ci-dessus, ce qui nous conduit à :

$$h_1 v_1 = h_2 v_2, \quad (1.45)$$

$$h_1 v_1^2 + \frac{gh_1^2}{2} = h_2 v_2^2 + \frac{gh_2^2}{2}. \quad (1.46)$$

La première relation exprime la conservation du débit dans le système de coordonnées mobile, et la seconde expression la conservation de la quantité de mouvement. On note que ce sont les relations identiques à celles obtenues au § 1.1.4 pour le ressaut stationnaire.

### 1.2.7 Application : courbe de remous

La première application des équations de Saint-Venant concerne la courbe de remous. On montre ici qu'on retrouve l'équation de la courbe de remous (1.1) obtenue par application du théorème de Bernoulli.

Examinons ce qui passe pour un canal infiniment large. Puisque le régime est permanent ( $\partial_t h = 0$ ), la conservation de la masse (1.20) implique que le débit (par unité de largeur) est également constant :

$$\frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0 \Rightarrow q = h \bar{u} = \text{cste.}$$

Le long du bief,  $h(x)$  et  $\bar{u}(x)$  peuvent donc varier, mais ils sont toujours liés par la condition  $h \bar{u} = \text{cste}$ . La conservation de la quantité de mouvement (1.21) fournit

$$\bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{dh}{dx} - \frac{\tau_p}{\rho h},$$

où l'on a remplacé les dérivées partielles par des dérivées selon  $x$  car il n'y a plus qu'une seule variable. En se servant de la relation  $h \bar{u} = q$ , on a

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = q \frac{d}{dx} \frac{1}{h} = -\frac{q}{h^2} \frac{dh}{dx}.$$

En substituant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on tire

$$-\frac{q^2}{h^3} \frac{dh}{dx} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{dh}{dx} - \frac{\tau_p}{\rho h},$$

et après arrangement des termes

$$\frac{dh}{dx} \left( g \cos \theta - \frac{q^2}{h^3} \right) = g \sin \theta - \frac{\tau_p}{\rho h},$$

ce qui donne finalement l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{\tau_p}{\rho h}}{g \cos \theta - \frac{q^2}{h^3}}, \quad (1.47)$$

que l'on peut mettre aussi la forme condensée :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\tan \theta - \frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta}}{1 - Fr^2}, \quad (1.48)$$

où le nombre de Froude est une fonction de  $h(x)$  :

$$Fr = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh \cos \theta}} = \frac{q}{\sqrt{gh^3 \cos \theta}}.$$

On retrouve l'équation de la courbe de remous (1.1) obtenue par application du théorème de Bernoulli.

### 1.3 Limites d'utilisation des équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant ne sont localement plus valables ou peuvent être peu adaptées dans un certain nombre de situations :

- singularité : les ouvrages (seuils, vannes, ponts, dalots, ponceaux) placés au fil de l'eau créent des pertes de charge singulières et modifient les conditions hydrauliques. Dès que l'écoulement est en charge ou rapidement varié, les équations de Saint-Venant ne sont plus utilisables ;
- embranchement : les embranchements (confluence de rivières, bifurcation de canaux, etc.) entraînent des dissipations d'énergie supplémentaires, des courbes importantes des lignes de courant, de la vorticité et des courants secondaires ;
- courant secondaire : la topographie locale crée souvent des zones tourbillonnaires de grande échelle (courants secondaires) qui ne peuvent pas être décrits avec des équations moyennées sur la hauteur. Des modèles plus fins comme les modèles numériques de type *large eddy simulation* (LES) sont alors nécessaires (Keylock *et al.*, 2012) ;
- morphodynamique : un cours d'eau transporte du sédiment et/ou des débris (végétaux, glace). Il est en interaction avec le milieu environnant, et ces interactions sont plus ou moins faciles à prendre en compte selon leur complexité, l'échelle de temps considérée, et l'étendue spatiale ;

- forte courbure de la surface libre : le régime peut être graduellement varié, mais présentait une courbe de la surface libre. La distribution de pression s'éloigne de la pression hydrostatique. Des corrections comme celle apportées par Dressler pour tenir compte des effets centrifuges permettent d'améliorer le pouvoir prédictif des équations de Saint-Venant (Dressler, 1978; Sivakumaran *et al.*, 1983; Dressler & Yevjevich, 1984; Castro-Orgaz & Hager, 2017). Il faut parfois utiliser des équations plus sophistiquées comme les *équations de Boussinesq* (Castro-Orgaz & Hager, 2017). Certaines vagues avec des longueurs d'onde courtes (par rapport à la profondeur) ou bien des écoulements sur des radiers curvilignes sont des exemples d'application des équations de Boussinesq.

### 1.3.1 Singularité hydraulique

#### Seuils

Les ouvrages de type seuil et déversoir sont des obstacles posés perpendiculairement à l'axe de la rivière (seuil) ou parallèlement (déversoir latéral) comme le montre la figure 1.15. Ce sont des singularités du point de vue hydraulique, avec le plus souvent un changement de régime (sub/super-critique) au passage de l'ouvrage. Le régime est localement rapidement varié et ne peut donc pas être décrit à l'aide des équations de Saint-Venant.

Le plus souvent, on traite ces singularités comme des conditions aux limites internes, c'est-à-dire il faut résoudre les équations de Saint-Venant de part et d'autre de la singularité. Un seuil impose en général une condition de débit au droit du seuil de la forme :

$$q = C_D \sqrt{2g} (H_{am} - p)^{3/2}, \quad (1.49)$$

avec  $C_D$  le coefficient de débit (qui dépend d'une série de nombres adimensionnels et de la géométrie de l'ouvrage),  $H_{am}$  est la charge hydraulique à l'amont immédiat de l'ouvrage, et  $p$  est la pelle (hauteur du seuil par rapport à la cote du lit). Très souvent, on néglige la vitesse à l'approche du seuil, et on a donc la charge hydraulique qui coïncide avec la hauteur amont :  $H_{am} \approx h_{am}$ . On notera que cette équation a la même structure que l'équation (1.9), mais la constante de proportionnalité diffère ; il faut être vigilant quand on choisit la valeur du coefficient  $C_D$  à la forme exacte retenue pour  $q$ .

Cette équation correspond au régime *dénoué*, c'est-à-dire au mode de fonctionnement normal où les conditions hydrauliques à l'aval du seuil n'influent pas sur le comportement à l'amont. Si la pelle  $p$  est petite par rapport à la hauteur d'eau de part et d'autre, le seuil est alors noyé ; les conditions hydrauliques sont perturbées localement, et dépendent à la fois de ce qui se passe à l'amont et à l'aval. Le seuil est dénoyé lorsque la pelle vérifie la condition

$$\frac{h_{av} - p}{h_{am} - p} < \frac{2}{3}, \quad (1.50)$$



**Figure 1.15** – Différents types de seuil et déversoir. (a) Déversoir du lac de Louvie au-dessus de Fionnay (VS); (b) seuil de confortement du lit du torrent de Saint-Barthélemy au-dessus de Mex (VS); seuil noyé sur le Tibre à Rome (Italie); (d) déversoir latéral sur l’Aar à Berne.

avec  $h_{am}$  et  $h_{av}$  les hauteurs à l’amont et à l’aval du seuil. Si le seuil est noyé, alors débit au passage du seuil est décrit à l’aide d’une équation de la forme

$$q = C_D \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{2g}(h_{av} - p) \sqrt{h_{am} - h_{av}} \approx 2,6C_D \sqrt{2g}(h_{av} - p) \sqrt{h_{am} - h_{av}}. \quad (1.51)$$

Cette équation n’est valable que lorsque le terme de vitesse  $u^2/(2g)$  est négligeable par rapport à la hauteur d’écoulement (Rajaratnam & Muralidhar, 1969).

## Vannes

Les barrages au fil de l'eau sont souvent équipés de vannes qui permettent de réguler le débit d'eau ou imposer une hauteur d'eau (voir figure 1.16). Par application du théorème de Bernoulli, on trouve que lorsque la vanne est dénoyée, le débit par unité de largeur de vanne est de la forme (Hager & Schleiss, 2009)

$$q = C_D a \sqrt{2gh_1}, \quad (1.52)$$

avec  $h_1$  la hauteur d'eau à l'amont de la vanne,  $a$  l'ouverture de la vanne, et  $C_D$  le coefficient de débit.



**Figure 1.16** – Différents types de vanne. (a) vanne secteur sur la Dranse à Fionnay (VS); (b) vanne plane sur l'Alphée à Olympie (Grèce).

## Ponts, dalots, ponceaux, buses

Les routes enjambant les cours d'eau nécessitent la construction de pont ou la canalisation de l'eau dans des buses, dalots, ou ponceau (voir figure 1.17). Ces ouvrages présentent plusieurs problèmes dans la modélisation hydraulique (Hager & Schleiss, 2009; Hager, 2010):

- ils se comportent comme des vannes à ouverture fixe;
- en cas de débordement, l'eau peut suivre le tablier du pont et inonder des zones selon un axe perpendiculaire à la rivière;
- si la zone couverte est longue, l'écoulement peut se mettre localement en charge;

- le rétrécissement entraîne des pertes de charge importantes (convergence des lignes de courant, ressaut hydraulique), et il y a souvent une modification de la topographie du lit à l'amont et à l'aval (zones d'atterrissement à l'amont, d'afouillement à l'aval) de la singularité.



**Figure 1.17** – Différents types de passages couverts. (a) pont sur la Garonne à Toulouse (France). On notera les ouvertures aménagées au-dessus des piles du pont pour laisser transiter l'eau lors des crues ; (b) passerelle sur l'Aar à Berne ; (c) dalot sous l'autoroute A43 en Maurienne (France) ; (d) ressaut au passage entre deux piles du pont de Cordoue enjambant le Guadalquivir (Espagne).

## Embranchement

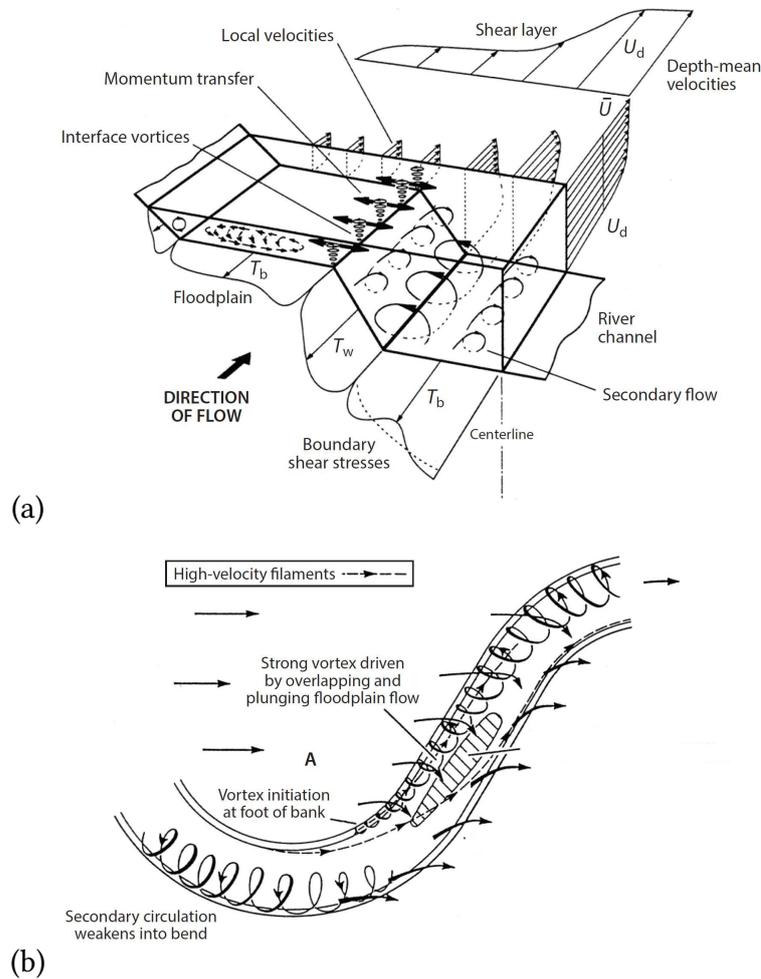
Les embranchements couvrent toute une gamme de géométries d'écoulement où deux masses d'eau (ou plus) se rencontrent ou se séparent : confluence de deux rivières, débouché dans une étendue d'eau, bifurcation, et prise d'eau. Comme le montre la figure 1.18 de la confluence de l'Arve et du Rhône à Genève, le mélange des eaux des deux rivières se fait progressivement. Il entraîne en général une dissipation d'énergie due à la contraction de l'écoulement et un dépôt de sédiment (Hager & Schleiss, 2009).



**Figure 1.18** – Jonction de l'Arve et du Rhône à Genève. L'eau de l'Arve est riche en sédiment glaciaire, qui confère à l'eau sa couleur blanchâtre, alors que l'eau du Rhône a déposé une partie de la charge sédimentaire dans le Léman. La température de l'eau est également différente. L'image a été prise à la mi-décembre 2023 alors que l'Arve était entrée en crue après de fortes précipitations. Source : RTS.

### 1.3.2 Courants secondaires

Comme les équations de Saint-Venant sont moyennées sur la hauteur, elles ne peuvent pas représenter des écoulements secondaires qui prennent naissance lorsqu'il y a une variation de la topographie du lit ou si le lit est sinueux (voir figure 1.19). Si on estime que ces courants sont importants pour la compréhension de la dynamique des écoulements pour un site donné, il faut employer des jeux d'équations plus raffinées comme les modèles de type Large Eddy Simulation (LES) (Keylock *et al.*, 2012).



**Figure 1.19** – (a) Les canaux droits composés sont le siège de recirculations (courants secondaires) qui modifient les caractéristiques de de l'écoulement principal.  $U$  est la vitesse et  $T$  est la contrainte de cisaillement sur le lit. Les indices  $d$ ,  $b$ , et  $w$  renvoient, respectivement, à la profondeur moyenne, au lit et la paroi. (b) Dans les méandres d'une rivière, la courbure des lignes de courant crée des courants secondaires dans la direction transversale. Source : (Bates, 2022).

### 1.3.3 Interactions morphodynamiques

L'interaction d'un cours d'eau avec le milieu environnant donne naissance à des différents processus agissant sur des échelles de temps diverses :

- sur le court terme :
  - transport de sédiment, de flottant, et de glace. La figure 1.20 montre quelques

exemples de transport à grande échelle spatiale. Les cours d'eau transportent du sédiment, mais aussi de la glace [figure 1.20(b)]. Dans certains estuaires comme celui de la Leyre en Gironde (France), les structures morphologiques résultent d'une triple action: rivière, courant océanique et vagues, et vent [figure 1.20(d)];

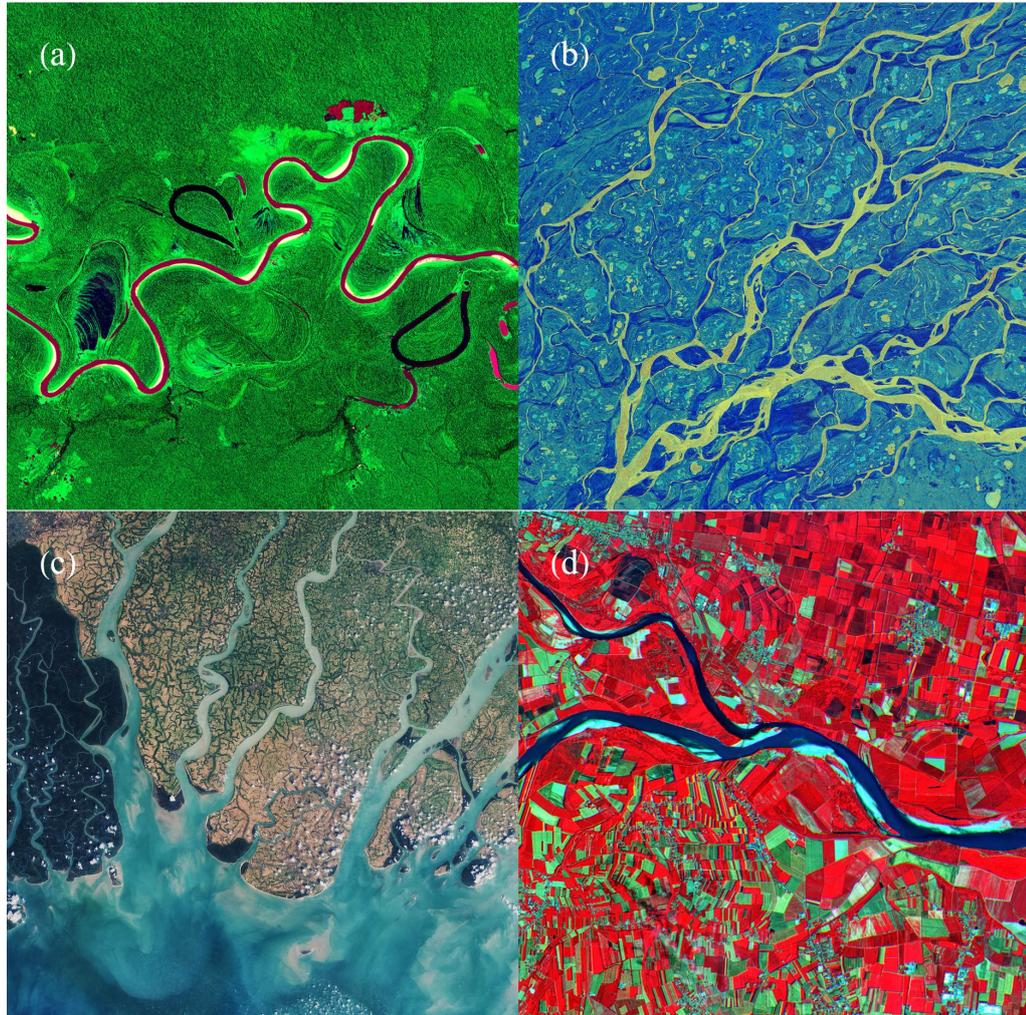
- érosion et déposition potentiellement intenses durant des crues. Comme le montre la figure 1.21, les crues peuvent fortement affouiller le terrain naturel et déposer de grandes quantités de sédiment durant la crue. De telles modifications sont impossibles à calculer sur la seule base des équations de Saint-Venant;
- transfert d'eau avec le sous-sol ou les zones humides environnantes. Les rivières naturelles franchissent des écosystèmes comme l'illustre la figure 1.22. La limite entre terre ferme et cours d'eau est floue et fluctuante. En cherchant à gagner des terrains agricoles et à lutter contre les crues, l'homme a drainé ces écosystèmes et il a forcé la chenalisation des principaux cours d'eau, ce qui a modifié la réponse de ceux-ci. On voit notamment des bancs alternés sur les cours canalisés comme celui du Pô à la figure 1.22(d)
- sur le moyen terme: formation et déplacement de structures morphologiques. Les structures morphologiques sont extrêmement variables selon le diamètre des sédiments du lit et la pente moyenne. La figure 1.23 montre quelques exemples de structures du lit;
- sur le long terme: modification des sections et profils d'écoulement.



**Figure 1.20** – Différents types de morphologies de lit à grande échelle. (a) Région du Zélande aux Pays-Bas, près de Terneuzen (frontière entre la Belgique et les Pays-Bas). Les couleurs claires représentent des zones peu profondes de l'estuaire de l'Escaut avec plusieurs bancs de sable visibles. Les couleurs plus foncées indiquent une charge sédimentaire plus élevée et des eaux plus profondes (mission Sentinel 2, 2020); (b) glacier Pie XI au Chili alimentant les eaux du lac Greve en Patagonie (mission Landsat 8, 2016); (c) baie du mont Saint-Michel éperon granitique situé à quelques centaines de mètres des côtes dans l'estuaire de la Rance en Normandie. Le marnage y est important – de l'ordre de 15 m – et met à découvert de vastes étendues (mission Sentinel 2, 2017); (d) baie d'Arcachon (France) avec la dune du Pilat – 2,7 km de long, 500 m de large et 110 m de hauteur – (satellite japonais ALOS, 2009). Source : [European Spatial Agency](#).



**Figure 1.21** – Modification substantielle du lit. (a) et (b) deux vues d'un du Rote Bach (BE) le 28 juillet 2003 et 4 août 2004, après le passage d'une crue qui a emporté une partie des berges. Source: Eva Gertsch ([Gertsch, 2009](#)); (c) village de Schlans dans les Grisons après une crue torrentielle en 2002 (source: [Planat](#)); (d) village de Saint-Martin-de-Vésubie (Alpes-Martimes, France) ravagé par la crue de la Vésubie le 2 octobre 2020 (source: [La Nouvelle République](#)).



**Figure 1.22** – Différents types de morphologies de lit à grande échelle. (a) Lit en méandres de l’Amazone (Brésil) en 2019 (mission Copernicus Sentinel 2); (b) delta de rivière Lena (Russie) en 2019 (mission Copernicus Sentinel 1); (c) Sundarbans au Bangladesh dans la région du système Gange-Brahmaputra. Les zones foncées à gauche sont fortement urbanisées tandis que sur la droite de l’image, on a une zone de mangrove irriguée par le delta du Gange (mission Sentinel 2A, 2016); (d) confluence de la rivière Tessin et du Pô à Pavie (mission Sentinel 2A, 2015). Les bancs de gravier sont bien visibles, ils sont alternés, et placés dans l’intrados des méandres. Source : [European Spatial Agency](#).



**Figure 1.23** – Différents types de morphologies de lit. (a) Lit de gros blocs de l'Avançon aux Plans-sur-Bex (VD); (b) alternance seuil-mouille sur la Navisence à Zinal (VS ); (c) lit en tresse du Tagliamento (Italie); (d) lit de sable avec des rides.

## 1.4 Résistance à l'écoulement

### 1.4.1 Mécanismes généraux de dissipation d'énergie

Il existe différentes formes de lit (voir figure 1.24) :

- lit fixe : rocheux (*bedrock*), coursier en béton ;
- lit déformable :
  - lit alluvial : l'eau s'écoule sur les alluvions qu'elle a déposées. Ces lits peuvent être *mobiles*, c'est-à-dire que la surface du lit évolue au fil du temps sous l'effet du transport de sédiment transporté par la rivière. Le transport solide crée des structures morphologiques (dunes, bancs de sable ou gravier, seuils, etc.) ;
  - lit végétalisé : tout ou partie du lit est couvert de végétation (algues, végétation de berge, etc.)

La résistance à l'écoulement traduit la résistance qu'exerce le fond (lit fixe ou mobile) sur l'écoulement d'eau. On considère qu'il existe principalement deux processus de résistance :

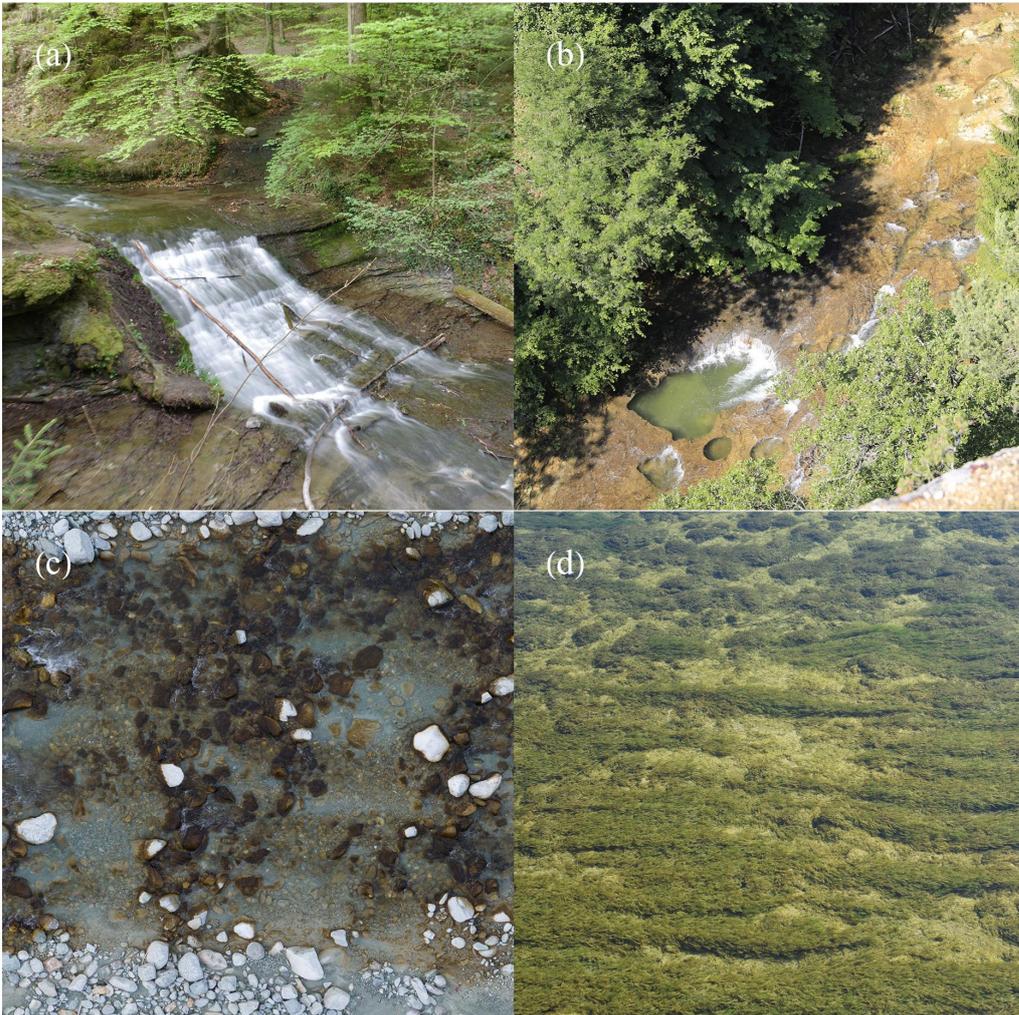
- une résistance à l'échelle des particules, dite « frottement de peau », c'est-à-dire le frottement exercé par les grains composant le lit, ce qui explique pourquoi beaucoup de formules empiriques font appel au diamètre des grains comme paramètre d'influence ;
- une résistance à plus grande échelle, dite « frottement de forme », liée aux structures morphologiques (dunes, alternance de seuils et mouilles) qui accroissent la dissipation d'énergie au sein de l'écoulement.

À cela s'ajoutent d'autres processus plus spécifiques comme les résistances causées par des variations brutales de section d'écoulement ou la sinuosité du lit ou le transport de sédiment ; l'accélération, la décélération, les courants secondaires et la vorticit   accroissent la dissipation d'énergie.

Comme tr  s souvent en pratique pour la plupart des applications, on ne cherche pas    calculer individuellement les contributions    la r  sistance totale du lit sur l'  coulement, mais on g  n  ralise les formules de r  sistance de peau ou ajuste ses param  tres pour tenir compte des autres processus.

Une difficult   suppl  mentaire dans l'estimation de la r  sistance    l'  coulement est que le lit peut   tre h  t  rog  ne (voir figure 1.25) :

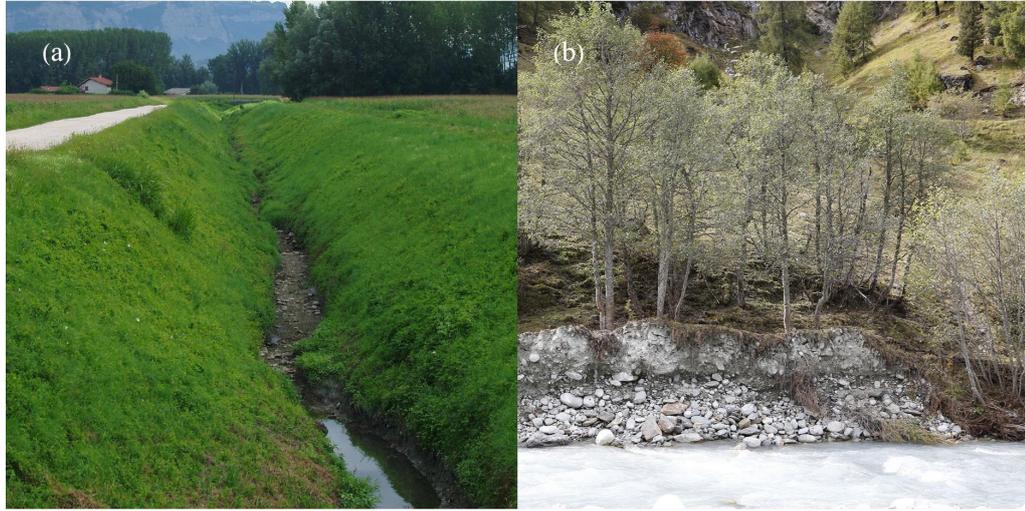
- lit compos   : le lit peut comporter des parties avec des comportements diff  rents. Par exemple, un canal peut   tre en terre battue, avec des parois v  g  talis  es ;
- lit mineur/lit majeur : la plupart du temps, l'eau s'  coule dans le lit mineur, mais si le d  bit augmente suffisamment, elle va d  border et occuper le lit majeur. La



**Figure 1.24** – (a) Le Talent coulant sur son lit rocheux (bedrock) à Montheron (VD); (b) l'Orbe coulant sur son lit rocheux au-dessus de Vallorbe (VD); (c) la Navisence coulant sur un lit alluvial en partie colonisé par des algues (*Hydrurus foetidus*) à Zinal (VS); (d) le Doubs coulant sur un lit végétalisé à Saint-Ursanne (JU).

rugosité du lit majeur est généralement tout autre. Elle peut être composée de végétation haute ou de zone urbanisée.

Il existe des procédures spécifiques pour estimer la rugosité équivalente de sections de lit composé (Yen, 2002).



**Figure 1.25** – (a) Canal d’irrigation dans un champ, dont les berges sont végétalisées; (b) lit de la Navisence avec berges taillées dans les dépôts quaternaires et couvertes de végétation.

### 1.4.2 Loi de Darcy–Weisbach

La loi d’emploi le plus courant en hydraulique (en charge ou à surface libre) est la loi de Darcy–Weisbach :

$$\tau_p = \frac{f}{8} \rho \bar{u}^2, \quad (1.53)$$

avec  $f$  le coefficient de Darcy–Weisbach, qui est supposé *a priori* être une fonction de nombres sans dimension tels que les nombres de Reynolds  $Re$ , Froude  $Fr$ , et de submersion relative  $\xi$  (entre autres nombres) (Rouse, 1965; Colosimo *et al.*, 1988) :

$$f = f(Re, Fr, \xi, \dots)$$

avec  $\xi = R_h/k_s$  où  $k_s$  est une échelle de rugosité. On prend souvent  $k_s = d_{90}$  (90 % des blocs ont un diamètre plus petit que  $d_{90}$ ) ou  $k_s = d_{84}$ . Si on introduit la vitesse de frottement  $u_* = \sqrt{\tau_p/\rho}$ , alors on peut écrire la loi de Darcy–Weisbach (1.53) sous la forme

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{f}{8}} u_*, \quad (1.54)$$

ou de façon équivalente en termes de hauteur normale (pour un régime permanent uniforme)

$$h_n = \left( q \sqrt{\frac{f}{8gi}} \right)^{2/3}. \quad (1.55)$$

Cette définition du coefficient de frottement est équivalente à celle employée en hydraulique en charge où la perte de charge par unité de longueur est définie comme

$$j = -\frac{dH}{dx} = \frac{f}{2g} \frac{\bar{u}^2}{D_h} \text{ avec } D_h = 4\frac{A}{\chi} = 4R_h$$

avec  $D_h$  le diamètre hydraulique. En comparant avec l'équation (1.53), on déduit

$$j = \frac{\tau_p}{\rho g R_h}.$$

### 1.4.3 Loi de Chézy

Historiquement, la première loi a été celle de Chézy :

$$\tau_p = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u}^2, \quad (1.56)$$

avec  $C$  le coefficient de Chézy [ $\text{m}^{1/2}\text{s}^{-1}$ ]. Cette loi est peu employée en ingénierie de nos jours. On peut aussi mettre cette équation sous la forme

$$\bar{u} = \frac{C}{\sqrt{g}} u_*, \quad (1.57)$$

ou de façon équivalente en termes de hauteur normale pour un canal infiniment large

$$h_n = \left( \frac{q}{C\sqrt{i}} \right)^{2/3}. \quad (1.58)$$

### 1.4.4 Loi de Manning–Strickler

La loi la plus employée en ingénierie hydraulique – car valable pour une large gamme de débits et de rugosité – est la loi de Manning–Strickler<sup>7</sup> ; la contrainte pariétale s'écrit

$$\tau_p = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_h^{1/3}}, \quad (1.59)$$

avec  $K$  le coefficient de Strickler. Elle correspond à une pente de frottement

$$j = \frac{\tau_p}{\rho g R_h} = \frac{1}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_h^{4/3}}$$

7. Certains proposent d'appeler cette loi de Gauckler–Manning–Strickler pour rétablir le rôle de Philippe Gauckler dans l'établissement de la formule (Powell, 1962; Dooge, 1992; Hager, 2001; Vischer, 1987), mais on conservera ici la désignation habituelle. L'ingénieur français Philippe Gauckler (1826–1905) a été en effet le premier à établir cette loi sur la base des données expérimentales de Henry Bazin (1829–1917).

On peut aussi mettre cette équation sous la forme

$$\bar{u} = \frac{KR_h^{1/6}}{\sqrt{g}} u_*, \quad (1.60)$$

ou de façon équivalente en termes de hauteur normale pour un canal infiniment large

$$h_n = \left( \frac{q}{K\sqrt{i}} \right)^{3/5}. \quad (1.61)$$

On a la relation d'équivalence entre coefficients de Darcy–Weisbach, Chézy, et Strickler:

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{KR_h^{1/6}}{\sqrt{g}} = \frac{C}{\sqrt{g}}.$$

Les Anglo-Saxons emploient le coefficient de Manning  $n = 1/K$ .

Pour les applications en ingénierie, il est fréquent d'employer des valeurs de  $K$  tabulées en fonction du type de cours d'eau (voir notamment [Chow \(1959\)](#)):

- canal en béton lisse:  $K = 65 - 80 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ ;
- canal en terre:  $K = 40 - 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ ;
- rivière à galet, rectiligne, section uniforme:  $K = 30 - 40 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ ;
- rivière avec méandre, sinuosité, etc.:  $K = 20 - 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ ;
- rivière végétalisée ou torrent:  $K = 10 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ .

Une alternative consiste à relier  $K$  à la rugosité du lit. C'est la méthode de [Strickler \(1922\)](#) qui a corrélé  $K$  et diamètre<sup>8</sup> à partir d'une analyse de grandes rivières suisses (principalement le Rhin, mais également l'Aare, la Reuss, le Rhône, la Simme et la Drance), américaine (Mississippi), françaises (Saône, Seine), et autrichiennes (Danube):

$$K = \frac{21,1}{d_{50}^{1/6}}. \quad (1.62)$$

[Meyer-Peter & Müller \(1948\)](#) ont suggéré de prendre le diamètre  $d_{90}$  pour les rivières à lit de gravier:

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}},$$

ou bien sa variante actuelle proposée par [Jaeggi \(Smart & Jaeggi, 1983; Jäggi, 1984\)](#):

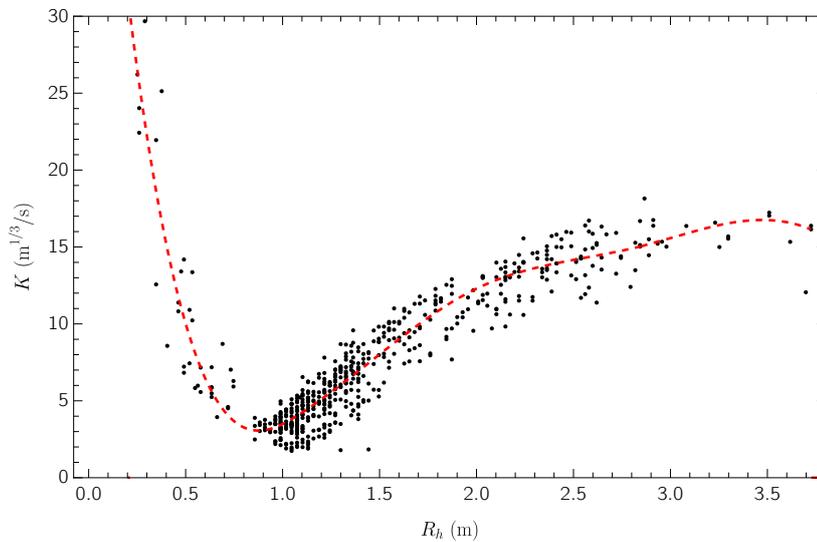
$$K = \frac{26}{k_s^{1/6}} = \frac{23,2}{d_{90}^{1/6}},$$

---

8. Strickler ne précisa pas de quel diamètre il parlait, et donc par défaut les auteurs ultérieurs ont supposé qu'il parlait du diamètre médian.

où  $d_{90}$  est diamètre des gros blocs ; ce diamètre caractéristique sert aussi à définir une échelle caractéristique  $k_s = 2d_{90}$ , qui est utilisée notamment dans la formule de Keulegan (voir *infra*).

Si la loi de Strickler (1.62) donne des résultats corrects pour les grandes rivières (grande submersion relative) sans effet notable des structures morphologiques, elle est beaucoup moins précise pour les petites rivières (typiquement les rivières torrentielles) ou bien lorsque les structures morphologiques sont responsables d'une forte dissipation d'énergie. La loi de Strickler tend alors à sous-estimer notablement (souvent d'un facteur 2 ou plus) la hauteur d'eau et à surestimer les vitesses (Ferguson, 2010). On se reportera utilement aux § 1.5.7 et § 1.5.10 pour plus d'informations. Comme le montre la figure 1.26, la valeur de  $K$  est loin d'être constante pour un cours d'eau : à très faible hauteur, il est probable que l'eau s'écoule sur des nappes de sable piégées entre les bancs de gravier. Quand le niveau d'eau augmente, ces nappes sont charriées par l'écoulement, la rugosité croît (donc  $K$  diminue). Au fur et à mesure que la hauteur d'eau croît, les effets de la rugosité de forme diminue, et  $K$  tend vers une valeur d'environ  $15 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ , qui est bien inférieure à la valeur donnée par la formule de Jaeggi  $K = 23,2d_{90}^{-1/6} = 28 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$  (avec  $d_{90} = 338 \text{ mm}$ ). On verra au § 1.5.7 les principes de correction du coefficient  $K$  en fonction du type de structure morphologique.



**Figure 1.26** – Variation du coefficient de Manning–Strickler pour la rivière Lochsa près de Lowell (États-Unis, Idaho). Les valeurs de  $K$  ont été obtenues à partir des mesures de débit  $Q$ , de surface mouillée  $A$ , et de rayon hydraulique  $R_h$  :  $K = Q/(AR_h^{2/3}\sqrt{i})$ . La courbe en tireté rouge est une régression calée sur la valeur médiane de  $K$ . Source : [Sediment Transport in Idaho & Nevada \(Boise Adjudication Team\)](#) ; pente  $i = 0,23 \%$ ,  $d_{50} = 126 \text{ mm}$ , et  $d_{90} = 338 \text{ mm}$ .

Il existe également des méthodes d'estimation visuelle qui consistent à chercher dans des bases de données photographiques et topographiques le cours d'eau (documenté) qui ressemble le plus au cours d'eau que l'on souhaite étudier et à utiliser la valeur de  $K$  obtenu sur le site documenté. On se reportera aux publications suivantes : « [Rauheiten in ausgesuchten schweizerischen Fließgewässern](#) » (en allemand) du Bundesamt für Wasser und Geologie (maintenant rattaché à l'Office fédéral de l'énergie) pour une analyse de 12 cours d'eau en Suisse pour différents débits. Cet ouvrage fournit une estimation du paramètre de Manning–Strickler  $K$  en fonction des conditions hydrologiques, morphologiques, granulométriques, et hydrauliques.

On pourra aussi se référer :

- au [site de l'USGS](#) pour un catalogue de valeurs de  $n = 1/K$  pour différentes rivières (américaines). Le tableau fournit à la fois des photographies de biefs et les caractéristiques des sections mouillées (Barnes, 1967) ainsi qu'au rapport de Coon (1998), Phillips & Ingersoll (1998) et Arcement & Schneider (1989) ;
- à la [publication](#) « Photographic guidance for selecting flow resistance coefficients in high-gradient channels » qui fournit des valeurs des coefficients de Manning et de Darcy–Weisbach pour des torrents de montagne aux États-Unis et dans les Alpes italiennes (Yochum *et al.*, 2014) ;
- au logiciel de calcul assisté de résistance à l'écoulement « Conveyance Estimation System » développé par HR Wallingford (Mc Gahey *et al.*, 2008, 2009; Knight *et al.*, 2018). Le logiciel est disponible depuis [www.river-conveyance.net](http://www.river-conveyance.net).

### 1.4.5 Lois de Keulegan et formes similaires

Avant d'aborder la loi de Keulegan et ses variantes, il faut dire un mot sur l'origine physique de cette loi en revenant sur la *loi de Prandtl* pour modéliser la turbulence près d'une paroi.

#### Loi de Prandtl

Pendant longtemps, on a utilisé le profil de vitesse logarithmique (en principe valable uniquement près du fond) pour décrire tout le profil de vitesse d'un écoulement hydrauliquement turbulent dans un canal (voir chap. 6 du [cours de bachelor](#) « introduction à la mécanique des fluides »). Un des tout premiers modèles empiriques de turbulence est dit « modèle de longueur de mélange » ou loi de Prandtl ; ce modèle implique que la contrainte de cisaillement près d'une paroi peut être approchée par la relation empirique

$$\tau(y) = \mu_t \frac{d\langle u \rangle}{dy} = \rho \ell_m^2 \left( \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2 = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2, \quad (1.63)$$

où la viscosité turbulente  $\mu_t$  est définie en fonction du gradient de vitesse moyenne  $\langle u \rangle$ , de la longueur de mélange  $\ell_m = \kappa y$ , et de la constante de von Kármán  $\kappa \approx 0,41$

$$\mu_t = \varrho \ell_m^2 \frac{d\langle u \rangle}{dy}. \quad (1.64)$$

Près de la paroi, la contrainte de cisaillement est constante et vaut  $\tau_p$ . On définit une *vitesse de frottement* (appelée encore *vitesse de cisaillement*):

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\varrho}}.$$

En régime permanent uniforme ( $\tau_p = \varrho g R_h \sin \theta$  avec  $R_h$  le rayon hydraulique), on a :  $u_* = \sqrt{g R_h \sin \theta} \approx \sqrt{g R_h \bar{i}}$  (ou  $\sqrt{g h \bar{i}}$  pour un canal infiniment large). Si on suppose que la contrainte de cisaillement est constante  $\tau(y) = \tau_p = \varrho u_*^2$  dans la loi de Prandtl (1.63) (c'est-à-dire on néglige sa variation linéaire), alors on peut intégrer facilement l'équation (1.63)

$$\tau(y) = \varrho u_*^2 \Rightarrow \kappa y \frac{d\langle u \rangle}{dy} = u_*,$$

ce qui donne

$$u(y) = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + c_1,$$

avec  $c_1$  une constante d'intégration. Comme on a supposé que la contrainte de cisaillement est constante, cette solution n'est en principe valable que près du fond de l'écoulement, mais en pratique on verra qu'elle constitue une bonne approximation du profil de vitesse.

Déterminons maintenant la constante d'intégration  $c_1$ . On suppose que  $y_0$  correspond à la cote à laquelle la condition de non-glissement ( $u(y_0) = 0$ ) est satisfaite. On obtient donc le profil de vitesse logarithmique (Keulegan, 1938):

$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}, \quad (1.65)$$

qui est valable pour des nombres de Reynolds tels que

$$\text{Re}_* = \frac{u_* k_s}{\nu} > 70,$$

un régime pour lequel  $y_0$  dépend uniquement de l'échelle de rugosité (voir ci-dessous). Pour les petits nombres de Reynolds ( $\text{Re} < 10$ , une condition qui ne rencontre que pour du sédiment très fin et des pentes douces), le paramètre  $y_0$  dans la loi de Keulegan dépend de l'épaisseur de la couche limite (García, 2007).

On a typiquement  $y_0 = k_s/a$  avec  $a \approx 30$  pour des rivières de gravier (Keulegan, 1938). On a introduit  $k_s$  qui est la taille caractéristique des plus grosses rugosités du lit. Pour les lits de gravier, on trouve que cette taille est, de façon surprenante, plus importante que la taille des éléments les plus grossier. On prend souvent :  $k_s \approx 2d_{90}$

(Kamphuis, 1974), mais il existe une multitude d'autres propositions :  $k_s = 3,5d_{84}$  (Hey, 1979),  $k_s = 3d_{84}$  (Pitlick, 1992),  $k_s = 5,9d_{50}$  (Millar, 1999), ou  $k_s = 2,4d_{90}$  (López & Barragán, 2008). Aucune d'entre elles ne permet d'obtenir une meilleure précision du profil de vitesse (López & Barragán, 2008).

Cette rugosité accrue du lit pourrait refléter l'existence de structures morphologiques de la taille des grains grossiers (micro-rides) qui créeraient un *frottement de forme* – voir § 1.5.7 pour plus d'information sur ce sujet – (Clifford *et al.*, 1992). Selon Aberle & Smart (2003), la bonne façon de calculer une échelle de rugosité caractéristique  $k_s$  serait de mesurer le profil en long du lit à l'échelle du grain, puis à définir  $k_s$  comme l'écart-type de la variation de la cote du lit à cette échelle.

### Loi de Coles

En principe, la loi de Prandtl ne décrit que ce qui se passe dans une couche de fluide proche de la paroi – c'est notamment la conséquence de l'hypothèse  $\tau$  constante, mais aussi du domaine de validité d'une loi de Prandtl qui reflète l'effet d'une paroi solide sur la turbulence. On considère souvent que loi de Prandtl n'est valable que pour  $y \leq 0,15h$ , et que pour les couches supérieures, la turbulence est influencée par la surface libre (Hinze, 1975; Nezu & Nakagawa, 1993). Une façon simple de prendre en compte l'effet de la surface libre est d'utiliser la loi de déficit de vitesse proposée par Coles (1956) et qui traduit un ralentissement du fluide à l'approche de la surface libre :

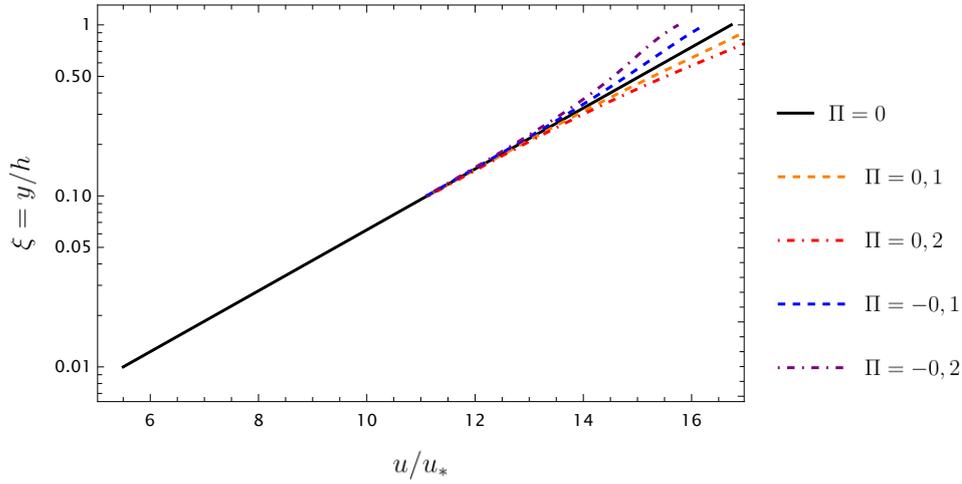
$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} + \frac{2\Pi}{\kappa} \omega(y) \text{ avec } \omega(y) = \sin^2 \left( \frac{\pi y}{2h} \right), \quad (1.66)$$

avec  $\Pi$  le paramètre de sillage de Coles  $\omega$ . Les valeurs de  $\Pi$  sont souvent trouvées faibles pour les lits de gravier :  $|\Pi| < 0,15$  (Kironoto & Graf, 1994; Song *et al.*, 1994), et en conséquence, il est fréquent de considérer que la loi de Keulegan (1.65) est valable sur toute l'épaisseur d'écoulement tant que l'écoulement est permanent uniforme. Les profils sont plus compliqués si le lit présente des structures morphologiques qui perturbent l'écoulement (accélération et décélération locales, zone de recirculation, etc.). La loi de Coles (1.66) s'écrit parfois sous la forme d'un déficit de vitesse (qui est son autre nom, « defect law » en anglais) :

$$\frac{u_{max} - u(\xi)}{u_*} = -\frac{1}{\kappa} \ln \xi + \frac{2\Pi}{\kappa} (1 - \omega(\xi)) \text{ avec } \xi = \frac{y}{h}, \quad (1.67)$$

avec  $u_{max}$  la vitesse maximale sur une épaisseur de fluide (le plus souvent, la valeur maximale de  $u$  est observée au niveau de la surface libre). La figure 1.27 donne l'allure du profil de vitesse pour des valeurs de  $\Pi$  entre  $-0,2$  et  $0,2$ .

La loi de sillage de Coles implique que la longueur de mélange  $\ell_m$  s'écarte de la variation linéaire  $\ell_m = \kappa y$  adoptée dans le modèle de Prandtl (1.63). En égalant la distribution de contrainte  $\tau = \rho g(h - y)i = \tau_p(1 - \xi)$  en régime permanent et la loi



**Figure 1.27** – Profils de vitesse (en échelle log-linéaire) donnée par la loi de Coles (1.66) pour différentes valeurs de  $\Pi$ .

de Prandtl (1.63)

$$\tau(y) = \tau_p(1 - \xi) = \rho \ell_m^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2,$$

on montre que la longueur de mélange  $\ell_m$  devient une fonction non linéaire de la distance au lit  $\xi$  :

$$\frac{\ell_m(y)}{h} = \frac{\sqrt{1 - \xi}}{1 + 2\Pi h \omega' \xi^{\kappa} \xi}.$$

Si on intègre l'équation (1.65) entre  $y_0$  et  $y_0 + h$  et en supposant  $y_0 \ll h$ , on obtient la vitesse moyenne :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{ch}{k_s} - 1 \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{ah}{ek_s}, \quad (1.68)$$

avec  $e = 2,718$ . Si on opte pour l'équation de Coles (1.66), on obtient

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{ch}{k_s} - 1 \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{ah}{ek_s} + \frac{\Pi}{\kappa}. \quad (1.69)$$

### Loi de Keulegan

[Keulegan \(1938\)](#) a considéré que la loi de Prandtl était valable sur toute l'épaisseur de l'écoulement (ce qui revient à prendre  $\Pi = 0$  dans la loi de Coles (1.66)). Il a intégré le profil de vitesse logarithmique (1.65) du modèle de Prandtl (avec  $y_0 = k_s/a$  où  $a = 33$

et  $\kappa = 0,40$ ) sur toute l'épaisseur :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{ah}{ek_s} = 6,0 + 2,5 \ln \frac{h}{k_s}. \quad (1.70)$$

avec  $e = 2,718$  et l'hypothèse  $h \gg k_s$ . Il a également exprimé sa loi de la façon suivante (en base logarithmique 10)

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 6,25 + 5,75 \log \frac{h}{k_s}. \quad (1.71)$$

Cette équation se rencontre parfois sous la forme suivante équivalente (qui permet de faire le lien avec la loi de Darcy–Weisbach) :

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8ghi}{f}} \text{ puisque } u_* = \sqrt{ghi}, \quad (1.72)$$

avec comme expression du coefficient de frottement  $f$

$$f = 8 \left( 6,25 + 5,75 \log \frac{h}{k_s} \right)^{-2} = \left( 2,03 \log \frac{12,2h}{k_s} \right)^{-2}. \quad (1.73)$$

Pour un régime permanent uniforme et un canal infiniment large, la hauteur normale est donnée par l'équation de Darcy–Weisbach (1.55)

$$h_n = \left( q \sqrt{\frac{f}{8gi}} \right)^{2/3}. \quad (1.74)$$

Pour des lits très rugueux ( $h/k_s < 4$ ), il est préférable de prendre un frottement  $f$  un peu plus faible. Par exemple, [Song \(1994\)](#) a proposé :

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8ghi}{f}} \text{ avec } f = \left( 2,03 \log \frac{3,67h}{k_s} \right)^{-2}, \quad (1.75)$$

soit aussi

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 3,25 + 5,75 \log \frac{h}{k_s}. \quad (1.76)$$

Le parti pris est ici de considérer que la loi de Keulegan est toujours valable, notamment que la loi de Prandtl de la longueur de mélange  $\ell_m = \kappa y$  (avec la constante de von kármán  $\kappa = 0,40$ ) est toujours valide. D'autres auteurs remettent en question l'universalité de cette loi ([Koll, 2006](#); [Gaudio & Dey, 2013](#)), et notamment suggèrent de prendre des valeurs de  $\kappa$  plus faibles pour  $h/k_s < 10$ . On se reportera au paragraphe suivant pour plus d'informations sur le problème des faibles submersions.

La loi (1.72) se généralise à des sections quelconques en remplaçant la hauteur  $h$  par le rayon hydraulique  $R_h$ , mais il y a une légère dépendance de  $f$  vis-à-vis de la forme de la section en travers

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8gh_i}{f}} \text{ avec } f = \left(2,03 \log \frac{aR_h}{k_s}\right)^{-2}, \quad (1.77)$$

avec  $11,1 \leq a \leq 13,50$  pour des canaux rectangulaires ou trapézoïdaux et  $12,9 \leq a \leq 13,50$  pour des canaux cylindriques (Keulegan, 1938; Hey, 1979).

### Cas-limite des écoulements à faible submersion

Lorsque la hauteur d'écoulement est faible par rapport à la taille caractéristique de la rugosité du lit – voire de même dimension –, il devient plus difficile de définir le niveau de référence où la vitesse est nulle, niveau qui est censé renseigner sur la position effective du fond (Nikora *et al.*, 2001). On distingue trois couches principales (voir figure 1.28) :

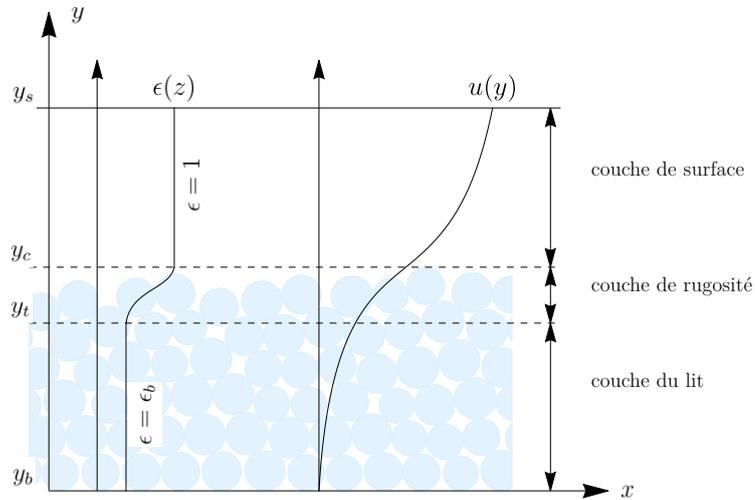
- la *couche de surface*  $y > y_c$  qui correspond à l'écoulement d'eau au-dessus de la crête  $y_c$  des plus grandes protubérances du lit, et qui comprend la sous-couche logarithmique et la sous-couche externe ;
- la *couche de rugosité*  $y_c \geq y > y_t$  qui correspond à l'écoulement de transition entre l'écoulement dans le milieu poreux (généralement en régime laminaire) et l'écoulement dans la couche de surface (généralement en régime turbulent)<sup>9</sup>. La porosité<sup>10</sup>  $\varepsilon$  varie de  $\varepsilon = 1$  en  $y = y_c$  à  $\varepsilon = \varepsilon_b$  en  $y = y_t$ , où  $\varepsilon_b$  désigne la porosité du lit (supposée constante et homogène dans les premiers couches du lit granulaire).;
- la couche du lit  $y \leq y_t$  dans lequel prend place un écoulement un écoulement en régime laminaire.

La définition de la hauteur du fluide est rendue arbitraire. On posera ici  $h = y_s - y_t$ . Le lit n'est pas nécessairement uniformément plat ; il peut être composé de structures morphologiques de hauteur  $\Delta$ . La submersion relative est définie comme  $\xi = h/\Delta$ .

La structure de la turbulence est souvent bien plus complexe à cause des fortes variations temporelles et spatiales à l'échelle des grains ou des structures morphologiques. Il est toutefois possible d'obtenir des descriptions simplifiées à l'aide d'une technique appelée « double moyenne » dont l'emploi en hydraulique a été proposé par Vladimir Nikora et qui consiste à moyennner en temps et en espace les équations de Navier–Stokes

9. Cette couche est parfois subdivisée en sous-couche de forme dans laquelle les perturbations causées par les protubérances du lit sur la turbulence sont significatives et la sous-couche de forme au sein de laquelle les effets de traînée sont significatifs (Nikora *et al.*, 2001).

10. La porosité  $\varepsilon$  est définie comme le rapport du volume de fluide sur le volume total dans un volume de contrôle.



**Figure 1.28** – Structure de l'écoulement pour un écoulement peu épais. Figure adaptée de [Nikora et al. \(2001\)](#).

([Nikora et al., 2001, 2007a,b](#); [Dey & Das, 2012](#); [Rousseau & Ancey, 2022](#)). Le modèle de longueur de mélange (1.64) employée par Prandtl est généralement peu adapté à décrire des écoulements à faible submersion, et il faut recourir à d'autres paramétrisations empiriques de la viscosité ([Nikora et al., 2004, 2007b](#); [Manes et al., 2007](#); [Rousseau & Ancey, 2022](#)).

Pour des écoulements suffisamment épais ( $4\Delta \leq h \leq 40 - 80\Delta$ ), le profil de vitesse doublement moyenné s'approche du profil logarithmique ([Graf, 1991](#); [Nikora et al., 2002](#))

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = B + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y-d}{k_s}, \quad (1.78)$$

où  $\kappa$  est la constante de von Kármán,  $k_s$  l'échelle de rugosité,  $d$  est la hauteur de déplacement ( $z = d$  correspond à la position virtuelle de l'interface lit-écoulement).

Pour des écoulements peu épais (typiquement  $h < 10\Delta$ ), des auteurs ont trouvé que la constante de von Kármán  $\kappa$  n'avait plus de caractère universel ( $\kappa = 0,41$ ) et peut prendre des valeurs dans la plage 0,2–0,40 ([Koll, 2006](#); [Gaudio et al., 2010](#)). De même pour des surfaces du lit très irrégulières ( $\sigma_k > 0,6\Delta$  avec  $\sigma_k$  l'écart-type de la position de l'interface lit-écoulement), le paramètre  $\kappa$  peut prendre des valeurs bien inférieures à la valeur usuelle 0,41. D'autres auteurs considèrent que si on se place dans le cadre des techniques de double moyenne ([Nikora et al., 2007a,b](#)), il est possible d'obtenir des résultats robustes, avec notamment la possibilité de pouvoir continuer à utiliser la loi de Prandtl. Toutefois, il faut abandonner la définition de la longueur de mélange  $\ell_m = \kappa y$  proposée par Prandtl et employer des formes non linéaires comme celle proposée par

Nezu & Rodi (1986)

$$\frac{\ell_m}{h} = \kappa \sqrt{1 - \xi} (\xi^{-1} + \pi \Pi \sin(\pi \xi))^{-1} \Gamma(\xi)$$

avec

$$\xi = \frac{y}{h} \text{ et } \Gamma(\xi) = 1 - \exp\left(-\frac{u_* y}{\nu A}\right)$$

où  $\Gamma$  est la fonction d'amortissement de van Driest et  $A = 26$  est la constante de van Driest. La loi de Nezu a été validée par plusieurs expériences (Umeyama & Gerritsen, 1992; Rouzes *et al.*, 2019; Rousseau & Ancy, 2022).

Des auteurs ont proposé d'ajouter un facteur correcteur à la loi de Keulegan (1.73) pour prendre en compte les faibles submersions. Ainsi, Cao (1985) pondère la loi de Keulegan (1.71) de la façon suivante

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \left(6,25 + 5,75 \log \frac{h}{d_{50}}\right) (1 - e^{-Y}) \quad (1.79)$$

avec une dépendance vis-à-vis de la submersion relative

$$Y = \alpha \left(\frac{h}{d_{50}}\right)^\beta \text{ où } \alpha = 1,053 \text{ et } \beta = 0,255,$$

ou bien une dépendance vis-à-vis de la submersion relative et du nombre de Froude

$$Y = \alpha \left(\frac{h}{d_{50}}\right)^\beta \text{Fr}^\gamma \text{ où } \alpha = 0,834, \beta = 0,318 \text{ et } \gamma = 0,779.$$

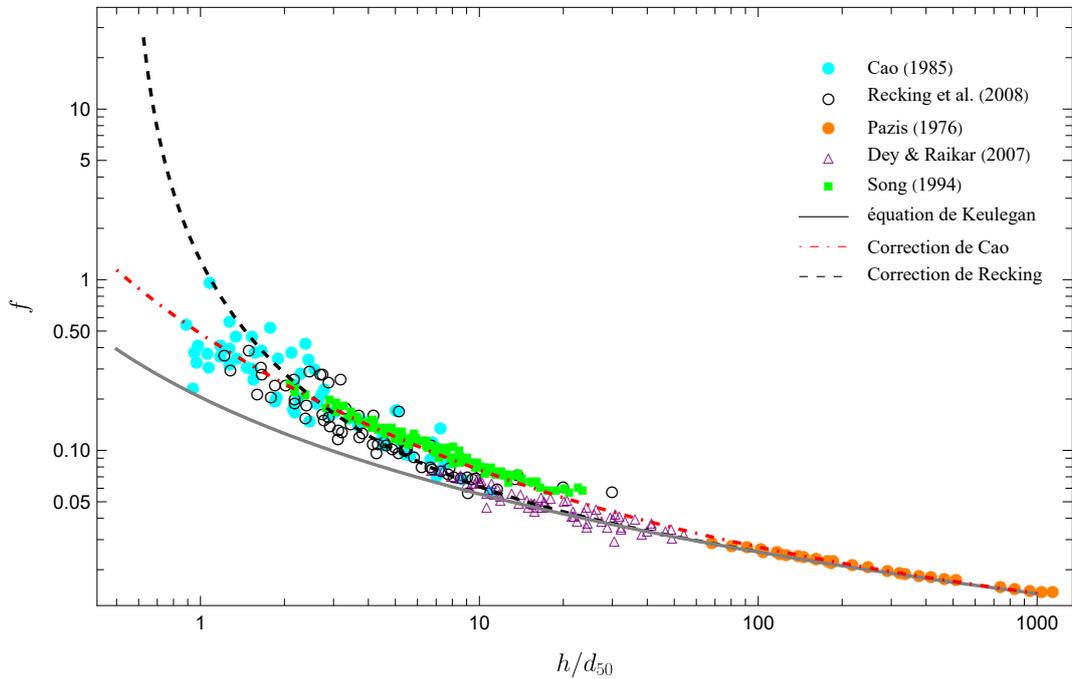
Recking *et al.* (2008b) considère qu'à faible submersion, la rugosité effective est plus importante que  $k_s = 3d_{84}$ . Il faut donc introduire un coefficient correctif

$$\alpha_{rl} = 4 \left(\frac{h}{d}\right)^{-0,43} \text{ avec } 1 < \alpha_{rl} < 4$$

qui est borné entre 1 et 4. La loi de Keulegan devient alors

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 6,25 + 5,75 \log \frac{h}{\alpha_{rl} d_{50}}. \quad (1.80)$$

Quoique Recking *et al.* (2008b) raisonnent essentiellement avec le diamètre  $d_{84}$  comme échelle caractéristique de la rugosité du lit, ils reconnaissent que compte tenu des fluctuations importantes de  $f$ , on peut utiliser le diamètre médian  $d_{50}$ . La figure montre les lois de Keulegan corrigées (1.79) et (1.80) et les compare à des données expérimentales. Quand  $\xi = h/d_{50} < 10$ , on note que les données expérimentales s'écartent sensiblement de la loi de Keulegan et le coefficient de frottement  $f$  présente une forte variabilité. Il n'est pas possible de trancher entre les équations (1.79) et (1.80).



**Figure 1.29** – Variation du coefficient de frottement  $f$  avec la submersion relative  $h/d_{50}$ . On compare la loi de Keulegan (1.73) aux corrections proposées par [Recking et al. \(2008a\)](#) – équation (1.80) – et [Cao \(1985\)](#) – équation (1.79) – ainsi qu'à différents jeux de données expérimentales. Données tirées de la thèse de [Pazis \(1976\)](#), [Cao \(1985\)](#) et [Song \(1994\)](#) ainsi que des articles de [Dey & Raikar \(2007\)](#) et [Recking et al. \(2008a\)](#).

### Lien avec la loi de Chézy

Fondée sur la loi de Prandtl décrivant un écoulement turbulent près d'une paroi, la loi de Keulegan est une formule bien adaptée pour les écoulements sur des lits à gravier. Elle peut prendre une forme similaire à celle donnée par la formule de Chézy si on considère un coefficient de Chézy généralisé :

$$C = \frac{\sqrt{g}}{\kappa} \ln \frac{ch}{k_s},$$

avec  $c = a/e \approx 11$ , mais certains auteurs recommandent  $c = 12,2$  ([Ferguson, 2021](#)). La contrainte à la paroi peut alors s'écrire :

$$\tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2 \left( \frac{ch}{k_s} \right)} \rho \bar{u}^2. \quad (1.81)$$

La formule est valable tant que le fond est suffisamment rugueux, c'est-à-dire  $h/k_s < 10$ . Cette formule peut se généraliser à des géométries plus complexes en substituant

la hauteur  $h$  par le rayon hydraulique  $R_h$ .

Notons que de nos jours, on préfère employer une loi puissance de type Manning–Strickler plutôt qu'une loi logarithmique pour relier le coefficient de Chézy aux paramètres hydrauliques. Par exemple, pour des lits à gravier (fond mobile), la formule de Parker donne

$$C = 8,10\sqrt{g} \left( \frac{h}{k_s} \right)^{1/6},$$

qui fournit des résultats bien meilleurs que la formule de Keulegan pour des lits très rugueux ( $h/k_s < 5$ ) (Parker, 1991; Wong & Parker, 2006).

### Lien avec la loi de Manning–Strickler

On avait vu précédemment que l'équation de Manning–Strickler pouvait se mettre sous la forme (1.60):

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{KR_h^{1/3}}{\sqrt{g}},$$

et Strickler (1924) avait proposé de relier le coefficient  $K$  au diamètre médian à l'aide de la relation (1.62). Cela indiquerait le coefficient  $f$  établi à partir de la loi de Manning–Strickler s'écrit

$$f = \frac{8g}{K^2} \left( \frac{h}{d_{50}} \right)^{-1/3} = 0,176 \left( \frac{h}{d_{50}} \right)^{-1/3}. \quad (1.82)$$

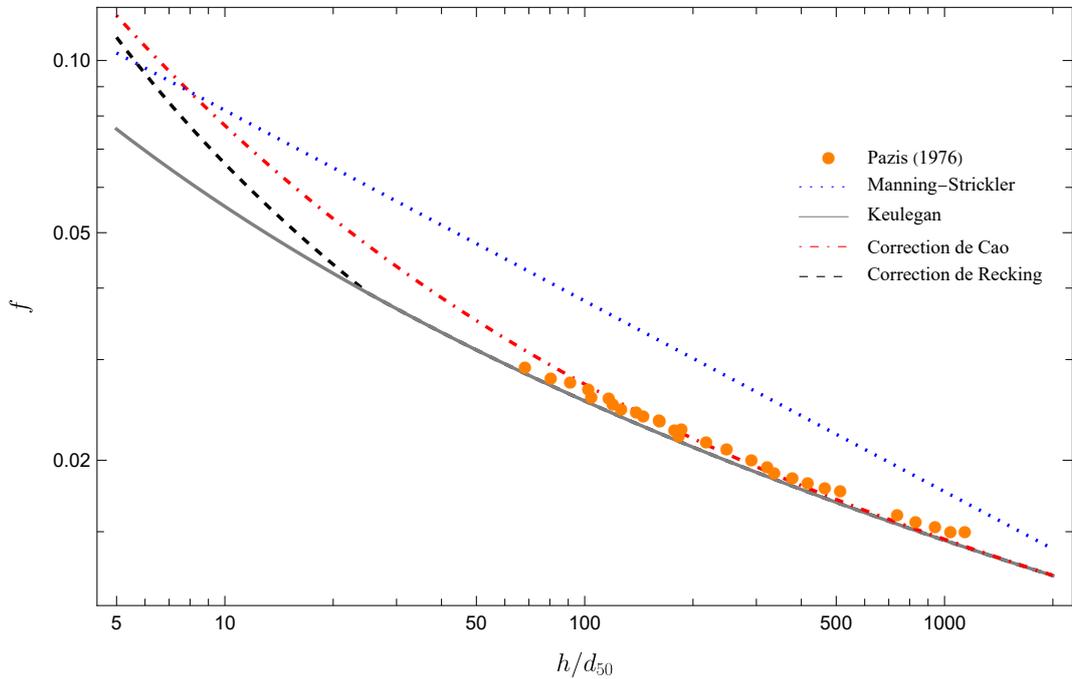
On pourrait s'attendre à un comportement similaire des lois de Keulegan et Manning–Strickler aux fortes submersions. Comme le montre la figure 1.30, le comportement asymptotique des deux lois est assez différent même si l'ordre de grandeur est voisin.

#### 1.4.6 Loi de Ferguson

Les rivières de montagne sont le plus souvent caractérisées par de faibles hauteurs par rapport à la rugosité du lit, et dans ce cas, les équations classiques de frottement ont tendance à sous-estimer considérablement la dissipation d'énergie (voir figure 1.31). Des lois spécifiques ont été proposées comme la loi de Ferguson (Ferguson, 2007, 2021):

$$C_f = \frac{C}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{a_1 a_2 \frac{R_h}{k_s}}{\left( a_1^2 + a_2^2 \left( \frac{R_h}{k_s} \right)^{5/3} \right)^{1/2}}, \quad (1.83)$$

avec  $a_1 = 6,5$  et  $a_2 = 2,5$  quand  $k_s = d_{84}$ .



**Figure 1.30** – Variation du coefficient de frottement  $f$  avec la submersion relative  $h/d_{50}$ . On compare la loi de Keulegan (1.73) ainsi que les équations (1.80) et (1.79) proposées par Recking *et al.* (2008a) et Cao (1985) à la loi de Manning–Strickler (1.82). Les données sont tirées de la thèse de Pazis (1976).

### 1.4.7 Loi de Rickenmann–Recking

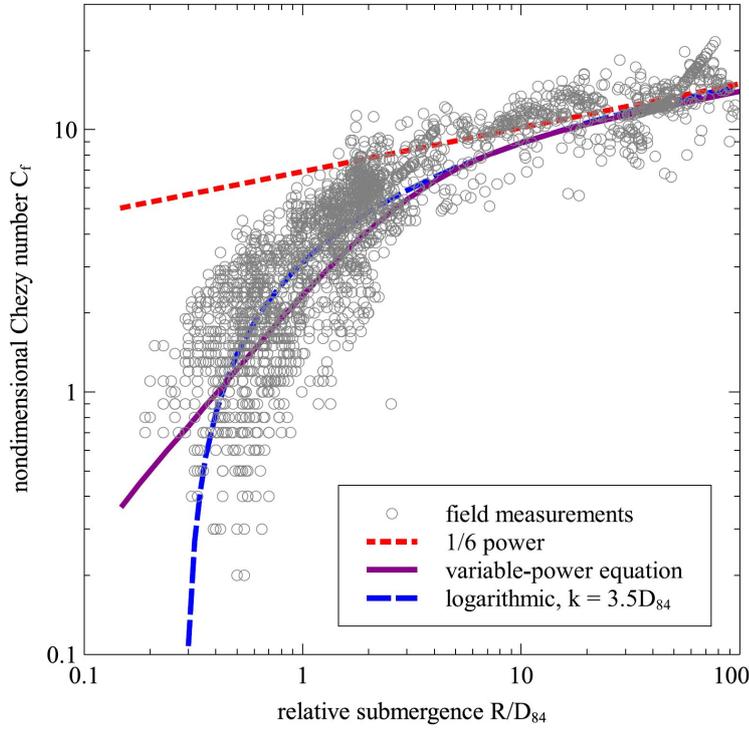
Comme pour les torrents de montagne, le lit est souvent rugueux et la hauteur d'eau de même ordre de grandeur que l'échelle de rugosité, mesurer une hauteur d'eau caractéristique du bief est une gageure. Des auteurs ont proposé de ne pas écrire la loi de frottement sous la forme :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f(h, k_s)}} \text{ avec } u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$$

( $u_* = \sqrt{gh\bar{i}}$  en régime permanent sans effet des parois) mais sous la forme :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \left(\frac{h}{k_s}\right)^b, \quad (1.84)$$

avec  $b$  un coefficient ( $b = 1/6$  pour la loi de Manning–Strickler) (Rickenmann, 1996; Aberle & Smart, 2003; Ferguson, 2007; Comiti *et al.*, 2007). L'exposant  $b$  varie dans une plage assez large allant de 0,23 à 1,80 (Powell, 2014).



**Figure 1.31** – Variation du nombre adimensionnel de Chézy  $C_f = C/\sqrt{g}$  en fonction de la submergence relative  $R_h/d_{84}$ . Les mesures de terrain obtenues par [Rickenmann & Recking \(2011\)](#) sont reportées ainsi que la loi de Manning–Strickler (tireté rouge) qui prédit  $C_f \propto (R_h/d_{84})^{1/6}$ , la loi de Ferguson dite « variable-power equation » et la loi de Keulegan qui prédit  $C_f \propto \ln(R_h/d_{84})$ . D’après ([Ferguson, 2021](#)).

Afin de ne pas exprimer de dépendance vis-à-vis de la hauteur  $h$ , on suppose que la vitesse moyenne  $\bar{u}$  est corrélée au débit par unité de largeur  $q$

$$\bar{u} = cq^m \quad (1.85)$$

avec  $c$  et  $m$  deux constantes. On note que  $m$  et  $b$  sont nécessairement liés puisque  $h = q/\bar{u} = c^{-1}q^{1-m}$ , et donc :

$$h^b = \left(\frac{q}{cq^m}\right)^b = \frac{q^{b(1-m)}}{c^b} \quad \text{et} \quad \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{cq^{m-(1-m)/2}}{\sqrt{g}ic^{-1/2}}.$$

La substitution dans l’équation (1.85) impose donc :

$$b = \frac{3m-1}{2(1-m)} \quad \text{ou bien} \quad m = \frac{1+2b}{3+2b} \quad \text{et} \quad c = \left(\frac{\sqrt{g}i}{k_s^2}\right)^{2/(3+b)}.$$

Rickenmann & Recking (2011) ont compilé les données de 27 études (totalisant 2890 mesures) relatives à des mesures de débit et de vitesse dans des rivières à lit de gravier. Les pentes couvraient la plage  $4 \times 10^{-3} - 24 \%$ . Ils ont trouvé que la vitesse adimensionnelle  $\bar{u}^{**}$  et le débit adimensionnel  $q^{**}$  :

$$\bar{u}^{**} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gid_{84}}} \text{ et } q^{**} = \frac{q}{\sqrt{gid_{84}^3}}$$

étaient corrélés de la façon suivante :

$$\bar{u}^{**} = \begin{cases} 3,20q^{**0,395} & \text{si } q^{**} > 100, \\ 1,60q^{**0,545} & \text{si } 1 \leq q^{**} \leq 100, \\ 1,55q^{**0,706} & \text{si } q^{**} < 1. \end{cases} \quad (1.86)$$

Rickenmann & Recking (2011) ont également proposé une formulation lissée valable quelle que soit la valeur de  $q^{**}$  :

$$\bar{u}^{**} = 1,5471q^{**0,7062} \left( 1 + \left( \frac{q^{**}}{10,31} \right)^{0,6317} \right)^{-0,4930}.$$

La figure 1.32 compare l'équation de Rickenmann–Recking (1.86) avec des mesures dans des écoulements naturels à faible submersion sur des lits de gravier (torrents de montagne et rivières torrentielles) compilées par Chen *et al.* (2020). On compare cette équation avec une formulation équivalente du modèle de Ferguson (2007) pour les faibles submersions :

$$\bar{u}^{**} = 1,443q^{**0,60}, \quad (1.87)$$

et les fortes submersions :

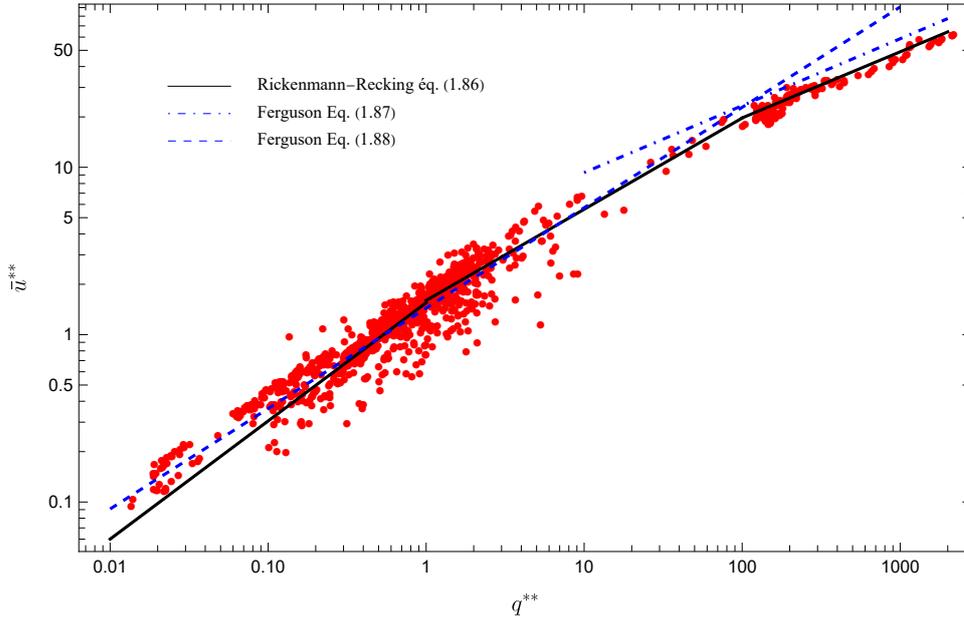
$$\bar{u}^{**} = 3,70q^{**0,40}. \quad (1.88)$$

L'équation (1.86) peut se mettre sous la forme équivalente (1.84) :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \begin{cases} 6,84 \left( \frac{h}{d_{84}} \right)^{0,152} & \text{si } q^{**} > 100, \\ 2,82 \left( \frac{h}{d_{84}} \right)^{0,696} & \text{si } 1 \leq q^{**} \leq 100, \\ 4,42 \left( \frac{h}{d_{84}} \right)^{1,90} & \text{si } q^{**} < 1. \end{cases} \quad (1.89)$$

Rickenmann & Recking (2011) ont également proposé une formulation lissée pour  $f$  :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 4,416 \left( \frac{h}{d_{84}} \right)^{1,904} \left( 1 + \left( \frac{h}{1,283d_{84}} \right)^{1,618} \right)^{-1,083}. \quad (1.90)$$



**Figure 1.32** – Variation de la vitesse adimensionnelle  $\bar{u}^{**}$  en fonction du débit adimensionnel  $q^{**}$ . Les données sont celles compilées par [Chen \*et al.\* \(2020\)](#). On compare également avec le modèle de [Ferguson \(2007\)](#) traduit par les équations (1.87) et (1.88).

### 1.4.8 Loi de Ferro

Le problème de la détermination de la résistance à l'écoulement peut être abordé dans le cadre de la théorie de la similitude (voir cours de bachelor).

Quand on réalise une analyse dimensionnelle d'un écoulement turbulent le long d'une paroi rugueuse, alors on montre que le profil de vitesse  $u(y)$  peut se mettre sous la forme générale ([Barenblatt, 1993](#)):

$$\frac{y}{u_*} \frac{du}{dy} = f(y, h, \varrho, u_*, \nu, k_s, i, g) \quad (1.91)$$

avec  $u_*$  la vitesse de frottement,  $y$  la distance selon la normale à la paroi,  $h$  la hauteur d'écoulement,  $k_s$  l'échelle de rugosité de la paroi, et  $i$  sa pente. On peut écrire cette relation sous une forme adimensionnelle

$$\eta \frac{d\hat{u}}{d\eta} = f(\eta, \xi, \text{Re}_*, \text{Fr}_*, i) \quad (1.92)$$

avec comme nombres adimensionnels la vitesse relative  $\hat{u}$ , l'ordonnée  $\eta$ , les nombres de Reynolds et Froude construits avec la vitesse de frottement  $\text{Re}_*$  et  $\text{Fr}_*$ , la submersion

relative  $\xi$  :

$$\hat{u} = \frac{u}{u_*}, \eta = \frac{u_* y}{\nu}, \text{Re}_* = \frac{u_* h}{\nu}, \text{Fr}_* = \frac{u_*}{\sqrt{gh}}, \text{ et } \xi = \frac{h}{k_s}.$$

Si on assume une similitude complète<sup>11</sup> et que les nombres adimensionnels sont soit petits ( $i \ll 1, \eta \ll 1, \text{Fr}_* \ll 1$ ), soit grands ( $\xi \gg 1, \text{Re} \gg 1$ ), alors la fonction  $f$  est une constante et on pose  $f = 1/\kappa$  (avec toujours  $\kappa$  la constante de von Kármán). Par intégration de l'équation (1.92), on retrouve le profil de vitesse logarithmique (1.65)

$$\hat{u} = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + c \Rightarrow \frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} + c \quad (1.93)$$

avec  $c$  une constante d'intégration (qui peut éventuellement être une fonction de  $\text{Re}_*$ ,  $\text{Fr}_*$  et  $\xi$ ).

Dans le cadre de la théorie de la similitude, l'équation (1.93) est un cas-limite qui correspond à un régime asymptotique caractérisé par une forte submersion et un grand nombre de Reynolds. Pour explorer d'autres régimes, il faut étudier des formes dites de similitude incomplète (Barenblatt, 1993). Avant de présenter la solution de similitude incomplète proposée par Ferro & Pecoraro (2000) et Ferro (2018), on va modifier ici la forme des groupes adimensionnels dans l'équation (1.92). Comme on suppose l'existence d'une relation entre vitesses de frottement et moyenne ( $u_*$  et  $\bar{u}$ ), il est plus avantageux de remplacer ici les nombres de Froude et de Reynolds locaux par des expressions à l'échelle de l'écoulement :

$$\text{Re} = \frac{\bar{u} h}{\nu} \text{ et } \text{Fr} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}}.$$

Avec cette notation, l'équation (1.92) devient

$$\eta \frac{d\hat{u}}{d\eta} = f(\eta, \xi, \text{Re}, \text{Fr}, i). \quad (1.94)$$

La similitude incomplète vient à supposer que  $f$  peut se décomposer en

$$f(\eta, \xi, \text{Re}, \text{Fr}, i) = \eta^\delta \phi(\xi, \text{Re}, \text{Fr}, i),$$

avec  $\delta$  un paramètre et  $\phi$  une fonction à déterminer. Avec cette hypothèse, on montre que l'intégration de l'équation (1.94) conduit à une vitesse moyenne d'écoulement de la forme

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \left( \frac{\alpha u_* h}{\nu} \right)^\delta \Gamma(\text{Re}, \text{Fr}, i) \quad (1.95)$$

avec

$$\delta = \frac{1,5}{\ln \text{Re}}, \alpha = \left( \frac{2^{1-\delta}}{(\delta+1)(\delta+2)} \right)^{1/\delta} \sim 0,122, \text{ et } \Gamma = \frac{a \text{Fr}^b}{i^c}. \quad (1.96)$$

11. Revoir chap. 2 du cours de bachelor, § 2.4.5., pour une définition.

En l'absence de transport de sédiment, les valeurs des exposants  $a$ ,  $b$  et  $c$  ont été calées à partir de données de terrain ou de laboratoire (Ferro, 2017, 2018):

$$a = 0,313, b = 1,116 \text{ et } c = 0,555. \quad (1.97)$$

En présence de transport de sédiment, il faut prendre en compte un nombre adimensionnel qui est le nombre de Shields

$$\Theta = \frac{\tau_p}{(\rho_s - \rho)gd_{50}} = \frac{\rho h}{(\rho_s - \rho)d_{50}},$$

et reparamétriser la fonction  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \frac{a\text{Fr}^b}{i^c\Theta^d}, \quad (1.98)$$

avec

$$a = 0,287, b = 1,255, c = 0,605 \text{ et } d = 0,019.$$

À titre de comparaison, on a reporté sur la figure 1.33 les prédictions données par le modèle de Ferro

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = G \text{ avec } G = \Gamma \left( \alpha \frac{u_* h}{\nu} \right)^\delta,$$

avec  $\Gamma$  donné par l'équation (1.98) et  $\delta$  donné par l'équation (1.96), et on les a comparées avec des données de laboratoire collectées par Recking *et al.* (2008a) pour des écoulements sur des pentes  $i$  de 1 % à 9 %, des nombres de Froude  $\text{Fr}$  dans la plage 0,49–1,75, des submersions relatives  $1,2 < \xi < 30$ , et des nombres de Shields  $\Theta$  compris entre 0 (eau claire) et 0,66 (charriage intense). Dans l'ensemble, il y a un bon accord pour  $G < 10$ . Le modèle est moins performant pour les plus grandes valeurs de  $G$  (écoulements très rapides et peu épais).

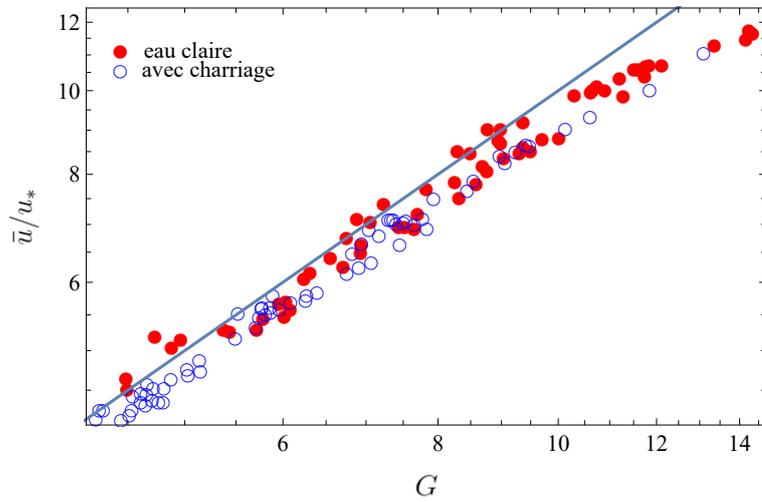
Le problème du modèle de Ferro vient qu'il est mal conditionné (c'est une équation implicite en  $\bar{u}$  qui dépend d'une multitude de paramètres). Si le couple  $(\bar{u}, h)$  est connu, ce modèle fournit une bonne approximation du rapport  $\bar{u}/u_*$  comme le montre la figure 1.33. Toutefois, en règle générale, on ne connaît aucun ou bien qu'un des deux termes du couple, et on cherche à le(s) déterminer. Dans ce cas-là, le modèle de Ferro est peu efficace. À titre d'exemple, on montre sur la figure 1.34 une comparaison des valeurs prédites par le modèle de Ferro. Les conditions expérimentales (débit par unité de largeur  $q$ , pente  $i$ ) sont connues, on cherche à calculer  $\bar{u}$  et  $h$  en résolvant le système non linéaire composé de la conservation du débit:

$$q = \bar{u}h,$$

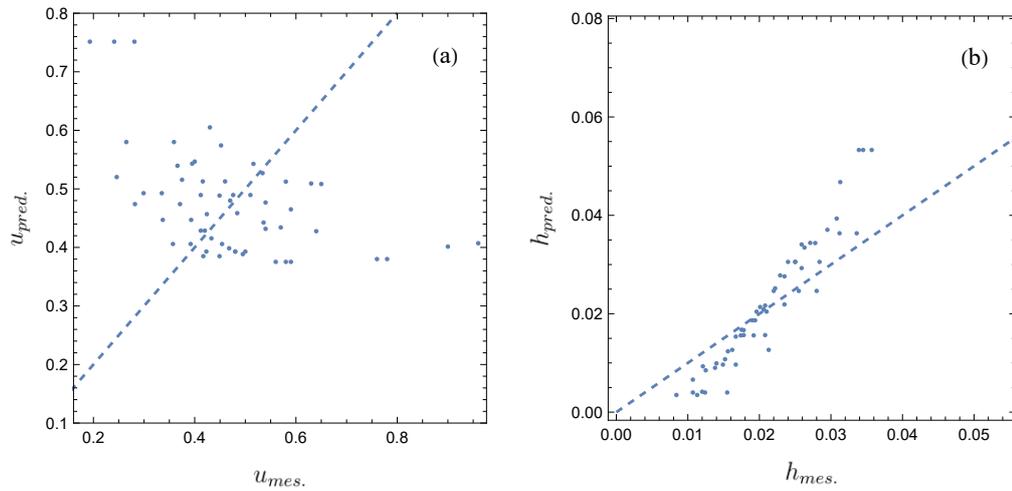
et des équations (1.95)–(1.97):

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{a\text{Fr}^b}{i^c} \left( \alpha \frac{u_* h}{\nu} \right)^\delta \text{ avec } u_* = \sqrt{ghi} \text{ avec } \text{Fr} = \frac{u}{\sqrt{gh}}.$$

La figure 1.34 montre que l'ordre de grandeur des prédictions de  $h$  et  $\bar{u}$  est correct, mais le modèle a une tendance à surestimer la hauteur, et mal estimer les vitesses.



**Figure 1.33** – Variation de la vitesse moyenne adimensionnelle  $\bar{u}/u_*$  en fonction de  $G = \Gamma(\alpha u_* h/\nu)^\delta$ .



**Figure 1.34** – Comparaison entre valeurs mesurées et prédites par le modèle de Ferro pour la campagne expérimentale conduite par [Recking \*et al.\* \(2008a\)](#). Seules les données sans charriage ont été utilisées. Pour le modèle de Ferro, on s’est servi des équations (1.95)–(1.97). (a) Comparaison des vitesses. (b) Comparaison des hauteurs. La courbe en tireté montre l’accord parfait.

### 1.4.9 Modèles de turbulence et loi parabolique

Dans la dérivation des équations de Saint-Venant vue au § 1.2.1, on a supposé que le profil de vitesse était relativement proche de celui obtenu en régime permanent uniforme. Lorsque les conditions d'écoulement s'éloignent du régime permanent, le profil de vitesse peut varier fortement sur de courtes distances (songeons par exemple à un ressaut mobile accompagné d'une forte vorticité), et la turbulence peut induire une plus forte dissipation d'énergie. Quoique les équations de Saint-Venant ne soient pas l'outil le mieux adapt   à la description de tels écoulements, on peut tenter de corriger certaines lacunes des équations de Saint-Venant (1.20)–(1.21) en prenant en compte la turbulence.

#### Décomposition et tenseur de Reynolds

On a vu en cours de bachelor les équations de Navier–Stokes (voir chap. 6) moyennées au sens de Reynolds. On introduit la décomposition de Reynolds de la vitesse  $\langle \mathbf{u} \rangle = (u, v)$  dans les équations de Navier–Stokes (1.15):

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}', \quad (1.99)$$

avec  $\langle \mathbf{u} \rangle$  la moyenne d'ensemble de la vitesse et  $\mathbf{u}'$  la fluctuation. Après substitution dans l'équation (1.15) et après avoir pris la moyenne d'ensemble on obtient les équations de Navier–Stokes moyennées au sens de Reynolds:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u} \rangle + (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla \langle p \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{T} \rangle - \rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle), \quad (1.100)$$

avec  $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{D}$  le tenseur des contraintes (visqueuses) et  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger)$  le tenseur des taux de déformation. Le tenseur  $\mathbf{R} = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$  a la forme d'un tenseur des contraintes. Il est appelé *tenseur de Reynolds* (ou tenseur des contraintes turbulentes), et il représente l'effet de la turbulence sur l'écoulement moyen. L'équation (1.99) est appelée * quation de Navier–Stokes moyennée selon Reynolds*<sup>12</sup>. Elle décrit la variation du champ de vitesse moyen  $\langle \mathbf{u} \rangle$ . Dans cette équation, il existe un seul terme qui n'est pas relié à ce champ de vitesse moyen, c'est le tenseur de Reynolds.

Un des objectifs de la théorie de la turbulence est de relier ce tenseur  $\mathbf{R}$  au champ moyen de vitesse  $\langle \mathbf{u} \rangle$ . On parle de paramétrisation ou de fermeture de la turbulence. Les modèles les plus simples sont des fermetures algébriques car ils impliquent des relations algébriques (non différentielles) entre tenseur de Reynolds et champ de vitesse moyen. Des modèles plus complexes de turbulence considèrent qu'il n'y a pas de relation univoque entre  $\mathbf{R}$  et  $\langle \mathbf{u} \rangle$ , mais une relation complexe avec une dépendance temporelle (effet de mémoire) et spatiale; ces modèles font appel à des équations aux

12. On parle de RANS (Reynolds-averaged Navier–Stokes) dans la littérature scientifique.

dérivées partielles pour calculer  $\mathbf{R}$ . En hydraulique, on se sert le plus souvent de fermetures algébriques. Les modèles qu'on a vus ci-dessus (Keulegan et ses formes dérivées) sont fondés sur des « fermetures algébriques » de type Prandtl. Des modèles plus précis nécessitent des paramétrisations plus élaborées comme le modèle  $k - \varepsilon$  (Nezu & Nakagawa, 1993; Younus & Chaudhry, 1994; Rodi, 1995; Cea *et al.*, 2007; Cao *et al.*, 2015).

### Fermeture algébrique

La première fermeture algébrique a été proposée par Boussinesq (1877). Il s'est fondé sur l'analogie entre théorie cinétique des gaz et turbulence des fluides pour déterminer les fluctuations de vitesse. Ce modèle est souvent connu sous le nom d'*hypothèse de Boussinesq*. Il considère que le tenseur de Reynolds (des contraintes turbulentes)  $\mathbf{R} = -\rho\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle$  a une structure similaire à celle des contraintes visqueuses :

$$\mathbf{R} = -\frac{2}{3}\rho\tilde{k}\mathbf{1} + 2\mu_t\langle\mathbf{D}\rangle \text{ avec } k = \frac{1}{2}\text{tr}\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle \quad (1.101)$$

avec  $\tilde{k}$  l'énergie cinétique turbulente (par unité de masse) et  $\mu_t$  la viscosité turbulente. Le terme  $p_t = -2\rho\tilde{k}/3$  joue le rôle de pression turbulente; ce terme est nécessaire car le fluide étant incompressible ( $\text{tr}\langle\mathbf{D}\rangle = 0$ ), le tenseur  $\mathbf{R} + p_t\mathbf{1}$  doit l'être aussi.

Selon Boussinesq (1877), la viscosité turbulente  $\mu_t$  n'est pas une propriété matérielle comme l'est la viscosité newtonienne, mais pour un écoulement donné caractérisé par un certain degré d'agitation, cette viscosité est constante à travers l'écoulement et quelle que soit la direction considérée ou quel que soit le mode de déformation. Boussinesq supposa en outre qu'elle est fixée par une longueur et une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié. Par exemple, pour un écoulement à surface libre de hauteur  $h$ , on peut supposer que :

$$\mu_t \propto \rho h u_*$$

avec  $u_* = \sqrt{\tau_p/\rho}$  la vitesse de glissement. Le modèle de Boussinesq est trop simplifié pour décrire la turbulence; en particulier, les observations ont montré que la viscosité turbulente n'est pas constante au sein d'un écoulement, et le tenseur des contraintes turbulentes n'est pas aligné avec le tenseur des déformations moyenné (Schmitt, 2007). En dépit de son imprécision à l'échelle locale, le modèle Boussinesq ou ses variations sont employés pour décrire des écoulements moyennés sur la hauteur.

### Modèle $k - \varepsilon$

Parmi les fermetures non algébriques, le modèle dit  $k - \varepsilon$  est sans doute le plus simple. Il consiste à compléter l'équation moyennée de Reynolds (1.99) par l'équation de bilan de l'énergie cinétique massique  $k$  [ $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ ] et de son taux de dissipation  $\varepsilon$

[m<sup>2</sup>·s<sup>-3</sup>]. [Rastogi & Rodi \(1978\)](#) ont proposé un jeu d'équations moyennées selon la hauteur :

$$\underbrace{\frac{\partial hk}{\partial t}}_{\text{variation temporelle}} + \underbrace{\frac{\partial hk\bar{u}}{\partial x}}_{\text{advection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} h \frac{\partial k}{\partial x} \right)}_{\text{diffusion}} + \underbrace{hP_k + hP_{kb}}_{\text{production}} - \underbrace{\varepsilon h}_{\text{dissipation}} \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial h\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial h\varepsilon\bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_e} h \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (c_1 P_k - c_2 \varepsilon) h + hP_{eb} \quad (1.103)$$

avec les taux moyens de production et la viscosité turbulente moyennée (selon la hauteur) :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h \langle u \rangle dy, P_k = 2\nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2, P_{kb} = c_k \frac{u_*^3}{h}, \text{ and } \mu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (1.104)$$

Le bilan d'énergie cinétique  $k$  dans l'équation (1.102) indique que  $k$  varie sous l'effet de la diffusion, de l'advection, de la production au taux  $hP_k + hP_{kb}$ , et une dissipation  $\varepsilon$ . Deux mécanismes de production d'énergie cinétique sont pris en compte : le terme  $P_k$  reflète la production de turbulence sous l'effet d'un gradient horizontal de vitesse, tandis que le frottement au niveau du lit induit un fort cisaillement, et ce faisant génère de la turbulence, qui est modélisée (empiriquement) à l'aide de  $P_{kb}$ . La dissipation d'énergie cinétique implique le frottement le long du lit, ce qu'on modélise de façon empirique :

$$P_{eb} = c_e \frac{u_*^4}{h^2}.$$

Le paramètre  $c_k$  dans la production  $P_{kb}$  d'énergie cinétique au niveau du lit peut être déterminé en considérant un régime permanent uniforme. Sous cette hypothèse, toutes les différentielles dans l'équation (1.102) sont nulles, et donc on a  $\varepsilon = P_{kb}$ . Par ailleurs, la dissipation d'une tranche de fluide de hauteur  $h$  sur un lit de pente  $i$  est due au frottement sur le lit :  $\tau_p \bar{u} = \rho g h \bar{u} i$  ; comme la dissipation s'écrit aussi  $\rho h \varepsilon$ , on déduit la relation :

$$c_k = \frac{\bar{u}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}},$$

avec  $c_f = f/8$  le coefficient de frottement. Les autres paramètres sont déduits de mesures expérimentales ([Rastogi & Rodi, 1978](#); [Nezu & Nakagawa, 1993](#))

$$c_\mu = 0,09, c_1 = 1,44, c_2 = 1,92, c_e = 3,6c_2c_\mu^{1/2}c_f^{-3/4}, \sigma_k = 1,0, \text{ et } \sigma_e = 1,3.$$

On peut adjoindre le modèle  $k - \varepsilon$  composé des équations moyennées (1.102) et (1.103) (pour l'énergie cinétique  $k$  et la dissipation d'énergie  $\varepsilon$ , respectivement) aux équations de Saint-Venant afin d'avoir une description plus fine de la turbulence.

### Contrainte de cisaillement

Les équations de Saint-Venant nécessitent de connaître la contrainte sur le lit, dite contrainte pariétale. Dans un écoulement turbulent, l'équation (1.100) montre que la distribution de contrainte de cisaillement s'écrit :

$$\tau = \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial y} \langle u \rangle}_{\text{contribution visqueuse}} - \underbrace{\rho \langle u'v' \rangle}_{\text{contribution turbulente}} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial}{\partial y} \langle u \rangle \quad (1.105)$$

et qu'elle est donc composée de deux contributions : la contrainte visqueuse  $\mu \partial_y u$  et la contrainte turbulente  $-\rho \langle u'v' \rangle = \mu_t \partial_y u$ . En régime turbulent, la contrainte visqueuse est négligeable par rapport à la contrainte turbulente. L'emploi d'une viscosité turbulente constante n'est pas pertinent, mais si on suppose – comme Prandtl l'a fait – que la bonne échelle de longueur est la longueur de mélange et que l'échelle de vitesse est liée au gradient de vitesse :

$$\mu_t = \rho \ell_m^2 \frac{d \langle u \rangle}{dy},$$

avec  $\ell_m = \kappa y$  la longueur de mélange, alors on peut décrire correctement le profil de vitesse moyen près de la paroi (voir § 1.4.5). Par intégration du profil de vitesse, on avait montré avec l'équation (1.73) que la contrainte pariétale est :

$$\tau_p = \frac{f}{8} \rho \bar{u}^2 \text{ avec } f = \left( 2,03 \log \frac{12,2h}{k_s} \right)^{-2}.$$

Pour décrire la contrainte pariétale, nous pouvons nous satisfaire d'une simple fermeture algébrique de type Prandtl.

### Gradient de contrainte normale

De l'équation moyennée de Navier–Stokes l'équation (1.100), on déduit que la contrainte normale  $\sigma_x$  dans la direction  $x$  comporte deux contributions (visqueuse et turbulente), et qu'elle se réduit à sa contribution turbulente quand le nombre de Reynolds est suffisamment grand :

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle - \rho \langle u'^2 \rangle \approx -\rho \langle u'^2 \rangle. \quad (1.106)$$

De la définition des contraintes turbulentes (1.101), on tire la relation :

$$-\rho \langle u'^2 \rangle = -\rho \frac{2}{3} \tilde{k} + 2\mu_t \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle,$$

qui nécessite de connaître la distribution d'énergie cinétique  $\tilde{k}$ . On peut utiliser un modèle comme  $k - \varepsilon$  pour déterminer  $\tilde{k}$ . On va ici s'intéresser à calculer la contrainte normale moyenne.

Si on intègre selon la hauteur les équations (1.100) de Navier–Stokes moyennées au sens de Reynolds sans négliger aucun terme, on retombe sur les équations de Saint-Venant obtenues précédemment, avec un terme supplémentaire qui résulte de l'intégration de la contrainte normale  $\sigma_x$  le long de  $y$  :

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \sigma_x dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left( 2\mu_t \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle - \rho \frac{2}{3} \tilde{k} \right) dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu_t h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \frac{2}{3} k h \right) \end{aligned}$$

compte tenu de la condition aux limites  $\sigma_x(x, h, t) = 0$ , et où  $k$  est la valeur moyenne de  $\tilde{k}$ . À partir de données de laboratoire, [Rastogi & Rodi \(1978\)](#) ont retenu la paramétrisation suivante de la viscosité turbulente pour les écoulements dans des canaux :

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} = 0,0765 u_* h. \quad (1.107)$$

Si l'écoulement est proche du régime permanent uniforme, alors on a vu que  $\varepsilon = g\bar{u}i$ . On déduit de l'équation (1.107) :

$$k = 0,92 c_f^{3/4} \bar{u}^2.$$

On déduit que le gradient de contrainte normale s'écrit :

$$\int_0^h \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dy = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - 0,61 c_f^{3/4} h \bar{u}^2 \right).$$

La conservation de la quantité de mouvement moyennée selon Saint-Venant s'écrit alors :

$$\frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = gh \sin \theta - gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - 0,61 c_f^{3/4} h \bar{u}^2 \right), \quad (1.108)$$

avec  $\nu_t$  la viscosité cinématique turbulente estimée à partir de l'équation (1.107). Le terme résultant de l'énergie cinétique turbulente  $-0,61 c_f^{3/4} h \bar{u}^2$  est le plus souvent petit par rapport au flux de quantité de mouvement  $h \bar{u}^2$  (avec  $f \sim 0,1$ ,  $c_f = f/8 \sim 10^{-2}$ , alors  $-0,61 c_f^{3/4}$  est de l'ordre de 0,02), et peut être négligé.

### Alternative au modèle $k - \varepsilon$

La paramétrisation proposée par [Rastogi & Rodi \(1978\)](#) a été initialement proposée pour des écoulements dans des canaux droits et peu éloignés du régime permanent

uniforme. Il existe des alternatives qui se veulent moins spécifiques. On peut ainsi citer l'approche totalement empirique de [Kranenburg \(1992\)](#) qui, dans la dérivation des équations de Saint-Venant, propose d'écrire l'équation (1.19) différemment afin de faire ressortir une dépendance de la vitesse moyenne  $\bar{u}$  vis-à-vis du gradient de hauteur :

$$\overline{u^2} = \frac{1}{h} \int_0^h u^2(x, y, t) dy = \alpha \bar{u}^2 - \nu_t h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad (1.109)$$

où la viscosité turbulente  $\nu_t$  est introduite de façon empirique et  $\alpha$  est le coefficient de Boussinesq. [Cao et al. \(2015\)](#) a combiné les deux approches de [Rastogi & Rodi \(1978\)](#) et [Kranenburg \(1992\)](#) en considérant que l'intégration de la vitesse quadratique donne naissance à trois contributions :

$$\overline{u^2} = \frac{1}{h} \int_0^h u^2(y) dy = \underbrace{\alpha \bar{u}^2}_{\text{carré de } \bar{u}} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \underbrace{2h\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}hk}_{\text{contrainte turbulente}} + \underbrace{\beta h^2 u_* \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{\text{non-uniformité de } \bar{u}} \right) \quad (1.110)$$

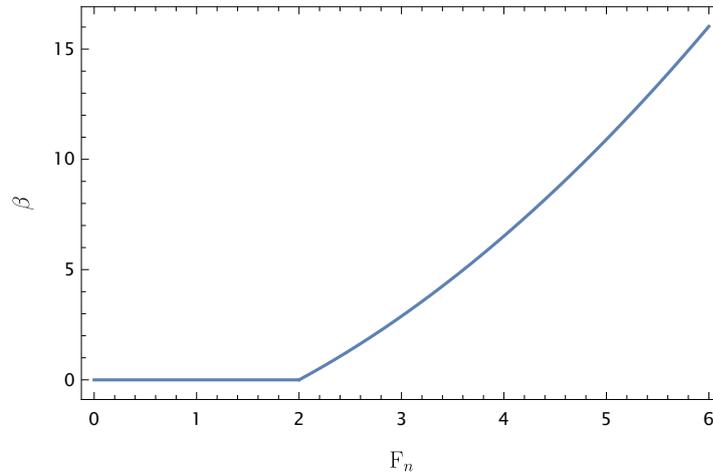
où  $\nu_t = c_\mu k^2 / \varepsilon$ , le coefficient de Boussinesq  $\alpha$  est souvent pris égal à 1, et  $\beta$  est un paramètre dont le calage sur des profils de vitesse expérimentaux montre qu'il est une fonction du nombre de Froude normal  $F_n$  (voir figure 1.35) :

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } F_n \leq 2, \\ -3,532 + 1,0192F_n + 0,3734F_n^2 & \text{si } F_n > 2. \end{cases} \quad (1.111)$$

En pratique, lorsque le nombre de Froude est petit, c'est surtout la contrainte turbulente qui module la vitesse quadratique, alors que pour les grands nombres de Froude, c'est surtout la non-uniformité sur de courtes distances qui affecte cette vitesse quadratique. Quand on introduit le modèle de [Cao et al. \(2015\)](#) dans l'équation (1.18) de conservation de la quantité de mouvement de Saint-Venant, on aboutit à une équation structurellement similaire à l'équation (1.108) obtenue avec le modèle  $k - \varepsilon$ , la principale différence est l'apparition d'une viscosité turbulente potentiellement beaucoup plus marquée  $\tilde{\nu}_t = 2\nu_t + \beta h u_*$ . La conservation de la quantité de mouvement moyenne selon Saint-Venant s'écrit alors :

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = gh \sin \theta - gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\nu}_t h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right). \quad (1.112)$$

Le modèle de viscosité turbulente est dit *parabolique* car il ajoute un terme de diffusion (non linéaire) dont l'effet est d'adoucir les discontinuités. On avait lors de l'adimensionalisation des équations de Navier–Stokes que dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.16), le terme lié à la contrainte normale était d'ordre  $\epsilon^2$ , ce qui justifiait qu'on le néglige dans les équations de Saint-Venant. Le terme parabolique a à peu près le même ordre de grandeur  $\epsilon^2 \text{Re}/\text{Fr}$ ; le maintenir dans l'équation (1.112) implique qu'on passe outre ce que nous a dit l'adimensionalisation, et cela se justifie



**Figure 1.35** – Variation du coefficient  $\beta$  avec le nombre de Froude normal (obtenu en considérant la hauteur normale) donnée par l'équation (1.111).

principalement lorsqu'on souhaite imposer une structure parabolique aux équations du mouvement plutôt que hyperbolique. Le terme parabolique se justifie un peu plus pour de grandes rivières pour lesquelles  $Re$  est grand et  $Fr$  est petit. Il se justifie également pour des canaux composés où les variations importantes de hauteur à travers la section en travers créent des courants secondaires (Shiono & Knight, 1991; Castanedo *et al.*, 2005; Cea *et al.*, 2007; Tang & Knight, 2008). Le terme parabolique est également souvent employé dans les études de stabilité des équations de Saint-Venant afin d'éviter le développement d'instabilités avec des longueurs d'onde trop courtes, d'adapter la forme du profil des instabilités et/ou lisser les discontinuités (Needham & Merkin, 1984; Balmforth & Provenzale, 2001; Balmforth & Liu, 2004; Cao *et al.*, 2015; Bohorquez *et al.*, 2019).

## 1.5 Facteurs de correction des formules de frottement

Les formules de résistance à l'écoulement ne sont en principe valables que pour des lits droits homogènes, c'est-à-dire avec des caractéristiques de rugosité identiques sur toute la surface du lit. Il existe deux cas où cette hypothèse cesse d'être valide :

- Dans le cas de lits composés ou en présence de parois solides, la rugosité n'est plus distribuée de façon homogène le long du périmètre mouillé. Cela affecte la dissipation d'énergie, le profil de vitesse, et la répartition des contraintes pariétales. Il en est de même lorsque lors d'une crue, l'écoulement déborde du lit mineur et s'épanche dans son lit majeur. Le passage du plein bord se traduit par :
  - une variation de la rugosité : le lit majeur est généralement caractérisé par une rugosité différente (p. ex. végétation) de celle du lit mineur ;
  - une cassure dans la relation  $A(h)$  : dans le lit majeur, la largeur  $b$  offerte à l'écoulement est généralement plus grande, et donc une petite variation de hauteur  $h$  d'écoulement est associée à une variation de section mouillée  $A$  bien plus importante que ce qui est observé dans le lit mineur. Dit autrement, dans le lit mineur, une petite variation de hauteur cause une petite variation de débit, alors que dans le lit majeur, une petite variation de hauteur implique une variation plus significative de débit. Dans les courbes de tarage des stations de mesure, le passage du plein se traduit par une inflexion de la courbe  $Q(h)$  (voir § 1.5.3).
- Si des structures morphologiques (dunes, bancs, etc.) se développent le long du lit, alors la vorticité de l'écoulement, et ce faisant la dissipation d'énergie, est accrue. Les structures du lit et les éléments les plus grossiers créent des effets de sillage qui dissipent une partie de l'énergie, et parfois des vagues stationnaires (ressauts) peuvent se former au passage d'obstacles. Les chutes d'eau au-dessus des seuils formés d'alignement de blocs ou de débris végétaux occasionnent des dissipations d'énergie. La figure 1.23 montre des exemples de chutes et ressauts dans des lits torrentiels. On se reportera aux § 1.5.1 et § 1.5.2 pour plus d'informations.

### 1.5.1 Typologie des structures morphologiques

#### Structures planimétriques et longitudinales

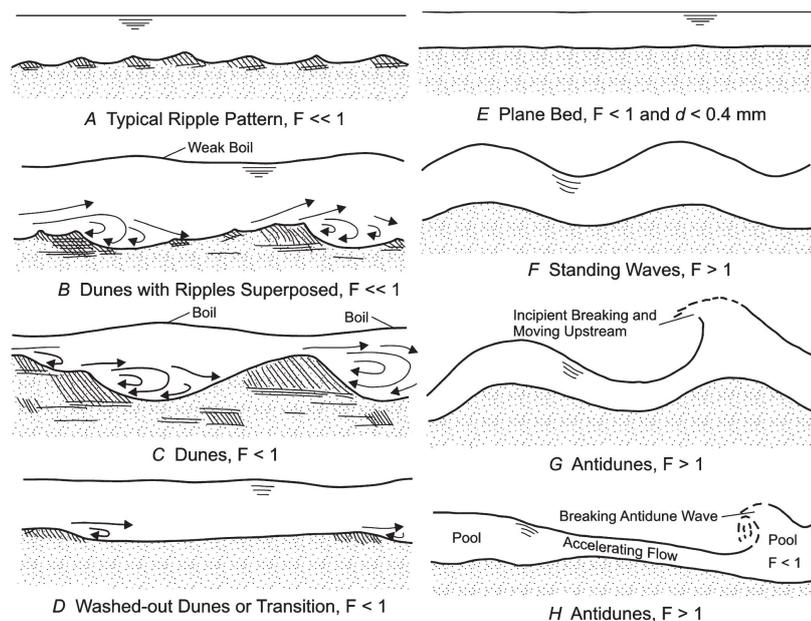
Les structures morphologiques reflètent les interactions entre le cours d'eau, le substrat sur lequel il s'écoule (le plus souvent les alluvions qu'il a transportés, d'où

l'appellation de « rivières alluviales », et le transport solide. On distingue les structures morphologiques qui agissent dans le sens de l'écoulement (voir figure 1.36) :

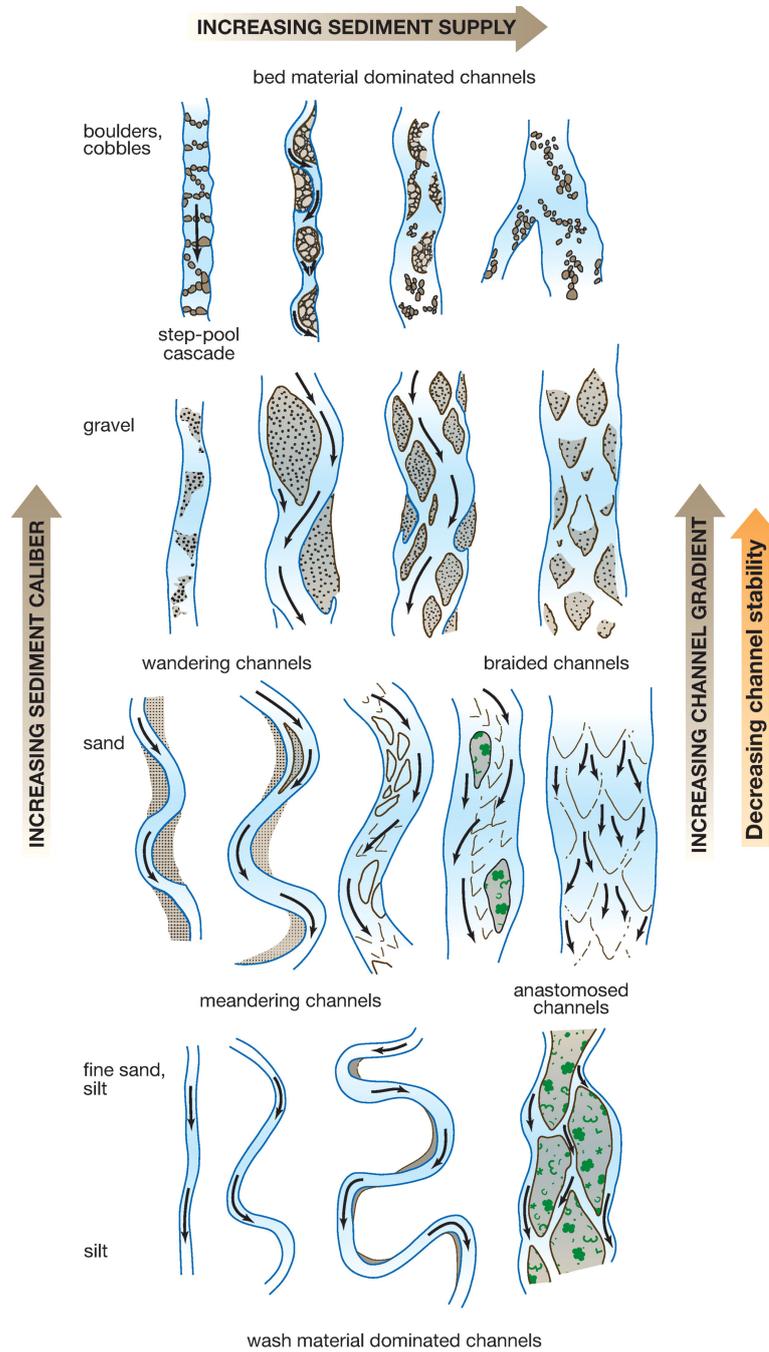
- rides (*ripplets*),
- dunes (*dunes*),
- antidunes (*antidunes*),
- seuils et cascades (*step* et *cascades*),
- mouilles (*pools*),

et celles qui agissent sur la direction de l'écoulement (voir figure 1.36)

- méandres (*meanders*),
- bancs (*bars*), et
- tresses, ramification en plusieurs bras (*braiding*).



**Figure 1.36** – Types de forme de lit dans les rivières alluviales. (a) lit plat, (b) apparition de petites structures morphologiques appelées « rides », (c) dunes, (d) dunes arasées, un régime appelé aussi « transition », (e) lit plan avec transport de sédiments (f) antidunes avec vagues stationnaires (en phase avec le fond), (g) antidunes avec vagues déferlantes (avec ressaut hydraulique), et (h) seuils et mouilles. D'après [Simons & Richardson \(1966\)](#); [García \(2007\)](#).



**Figure 1.37** – Schéma conceptuel illustrant le lien entre forme du chenal et principaux facteurs qui la gouvernent pour une rivière alluviale. D’après Church (2006).

## Cas des rivières torrentielles et des torrents

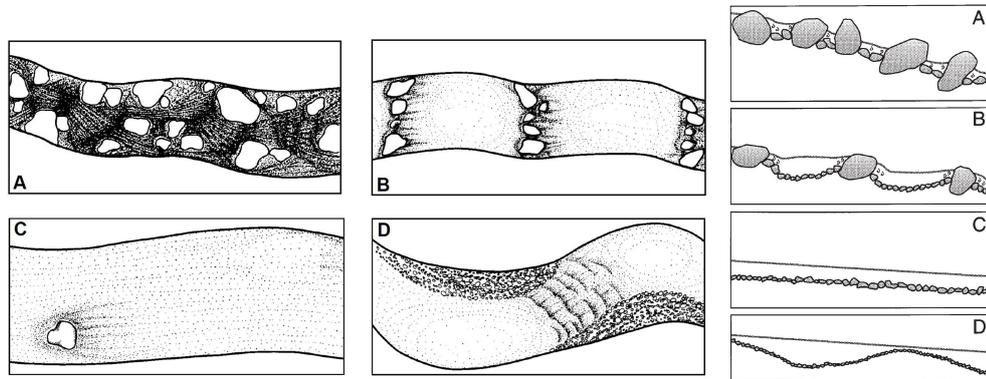
On parle de *rivières torrentielles* et de *torrents* dès que la pente est suffisante pour créer des structures particulières du lit. La première classification de [Bernard \(1927\)](#) retenait l'appellation de rivières torrentielles pour les cours d'eau dont la pente moyenne  $i$  était comprise entre 3 % et 6 %, et de torrents pour les cours d'eau tels que  $i > 6$  %. Le principal critère est donc la pente. Les classifications ultérieures ont retenu ce critère, mais elles ont donné des plages plus souples pour définir les rivières torrentielles et leurs structures morphologiques ([Montgomery & Buffington, 1997](#); [Wohl, 2000](#); [Church, 2010](#); [Schumm, 2005](#); [Comiti & Mao, 2012](#)): les rivières torrentielles (*mountain streams* en anglais) peuvent se rencontrer dès que  $i > 0,2$  %, et les torrents (*steep streams*) dès que  $i > 4 - 5$  %.

On distingue les morphologies suivantes (voir figure 1.38) :

- **Chute et cascade** (voir figures 1.62 et 1.65) : régime d'eaux tumultueuses (*tumbling flow*) sur blocs grossiers ( $d_{50} > 10$  cm) ou bedrock, avec des pentes  $i > 6,5$  %, formant un lit très stable (seules des crues exceptionnelles peuvent mobiliser ces blocs). La surface libre présente souvent une émulsion d'eau et d'air (eau blanche) reflétant un important brassage et une forte vorticité des écoulements.
- **Séquence seuil-mouille** (*step-pool*, figure 1.23(b)) : séquence d'alignements transversaux composés de blocs grossiers ( $d_{90} > 10$  cm) et de mouilles dont le lit est composé d'éléments plus fins. Les seuils sont souvent séparés d'une distance identique de l'ordre de 1   4*B* (avec *B* la largeur d'écoulement). Les écoulements subissent des cycles de transition super/subcritique générant une forte dissipation d'énergie. Ces séquences s'observent sur des pentes  $6,5 > i > 3$  % et des rivières à fourniture limitée en sédiment.
- **Lits plats** (*plane bed*, voir figure 1.61) : lit sans structure morphologique évidente sur des lits de pente  $3 > i > 1,5$  % et des graviers ( $d_{50} > 4$  cm). Des protubérances (blocs isolés) peuvent être parfois observées
- **Séquences mouilles-rapides** (*pool riffle*, voir figure 1.61) : lorsque des bancs de gravier se forment sur des lits en pente douce  $i < 1,5$  % et des graviers fins ( $d_{50} < 3$  cm), le cours d'eau présente à la fois une sinuosité et une ondulation de son lit qui se caractérisent par la présence de mouilles ( coulements lents et profonds) et de rapides ( coulements peu profonds et plus rapides). L'espacement entre mouilles est de l'ordre de 5 - 7*B*. Le lit est souvent composé de matériaux grossiers en surface (pavage) et plus fins en profondeur. La destruction du pavage conduit à une augmentation du charriage.

## Diagrammes des structures morphologiques

Il existe plusieurs classifications et tentatives pour délimiter le domaine d'occurrence des structures morphologiques (voir figures 1.39 et 1.40). La figure 1.40 distingue



**Figure 1.38** – Schéma des morphologies torrentielles (vue planimétrique et coupe longitudinale): (A) chenal avec écoulement tumultueux (chute); (B) chenal composé de seuils et mouilles régulièrement espacés; (C) chenal à lit plan montrant un seul bloc rocheux faisant saillie à travers un écoulement autrement uniforme; (D) chenal avec deux mouilles séparées par un rapide. D'après [Montgomery & Buffington \(1997\)](#).

notamment les régimes inférieur et supérieur. De façon grossière, le régime inférieur (*lower regime*) correspond à la naissance et au développement de structures morphologiques de type ride et dune, le plus souvent en conditions subcritiques, alors que le régime supérieur (*upper regime*) correspond à des instabilités du lit en régime supercritique ou à forte submersion (voir aussi figure 1.36).

### 1.5.2 Effet des structures morphologiques sur l'écoulement

Les structures morphologiques modifient les lignes de courant, augmentent la vortécité et la formation de zone morte, et donc dissipent de l'énergie. On estime que pour les petites profondeurs (typiquement  $h/d_{50} < 10$ ), la dissipation d'énergie due aux structures morphologiques représente plus de 50 % de l'énergie dissipée totale ([Parker et al., 2007](#)). Pour les rivières à plus forte submersion, la dissipation d'énergie est très importante si les structures morphologiques du lit sont principalement des dunes.

La figure 1.41 illustre la relation non linéaire qui existe entre contrainte pariétale et conditions hydrauliques: si la contrainte  $\tau_p'$  reflétant le frottement au niveau des grains du lit varie continûment avec les conditions hydrauliques, la contrainte totale  $\tau_p$  connaît des variations brutales et non monotones à chaque fois que la structure du lit est modifiée. Le frottement de forme  $\tau_p''$  peut représenter une contribution négligeable ou majoritaire à la contrainte totale.

A cette non-linéarité s'ajoute une non-unicité de la relation  $\tau_p(Q)$  ou  $h(Q)$  (voir figure 1.42): dans un cours d'eau, quand le débit augmente (phase de crue), les struc-

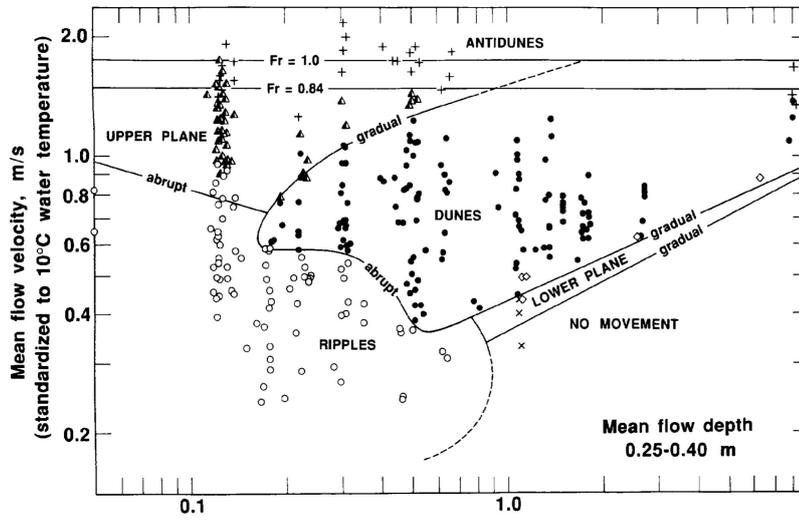


Figure 1.39 – Domaine d’existence des principales structures morphologiques dans un diagramme  $(h, \bar{u})$ . D’après Ashley (1990).

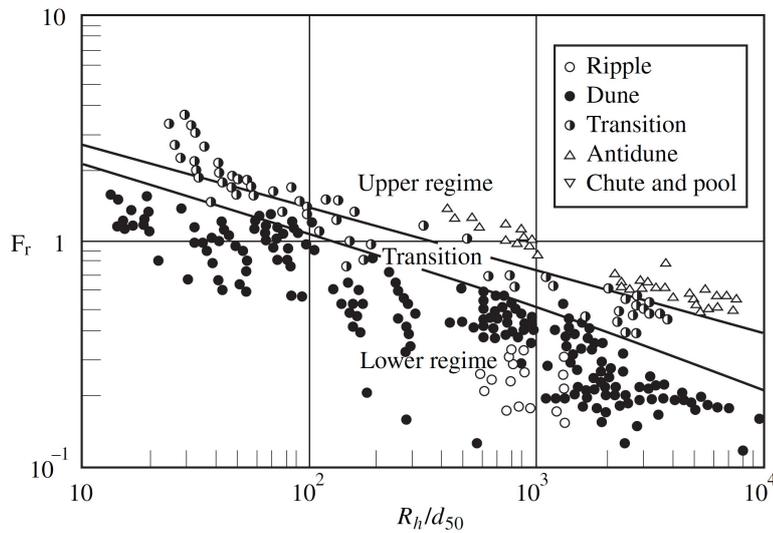
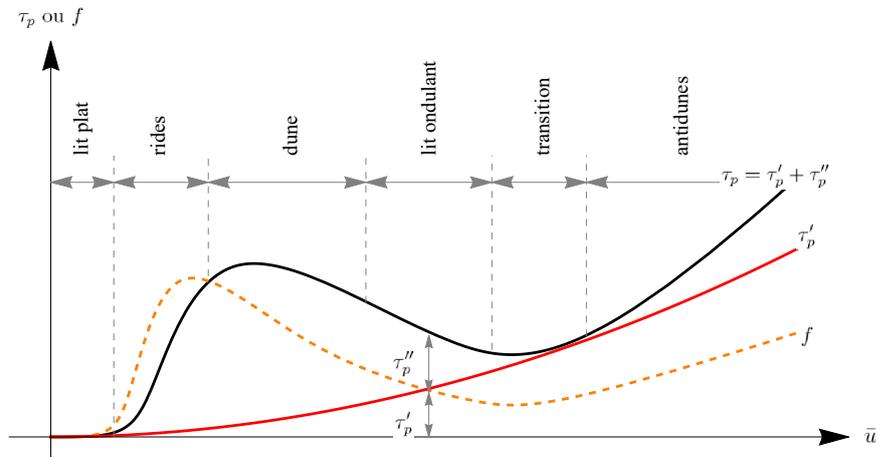


Figure 1.40 – Domaine d’existence des principales structures morphologiques dans un diagramme  $(R_h/d_{50}, Fr)$  avec distinction des régimes supérieur et inférieur. D’après Julien (1994).

tures morphologiques se développent et dissipent de l’énergie (frottement de forme). Quand le débit dépasse une valeur critique, ces structures morphologiques sont arasées



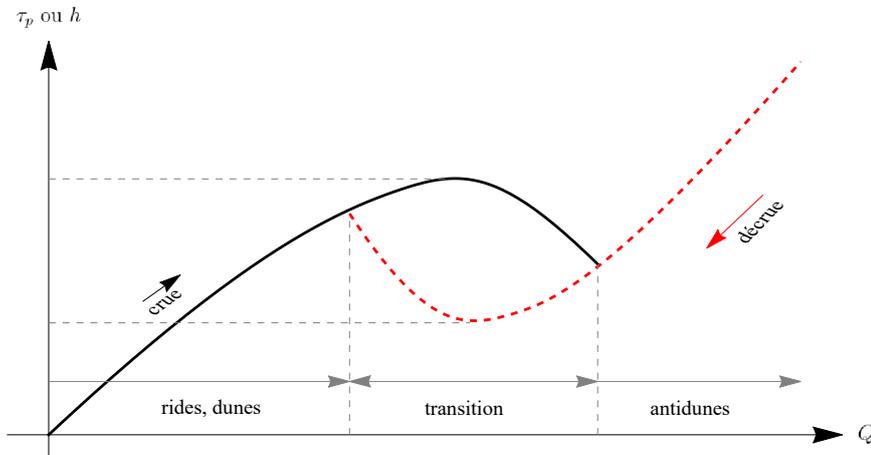
**Figure 1.41** – Schéma conceptuel de la variation de la contrainte pariétale  $\tau_p$  et du coefficient de frottement  $f$  avec la vitesse moyenne  $\bar{u}$  (ou la hauteur  $h$ ). Dès que la contrainte dépasse une valeur critique appelée « seuil de mise en mouvement », des structures morphologiques se forment. Elles créent des contraintes supplémentaires appelées frottement de forme  $\tau_p''$  et s'ajoutent au frottement de peau dû à la dissipation au niveau des grains du lit. D'après Raudkivi (1990).

du fait de la force de l'écoulement ; le lit devient de nouveau plat (régime supérieur), ce qui cause une chute de la dissipation d'énergie. Si on continue à augmenter le débit, des structures morphologiques de type antidune se forment ; la dissipation d'énergie s'accroît de nouveau (par rapport au frottement de peau). Si le débit diminue, l'écoulement garde une certaine inertie, la forme des structures morphologiques est différente selon que le débit est ascendant ou descendant (Shimizu *et al.*, 2009; Martin & Jerolmack, 2013). Pour le régime de transition qui est au cœur de la boucle d'hystérésis de la figure 1.42, on peut donc observer deux hauteurs d'eau possibles pour un même débit selon que le débit est croissant ou décroissant.

### 1.5.3 Lits mineur et majeur

Dans les études, il est souvent nécessaire d'évaluer le débit de plein bord  $Q_{pb}$  afin de distinguer :

- $Q < Q_{pb}$  : écoulement uniquement dans le lit mineur, avec une rugosité fixée par la granulométrie et la forme du lit ;
- $Q > Q_{pb}$  : débordement et écoulement dans le lit majeur. Le lit est composé de rugosité différentes.



**Figure 1.42** – Schéma conceptuel de formation d’une hystérésis dans la relation  $\tau_p(Q)$  ou  $h(Q)$  selon que le débit est croissant (phase de crue) ou décroissant (phase de décrue). D’après Shimizu *et al.* (2009).

En principe, déterminer le débit de débordement nécessite de disposer d’une courbe de tarage  $Q(h)$  d’un poste de mesures et de définir le débit de plein bord comme étant le débit où la courbe marque une inflexion. En pratique, il est rare de trouver une station de mesures sur le site étudié. Il faut alors estimer ce débit  $Q_{pb}$  à partir d’une connaissance de la bathymétrie du site. À défaut, on peut se servir de relations empiriques qui lient les conditions hydrauliques de plein bord au débit  $Q_{pb}$ . Plusieurs études ont montré que la largeur au miroir  $W$ , la profondeur  $h$ , et la pente du lit  $i$  variaient en loi puissance du débit de plein bord (Williams, 1978; Hey & Thorne, 1986; Millar, 2005; Mueller *et al.*, 2005; Parker *et al.*, 2007; Wilkerson & Parker, 2011; Kaless *et al.*, 2014; Gleason, 2015):

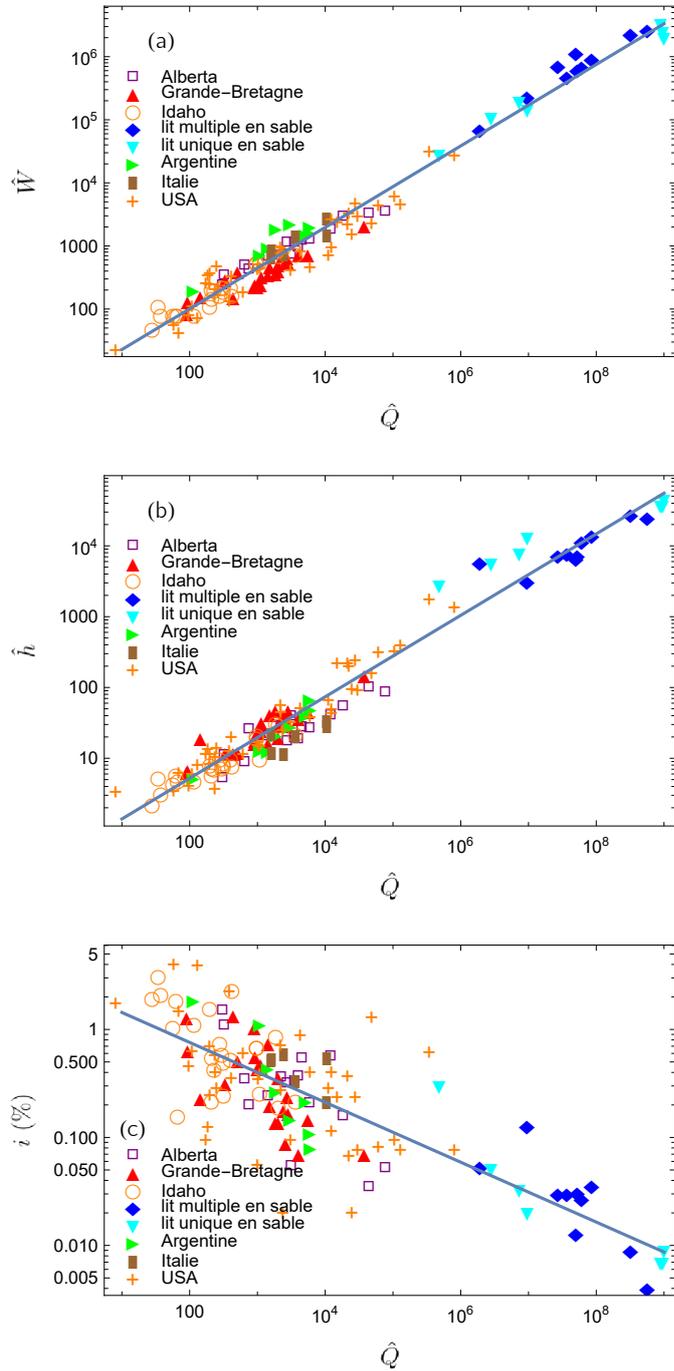
$$W \propto Q_{pb}^{1/2}, h \propto Q_{pb}^{2/5}, \text{ et } i \propto Q_{pb}^{-1/3}.$$

La figure 1.43 montre des données de terrain recueillies à travers le monde pour des rivières naturelles à lit de gravier ou de sable dont la pente  $i$  est plus faible que 1 %, ainsi que les corrélations obtenues sur ces données. Ainsi, Parker *et al.* (2007) ont trouvé les corrélations suivantes :

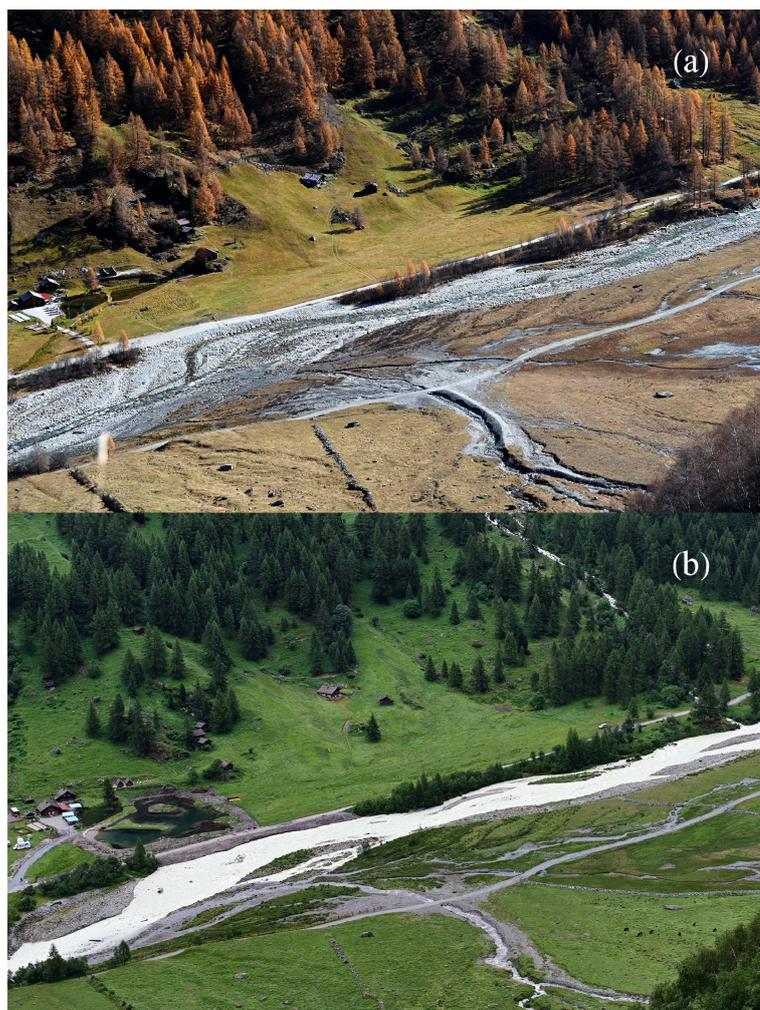
$$W = \frac{4,63}{g^{1/5}} Q_{pb}^{2/5} \left( \frac{Q_{pb}}{\sqrt{gd_{50}^3}} \right)^{1/15}, h = \frac{0,382}{g^{1/5}} Q_{pb}^{2/5} \text{ et } i = 0,101 \left( \frac{Q_{pb}}{\sqrt{gd_{50}^3}} \right)^{-0,344}.$$

Pour les rivières à gravier de lit de pente supérieure à environ 1 %, le lit mineur est souvent moins marqué, et sa position varie au cours du temps. Ce sont surtout les traces (laisses de crue, végétation, etc.) qui permettent de déterminer le lit mineur. La configuration du lit peut changer fortement selon le niveau d’eau. La figure 1.44 montre la Navisence à l’amont de Zinal (pente  $i \sim 3\%$ ) au moment de l’été et au cours d’une

petite crue. À l'étiage, la hauteur d'eau est du même ordre de grandeur que l'échelle de rugosité du lit; l'écoulement présente plusieurs bras avec des cheminements et des caractéristiques différentes. Au cours de la crue, la rivière a une hauteur d'eau qui dépasse notablement l'échelle de rugosité et occupe l'essentiel de la zone non végétalisée; des bancs de gravier émergent localement.



**Figure 1.43** – (a) Relation entre débit adimensionnel de plein bord  $\hat{Q} = Q/\sqrt{gd_{50}^3}$  et largeur adimensionnelle du lit mineur  $\hat{W} = W/d_{50}$ ; la courbe montre la tendance  $\hat{W} = 4,9\hat{Q}^{0,65}$ . (b) Relation entre débit adimensionnel de plein bord  $\hat{Q}$  et profondeur adimensionnelle du lit mineur  $\hat{h} = h/d_{50}$ ; la courbe montre la tendance  $\hat{h} = 0,32\hat{Q}^{0,58}$ . (c) Relation entre débit adimensionnel de plein bord  $\hat{Q}$  et pente moyenne du lit mineur  $i$ ; la courbe montre la tendance  $i = 0,03\hat{Q}^{-0,28}$ . Données tirées des rivières à travers le monde et collectées par Williams (1978), Parker *et al.* (2007) et Kaless *et al.* (2014).



**Figure 1.44** – La Navisence au Plat de Lé à Zinal (VS) à deux moments différents. (a) Étiage en novembre 2020. (b) Crue saisonnière en juin 2022.

### 1.5.4 Définition des variables d'écoulement pour les lits rugueux

Au problème de dissipation accrue d'énergie lorsque le lit présente des structures morphologiques se posent d'autres problèmes de définition des variables d'écoulement dès que la topographie du lit devient complexe. La forte variabilité spatiale et temporelle des écoulements amène à définir les variables d'écoulement comme des valeurs moyennées à l'échelle d'un bief<sup>13</sup> (Ferguson, 2013). Ainsi, pour un lit composé de structures morphologiques avec une certaine régularité dans leur position (bancs alternés, séquence seuil/mouille, dune, etc.), la pente du lit est définie comme la pente moyennée sur deux longueurs d'onde des structures. Il en est de même pour les autres quantités telles que section mouillée, périmètre mouillé, et vitesse : elles doivent être mesurées en plusieurs sections et moyennées à l'échelle du bief. La définition de la rugosité du lit ou de la distribution granulométrique reste un problème difficile car les résultats présentent de grandes fluctuations et dépendent de l'échelle d'observation (Jerolmack & Mohrig, 2005; Aberle & Nikora, 2006; Aberle *et al.*, 2010; Smith, 2014; Bertin *et al.*, 2017).

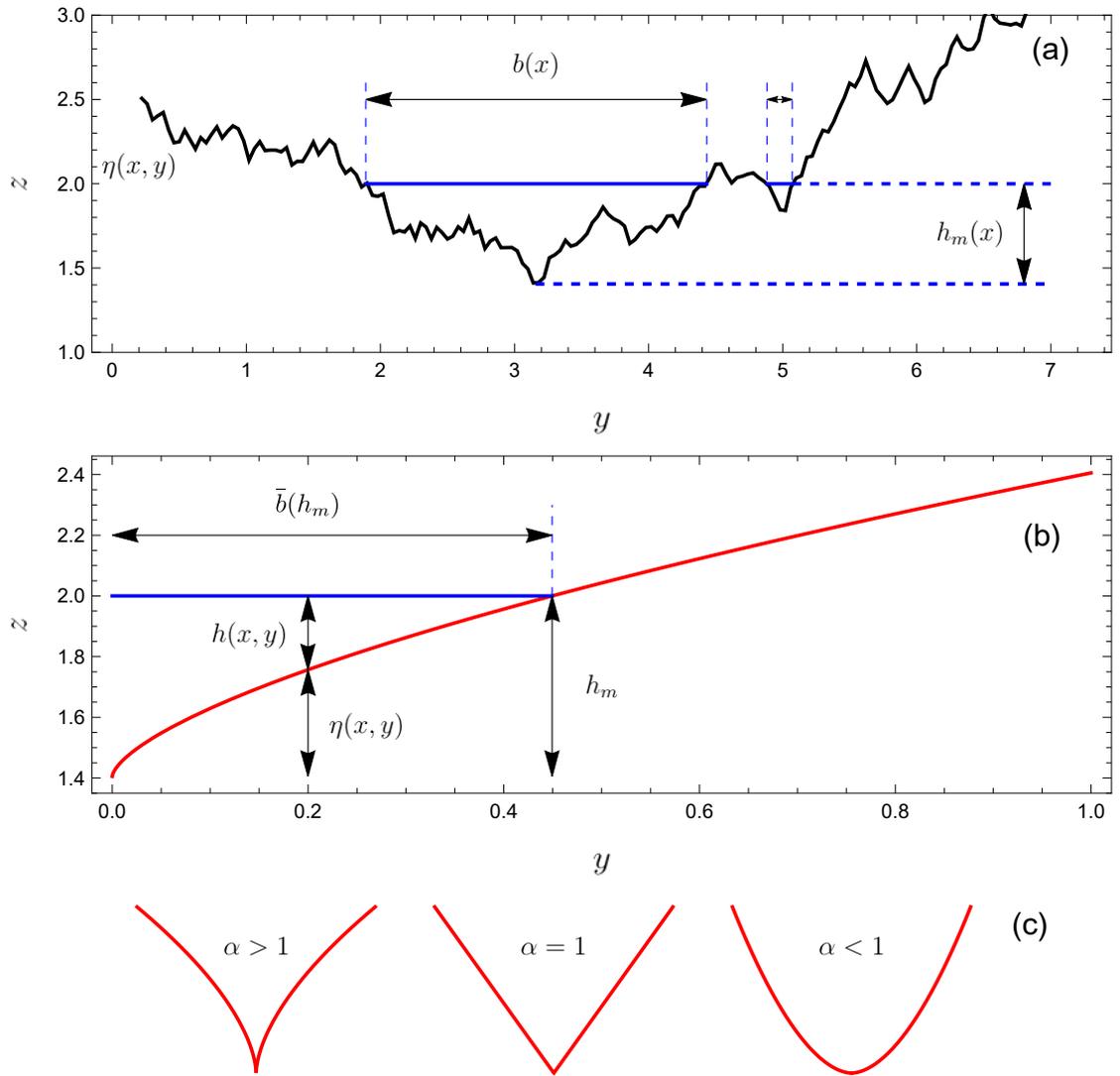
Pour les rivières torrentielles, les sections d'écoulement présentent souvent une certaine variabilité le long d'un même bief. Redolfi *et al.* (2016) a trouvé que pour une rivière donnée, il est possible d'obtenir une relation effective entre largeur au miroir  $\bar{b}$  (moyennée sur le bief) et tirant d'eau  $h_m$  (voir figure 1.45) :

$$\bar{b} = kh_m^\alpha, \quad (1.113)$$

avec  $k$  et  $\alpha$  deux constantes caractéristiques d'une rivière. Il est alors plus facile de travailler sur une section effective du bief.

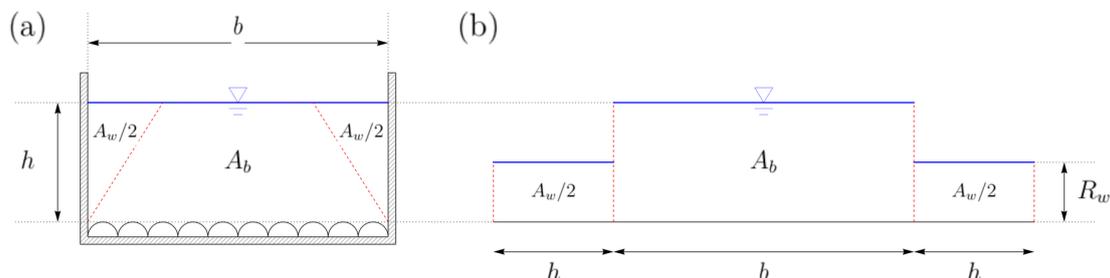
---

13. *reach-averaged variables* en anglais.



**Figure 1.45** – (a) Section en travers  $\eta(x)$  avec définition du tirant d'eau  $h_{max}(x)$  (profondeur maximale d'eau) et de la largeur au miroir  $b(x)$ . (b) Variation de la largeur moyennée sur le bief  $\bar{b}(h_m)$  et de la hauteur locale  $h(x)$  à partir de relation effective  $h_m = (\bar{b}/k)^{1/\alpha}$  reliant largeur au miroir et tirant d'eau. En pratique, il faut mesurer la section en travers en différentes positions  $x$  afin d'obtenir la relation locale  $b(x) = B(h_m(x), x)$ . La largeur est moyennée sur une longueur  $L$  de bief:  $\bar{b} \equiv L^{-1} \int_0^L b(x) dx$ . D'après (Redolfi *et al.*, 2016). (c) Type de profil en fonction de la valeur de  $\alpha$ : Lorsque  $\alpha > 1$ , on a une rivière avec un profil en V, et inversement  $\alpha < 1$  correspond à une rivière avec un profil en U.

### 1.5.5 Correction des effets de paroi



**Figure 1.46** – (a) Canal à section rectangulaire avec un lit rugueux et des parois latérales. (b) Partition de la section mouillée réelle en une série de trois sections attenantes d’après (Einstein, 1942). D’après (Guo, 2015).

On considère ici le cas d’un canal à section rectangulaire de largeur  $b$  et hauteur  $h$ , de pente  $i$  dans lequel transite un débit  $Q$ . Einstein (1942) a proposé une méthode simple pour évaluer l’influence de parois sur la contrainte exercée par l’écoulement sur le lit. Il considère qu’une section mouillée  $A = bh$  peut être scindée en une sous-section  $A_b$  sous influence du lit (voir figure 1.46) et une sous-section  $A_w$  sous influence des parois ( $A_w/2$  pour chacune des parois). On note  $R_w$  le rayon hydraulique de la zone sous influence d’une paroi; le périmètre mouillé est  $h$  (par définition c’est la longueur de la paroi en contact avec l’écoulement). Einstein (1942) suppose que la vitesse de l’eau  $\bar{u} = Q/A$  est uniforme dans chaque des sous-sections, et il considère que la loi de Manning–Strickler est applicable avec un coefficient différent dans chacune des sous-régions :

$$\bar{u} = K_w \sqrt{i} R_w^{2/3} \text{ et } \bar{u} = K_b \sqrt{i} R_b^{2/3}, \quad (1.114)$$

où  $K_w$  est le coefficient de Manning–Strickler de la paroi, et  $K_b$  celui du lit. On a donc :

$$R_w = \left( \frac{\bar{u}}{K_w \sqrt{i}} \right)^{3/2}. \quad (1.115)$$

La surface mouillée du lit est :

$$A_b = A - A_w = bh - 2hR_w,$$

tandis que son périmètre mouillé est  $b$ , et donc le rayon hydraulique du lit est :

$$R_b = \frac{A_b}{b} = h - 2\frac{h}{b}R_w. \quad (1.116)$$

La contrainte pariétale s’exerçant sur le lit est donc :

$$\tau_b = \frac{\rho g}{K_b^2} \frac{\bar{u}^2}{R_b^{1/3}} = \frac{\rho g}{K_b^2} \frac{\bar{u}^2}{h^{1/3}} \left( 1 - \frac{2}{b} \left( \frac{U}{K_w \sqrt{i}} \right)^{3/2} \right)^{-1/3}. \quad (1.117)$$

Au premier ordre (en  $\bar{u}$ ), on a :

$$\tau_b \approx \tau_\infty \left( 1 + \frac{2}{3b} \left( \frac{U}{K_w \sqrt{i}} \right)^{3/2} \right) > \tau_\infty = \frac{\rho g}{K_b^2} \bar{u}^2,$$

avec  $\tau_\infty$  la contrainte sur le lit pour un canal infiniment large.

La procédure d'Einstein a été critiquée car en se fondant uniquement sur une loi de Manning–Strickler, elle est moins apte à traiter des cas où la paroi est lisse<sup>14</sup>. [Johnson \(1942\)](#) recommande d'utiliser la loi de von Kármán–Prandtl pour estimer le coefficient de Darcy–Weisbach pour des parois lisses :

$$\frac{1}{\sqrt{f_w}} = 2 \log(\text{Re}_w \sqrt{f_w}) - 0,8, \quad (1.118)$$

avec  $f_w$  le coefficient de Darcy–Weisbach et  $\text{Re}_w = 4\bar{u}R_w/\nu$  le nombre de Reynolds pour l'écoulement à la paroi. Comme précédemment, on suppose que la vitesse est identique dans les sous-sections et dans la section entière (dont le coefficient de Darcy–Weisbach est noté  $f$  et de rayon hydraulique  $R = bh/(b + 2h)$  de la section mouillée totale):

$$\bar{u} = \sqrt{8 \frac{g i R_w}{f_w}} = \sqrt{8 \frac{g i R}{f}}, \quad (1.119)$$

et de là on déduit que les rayons hydrauliques entre sous-section et section totale sont reliés :

$$R_w = \frac{f_w}{f} R \quad (1.120)$$

et donc les nombres de Reynolds le sont aussi :

$$\text{Re}_w = \frac{4R_w \bar{u}}{\nu} = \frac{4R \bar{u}}{\nu} \frac{f_w}{f} = \text{Re} \frac{f_w}{f}, \quad (1.121)$$

avec  $\text{Re} = 4R\bar{u}/\nu$ . Si la vitesse moyenne  $\bar{u}$  est connue (alors  $\text{Re}$  et  $f = 8giR/\bar{u}^2$  le sont aussi), on peut résoudre l'équation (1.118) qui peut être mise – à l'aide de l'équation (1.121) – sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{f_w}} = 2 \log\left(\frac{\text{Re}}{f} \sqrt{f_w}^{3/2}\right) - 0,8, \quad (1.122)$$

dont la solution peut s'écrire ([Guo, 2017](#)):

$$f_w = \frac{\ln^2 10}{36} W^{-2} \left( \sqrt[3]{\frac{\text{Re}}{f}} 10^{-4/30} \ln 10^{1/6} \right) \approx \frac{\ln^2 10}{36} W^{-2} \left( \sqrt[3]{\frac{9}{400} \frac{\text{Re}}{f}} \right), \quad (1.123)$$

14. En effet, la loi de Manning–Strickler n'est pas indiquée pour des parois lisses telles que  $K_w > 78\bar{u}^{1/6}$ .

avec  $W$  la fonction de Lambert<sup>15</sup> Pour calculer la contrainte sur le lit, on écrit que la contrainte moyenne totale  $\tau$  s'écrit en fonction de la contrainte  $\tau_b$  sur le lit et de celle sur les parois latérales  $\tau_w$  :

$$(2h + b)\tau = b\tau_b + 2h\tau_w,$$

et comme la vitesse moyenne est identique pour toutes les sections, on a aussi en termes de coefficients de Darcy–Weisbach :

$$(2h + b)f = bf_b + 2hf_w \Leftrightarrow f_b = \left(2\frac{h}{b} + 1\right)f - 2\frac{h}{b}f_w = f + 2\frac{h}{b}(f - f_w) > f. \quad (1.124)$$

La contrainte sur le lit est alors :

$$\tau_b = \frac{f_b}{8}\rho\bar{u}^2 = \tau_\infty + \frac{h}{4b}(f - f_w)\rho\bar{u}^2 \text{ avec } \tau_\infty = \frac{f}{8}\rho\bar{u}^2. \quad (1.125)$$

### 1.5.6 Exemple d'application

À titre d'exemple, on considère les données obtenues par [Song \(1994\)](#) en régime permanent uniforme dans le canal Armfield du LHE (largeur  $b = 60$  cm) composé d'un lit de gravier ( $d_{50} = 1,27$  cm,  $d_{90} = 1,7$  cm). Le tableau 1.1 montre la relation entre débit injecté  $Q$  et hauteur mesurée  $h$  en fonction de la pente  $i$  du canal.

#### Prédiction de la hauteur d'eau

On suppose ici qu'on établit un certain débit  $Q$ . On veut calculer la hauteur d'écoulement à l'aide des équations de frottement de Manning–Strickler ou Darccy–Weisbach en portant notre attention sur un effet éventuel de la paroi sur le résultat final. On commence par calculer la hauteur d'écoulement à l'aide de la formule de Manning–Strickler :

$$Q = bhK\sqrt{i}R_h, \quad (1.126)$$

en faisant différentes hypothèses : (i) canal infiniment large  $R_h = h$  (l'équation (1.126) est alors explicite), (ii)  $R_h = bh/(b + 2h)$  (l'équation (1.126) est alors implicite) ou bien (iii)  $R_h = R_b$  et on se sert des équations (1.115) et (1.116) proposées par Einstein pour évaluer le rayon hydraulique de la sous-section  $A_b$ . La figure 1.47 reporte la hauteur prédite en se servant de la loi de Manning–Strickler (1.126) et la hauteur mesurée par [Song et al. \(1994\)](#) : on note que la loi de Manning–Strickler est correcte, avec des incertitudes de l'ordre de 10 % à 15 %. La correction améliore un peu la prédiction sauf pour les hauteurs les plus importantes.

15. C'est la fonction  $W(x)$  telle que  $\ln W + W = \ln x$ .

**Tableau 1.1** – Expériences réalisées par Tiancheng Song (Song *et al.*, 1994; Song, 1994) en régime permanent uniforme dans le canal Armfield de longueur 17 m. Le débit  $Q$  est imposé à l'amont du canal de pente  $i$ . La hauteur d'eau  $h$  est mesurée avec une précision de  $\pm 1$  mm à l'aide de capteurs ultrasonores. La vitesse de frottement  $u_*$  est estimée à partir de la mesure des fluctuations de vitesse  $u_* = \sqrt{-\langle u'v' \rangle}$  mesurées à l'aide profileur acoustique par effet Doppler (ADVP).

$i$ [%]	$Q$ [L/s]	$h$ (cm)	$u_*$ [cm/s]
0,25	90	20,4	6,51
0,25	60	15,7	6,1
0,25	40	12,2	5,15
0,25	31	10,9	4,5
0,50	130	21,3	10
0,50	110	18,9	9,24
0,50	90	17	7,95
0,50	70	14,2	7,02
0,50	50	11,8	6,9
0,50	30	8,9	6,75
0,75	120	18,3	10,6
0,75	65	12,2	8,26
0,75	50	10	7,94
0,90	100	15,6	11,21
0,90	70	12,2	9,07
0,90	60	11,2	8,67
1,00	70	12,2	10,11
1,00	55	10,5	9,78
1,25	70	11,7	10,37
1,25	50	9,1	10,06
1,50	50	9,1	10,96
1,50	40	7,7	10,06

On utilise maintenant la loi de Darcy–Weisbach :

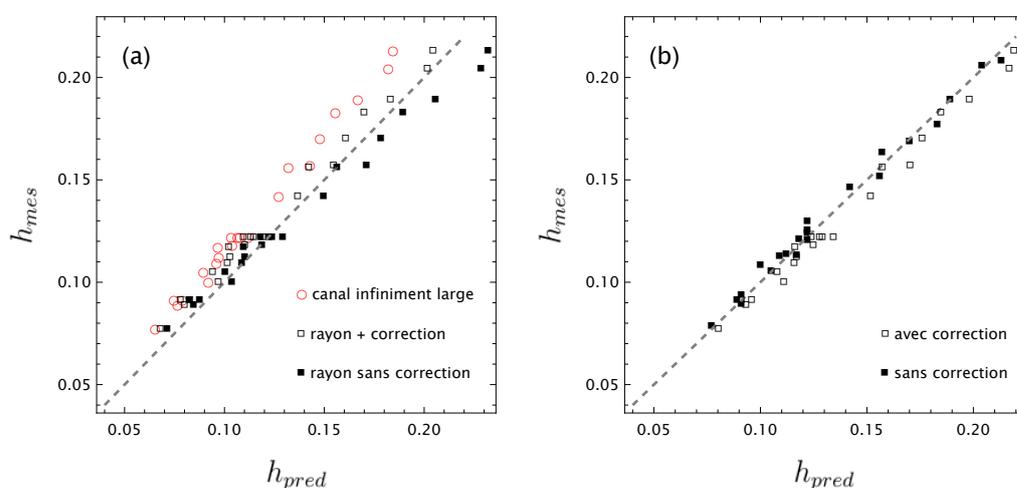
$$Q = bh\sqrt{8\frac{gR_h}{f}}, \quad (1.127)$$

avec  $R_h = bh/(b+2h)$  et où le coefficient de Darcy–Weisbach  $f$  est calculé de la façon suivante :

- soit  $f$  est donnée par la formule de Keulegan (1.75) pour des écoulements sur fond rugueux (avec  $k_s = d_{50}$ ). On ne tient pas compte de différences de frottement entre le lit et la paroi ;

- soit  $f = (bf_b + 2hf_w)/(b + 2h)$ , avec  $f_b$  est donné par la formule de Keulegan (1.75) (toujours avec  $k_s = d_{50}$ ) et avec  $f_w$  calculé à partir de la loi (1.118) de von Kármán–Prandtl pour les parois lisses. Il y a alors un système d'équations non linéaires à résoudre pour trouver  $h$ , qui permet de prendre en compte l'effet de la paroi.

La figure 1.47 montre que la loi de Darcy–Weisbach donne des résultats plus précis que la loi de Manning–Strickler et qu'il y a peu de plus-value à utiliser une correction de paroi.



**Figure 1.47** – (a) Calcul de la hauteur à l’aide de la loi de Manning–Strickler (1.126) avec l’hypothèse  $R_h \approx h$ ,  $R = bh/(b + 2h)$  avec ou sans correction de paroi. On a pris  $K_b = 26/d_{90}^{1/6} = 51 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$  et  $K_w = 90 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ . (b) Calcul de la hauteur à l’aide de la loi de Darcy–Weisbach. On prend  $k_s = d_{50}$ . Données: [Song et al. \(1994\)](#).

### Prédiction de vitesse de frottement $u_*$

On part des données expérimentales ( $Q$ ,  $h$ ) et on calcule le coefficient de frottement compatible avec ces données. Ce coefficient de frottement permet de calculer la contrainte au fond  $\tau_p$  et la vitesse de frottement  $u_* = \sqrt{\tau_b/\rho}$ . On peut comparer cette vitesse avec la valeur estimée à partir du champ de vitesse mesuré expérimentalement (on a par définition:  $u_* = \sqrt{-\langle u'v' \rangle}$ ).

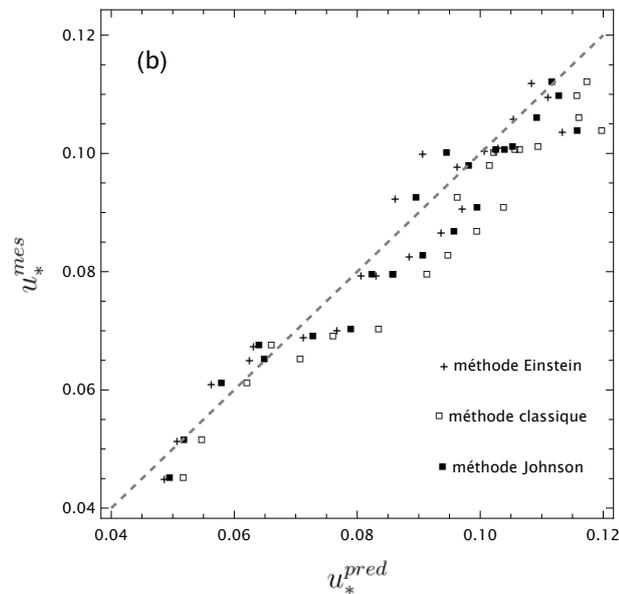
Si le régime est permanent uniforme, la contrainte de cisaillement sur le lit en

l'absence d'influence des parois est  $\tau_p = \rho g h i$ , et la vitesse de frottement est donc :

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} = \sqrt{g h i}. \quad (1.128)$$

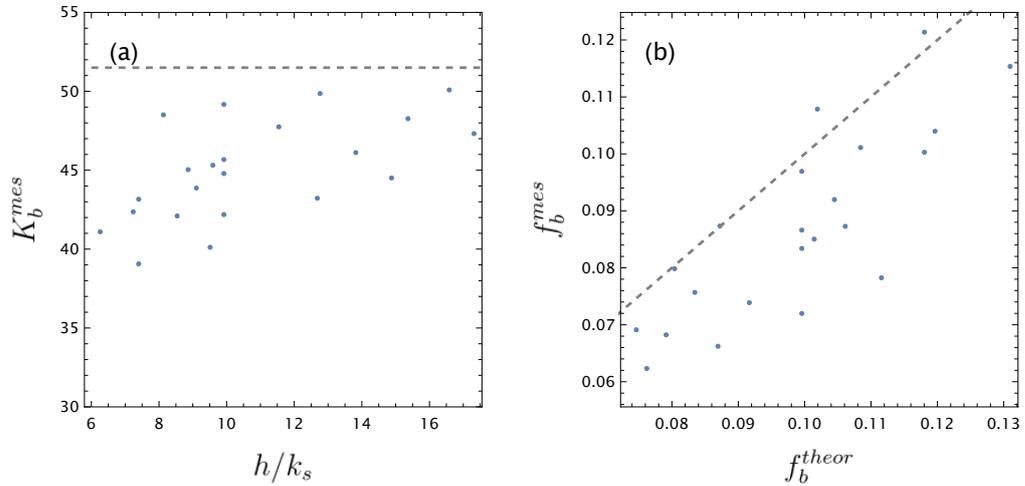
On applique l'équation de Manning–Strickler (1.114) à rebours : partant du couple de mesures  $(Q, h)$ , on estime la surface mouillée du lit  $R_b$  à l'aide de l'équation (1.116), puis le coefficient de frottement  $K_b$  à l'aide de l'équation (1.114), et enfin la contrainte de cisaillement  $\tau_p$  sur le lit à l'aide de l'équation (1.117). De là, on obtient une estimation de la vitesse de glissement.

On fait de même avec la méthode de Johnson : on se sert de l'équation de Darcy–Weisbach (1.119) pour déterminer le coefficient de frottement global  $f$ . On calcule ensuite le frottement sur les parois latérales à l'aide de l'équation (1.123). De là, l'équation (1.124) permet d'estimer le frottement sur le lit, et donc à l'aide de l'équation (1.125), on obtient une estimation de la contrainte sur le lit loin des parois.



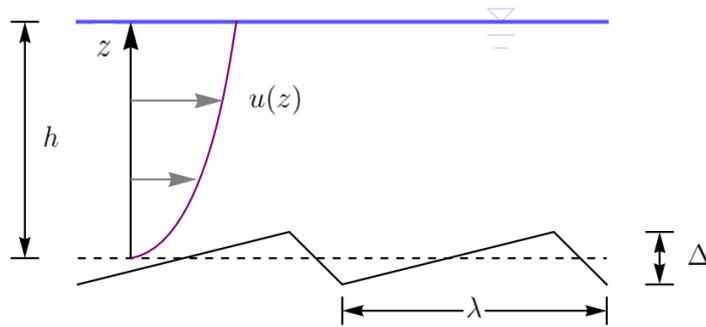
**Figure 1.48** – Comparaison entre vitesses de frottement calculées et mesurées. On compare la méthode directe donnée par l'équation (1.128), la méthode d'Einstein fondée sur l'équation (1.117), et la méthode de Johnson reposant sur l'équation (1.125). Données : [Song et al. \(1994\)](#).

Comme le montre la figure 1.48, il y a sans trop de surprises un bon accord entre méthodes. Ce bon accord résulte bien naturellement en partie du calage du frottement global sur les données mesurées et pourrait de ce fait sembler artificiel, mais si on compare ces valeurs des coefficients de frottement avec les valeurs théoriques (voir figure 1.49), il y a un accord correct.



**Figure 1.49** – (a) Comparaison de la valeur du coefficient de Manning–Strickler estimée par inversion de l’équation (1.114) et la valeur attendue  $k_d = d_{50}^{1/6}$ . (b) Comparaison du coefficient de frottement de Darcy–Weibach par inversion de l’équation (1.119) et comparaison avec la valeur théorique (1.75). Données : [Song et al. \(1994\)](#).

### 1.5.7 Correction des effets des structures morphologiques



**Figure 1.50** – Géométrie d’une dune.

Lorsque le lit est composé de structures morphologiques régulières telles que des dunes ou des rides (hauteur  $\Delta$ , longueur d’onde  $\lambda$ , voir figure 1.50), la dissipation d’énergie se produit

- à l’échelle du grain de taille caractéristique  $k'_s$  (frottement de Darcy–Weisbach

$f'$  et pente d'énergie  $j'$ ), et on parle de *frottement de peau*<sup>16</sup> ;

- à l'échelle de la structure morphologique, dont l'effet serait équivalent à un frottement sur une rugosité d'échelle  $k'_s$  (frottement  $f''$  et pente d'énergie  $j''$ ), et on parle de *frottement de forme*<sup>17</sup>. Les variations de sinuosité du lit, les méandres, et les embranchements peuvent aussi être catégorisés comme frottement de forme<sup>18</sup>

Pour prendre en compte la dissipation supplémentaires d'énergie causée par les structures morphologiques, plusieurs options sont disponibles (Einstein, 1950; Einstein & Barbarossa, 1952; Engelund, 1966; van Rijn, 1984):

- Considérer qu'il s'agit d'énergies dissipées dans un même volume. Les pertes de charges s'ajoutent :

$$\Delta H = \Delta H' + \Delta H'',$$

et donc si on ramène cela à une perte de charge par unité de longueur, on a :

$$j = j' + j''. \quad (1.129)$$

- Considérer qu'il s'agit de contrainte supplémentaire. Les pertes de charges s'ajoutent :

$$\Delta H = \Delta H' + \Delta H'',$$

et donc si on ramène cela à une perte de charge par unité de longueur, on a :

$$j = j' + j''. \quad (1.130)$$

Et comme par ailleurs,  $j$  et  $f$  sont proportionnels (voir § 1.4.2), on a aussi :

$$f = f' + f''. \quad (1.131)$$

- Considérer qu'il s'agit qu'il existe des zones d'influence respective des effets de forme et de peau. On fait une décomposition de la section mouillée  $A$  en deux parties comme ce qui a été proposé par Einstein (1942) (voir § 1.5.5):

$$A = A' + A'',$$

auxquelles on pourrait associer deux rayons hydrauliques effectifs :

$$R_h = R'_h + R''_h, \quad (1.132)$$

et deux contraintes pariétales :

$$\tau_p = \tau'_p + \tau''_p \text{ avec } \tau'_p = \rho g R'_h i \text{ et } \tau''_p = \rho g R''_h i. \quad (1.133)$$

16. « skin friction » en anglais.

17. « form drag » en anglais

18. Certains auteurs préfèrent parler de « shape drag » lorsqu'il s'agit de processus de dissipation relative à la forme longitudinale du lit.

Si on définit les vitesses de frottement  $u'_* = \sqrt{\tau'_p} = \sqrt{gh'i}$  et  $u''_* = \sqrt{\tau''_p} = \sqrt{gh''i}$ , et les coefficients de frottement  $f' = 8(u'_*/\bar{u})^2$  et  $f'' = 8(u''_*/\bar{u})^2$ , alors on a également :

$$f = f' + f''. \quad (1.134)$$

- Considérer que grain et structure morphologique sont associés à une rugosité effective respective  $k'_s$  et  $k''_s$ . La rugosité totale équivalente est alors :

$$k_s = k'_s + k''_s.$$

Si on raisonne avec des lois empiriques de type Manning–Strickler alors on peut se servir de la relation (1.130) et de la définition de la pente de frottement pour la loi de Manning–Strickler (voir § 1.4.4) :

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{K'^2} + \frac{1}{K''^2},$$

ou bien  $n^2 = n'^2 + n''^2$  si on préfère travailler avec le coefficient de Manning.

Dans tous les cas de figure, on considère que la contrainte pariétale  $\tau_p$  se décompose en deux parties  $\tau'_p$  (frottement de peau) et  $\tau''_p$  (frottement de forme). Dans les méthodes énergétiques, on considère que la section d'écoulement est la même, et que seule change la pente de frottement. Dans les méthodes volumiques, on considère que chaque processus a une zone d'influence particulière.

### 1.5.8 Exemple des dunes

#### Méthode énergétique d'Engelund

Engelund a considéré qu'au passage d'une dune, l'écoulement subit une perte de charge singulière (Engelund, 1966) :

$$\Delta H'' = c \frac{\bar{u}^2}{2g} \left( \frac{\Delta}{h} \right)^2,$$

ce qui correspond à une pente de frottement :

$$j'' = \frac{\Delta H''}{\lambda} = c \frac{\bar{u}^2}{2g\lambda} \left( \frac{\Delta}{h} \right)^2 = c \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{h\lambda} \text{Fr}^2.$$

Pour des lits de gravier, Millar (1999) propose une formule différente :

$$j'' = 0,95 \frac{\Delta}{\lambda}.$$

La dissipation totale d'énergie est alors donnée par la relation (1.130) (Engelund, 1966; Griffiths, 1989; Millar, 1999) :

$$j = j' + j'',$$

avec  $j'$  donnée par une formule empirique pour décrire le frottement de peau.

### Méthode d'Einstein

On attribue à [Einstein \(1950\)](#) la première tentative d'estimation du frottement de peau. Pour décrire le frottement de peau, [Einstein \(1950\)](#) a utilisé la loi de Keulegan (1.71):

$$\frac{\bar{u}}{u'_*} = F_1(R'_h) = 6,25 + 5,75 \log \left( 12,27 \frac{R'_h}{k_s} \right) = 5,75 \log \left( 12,27 \frac{R'_h}{k_s} \right), \quad (1.135)$$

avec  $u'_*$  la vitesse de frottement liée au frottement de peau,  $R'_h$ , et  $k_s = d_{65}$  (pour le sable fin, [Einstein \(1950\)](#) recommande de définir la rugosité en tenant compte de l'épaisseur de la couche limite). Pour le frottement de forme, [Einstein \(1950\)](#) a supposé que le frottement est fonction de l'intensité de l'écoulement:

$$\frac{\bar{u}}{u''_*} = F_2(\Psi) \text{ avec } \Psi = \frac{\rho_p - \rho}{\rho} \frac{d_{35}}{g R''_h} \quad (1.136)$$

où  $\Psi$  est appelé le paramètre (adimensionnel) d'intensité de l'écoulement; c'est l'inverse du nombre de Shields. Pour la fonction  $f$ , [Einstein \(1950\)](#) en a proposé une représentation graphique (1.51) que l'on peut approcher de la façon suivante:

$$f(\Psi) = \frac{38,6 (0,16\Psi^3 + 1)^{0,32}}{\Psi^{1,36}}, \quad (1.137)$$

qui se comporte asymptotiquement comme  $f \propto \Psi^{-1,36}$  quand  $\Psi < 2$  (écoulement intense avec transport solide) et comme  $f \propto \Psi^{-0,40}$  quand  $\Psi > 5$  (écoulement peu intense, faible transport solide).

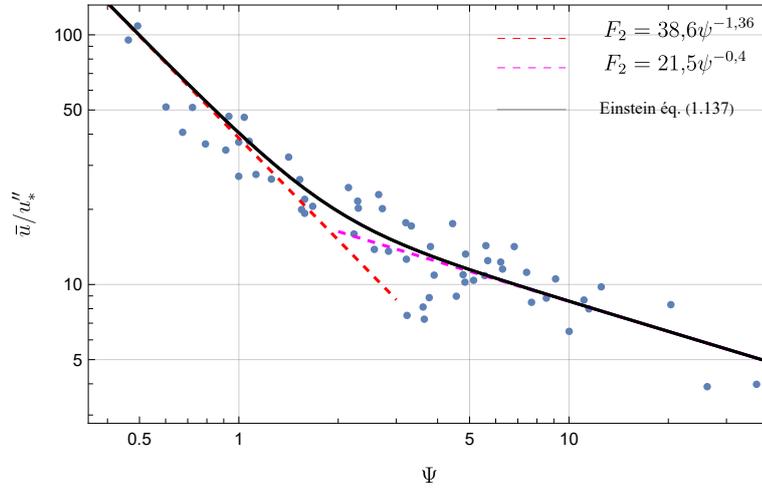
La méthode d'Einstein fournit une méthode implicite de calcul de la hauteur à partir du débit. Le calcul de la relation  $f(h/d_{50})$  est un peu plus aisé. Il suffit de résoudre le système:

$$\begin{aligned} h &= h' + h'', \\ \bar{u} &= u'_* F_1(h') = u''_* F_2(h''), \end{aligned}$$

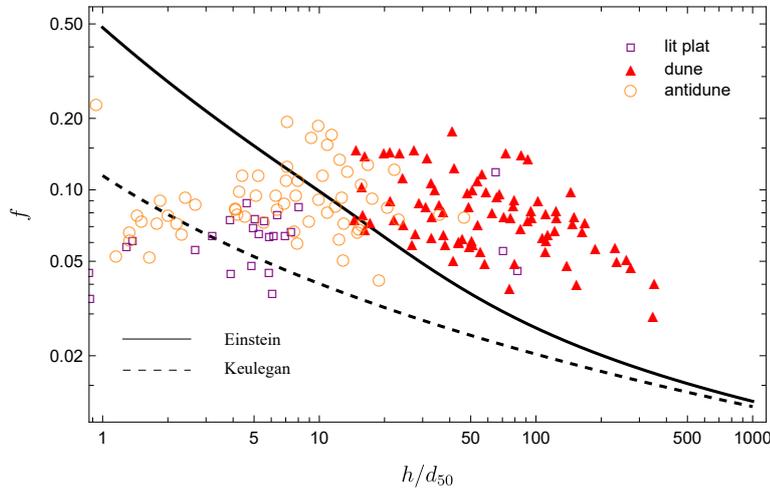
avec  $u'_* = \sqrt{gh'i}$  et  $u''_* = \sqrt{gh''i}$ . Une fois que le système d'équations est résolu, on peut calculer le frottement à partir de l'équation (1.134):

$$f = f' + f'' = 8 \left( \frac{u'_*}{\bar{u}} \right)^2 + 8 \left( \frac{u''_*}{\bar{u}} \right)^2 = \frac{8}{F_1^2} + \frac{8}{F_2^2}. \quad (1.138)$$

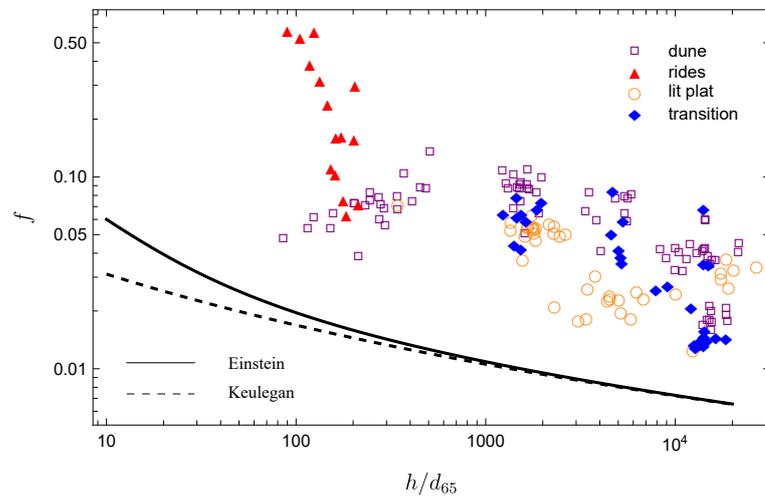
Les figures 1.52 et 1.53 comparent le frottement  $f$  obtenu par la méthode d'Einstein avec des données de laboratoire et de terrain. Dans les deux cas, la méthode sous-estime le coefficient de frottement d'un facteur 4 environ. [Alam & Kennedy \(1969\)](#) ont développé une variation de la méthode d'Einstein, qui considère que le frottement de forme  $F_2$  dépend non seulement de  $\Psi$ , mais aussi du nombre de Froude.



**Figure 1.51** – Variation du rapport  $\bar{u}/u_*''$  en fonction du param\u00e8tre  $\Psi$  et comparaison avec l'\u00e9quation (1.137) cal\u00e9e sur la repr\u00e9sentation graphique fournie par [Einstein & Barbarossa \(1952\)](#). On reporte aussi les approximations asymptotiques de  $f$ . Source des mesures : [Einstein & Barbarossa \(1952\)](#).



**Figure 1.52** – Variation du frottement  $f$  avec la submersion relative  $h/d_{50}$ . On a ajout\u00e9 la loi de Keulegan (1.71) qui sert \u00e0 calculer le frottement de peau (1.135) et le frottement (1.138) calcul\u00e9 par la m\u00e9thode d'Einstein. Les mesures sont les donn\u00e9es de laboratoire obtenues par [Williams \(1970\)](#).



**Figure 1.53** – Variation du frottement  $f$  avec la submersion relative  $h/d_{50}$ . On a ajouté la loi de Keulegan (1.71) qui sert à calculer le frottement de peau (1.135) et le frottement (1.138) calculé par la méthode d’Einstein. Les données sont les mesures de terrain compilées par [Brownlie \(1981\)](#).

### Méthode de la rugosité équivalente de van Rijn

Dans le cas des dunes, [van Rijn \(1984\)](#) propose comme rugosité équivalente de forme :

$$k_s'' = 1,1 (1 - \exp(-25\Delta/\lambda)), \quad (1.139)$$

et il considère que l'ensemble des deux processus est équivalent à du frottement associé à une rugosité :

$$k_s = k_s' + k_s'' = 3d_{90} + 1,1 (1 - \exp(-25\Delta/\lambda)). \quad (1.140)$$

Il existe plusieurs études des caractéristiques des dunes ([Van Rijn, 1993](#); [Bradley & Venditti, 2017](#)). Parmi les relations les plus simples qui capturent correctement les caractéristiques des dunes, on peut utiliser les relations linéaires donnant la hauteur et la longueur de la dune (voir figure 1.50) en fonction de la hauteur d'écoulement  $h$  :

$$\Delta = \frac{h}{6} \text{ et } \lambda = 6h, \quad (1.141)$$

ce qui donne une rugosité de forme constante. Des études sur le Rhin et le Waal ont montré un relatif bon accord entre l'équation de [van Rijn \(1984\)](#) et les estimations à partir des données du coefficient de Darcy-Weisbach  $f$  avec des erreurs le plus souvent inférieures à 30 % ([de Lange et al., 2021](#)).

Le coefficient de frottement est obtenu en combinant la loi de Keulegan (1.73) et l'expression de  $k_s$  donnée par l'équation (1.140) :

$$f = \left( 2,03 \log \left( \frac{12,2h}{k_s} \right) \right)^{-2}. \quad (1.142)$$

### Méthode de Brownlie

Pour les rivières sur lit de sable, [Brownlie \(1983\)](#) a utilisé l'analyse dimensionnelle et une compilation de données de laboratoire et de terrain pour développer une méthode de calcul du frottement qui ne nécessite pas de connaître le détail des structures morphologiques. Il a innové également en prenant en compte l'étendue granulométrique tout en restant sur un modèle économe en matière de paramètres.

**Distribution granulométrique.** [Brownlie \(1983\)](#) utilise l'hypothèse communément<sup>19</sup> admise d'une distribution du diamètre  $d$  des grains selon la loi log-normale de paramètres  $(\mu, \sigma)$  :

$$f_d(d) = \frac{e^{-\frac{(\ln d - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma d}.$$

19. Cela reste une approximation à vérifier quand cela est possible.

Pour cette loi, il est courant d'utiliser la moyenne et l'écart-type géométriques<sup>20</sup>  $\mu_g$  et  $\sigma_g$ ; pour la loi log-normale, la moyenne géométrique vérifie la relation  $\mu_g = e^\mu = d_{50}$ , c'est-à-dire  $\mu_g$  correspond à la valeur médiane de la distribution granulométrique notée  $d_{50}$  tandis que  $\sigma_g = e^\sigma$  (Simons & Şentük, 1992). La loi log-normale va hériter d'une propriété intéressante de la loi normale. Si on prend une loi normale de paramètres  $(\mu, \sigma)$ , alors on montre que quelles que soient les valeurs de ces paramètres, il y a 68,3 % des valeurs qui sont compris dans l'intervalle  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ , et 95,4 % entre  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ . De même pour la loi-lognormale, 68,3 % des valeurs se trouvent dans l'intervalle  $[\mu_g/\sigma_g, \mu_g\sigma_g]$  (et 95,4 % dans  $[\mu_g/\sigma_g^2, \mu_g\sigma_g^2]$ ). Les quantiles associées aux probabilités  $\mu_g/\sigma_g$  et  $\mu_g\sigma_g$  sont fixes et indépendants des paramètres  $(\mu, \sigma)$ :

$$f_d^{(-1)}(\mu_g/\sigma_g) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0,1586 \Rightarrow d_{16} = \frac{\mu_g}{\sigma_g},$$

et

$$f_d^{(-1)}(\mu_g\sigma_g) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0,8413 \Rightarrow d_{84} = \mu_g\sigma_g.$$

Quand on utilise un diagramme semi-logarithmique pour reporter la distribution granulométrique (voir figure 1.54), le comportement symétrique des diamètres  $d_{16}$  et  $d_{84}$  par rapport au diamètre médian  $d_{50}$  apparaît plus clairement. On note au passage que l'introduction du diamètre  $d_{84}$  vient de cette propriété. On retient donc que 68 % des grains ont un diamètre compris entre  $d_{16}$  et  $d_{84}$ . On a également les relations :

$$2 \log \sigma_g = \log d_{84} - \log d_{16} \Rightarrow \sigma_g = \sqrt{\frac{d_{84}}{d_{16}}},$$

ainsi que

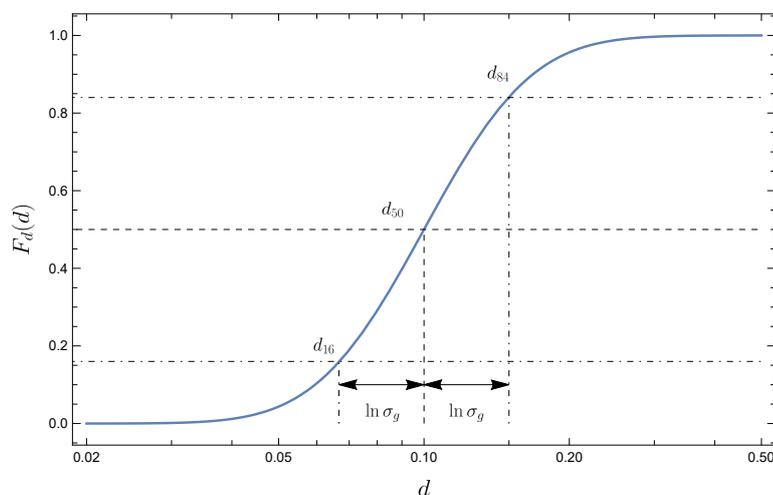
$$\log \sigma_g = \log d_{84} - \log d_{50} = \log d_{50} - \log d_{16} \Rightarrow \sigma_g = \frac{d_{84}}{d_{50}} = \frac{d_{50}}{d_{16}} \text{ et } d_{50} = \sqrt{d_{16}d_{84}}.$$

En pratique pour gagner en précision dans l'estimation  $\sigma_g$  à partir d'une courbe granulométrique, on peut utiliser une des formules ci-dessus ou bien utiliser le coefficient appelé *gradation*:

$$G = \frac{1}{2} \left( \frac{d_{84}}{d_{50}} + \frac{d_{50}}{d_{16}} \right).$$

En théorie  $G = \sigma_g$ , et en pratique la mesure de  $G$  fournit une estimation plus robuste de  $\sigma_g$  que  $\sigma_g = d_{84}/d_{50}$ . Inversement, quand on connaît la gradation  $G$  d'une courbe granulométrique et le diamètre médian, on peut évaluer tous les quantiles, en particulier les diamètres  $d_{84}$  et  $d_{90}$  qui interviennent dans plusieurs formules empiriques.

20. La moyenne géométrique d'un échantillon de valeurs  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est  $\mu_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ . La moyenne géométrique est plus utile que la moyenne arithmétique dans certains problèmes couvrant des plages de variation importantes ou bien dans le cas de la loi log-normale (Vogel, 2020). L'écart-type géométrique est  $\sigma_g = \exp \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{x_i}{\mu_g} \right)^2}$ .



**Figure 1.54** – Exemple de courbe granulométrique avec un diamètre médian  $\mu_g = d_{50} = 10$  cm et une gradation  $\sigma_g = 1,5$  (ou bien  $\mu = \ln \mu_g = -2,3$  et  $\sigma = \ln \sigma_g = 0,4$ ). On a tracé la fonction de répartition  $F_d = \int f_d(d)dd = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\mu - \ln d}{\sqrt{2}\sigma}\right)$  dans un diagramme semi-logarithmique, qui montre la symétrie de la distribution autour du diamètre médian. Dans ce diagramme, les diamètres  $d_{16}$  et  $d_{84}$  sont situés à une égale distance  $\ln \sigma_g$  du diamètre médian  $d_{50}$ .

#### **Relation hauteur-débit.**

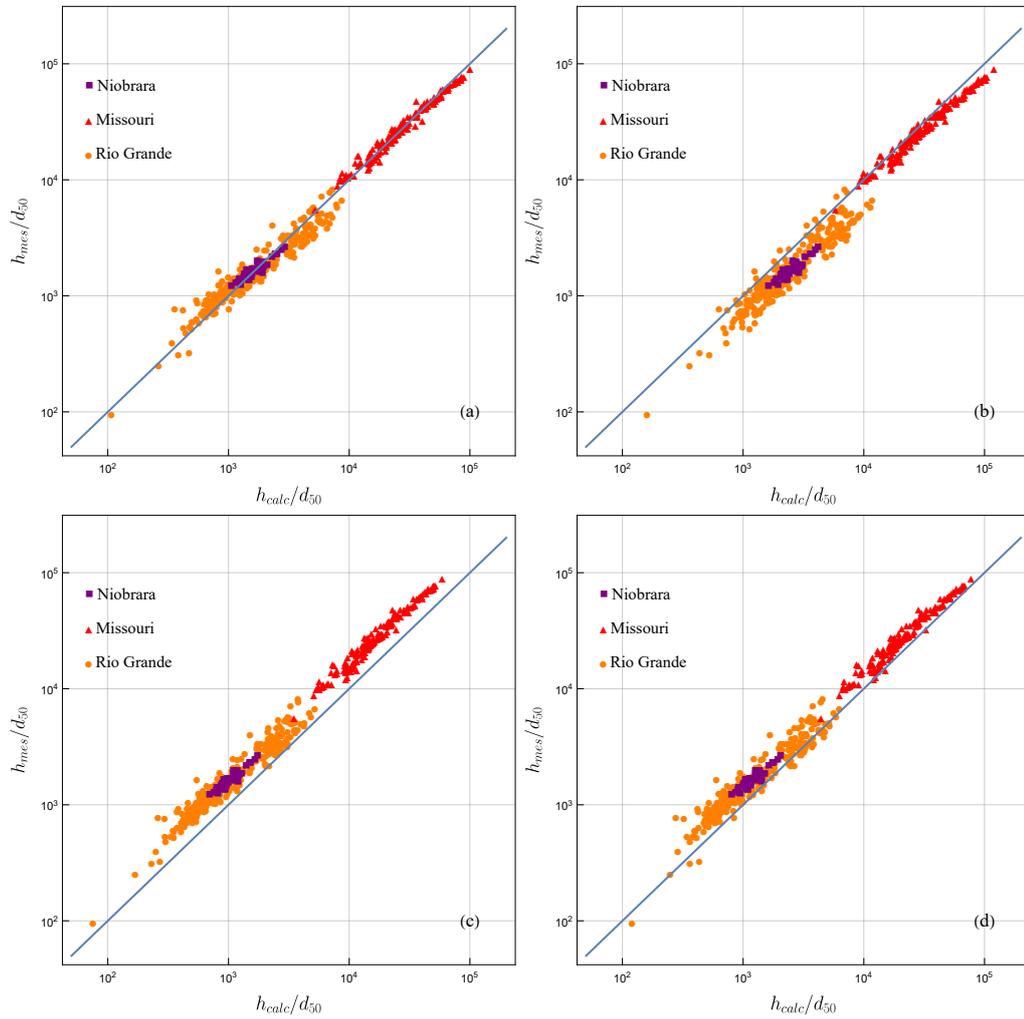
**Brownlie (1983)** a trouvé qu'il fallait distinguer les régimes inférieur (dunes, rides) et supérieur (lit plat, antidunes). Pour le régime inférieur, il trouve :

$$\frac{h}{d_{50}} = 0,3724q_*^{0,6539}i^{-0,2542}\sigma_g^{0,1050}, \quad (1.143)$$

avec  $q_* = q/\sqrt{gd_{50}^3}$  et pour le régime supérieur :

$$\frac{h}{d_{50}} = 0,2836q_*^{0,6428}i^{-0,2877}\sigma_g^{0,08103}. \quad (1.144)$$

La figure 1.55 compare les hauteurs prédites par les lois de Brownlie, van Rijn, Manning-Strickler et Keulegan pour trois rivières à sable des États-Unis. Sans surprise, les modèles de Keulegan et Manning-Strickler qui ne prennent en compte que le frottement de peau sous-évaluent notablement (d'un facteur 2) la hauteur d'eau. Le modèle simplifié de van Rijn a une tendance à sur-estimer les hauteurs d'eau. La loi de Brownlie fournit une estimation correcte de l'ordre de grandeur, mais on note qu'il existe toujours une variabilité de  $\pm 40\%$  autour de la valeur fixée par l'équation (1.143).



**Figure 1.55** – Comparaison des hauteurs calculées et mesurées pour trois rivières sur lit de sable: Missouri, Niobrara (Wyoming) et Rio Grande aux États-Unis. (a) Loi de Brownlie (1.143). (b) Loi de van Rijn (1.142) avec les dimensions de dune estimées à l’aide de l’équation (1.141). (c) Loi de Manning–Strickler  $h = (q/K/\sqrt{i})^{3/5}$  avec  $K = 21,1/d_{50}^{1/6}$ . (d) Loi de Keulegan (1.74). Les données reportées sont celles données compilées par [Brownlie \(1981\)](#).

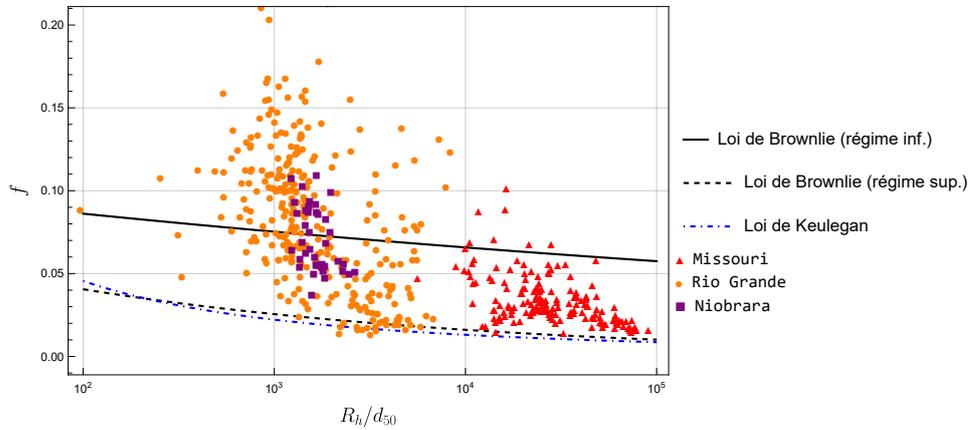
**Loi de frottement.** À partir des équations (1.143) et (1.144), on peut déduire le coefficient de frottement  $f = 8gh^3/q^2$  en fonction de  $\xi = h/d_{50}$  :

$$f = \frac{3,8252i^{0,2225}\sigma_g^{0,3211}}{g}\xi^{-0,0585}, \quad (1.145)$$

et pour le régime supérieur :

$$f = \frac{1,5556i^{0,1048}\sigma_g^{0,2521}}{g}\xi^{-0,1113}. \tag{1.146}$$

La figure 1.56 montre le coefficient de frottement  $f$  en fonction de  $\xi = h/d_{50}$  pour les deux régimes. Les deux courbes associées aux régimes supérieur et inférieur capturent relativement bien la variation  $f(\xi)$ , mais on note aussi une très forte variabilité de  $f$  pour une même rivière. Quoique les données aient été obtenues dans les années 1955 à 1978, des campagnes de mesures plus récentes confirment la forte variabilité de  $f$  le long d’une rivière (de Lange *et al.*, 2021).



**Figure 1.56** – Variation du coefficient de frottement d’après l’équation de Brownlie. On a reporté quelques données compilées par Brownlie (1981) et typiques de rivière sur lit de sable : Missouri, Niobrara (Wyoming) et Rio Grande aux États-Unis. On a également reporté la loi de Keulegan (1.73) avec  $k_s = 5,9d_{50}$  estimé selon Millar (1999).

### 1.5.9 Modification due au transport solide

#### Principaux effet du transport solide sur la résistance à l’écoulement

Un débat a été de savoir si le transport solide entraîne une augmentation de la dissipation d’énergie ou, au contraire, limite la dissipation d’énergie. Dans le premier cas, on évoque un transfert de quantité de mouvement de la phase fluide vers les particules transportées alors que dans le second cas, on observe que le sédiment a tendance à être transporté et se déposer dans les creux entre dunes, ce qui a pour effet d’adoucir la macro-rugosité du lit, et ce faisant de réduire la dissipation d’énergie de forme (Omid *et al.*, 2010; Hohermuth & Weitbrecht, 2018).

Le transport solide a pour effet de modifier le profil de vitesse. Un profil logarithmique près du lit n'est pas nécessairement observé, mais le profil de vitesse peut suffisamment s'approcher de la loi logarithmique pour qu'on continue à utiliser cette dernière moyennant quelques aménagements :

- influence sur la rugosité. Pour des écoulements épais par rapport à la taille des grains du lit (typiquement une rivière sur un lit de sable) et un transport solide intense avec un lit plan (correspondant au régime supérieur – upper regime plane – et observé pour des nombres de Shields  $\Theta > 0,8$ ), [Wilson \(1989\)](#) trouve que l'échelle de rugosité varie linéairement avec le nombre de Shields  $\Theta$  :

$$\frac{k_s}{d_{50}} = 5\Theta \text{ avec } \Theta = \frac{\tau_b}{\Delta\rho g d_{50}} = \frac{ih}{(s-1)d_{50}}, \quad (1.147)$$

où le nombre de Shields  $\Theta$  est défini comme le rapport entre la contrainte pariétale  $\tau_b$  et une contrainte qui traduit le poids déjaugé des grains du lit. Il dépend de la différence de masse volumique  $\Delta\rho = \rho_s - \rho$  entre celle des grains  $\rho_s$  et celle de l'eau  $\rho$ ; on a défini la densité relative:  $s = \Delta\rho/\rho$ . Plusieurs auteurs ont tenté de généraliser cette équation en tenant compte du nombre de Froude  $Fr$  et la vitesse de sédimentation adimensionnelle  $\Omega$ . [Camenen et al. \(2006\)](#) ont proposé :

$$\frac{k_s}{d_{50}} = 0,6 + 1,8 \left( \frac{\Omega}{Fr^2} \right)^{1,2} \Theta^{0,7}$$

avec  $\Omega$  est la mise sous forme adimensionnelle de la vitesse de sédimentation  $w_s$  :

$$\Omega = \sqrt[3]{\frac{(s-1)^2}{g\nu}} w_s$$

La vitesse de sédimentation se mesure ou s'estime à l'aide de formule empirique comme celle de [Dietrich \(1982\)](#).

Pour des rivières à lit de gravier à faible submersion, le frottement est généralement plus marqué lorsque la rivière charrie du matériau. [Recking et al. \(2008b\)](#) ont proposé de modifier la valeur de la rugosité  $k_s$  à l'aide de coefficient empiriques :

- un coefficient de résistance additionnelle due à la faible submersion relative :

$$\alpha_{rl} = 4 \left( \frac{h}{d} \right)^{-0,43} \text{ avec } 1 < \alpha_{rl} < 4,$$

- un coefficient de résistance additionnelle due au charriage :

$$\alpha_{br} = 7i^{0,85} \frac{h}{d} \text{ avec } 1 < \alpha_{br} < 2,6.$$

La nouvelle rugosité effective est donc :

$$k'_s = \alpha_{rl} \alpha_{br} d, \quad (1.148)$$

et contrairement à la valeur retenue au § 1.4.5 (où  $k_s$  était une constante typiquement de l'ordre de  $3d_{84}$ ), la rugosité varie avec la pente et la submersion relative. Dans l'équation (1.148), [Recking et al. \(2008b\)](#) ont introduit un diamètre représentatif du lit qu'ils considèrent être plutôt  $d_{84}$  que  $d_{50}$ , mais ils n'écartent pas cette dernière possibilité. La loi de frottement est strictement équivalente à la loi de Keulegan (1.71) avec maintenant une échelle de rugosité donnée par la relation (1.148):

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = 6,25 + 5,75 \log \frac{h}{k'_s}. \quad (1.149)$$

- influence sur la constante de von Kármán: plusieurs auteurs ont noté une diminution de  $\kappa$  en présence de transport solide ([Gust & Southard, 1983](#); [Dey & Raikar, 2007](#); [Nikora & Goring, 2000](#); [Gaudio et al., 2011](#); [Dey et al., 2012](#); [Guta et al., 2022](#)). Des valeurs comprises  $\kappa = 0,29$  ([Nikora & Goring, 2000](#)) et  $\kappa = 0,42$  ([Dey et al., 2012](#)) ont été déterminées à partir de calages de profil de vitesse sur les données expérimentales. La raison de cet écart de  $\kappa$  par rapport à la valeur usuelle peut être appréhendée en regardant la loi de Prandtl (1.63) reformulée de la façon suivante :

$$\ell_m = \kappa y = \frac{\sqrt{-\langle u'v' \rangle}}{\frac{du}{dy}},$$

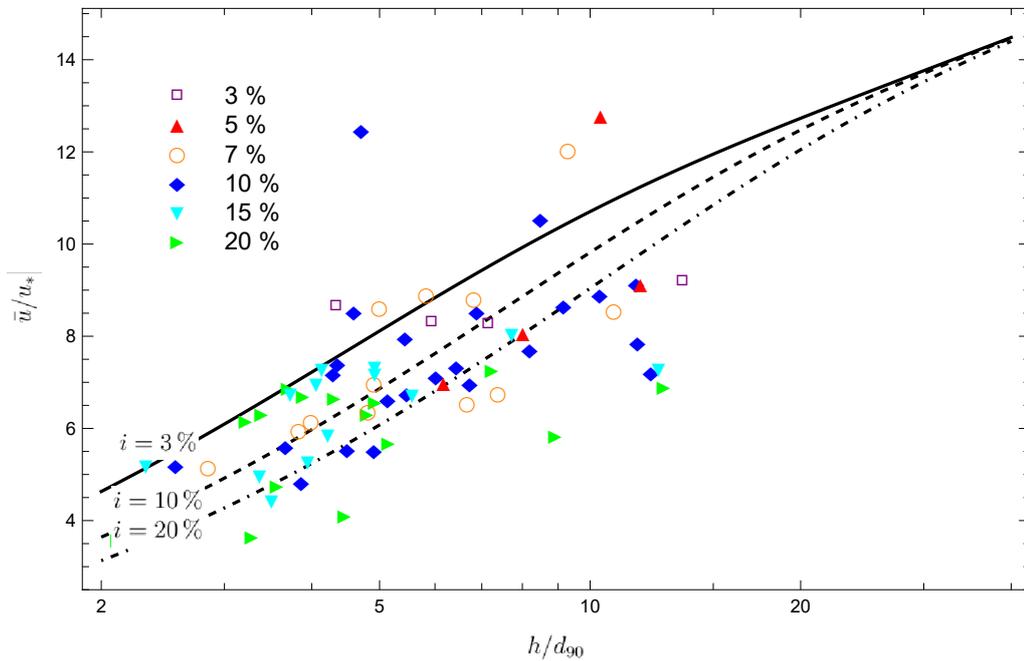
avec  $\ell_m$  la longueur de mélange et  $\tau = -\rho \langle u'v' \rangle$  la contribution turbulente à la contrainte de cisaillement (1.105). En l'absence de charriage, la loi de Prandtl signifie que les fluctuations de vitesses rapporté au cisaillement moyen  $du/dy$  croît linéairement depuis l'interface lit-écoulement ; lorsque des particules sont charriées, cette relation linéaire s'observe toujours, mais les fluctuations de la turbulence sont moindres et il faut employer une valeur de  $\kappa$  plus faible. Actuellement, on ne connaît aucune règle, même empirique, pour spécifier la valeur de  $\kappa$ .

### Loi de Smart–Jaeggi

[Smart & Jaeggi \(1983\)](#) ont étudié le transport solide dans un canal à forte pente et ont déduit la relation suivante pour la résistance à l'écoulement :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = 2,50 \left( 1 - \exp \left( -0,05 \frac{h}{d_{90} \sqrt{i}} \right) \right)^{1/2} \ln \left( 8,2 \frac{h}{d_{90}} \right). \quad (1.150)$$

Cette équation intègre donc l'effet du transport de sédiment sur la résistance à l'écoulement. On compare sur la figure 1.57 cette équation avec les données obtenues par [Smart & Jaeggi \(1983\)](#). L'équation de Smart–Jaeggi donne l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne de l'écoulement, mais ne rend pas compte des fluctuations observées.



**Figure 1.57** – (a) Variation du coefficient du rapport  $\bar{u}/u_*$  en fonction de la pente  $i$  du canal et comparaison avec l'équation de Smart-Jaeggi (1.57) évaluée pour  $i = 3\%$ ,  $10\%$  et  $20\%$ . Source des mesures : Smart & Jaeggi (1983); Smart (1984).

### Modèle de Recking

Recking *et al.* (2008b) considèrent qu'il existe trois régimes de transport solide :

- Régime 1. Tant que le nombre de Shields

$$\Theta = \frac{\tau_p}{(\rho_s - \rho_p)gd_{50}}$$

est inférieur à une valeur critique  $\Theta_c$  appelé « seuil de mise en mouvement » (Buffington & Montgomery, 1997), il n'y a pas de transport de sédiment.

- Régime 2. À faible nombre de Shields, le transport solide se fait sous la forme d'un déplacement intermittent de grains, souvent isolés, parfois en groupe. On parle de transport partiel.
- Régime 3. À fort nombre de Shields, le transport se présente sous la forme d'un tapis continu de grains, épais de quelques diamètres de grain.

Recking *et al.* (2008b) montrent que la transition entre les régimes de transport partiel et continu s'observe pour des submersions :

$$\xi = \frac{h}{d_{50}} = ai^b,$$

avec :

- $i \leq 1 \%$ ,  $a = 0,35$  et  $b = -0,84$ ;
- $i > 1 \%$ ,  $a = 0,52$  et  $b = -0,76$ .

Selon [Recking et al. \(2008b\)](#), le coefficient de frottement  $f$  varie différemment selon le régime de transport (voir figure 1.58):

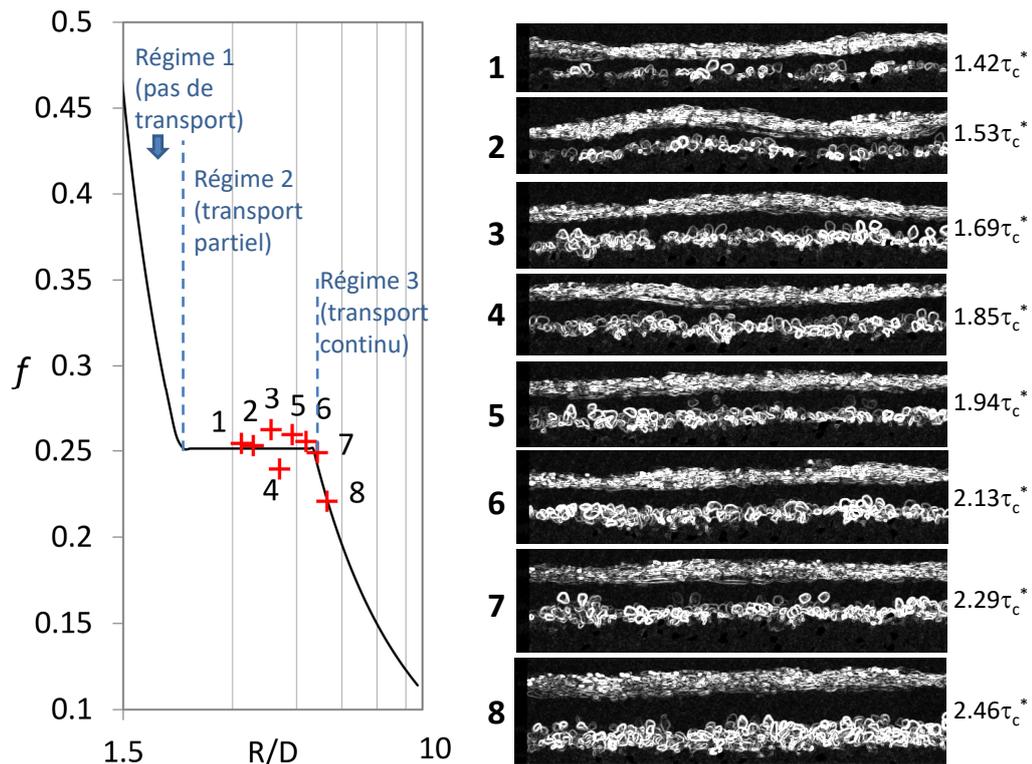
- Régime 1. En l'absence de charriage, le frottement suit la loi de Keulegan (1.80).
- Régime 2. Le coefficient de frottement est constant.
- Régime 3. En cas de charriage intense, le frottement suit la loi modifiée de Keulegan (1.149).

La figure 1.59 montre la variation de  $f$  avec la submersion relative. Il y a un bon accord entre les données recueillies par [Recking et al. \(2008a\)](#) et l'équation (1.149) corrigée du modèle de Keulegan. Ces données ont été recueillies dans un canal à fond plat. On peut renouveler l'expérience avec un lit présentant des structures morphologiques. La principale différence entre lits plat et structuré est l'exacerbation des fluctuations du coefficient de frottement  $f$  : ainsi, si on considère un lit composé de bancs alternés de gravier, on note sur la figure 1.60(b) que pour une submersion relative  $h/d_{50}$ , le coefficient de frottement  $f$  varie entre 0,075 et 0,6. Comme le montre la figure 1.60(a), cette large plage de variation est en partie conditionnée par la pente moyenne du lit. Cela implique que la loi de frottement  $f = f(h/d_{50})$  nécessite d'autres nombres sans dimension pour représenter plus fidèlement les données.

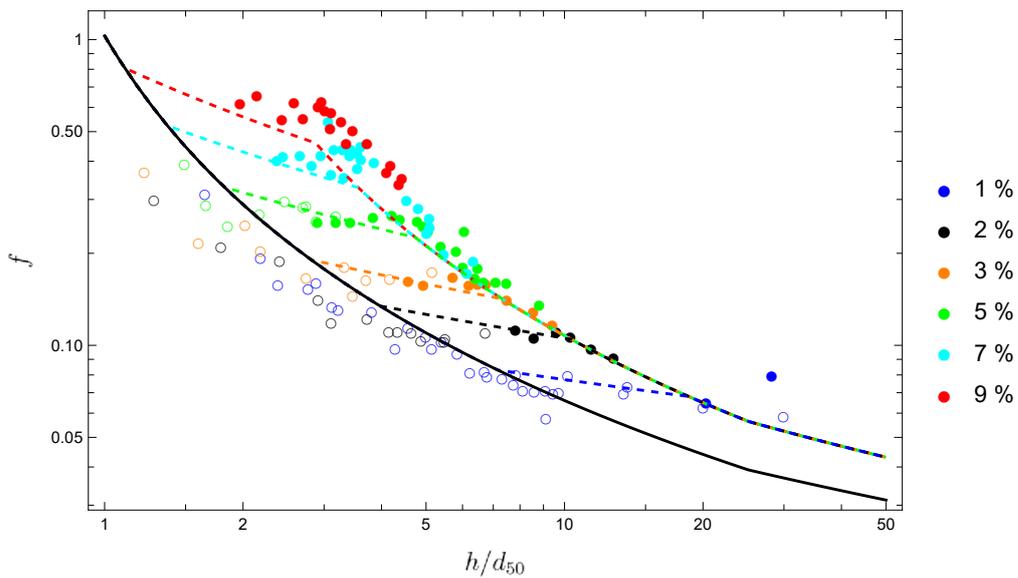
Lorsqu'il y a du transport solide sous forme de charriage, il y a une dissipation d'énergie liée notamment aux transferts de quantité de mouvement entre l'eau (de masse volumique  $\varrho$ ) et les sédiments (de masse volumique  $\varrho_s$ ) qui est en principe fonction de la contrainte de frottement au fond, donc de la hauteur d'écoulement. Dans les torrents, ces deux quantités sont difficiles à mesurer ; il est un peu plus facile de mesurer un débit liquide. [Recking \(2013\)](#) a également proposé d'écrire la contrainte pariétale sous la forme d'une relation  $\tau_p(q)$  au lieu de  $\tau_p(\bar{u}, h)$  :

$$\tau^* = \frac{\tau_p}{(\varrho_s - \varrho)gd_{84}} = \frac{i}{(s - 1)d_{84} \left( 2/B + 74p^{2,6}(gi)^p q^{-2p} d_{84}^{3p-1} \right)} \quad (1.151)$$

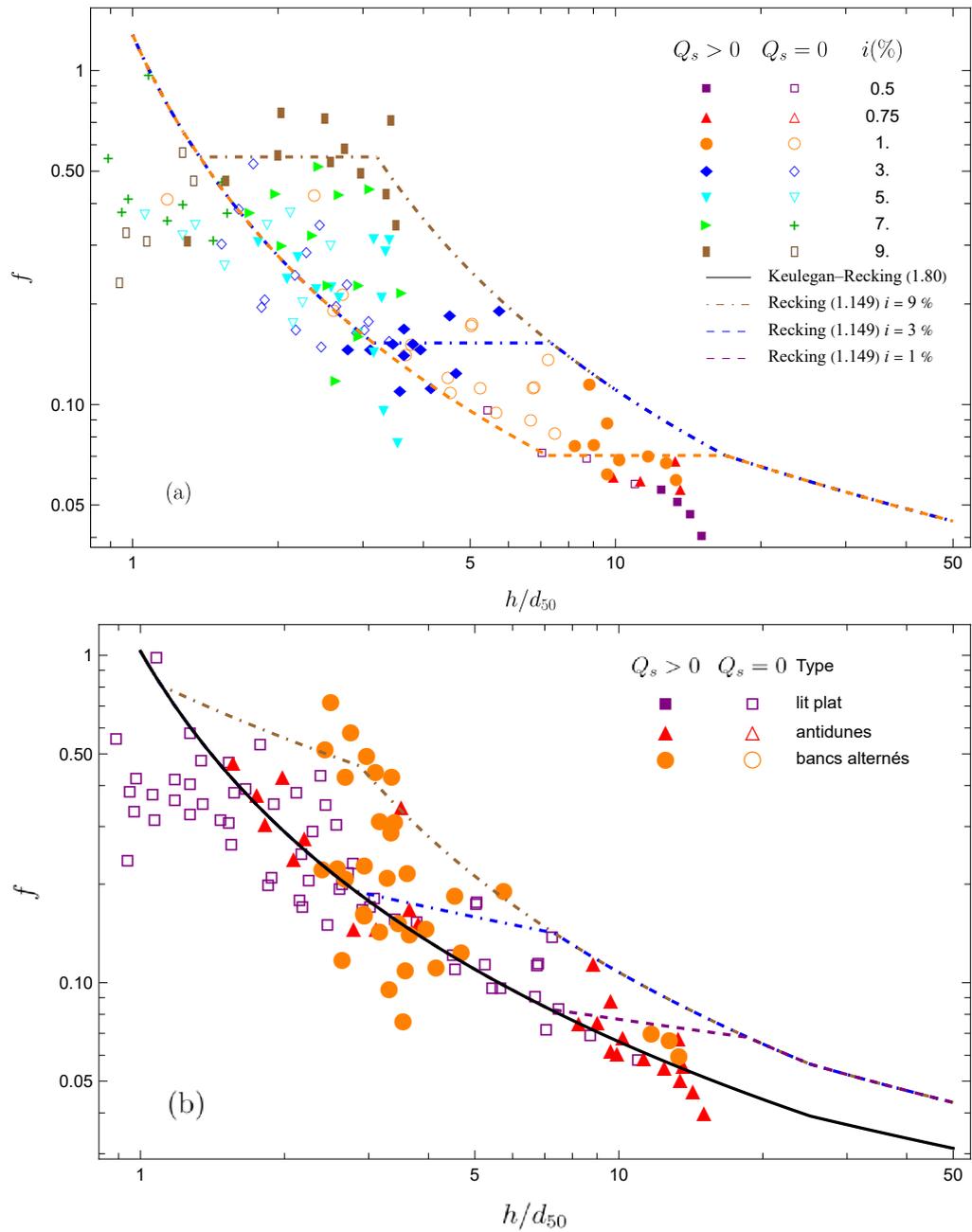
avec  $q = Q/B$  le débit par unité de largeur ( $B$  largeur au miroir) et  $p = 0,23$  quand  $q/\sqrt{gid_{84}^3} < 100$  et  $p = 0,3$  sinon.



**Figure 1.58** – (a) Variation du coefficient de frottement  $f$  mesuré et comparaison avec le modèle de [Recking et al. \(2008b\)](#). (b) Vues de côté des expériences menées par [Recking et al. \(2008b\)](#) pour une pente  $i = 5\%$  et un diamètre  $d_{50} = 4,9$  mm. Par soustraction entre deux images, on peut déterminer ce qui a bougé. C’est ainsi que les grains en mouvement et que la surface libre apparaissent en blanc, et le lit reste en noir. Source : Alain Recking.



**Figure 1.59** – Variation du coefficient de frottement  $f$  mesuré avec la submersion relative  $h/d_{50}$  pour des pentes  $i$  allant de 1 % à 9 %. On reporte aussi la variation de  $f$  prédite par la loi de Keulegan (1.80) (courbe continue) et les lois modifiées (1.149) pour prendre en compte le charriage (courbe discontinue). Le symbole  $\circ$  renvoie à des écoulements d'eau claire, et le symbole  $\bullet$  représente des écoulements avec charriage ; la couleur renvoie à la pente du lit. Source des données : [Recking \*et al.\* \(2008a\)](#).



**Figure 1.60** – Variation du coefficient de frottement  $f$  mesuré avec la submersion relative  $h/d_{50}$  pour des pentes  $i$  allant de 0,5 % à 9 % et différentes morphologies du lit. On reporte aussi la variation de  $f$  prédite par la loi de Keulegan (1.80) (courbe continue) et les lois modifiées (1.149) pour prendre en compte le charriage (courbe discontinue). Les données sont celles obtenues par Cao (1985).

### 1.5.10 Cas particulier des rivières de montagne et à forte pente

Les rivières de montagne ont des pentes moyennes généralement dépassant 0,2 % à 0,3 % (Montgomery & Buffington, 1997; Wohl, 2000). Comme le montre la figure 1.61, le lit présente souvent des blocs isolés ou alignés, ou bien encore des obstacles (substrat rocheux, végétation, etc.), qui créent localement un sillage significatif et de petits ressauts hydrauliques qui dissipent de l'énergie. Les structures morphologiques les plus courantes sont les séquences seuil-mouille – voir figure 1.23(b) – et les rapides – voir figure 1.61. L'alternance seuil-mouille est fréquente pour les lits entre 3 % et 7 % présentant une étendue granulométrique marquée (Chin & Wohl, 2005; Church & Zimmermann, 2007). Le lit présente des seuils naturels régulièrement espacés et résultant de l'accumulation de blocs grossiers, par-dessus lesquels l'écoulement devient critique et forme un ressaut à leur aval. Une « mouille » se creuse alors sous l'effet de l'érosion. Entre deux seuils, l'écoulement peut devenir localement subcritique. Pour des pentes plus douces que 3 %, la structure morphologique la plus fréquente est le « rapide » : des blocs émergent ici et là, mais ils ne sont organisés en ligne comme pour les seuils-mouilles. En dehors de ces obstacles, le lit est souvent plat et composé d'éléments plus fins (gravier); en dehors du frottement de peau, la dissipation se fait essentiellement par effet de sillage. Pour des pentes plus fortes que 6 à 7 %, les seuils sont généralement instables.



**Figure 1.61** – Écoulements sur lit de gravier à faible submersion. (a) Le Doubs à Sainte-Ursanne (JU): séquence de mouilles-rapides. (b) La Navisence à Zinal (VS): lit plat.

Un cas particulier se rencontre dans les parties supérieures des cours d'eau lorsque la pente moyenne du lit dépasse 5 % (Comiti & Mao, 2012). Le lit est en général étroit

et composé de blocs grossiers de taille décimétrique et/ou métrique. L'écoulement se produit sous la forme de cascades successives. De l'écume (appelée aussi *eau blanche*) se forme au passage des chutes et sous l'effet du brassage. Elle est typique de ces cours d'eau comme le montre la figure 1.62. L'épaisseur d'eau est souvent inférieure au diamètre  $d_{90}$ . Ces écoulements sont très dissipatifs. Ils ressemblent aux écoulements sur les évacuateurs de crue en marches d'escalier (Chanson, 1994).



**Figure 1.62** – Écoulements à forte pente et faible submersion (cascades et chutes). (a) L'Avançon à Pont-de-Nant (VD). (b) et (c) La Navisence à Zinal (VS). (d) Lo Tzanté (Valsavarenche, Italie). © C. Ancey pour (a) et (c); Bob de Graffenried pour (b) et (d).

Comme tous les cours d'eau, les débris végétaux, et en particulier les débris végétaux, peuvent s'accumuler et provoquer des remous, et donc une dissipation d'énergie

supplémentaire (voir figure 1.63). Durant les crues, ils peuvent être transportés et s'accumuler dans des étroitures du lit, avec le risque de formation d'embâcle (Dudley *et al.*, 1998; Ruiz-Villanueva *et al.*, 2019).



**Figure 1.63** – Flottants en rivière de montagne. (a) Lit grossier (avec blocs et débris végétaux) d'un affluent de la Torneresse à l'Étivaz (VD). (b) Troncs d'arbre emportés par la crue de la Navisence à Zinal (VS) en juillet 2018. © Christophe Ancey pour (a) et Bob de Graffenried pour (b).

Plus que les cours d'eau de plaine, les rivières de montagne sont soumises au gel. La glace qui se forme à la surface libre crée une résistance supplémentaire à l'écoulement, et localement l'écoulement peut se mettre en charge si tout une partie du bief est couverte de glace (voir figure 1.64) (Smith & Ettema, 1997; Shen, 2016).

La plupart des rivières de plaine sont alluviales, c'est-à-dire qu'elles coulent sur leurs alluvions. On considère en général qu'il existe un certain équilibre entre transport solide, pente du lit, débit liquide et granulométrie pour les rivières alluviales<sup>21</sup>. Lane (1955) a exprimé cet équilibre à l'aide de la formulation qualitative qu'on a pris l'habitude d'appeler la « balance de Lane » :

$$Q_s d \propto Q i,$$

avec  $Q_s$  le débit solide,  $d$  le diamètre caractéristique des alluvions,  $Q$  le débit liquide caractéristique, et  $i$  la pente du bief. Dans une tentative de quantification de la balance

21. L'existence d'un tel équilibre est une hypothèse de travail le plus souvent admise, mais d'aucuns notent que rien ne prouve qu'il y ait des mécanismes globaux qui agissent de telle sorte que la rivière cherche à atteindre un équilibre et à maximiser sa capacité de transport d'eau et de sédiment (Phillips, 2010)



**Figure 1.64** – Glace en rivière torrentielle. (a) Le Talent à Montheron (VD). (b) La Navisence à Zinal. © C. Ancey pour (a) et B. de Graffenried pour (b).

de Lane, Julien (2002) a proposé :  $Q_s d^{0,25} = 9,1 Q^{1,11} i^{1,44}$ . La balance de Lane cesse d'être valable pour des rivières, dont l'écoulement se fait directement sur un substratum rocheux (*bedrock*). La rivière incise alors lentement son lit dans le substratum ; la pente du lit dépend d'une multitude de facteurs et ne traduit pas un éventuel équilibre entre charge sédimentaire et débit liquide. Ce type d'écoulement est fréquemment accompagné de chutes d'eau dont la hauteur va de quelques mètres à plusieurs dizaines de mètres (voir figure 1.65). En règle générale, la dissipation d'énergie est moindre que pour des écoulements sur lit mobile (Ferguson *et al.*, 2017, 2019). Le lit rocheux peut se présenter comme une surface lisse entrecoupée de chutes d'eau – c'est le cas du Talent sur la figure 1.24(a) –, comme une succession de seuils – comme la Rèche sur la figure 1.24(a) –, ou de cascades – comme le Nozon et le Doménon sur la figure 1.24(c)-(d).

La figure 1.66 montre la compilation de valeurs du coefficient de frottement obtenues par Chen *et al.* (2020) à partir de 1788 mesures en canal et 713 mesures de terrain. On note que les lois empiriques de Keulegan (1.80), de Ferguson (1.83), et de Rickenmann–Recking (1.89) ainsi que les modèles de Katul (1.154) et de Thompson–Campbell (1.155) fournissent des valeurs similaires de  $f$  pour les submersions  $h/d_{84} > 0,5$  et qu'il existe une forte variabilité de comportement (couvrant un à deux ordres de grandeur de valeurs de  $f$ ) du frottement, ce qui le rend difficile à estimer sur la seule base de ces équations empiriques.

Plusieurs modèles empiriques ont été proposées pour améliorer le calcul du coefficient de frottement  $f$  :

- Inclusion d'autres nombres sans dimension dans la relation  $f = f(\xi)$  avec  $\xi =$

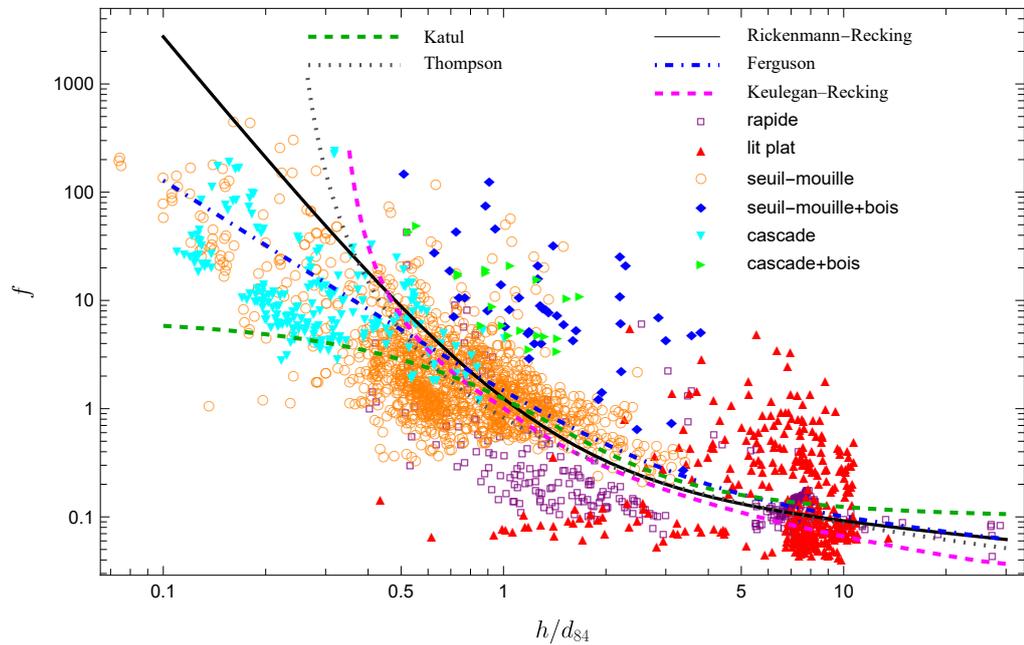


**Figure 1.65** – Torrent s'écoulant sur le substratum rocheux. (a) La Rèche dans le vallon de Réchy (VS). (b) L'Arpilletta à Zinal (VS). (c) Le Doménon à Saint-Martin-d'Uriage (France) – cascade de l'Oursière. (d) Le Nozon à Pampaples (VD). © C. Ancey pour (a), (c) et (d) et B. de Graffenried pour (b).

$h/d_{84}$ . Par exemple, en tenant de synthétiser les analyses de [Judd & Peterson \(1969\)](#) et [Bathurst \(1978\)](#) sur les effets de traînée dans la dissipation d'énergie, [Bathurst et al. \(1981\)](#) propose de rechercher  $f$  sous la forme

$$f = f_l(\lambda_e) f_r(\text{Re}) f_f(\text{Fr}) f_p(\text{II}), \quad (1.152)$$

où  $\lambda$  est la concentration de rugosité,  $\text{Re}$  le nombre de Reynolds,  $\text{Fr}$  le nombre de Froude,  $\text{II}$  est un nombre sans dimension reflétant le degré d'obstruction.  $\text{II}$  est défini comme la surface occupée par les éléments grossiers (macro-rugosités) du



**Figure 1.66** – Variation du coefficient de frottement  $f$  en fonction de la submersion relative  $h/d_{84}$  obtenues à partir de 1788 mesures en canal et 713 mesures de terrain et compilées par [Chen \*et al.\* \(2020\)](#) en fonction du type de structures morphologiques. On a aussi comparé avec les lois de Keulegan (1.80) – avec la définition de Recking de la rugosité –, de l'équation de Ferguson (1.83), de l'équation de Rickenmann–Recking (1.89), du modèle de Thompson–Campbell (1.155), et du modèle de Katul (1.154).

lit par à la surface d'une tranche verticale qui comprendrait la surface mouillée et la surface solide de la rugosité.  $\lambda_e$  est la concentration de rugosité définie comme la surface projetée des rugosités (grossières) par unité de surface du lit. De nombreuses expériences ont mis en évidence le rôle joué par ce paramètre ([O'Loughlin & Macdonald, 1964](#); [Rouse, 1965](#); [Koloseus & Davidian, 1966](#); [Mizuyama, 1978](#); [Raupach, 1992](#); [Wohl & Ikeda, 1998](#); [Canovaro & Solari, 2007](#); [Canovaro \*et al.\*, 2007](#); [King \*et al.\*, 2008](#)) ainsi que dans la forme des éléments grossiers et l'arrangement planimétrique. Comme [Bathurst \*et al.\* \(1981\)](#) considère qu'il faut définir  $\lambda$  à partir des protubérances qui émergent de la surface de l'eau, la surface projetée des rugosités de ces protubérances dépend de la submersion relative  $\xi$ ; c'est la raison pour laquelle  $\xi$  n'apparaît pas explicitement dans l'expression (1.152) de  $f$ . La principale difficulté dans l'approche de [Bathurst \*et al.\* \(1981\)](#) est qu'il reste difficile à découpler les effets respectifs de chaque contribution au frottement de Darcy–Weisbach. [Thorne & Zevenbergen \(1985\)](#) reporte une des rares tentatives connues de détailler les contributions respectives de l'équation (1.152), mais la comparaison avec des données de terrain

montre que cette formulation est moins précise qu'une simple variante de la loi de Keulegan comme l'équation (1.155) proposée par [Thompson & Campbell \(1979\)](#).

- *Analogie entre une alternance seuils/mouilles et des déversoirs de crue* de type « marche d'escalier » (voir figure 1.67). Plusieurs études ont exploité cette analogie pour estimer le frottement généré par les chutes successives en fonction du type de régime (écoulement en jet libre ou noyé) ([MacFarlane & Wohl, 2003](#); [Comiti et al., 2005](#); [Wilcox et al., 2006](#); [David et al., 2011](#); [Yager et al., 2012](#); [Luo et al., 2022](#)). Le frottement total s'écrit comme la somme du frottement de peau  $f'$  et du frottement dû aux seuils :

$$f = f' + f''. \quad (1.153)$$

D'autres études sur les alternances seuils/mouilles ont principalement cherché à caractériser la perte de charge singulière sans tenter de calculer un coefficient de frottement à l'échelle du bief ([Wyrick & Pasternack, 2008](#); [Wilcox et al., 2011](#); [D'Agostino & Michelini, 2015](#)). De même pour les séquences rapide-mouille (*riffle-pool* en anglais), [Hey \(1988\)](#) et [Millar \(1999\)](#) ont proposé un modèle pour évaluer le frottement de forme pour les écoulements entre des bancs alternés de gravier en fonction des caractéristiques géométriques des bancs.

- *Analogie avec un écoulement au-dessus d'une canopée*. [Katul et al. \(2002\)](#) note que pour des écoulements torrentiels, la situation est proche de celle d'un écoulement d'air au-dessus d'une canopée où les arbres de différentes hauteurs agissent comme des protubérances perméables. Ils obtiennent un frottement de la forme :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = C_u F(\xi, \alpha), \quad (1.154)$$

avec  $\xi = h/d_{84}$ ,  $C_u \sim 4,5$ ,  $\alpha \sim 1$  et

$$F(\xi, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{\xi} \ln \frac{\cosh(\alpha^{-1}(1 - \xi))}{\cosh(\alpha^{-1})}.$$

La figure 1.66 montre que le comportement du coefficient de frottement  $f$  ainsi déterminé par [Katul et al. \(2002\)](#) est proche de ceux donnés par les lois empiriques de [Ferguson \(2007\)](#) et [Rickenmann & Recking \(2011\)](#).

- *Estimation théorique du frottement par prise en compte de la force de traînée*. [Flammer et al. \(1970\)](#) ont étudié la force de traînée exercée par un écoulement sur un obstacle hémisphérique (de diamètre  $D$ ), et ils ont mis en évidence que le coefficient de traînée augmentait fortement quand la submersion relative  $\xi = h/D$  était inférieure à 0,8 et le nombre de Froude inférieur à 1,5. Inversement quand  $\xi > 2$ , le coefficient de traînée tend vers une valeur constante indépendamment du nombre de Froude et du nombre de Reynolds. Sur cette base, [Smith & McLean \(1977\)](#), [Wiberg & Smith \(1991\)](#), [Lawrence \(2000\)](#), [Kean & Smith \(2006\)](#) et [Yager et al. \(2007\)](#) ont proposé un modèle qui décompose la contrainte totale  $\tau$  en une

contrainte fluide  $\tau_f$  (donnée par une paramétrisation de la turbulence de type Boussinesq ou Prandtl) et une contrainte  $\tau_d$  due à la traînée exercée par les éléments grossiers du lit (protubérances):  $\tau = \tau_f + \tau_d$ . Cette contrainte dépend principalement de la densité surfacique en protubérances. Sans calculer le détail de la force de traînée, [Thompson & Campbell \(1979\)](#) considère que l'effet principal des protubérances est une obstruction, dont l'effet est équivalent à exercer une contrainte fluide plus grande sur une surface du lit plus petite. Avec de raisonnement heuristique, ils proposent de modifier la loi de Keulegan (1.73) de la façon suivante :

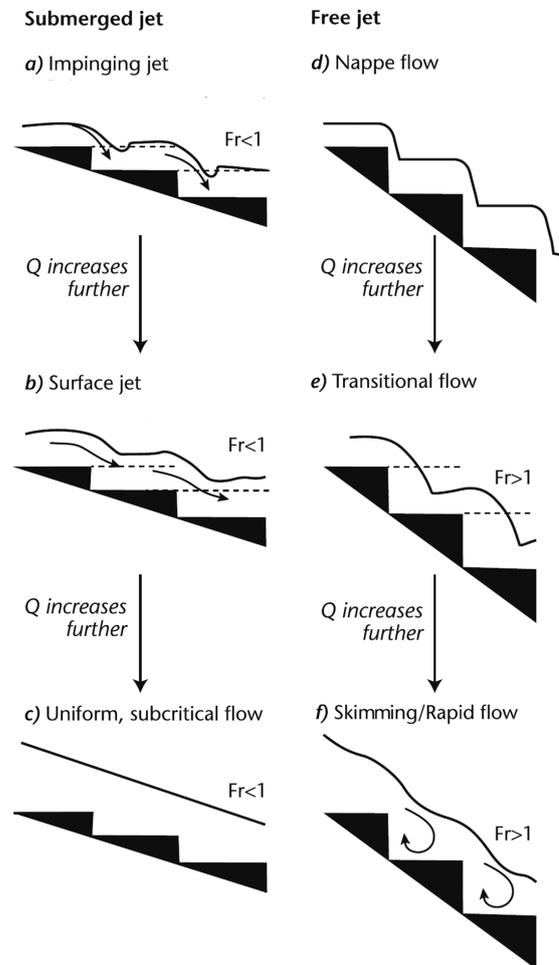
$$f = \left( 2,3 \left( 1 - 0,1 \frac{k_s}{h} \right) \log \left( \frac{12,2h}{k_s} \right) \right)^{-2}, \quad (1.155)$$

avec  $k_s = 4,5d_{50}$  ou bien  $k_s = 2,37d_{84}$ . Comme le montre la figure 1.66, le modèle de [Thompson & Campbell \(1979\)](#) donne des résultats proches de ceux des autres lois empiriques.

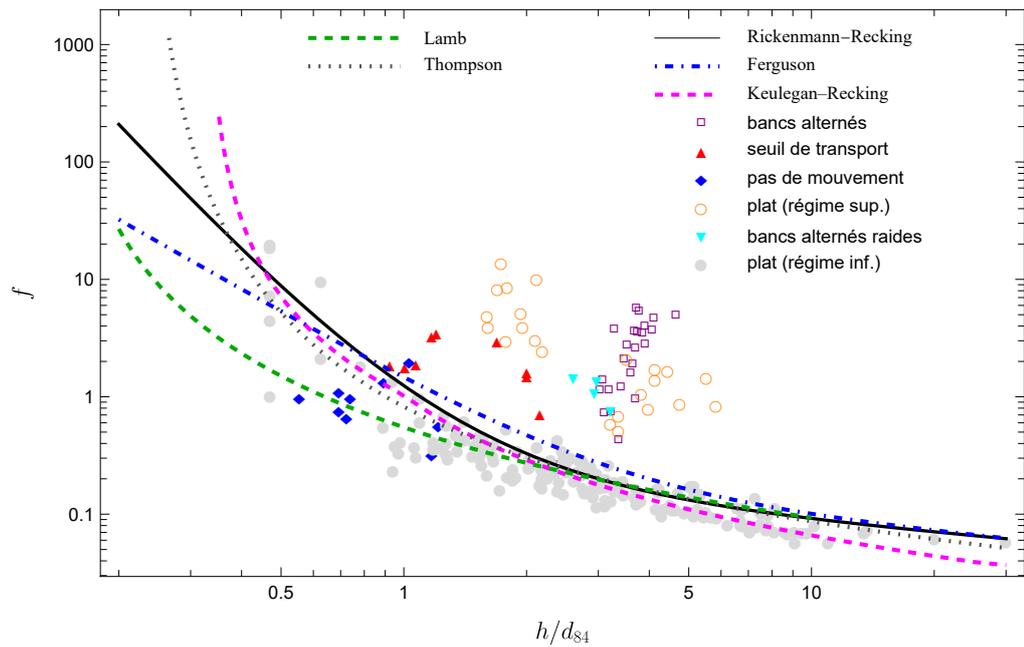
- *Prise en compte de l'écoulement hyporhéique.* Les études les plus récentes en laboratoire ont pointé le rôle joué par l'infiltration dans le lit (écoulement hyporhéique) et la modification de la turbulence dans la couche de rugosité ([Lamb et al., 2017](#); [Palucis et al., 2018](#); [Rousseau & Ancy, 2022](#)). [Lamb et al. \(2017\)](#) a ainsi un modèle simple décrivant l'écoulement comme composé d'un écoulement hyporhéique (gouverné par la loi de Darcy) et d'un écoulement de surface. Pour décrire ce dernier, ils emploient une loi de longueur de mélange modifiée et obtiennent lorsque l'écoulement hyporhéique a un débit négligeable :

$$f = 8 \left( \kappa^{-1} \log \left( 1 + \frac{30h}{k_s} \right) - \kappa^{-1} \right)^{-2}, \quad (1.156)$$

avec  $k_s = 2,5d_{84}$ . Le modèle de [Lamb et al. \(2017\)](#) donne des résultats similaires aux modèles empiriques. La figure compare ce modèle avec d'autres équations empiriques et des données de laboratoire pour des canaux à forte pente  $i > 0,4\%$ . On note qu'en présence de transport solide, des structures morphologiques se forment et accroissent fortement la dissipation d'énergie. Aucun des modèles simples actuels ne capture la variation de  $f$  avec la submersion relative pour ce type d'écoulements.



**Figure 1.67** – Type d'écoulement sur marches d'escalier. L'écoulement à travers une succession de seuils et mouilles est considéré comme étant analogue à un écoulement sur des marches d'escalier sans dépression (qui serait l'équivalent strict des mouilles). (*impinging jet* : jet incident; *nappe flow* : écoulement en nappe; *skimming flow* : écoulement turbulent rapide). Les auteurs considèrent deux types de régime qu'ils appellent « jets libres » et « jets noyé ». Cette séparation correspond à la différence de comportement entre seuils noyé et dénoyé vue au § 1.1.4. D'après [Church & Zimmermann \(2007\)](#).



**Figure 1.68** – Variation du coefficient de frottement  $f$  en fonction de la submersion relative  $h/d_{84}$  obtenues à partir des mesures en canal à forte pente obtenues par [Cao \(1985\)](#), [Recking et al. \(2008b\)](#), [Lamb et al. \(2017\)](#) et [Palucis et al. \(2018\)](#) en fonction du type de structures morphologiques. On a aussi comparé avec les lois de Keulegan (1.80) – avec la définition de Recking de la rugosité –, de l'équation de Ferguson (1.83), de l'équation de Rickenmann–Recking (1.89), du modèle de Thompson–Campbell (1.155), et du modèle de Lamb (1.156). La plage de pentes explorée va de 0,38 % à 30 %. Les données avec transport solide ont été obtenues à des pentes  $i \geq 10$  %.

## 1.6 Autres équations utiles en hydraulique

Nous allons maintenant voir les principaux types d'équations aux dérivées partielles rencontrées en hydraulique :

- transport par convection (ou advection);
- transport par diffusion;
- phénomènes ondulatoires;
- phénomènes d'équilibre.

### 1.6.1 Équation d'advection (ou de convection)



- Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles du premier ordre?
- ↪ Voir la définition au § 1.5 du complément de cours
- Savez-vous mettre une équation aux dérivées partielles sous forme caractéristique?
- ↪ Voir la méthode au § 1.4.4 du complément de cours
- Connaissez-vous la méthode des caractéristiques pour résoudre une équation aux dérivées partielles?
- ↪ Voir la méthode au § 1.7.2 du complément de cours
- Qu'est-ce qu'une équation différentielle hyperbolique?
- ↪ Relire l'annexe 1, avec plus particulièrement le § 1.5.1.

La *convection*<sup>22</sup> ou *advection* est un mode de transfert d'une quantité où celle-ci est advectée par le fluide. Par exemple, si on libère un polluant dans un cours d'eau, celui-ci sera généralement transporté à la même vitesse que l'eau.

L'équation la plus simple qui soit représentative de la convection est la suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (1.157)$$

où  $f(x, t)$  est une quantité advectée par un courant d'eau à la vitesse constante  $u$ . C'est une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. L'*équation caractéristique associée* à l'équation aux dérivées partielles (1.157) est

$$\frac{df}{dt} = 0 \text{ le long de la droite } \frac{dx}{dt} = u. \quad (1.158)$$

---

<sup>22</sup> Le terme « convection » est plus surtout employé en thermique pour décrire le transfert de chaleur.

**Figure 1.69** – Advection d’une quantité  $f$  avec ici  $u = 0,5$  m/s. Quand l’advection est linéaire et se fait sans amortissement, le transport est une simple translation sans changement de forme.

Comme  $u$  est supposée constante, cela veut dire que la solution de l’équation caractéristique est  $x - ut = cste$ ; toute fonction  $F(x - ut)$  dont l’argument est  $x - ut$  est solution de l’équation (1.157). L’une des caractéristiques de cette solution est que la forme initiale  $F(x)$  (à  $t = 0$ ) est conservée tout le long du mouvement: elle est simplement translatée de  $ut$  comme le montre la figure 1.69.

L’équation caractéristique (1.158) est utile pour déterminer la solution exacte à des problèmes aux valeurs initiales et aux limites de la forme

$$f(x, 0) = h(x), \quad (1.159)$$

$$f(0, t) = g(t), \quad (1.160)$$

où l’équation (1.159) est la condition initiale avec  $h(x)$  la valeur prise par  $f(x, t)$  à  $t = 0$  tandis que l’équation (1.160) est la condition aux limites avec  $g(t)$  la valeur prise par  $f(x, t)$  en  $x = 0$ . On a choisi ici une condition de Dirichlet.

La figure 1.70 montre un diagramme caractéristique qui permet de comprendre comment se propage l’information en fonction des conditions initiales. La droite carac-

téristique  $x = ut$  scinde le premier quadrant en deux parties :

- Le secteur  $x < ut$  (en jaune sur le diagramme) est le domaine dominé par les conditions initiales. Tout point  $(x, t)$  est sur une caractéristique de la forme obtenue par intégration de l'équation (1.158):

$$x = ut + x_0,$$

et le long de cette caractéristique,  $f$  est constante et prend la valeur initiale  $f(x_0, 0) = h(x_0)$ .

- Le secteur  $x > ut$  correspond au domaine sous l'influence des conditions aux limites. Tout point  $(x, t)$  est sur une caractéristique de la forme obtenue par intégration de l'équation (1.158):

$$x = u(t - t_0),$$

et le long de cette caractéristique,  $f$  est constante et prend la valeur initiale  $f(0, t_0) = g(t_0)$ .

Dans le quadrant décrivant l'évolution spatio-temporelle de  $f(x, t)$ , l'information se propage le long des droites caractéristiques ( $x = ut + x_0$  pour le domaine sous influence des conditions initiales et  $x = u(t - t_0)$  pour le domaine sous influence des conditions aux limites) qui sont toutes parallèles. Le long de chacune de ces droites, la fonction  $f$  est constante d'après l'équation (1.158), et prend une valeur imposée par les conditions initiales ou aux limites. Cela permet de résoudre simplement l'équation d'advection linéaire.

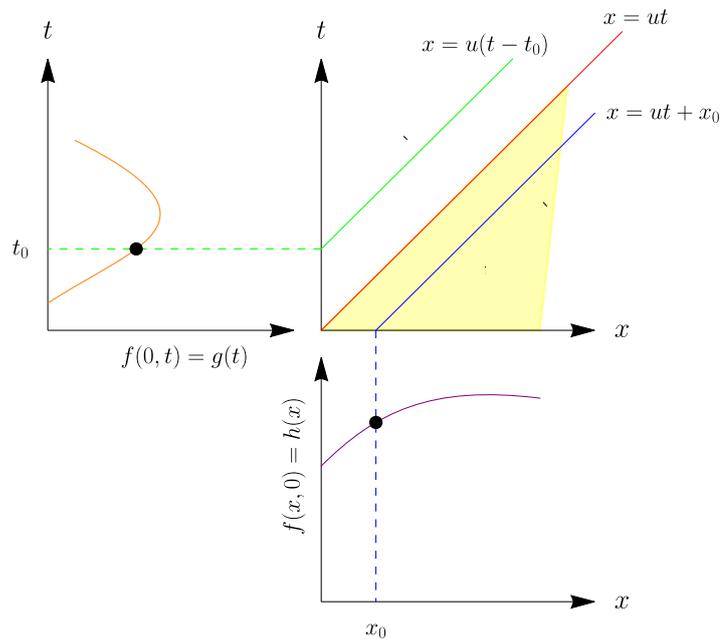
Par exemple, la solution du problème (1.157) sujet aux conditions :

$$f(x, 0) = h(x) = 0 \text{ et } f(0, t) = g(t) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right) & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \text{ s} \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 8 \text{ s} \end{cases}$$

est la fonction

$$f(x, t) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left(t - \frac{x}{u}\right)\right) & \text{si } x < ut \\ 0 & \text{si } x > ut \end{cases}$$

Le cas linéaire est simple à résoudre, mais on va voir que cela se complique dans le cas non linéaire car des chocs peuvent se former.



**Figure 1.70** – Le diagramme caractéristique est composé de trois parties: le quadrant supérieur à droite montre l'évolution spatio-temporelle de la solution  $f(x, t)$ . Le quadrant inférieur montre la condition initiale  $f(x, 0) = h(x)$  tandis que le quadrant supérieur à gauche donne la condition aux limites  $f(0, t) = g(t)$  en  $x = 0$ .

**Figure 1.71** – Advection d'une quantité  $f$  avec ici  $u = 1$  m/s sujette aux valeurs initiales  $h = 0$  et aux valeurs limites  $g(x) = \sin^2(\pi x/4)$  pour  $0 \leq t \leq 8$  et  $g = 0$  sinon. Quand l'advection est linéaire et se fait sans amortissement, le transport est une simple translation sans changement de forme.

### 1.6.2 Équation d'advection : formation de chocs

La forme générique des équations d'advection est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0, \quad (1.161)$$

avec  $F(u)$  une fonction de  $u$  appelée « flux ». Si  $F$  est constante, alors on parle d'advection linéaire. Dans le cas contraire, on parle d'advection non linéaire. On peut mettre cette équation sous la forme équivalente quand  $u$  est continue :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F'(u) \frac{\partial}{\partial x} u = 0, \quad (1.162)$$

où la vitesse de propagation de l'information est notée :

$$c(u) = F'(u).$$

On a vu qu'on pouvait écrire également l'équation (1.162) sous la forme dite *caractéristique* :

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ le long de la courbe caractéristique } \frac{dx}{dt} = c(u), \quad (1.163)$$

et comme  $u$  est constante sur la caractéristique, la courbe caractéristique est une droite :

$$x = c(u)t + x_0.$$

Le problème est la pente des caractéristiques n'est pas constante pour une équation d'advection non linéaire. Deux caractéristiques peuvent se croiser. Cela voudrait dire qu'au point d'intersection, la fonction  $u$  prend deux valeurs différentes. Physiquement cela est possible. Par exemple, pour la vague déferlante de la figure 1.72, on voit qu'à une abscisse donnée  $x$ , la surface libre  $h(x)$  prend plusieurs valeurs. Mathématiquement, manipuler des fonctions à valeurs multiples pose des problèmes.

Il est en général plus aisé de manipuler des fonctions discontinues où la zone à valeurs multiples est remplacée par un choc en  $x = \sigma(t)$  (voir figure 1.73). On dispose d'un résultat général appelé *équation de Rankine-Hugoniot*, qui permet de calculer la vitesse  $\dot{\sigma}$  de déplacement de ce choc :

$$\dot{\sigma} = \frac{\llbracket F(u) \rrbracket}{\llbracket u \rrbracket}, \quad (1.164)$$

où les doubles crochets représentent le saut de  $F(u)$  (ou de  $u$ ) à travers le choc

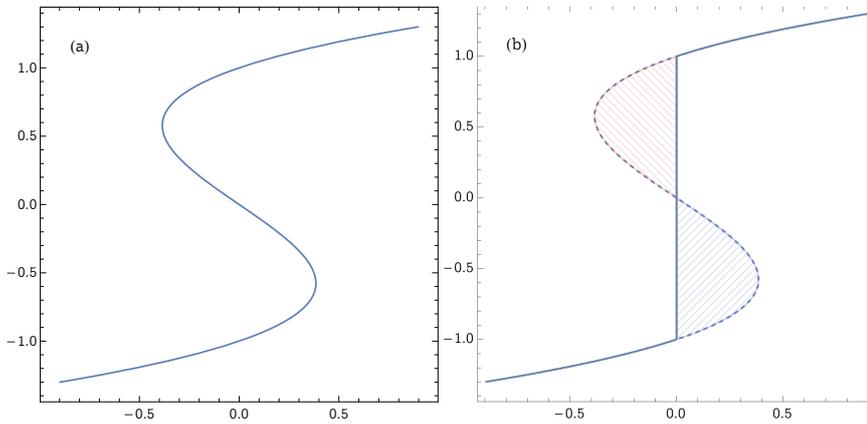
$$\llbracket F(u) \rrbracket = \lim_{x \rightarrow \sigma, x > \sigma} F(u) - \lim_{x \rightarrow \sigma, x < \sigma} F(u).$$

La démonstration est simple. Intégrons l'équation (1.161) sur l'intervalle  $[x_l, x_r]$  et supposons qu'il y ait un choc en  $x = \sigma(t)$  (avec  $x_l < \sigma < x_r$ ):

$$\begin{aligned} \int_{x_l}^{x_r} \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) dx &= - \int_{x_l}^{x_r} \frac{\partial}{\partial x} F[q(x, t)] dx \\ &= F(q(x_l, t)) - F(q(x_r, t)). \end{aligned}$$



**Figure 1.72** – Vague déferlante. C'est ce qui se passe quand la crête dépasse le pied de la vague. En une abscisse donnée, on peut croiser plusieurs fois l'interface  $h(x)$ .



**Figure 1.73** – (a) Fonction à valeurs multiples. (b) La partie à valeurs multiples est remplacée par une discontinuité, qui coupe la courbe en deux lobes dont la superficie est égale.

Nous aimerions permuter intégration spatiale et différenciation temporelle tout en prêtant attention à la discontinuité en  $x = \sigma(t)$ . En scindant l'intervalle  $[x_l, x_r]$  en deux parties, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \int_{x_l}^{x_r} u(x, t) dx = \frac{d}{dt} \left( \int_{x_l}^{\sigma} u(x, t) dx + \int_{\sigma}^{x_r} u(x, t) dx \right),$$

et en différenciant par rapport à  $t$  et en utilisant la règle de Leibniz, nous déduisons :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_l}^{x_r} u(x, t) dx = \int_{x_l}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx + \int_{\sigma}^{x_r} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx + \dot{\sigma} u(x_r, t) - \dot{\sigma} u(x_l, t).$$

La version intégrale de l'équation (1.161) est donc

$$-\frac{d}{dt} \int_{x_l}^{x_r} u(x, t) dx + \dot{\sigma} u(x_r, t) - \dot{\sigma} u(x_l, t) = F(u(x_r, t)) - F(u(x_l, t)).$$

En prenant la limite  $x_r \rightarrow \sigma$  et  $x_l \rightarrow \sigma$ , nous obtenons la relation désirée :

$$\dot{\sigma} \llbracket u \rrbracket = \llbracket F(u) \rrbracket.$$

Notons que nous avons considéré une équation homogène, c'est-à-dire avec un terme source  $s(u, x, t)$  nul

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = s(u, x, t). \quad (1.165)$$

L'équation de Rankine–Hugoniot (1.164) reste valable dans ce cas. Autrement dit, la source  $s$  n'a pas d'effet sur la vitesse du choc  $\dot{\sigma}$ . La seule différence avec le cas  $s = 0$  est que les caractéristiques ne sont plus des droites.

Un autre exemple de choc qui se forme au bout d'un temps fini est fourni par la figure 1.74. On résout l'équation d'advection non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} u^3 = 0, \quad (1.166)$$

subjecte aux conditions initiales et aux limites Par exemple, la solution du problème (1.157) sujet aux conditions :

$$u(x, 0) = 0 \text{ et } u(0, t) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right) & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \text{ s} \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 8 \text{ s} \end{cases} \quad (1.167)$$

forme dès le début de la simulation un choc au niveau du front. La première vague est rattrapée par la second, et au final, il ne reste plus qu'une simple vague dont le front est un choc. La vitesse du front est donc donnée par l'équation de Rankine–Hugoniot (1.164) avec ici  $F(u) = au^3$ . Comme à droite du choc,  $u$  est nulle, on peut écrire que la vitesse du choc est

$$\dot{\sigma} = \frac{\llbracket F(u) \rrbracket}{\llbracket u \rrbracket} = a \frac{\llbracket u^3 \rrbracket}{\llbracket u \rrbracket} = a \frac{u_f^3 - 0^3}{u_f - 0} = au_f^2,$$

où  $u_f$  est la valeur prise par  $u$  à gauche du choc. La vitesse est donc une fonction quadratique de  $u_f$ .

**Figure 1.74** – Solution  $u(x, t)$  de l'équation (1.166) – avec ici  $a = 1$  s/m – soumise aux valeurs initiales  $h = 0$  et aux valeurs initiales et aux limites (1.167). Comme l'advection est non linéaire, le transport n'est plus une simple translation. Il y a changement de forme et formation de choc. L'équation a été résolue à l'aide de la méthode numérique des volumes finis (LeVeque, 2002).

### 1.6.3 Équation de Burgers

L'équation de Burgers est une équation d'advection non linéaire de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.168)$$

où l'inconnue est la fonction  $u(x, t)$ . Contrairement au cas précédent, la vitesse d'advection est  $u$ , et varie donc au cours du temps. Supposons de plus que cette équation est sujette à une condition initiale de la forme

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.169)$$

avec  $u_0(x)$  une fonction quelconque de  $x$  (continue ou non).

L'équation caractéristique associée à l'équation (1.168) est

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ le long de la courbe } \frac{dx}{dt} = u.$$

Comme  $u$  est constant le long de la caractéristique, la courbe caractéristique est encore une droite :

$$x = x_0 + u(x_0, 0)t = x_0 + u(x_0)t, \quad (1.170)$$

avec  $x_0$  l'abscisse au temps initial  $t = 0$ . Le long de cette courbe caractéristique, la fonction  $u(x, t)$  prend une valeur constante fixée par la condition initiale (1.169)

$$u(x, t) = u_0(x_0), \quad (1.171)$$

et si on est capable de trouver  $x_0$  en fonction de  $x$  et  $t$  dans l'équation (1.170), alors on peut obtenir une forme explicite de la solution. Dans le cas contraire, on a une solution sous forme implicite.

Par exemple, supposons que :

$$u_0(x) = ax,$$

avec  $a > 0$  une constante. On peut résoudre facilement l'équation (1.170) :

$$x = x_0(at + 1) \Rightarrow x_0 = \frac{x}{at + 1}.$$

La solution est alors obtenue en se servant de l'équation (1.171) :

$$u(x, t) = \frac{ax}{at + 1}.$$

On vient de voir ici une résolution par la méthode des caractéristiques dans le cas où la fonction initiale  $u_0$  est continue, et où la solution reste continue au cours du temps.

Une des propriétés remarquables de l'équation de Burgers (comme de toute équation hyperbolique) est qu'une solution initialement continue peut générer des chocs au bout d'un temps fini. La figure 1.75 illustre ce qui se passe si on prend  $u_0(x) = \sin(\pi x)$  comme condition initiale. On note qu'au début, le profil se déforme continûment sauf aux points  $x = \pi/2$  (modulo  $\pi$ ) où la vitesse est nulle, puis à partir de  $t = 0,35$  s, un choc se forme en  $x = 1$ . Ce choc se caractérise par une tangente verticale du profil.

Pour mieux comprendre la dynamique des chocs, il est intéressant de regarder un problème aux valeurs initiales avec un choc initial :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > b, \\ ax & \text{si } 0 \leq x \leq b, \end{cases} \quad (1.172)$$

avec  $a$  et  $b$  deux constantes. Tant que  $x_0 < b$ , la condition initiale est continue, et on a vu précédemment qu'on peut déduire de cela la solution à tout temps  $t$

$$u_0(x_0) = a(x - ut) = u \Rightarrow u = \frac{ax}{at + 1}.$$

En  $x_0 = b$ , il y a un choc, dont la position ultérieure  $x = s(t)$  est donnée par l'équation de Rankine-Hugoniot (1.164) avec la fonction flux qui vaut ici  $F(u) = u^2/2$  :

$$\dot{s} = \frac{[[F(u)]]}{[[u]]} = \frac{1}{2} \frac{u^2(s(t), t) - 0}{u(s(t), t) - 0} = \frac{1}{2} u(s(t), t) = \frac{1}{2} \frac{as}{at + 1},$$

**Figure 1.75** – Solutions numériques (trait rouge) de l'équation de Burgers (1.168) entre les temps  $t = 0$  et  $t = 1$  s. La condition initiale (1.169) est:  $u_0(x) = \sin(\pi x)$  (trait discontinu noir). La résolution numérique a été réalisée à l'aide du code aux volumes finis Clawpack (LeVeque, 2002).

avec la condition initiale  $s(0) = b$ . La position du choc est donc :

$$s(t) = b\sqrt{1 + at}.$$

La solution exacte de l'équation de Burgers (1.168) est donc :

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > s(t), \\ \frac{ax}{at + 1} & \text{si } 0 \leq x \leq s(t) \end{cases} \quad (1.173)$$

La figure 1.76 montre la solution numérique. On peut vérifier qu'elle est en bon accord avec la solution exacte (1.173).

**Figure 1.76** – Solutions numériques (trait rouge) de l'équation de Burgers (1.168) entre les temps  $t = 0$  et  $t = 3$  s. La condition initiale est donnée par l'équation (1.172) avec ici  $a = 1$  and  $b = 1/2$ . (trait discontinu noir). La résolution numérique a été réalisée à l'aide du code aux volumes finis Clawpack (LeVeque, 2002).

### 1.6.4 Équation de diffusion



- Qu'est-ce qu'un laplacien ?
- ↪ Voir la définition au § 1.3.3 du complément de cours
- Qu'est qu'une solution auto-similaire ?
- ↪ Voir la méthode au § 1.7.5 du complément de cours
- Qu'est-ce qu'une équation différentielle du second ordre ?
- ↪ Voir la définition au § 1.5 du complément de cours

La *diffusion* est un mode de transfert d'un élément sous l'effet de l'agitation thermique (mouvement brownien) ou bien de la turbulence. Par exemple, dans un cours d'eau, outre le mouvement moyen, il existe des fluctuations de vitesse qui dispersent rapidement un élément ou un fluide dans le volume.

Un des exemples classiques de diffusion est l'équation de diffusion d'un polluant dans un aquifère ou bien l'équation de diffusion de la chaleur. La température  $T(x, y; t)$

varie au cours du temps dans un matériau (en dimension 2) selon l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1.174)$$

avec  $\alpha = k/(\rho C)$  la diffusivité thermique,  $\rho$  la masse volumique,  $k$  la conductivité thermique,  $C$  la chaleur massique.

La matière diffuse également. Prenons l'exemple de l'équation de diffusion, qui prend la forme suivante en dimension 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (1.175)$$

avec  $D$  le coefficient de diffusion et  $f(x, t)$  est ici une quantité telle que la concentration d'un polluant dans une rivière. L'équation (1.175) est une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre.

Il s'agit ici d'équations linéaires. Il est fréquent que le coefficient de diffusion ne soit pas constant, mais dépende de la fonction  $f$ . On parle alors d'équation de diffusion non linéaire. Par exemple, lorsqu'on a  $D(f) = \kappa f^k$ , l'équation de diffusion est

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left( f^k \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (1.176)$$

Pour de la diffusion d'un gaz dans un milieu poreux on a  $k = 1$  ( $f$  représente la concentration); pour la diffusion d'un fluide newtonien sur un substrat horizontal, on a  $k = 3$  ( $f$  représente la hauteur de fluide); pour la diffusion de chaleur lors des premiers instants d'une explosion nucléaire, on a  $k = 5$ .

### Solution auto-similaire au problème de Green

Selon les conditions initiales imposées, il existe parfois des solutions analytiques à l'équation (1.175) sous la forme de solution auto-similaire  $t^m F(\xi)$  avec  $\xi = x/t^n$  (Barenblatt, 1996). Quand on substitue  $f$  par cette forme dans l'équation (1.175), on trouve que  $n = \frac{1}{2}$ . On note que  $m$  n'est pas déterminé par l'équation différentielle, mais il l'est par les conditions aux limites. En général, dans les problèmes physiques, on impose que la quantité de matière diffusée soit constante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = V,$$

où  $V$  est le volume total (supposé constant) de matière qui diffuse. Un changement de variable donne  $\int f(x) dx = \int t^{m+1/2} F(\xi) d\xi = V$ . Il est donc nécessaire que  $m = -\frac{1}{2}$  car  $V$  ne dépend pas de  $t$ .

L'avantage de ce changement de variable est qu'on transforme l'équation aux dérivées partielles en équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2, bien plus simple à

résoudre. Voyons cela en pratique dans un cas particulier où l'on suppose que dans une retenue d'eau au repos (lac), on lâche un volume  $V$  de polluant initialement contenu en un point  $x = 0$ ; la condition initiale est donc  $f(x, 0) = \delta(x)$  où  $\delta$  est la fonction Dirac ( $\delta(x) = 1$  si  $x = 0$  et  $\delta(x) = 0$  si  $x \neq 0$ ). Ce problème où la condition initiale est une « impulsion », c'est-à-dire une quantité localisée en un point, s'appelle *problème de Green*, et sa solution s'appelle *fonction de Green*. En substituant la forme  $f = t^{-1/2}F(\xi)$  dans l'équation (1.175), on obtient une équation différentielle ordinaire pour  $F$  et ce faisant, on a transformé un problème aux dérivées partielles en problème différentiel ordinaire :

$$F + \xi F' + 2DF'' = 0,$$

qui donne en intégrant une première fois :

$$\xi F + 2DF' = a,$$

avec  $a$  une constante d'intégration. Comme la solution est attendue être symétrique en  $x = 0$  (donc en  $\xi = 0$ ), on a  $F' = 0$  en  $x = 0$  ( $F$  doit admettre une tangente horizontale en ce point), donc  $a = 0$ . Une nouvelle intégration donne :

$$F(\xi) = be^{-\frac{\xi^2}{4D}} \Rightarrow f(x, t) = \frac{b}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

avec  $b$  une constante d'intégration. Comme  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 2\sqrt{D\pi}$ , on déduit que  $b = V/2\sqrt{D\pi}$ , d'où la solution :

$$f(x, t) = \frac{V}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (1.177)$$

Comme le montre la figure 1.77, la forme du front de diffusion reste similaire au cours du temps (elle est en forme de cloche), et elle s'étale de plus en plus. Notons que la solution obtenue a un intérêt général car elle est la solution particulière du problème dit de Green. Par exemple, admettons que la condition initiale soit plus complexe :  $f(x, 0) = g(x)$ . Puisque l'équation différentielle est linéaire, la somme de deux solutions est également solution. La solution générale s'écrit alors

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4Dt}} d\zeta.$$

Cette intégrale signifie que la concentration  $f$  à tout temps  $t$  et pour tout  $x$  est la somme des contributions élémentaires induites par la distribution de source d'intensité  $g(\zeta)$  par unité de longueur. La solution générale est le produit de convolution de la fonction de Green et de la condition initiale  $g(x)$

**Figure 1.77** – Diffusion d'une quantité  $f$ . Calcul avec  $D = 1 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $V = 1$ .

### 1.6.5 Équation d'advection-diffusion

#### Équation linéaire d'advection-diffusion

L'*advection-diffusion*, appelée également convection-diffusion, est la combinaison des deux phénomènes : du transport par advection et un étalement par diffusion. C'est le phénomène couramment rencontré en hydraulique. Par exemple, le déversement d'un polluant dans une rivière conduit à un transport de ce polluant par diffusion (turbulente) et transport (advection à la vitesse de l'eau). Dans le cas linéaire, l'équation caractéristique prend la forme :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (1.178)$$

où  $D > 0$  et  $u$  sont supposées constantes. On peut se ramener à un problème de diffusion linéaire par le changement de variable suivant (qui revient à faire un changement de référentiel et à se placer dans le référentiel du cours d'eau) :

$$\begin{aligned} \zeta &= x - ut, \\ \tau &= t. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial \cdot}{\partial x} &= \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} &= \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \\ &= -u \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} + \frac{\partial \cdot}{\partial \tau}.\end{aligned}$$

L'équation (1.178) devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2},$$

qui est similaire à l'équation de diffusion (1.175) vue plus haut.

### Équation non linéaire d'advection-diffusion

L'advection-diffusion non linéaire combine du transport non linéaire (la vitesse de transport est d'autant plus grande que la quantité advectée est elle-même grande) et de la diffusion (linéaire ou non). Un exemple est donné par l'équation de Burgers visqueuse :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.179)$$

avec  $\nu > 0$  une constante appelée diffusivité. Cette équation est un cas particulier important car elle est souvent vue comme une simplification de l'équation de Navier-Stokes. La figure 1.78 montre le même problème aux valeurs initiales que celui vu au § 1.6.3 pour le cas non visqueux. La diffusion tend à émousser toutes les zones à forte variation de  $u$ . L'étalement est particulièrement visible au niveau du front.

**Figure 1.78** – Advection-diffusion d'une quantité  $f$  avec ici  $\nu = 0,1 \text{ m}^2/\text{s}$ . Résolution numérique à l'aide de Clawpack.

### 1.6.6 Équation des ondes

Les ondes dynamiques sont les solutions d'une équation différentielle telle que l'équation aux dérivées partielles du second ordre dite *équation des ondes linéaires*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.180)$$

avec  $c$  la célérité des ondes. Cette forme n'est pas exhaustive; par exemple, l'équation des ondes de surface s'écrit (voir § 4.2):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

avec ici  $\phi$  le potentiel de vitesse ( $\mathbf{u}(x, y, t) = \nabla \phi$ ) et  $g$  l'accélération de la gravité.

**Figure 1.79** – Propagation d'ondes linéaires  $u(x, t)$  obtenue par la solution de D'Alembert avec ici  $c = 0,5$  m/s et la condition initiale  $f(x) = \exp(-x^2)$ .

En introduisant le changement de variables

$$\xi = x + ct \text{ et } \eta = x - ct,$$

on note que l'équation (1.180) peut se mettre sous une forme plus simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (1.181)$$

En intégrant cette équation, on montre ainsi que la solution générale de l'équation des ondes (1.180) s'écrit

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct),$$

avec  $\phi$  et  $\psi$  deux fonctions quelconques. Le problème aux valeurs initiales où l'on cherche à résoudre l'équation (1.180) sujette aux conditions initiales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

prend la solution générale suivante appelée *solution de D'Alembert* (Garabedian, 1964; Chester, 1970; Farlow, 1993):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\zeta) d\zeta \quad (1.182)$$

La figure 1.79 montre un exemple d'onde linéaire dans le cas particulier  $f(x) = \exp(-x^2)$  et  $g(x) = 0$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\exp(-(x - ct)^2) + \exp(-(x + ct)^2)).$$

L'équation différentielle (1.180) est linéaire, ce qui implique que toute combinaison de solutions est également solution (principe de superposition). Il existe deux sens de propagation :

- onde *progressive*  $f = f(x - ct)$  : l'onde va dans le sens  $x > 0$ ;
- onde *régressive*  $f = f(x + ct)$  : l'onde va dans le sens  $x < 0$ .

Remarquons que dans bien des cas d'intérêt pratique, les équations sont linéaires; la linéarité permet d'appliquer le principe de superposition. Une onde *stationnaire* résulte de la superposition d'une onde régressive et d'une onde progressive de même amplitude. Dans ce cas, la dépendance en temps disparaît. On recherche souvent les solutions sous la forme d'harmoniques (voir figure 1.80):

$$\phi(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)] = \operatorname{Re}(A) \cos(kx - \omega t) - \operatorname{Im}(A) \sin(kx - \omega t),$$

où  $A$  est l'*amplitude*,  $k$  le *nombre d'onde* ( $\lambda = 2\pi/k$  est la *longueur d'onde*),  $\omega = 2\pi/T$  la *fréquence angulaire*; on introduit aussi une fréquence  $f$  définie comme  $f = \omega/(2\pi) = 1/T$ : c'est le nombre d'oscillations complètes durant une seconde à une position donnée. La période est définie comme  $T = \lambda/c$ .

La *vitesse de l'onde* est ici  $c = \omega/k$ . Cela veut dire que pendant un intervalle  $\delta t$ , on a observé que l'onde s'est déplacée d'une distance  $c\delta t$ . La relation de dispersion  $\omega(k)$  est ici linéaire puisqu'on a:  $\omega(k) = ck$ , c'est-à-dire les crêtes de la vague se déplacent à une vitesse constante qui est indépendante de la longueur d'onde. Dans la plupart

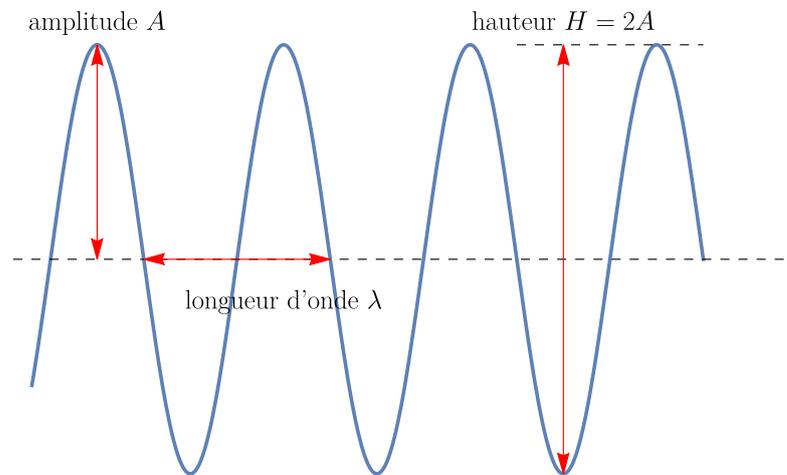


Figure 1.80 – Longueur d’onde et amplitude d’une onde harmonique.

des systèmes que l’on va étudier dans ce cours, la relation n’est pas linéaire, ce qui en pratique implique que la vitesse des crêtes dépend de la longueur d’onde. On introduit alors la *vitesse de phase*  $c_p$

$$c_p = \frac{\omega(k)}{k}.$$

Dans un processus physique où les ondes résultent de la superposition de plusieurs ondes harmoniques de longueur d’onde différente, chaque composante harmonique se déplace à sa propre vitesse, ce qui aboutit finalement à une séparation ou dispersion de l’onde, d’où le nom de relation de dispersion pour  $\omega(k)$ . Il existe une troisième vitesse, appelée *vitesse de groupe*, qui représente la vitesse à laquelle l’énergie associée à l’onde se propage :

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (1.183)$$

En général, pour la plupart des phénomènes physiques, on a  $c_g \leq c_p$ .

Dans les problèmes d’intérêt pratique, les ondes ne sont des formes régulières et périodiques, mais ont un comportement aléatoire. Une fonction aléatoire  $f(x, t)$  peut se caractériser à l’aide de sa densité de probabilité. Lorsqu’elle est stationnaire (c’est-à-dire lorsque ses moments tels que la valeur moyenne ne dépendent pas du temps) alors l’autocorrélation  $R(s)$  sert à caractériser la fonction :

$$R(s) = \langle f'(t)f'(t+s) \rangle,$$

où  $f'(t) = f(t) - \langle f(t) \rangle$  désigne la fluctuation par rapport à la valeur moyenne  $\langle f(t) \rangle$ . Le plus souvent, on se sert de cette fonction sous une autre forme, qui permet de déterminer les composantes qui ont le plus de poids : la *densité spectrale de puissance*. On

introduit aussi la densité spectrale de puissance en prenant la transformée de Fourier de l'autocorrélation (cela est aussi le résultat du théorème de Wiener–Khinchin):

$$E(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(s) e^{-i\omega s} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(s) \cos(\omega s) ds$$

qui est une fonction réelle paire. Une propriété fondamentale de la densité spectrale est que son intégrale sur la gamme de fréquences  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} E(\omega) d\omega$$

représente la contribution à « l'énergie »  $\langle f'^2(t) \rangle$  transportée par l'onde.

### 1.6.7 Processus à l'équilibre: équation de Laplace



- Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles elliptique?
- ↪ Voir la définition au § 1.5 du complément de cours
- Qu'est ce que l'opérateur  $\nabla$ ?
- ↪ Voir la définition au § 1.3.1 du complément de cours

Les équations elliptiques traduisent en général comment un processus à l'équilibre est organisé spatialement. Le prototype de l'équation elliptique est l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.184)$$

Par exemple, l'équation de la chaleur (1.174) en régime permanent ( $\partial_t T = 0$ ) devient elliptique. L'équation de Laplace sert à décrire un grand nombre d'écoulements stationnaires dans les problèmes environnementaux. Ainsi, l'écoulement lent d'eau dans un milieu poreux est également une équation de Laplace. En effet, si la vitesse  $\mathbf{u}$  suit la loi de Darcy, alors elle est reliée au gradient de pression  $p$  par:  $\mathbf{u} = -k\nabla p/\mu$ , avec  $\mu$  la viscosité et  $k$  la perméabilité du milieu. On peut reformuler cette équation de la façon suivante  $\mathbf{u} = -\nabla\psi$  avec  $\psi = -kp/\mu$ ; on dit que  $\mathbf{u}$  dérive du potentiel  $\psi$ . L'équation de continuité (incompressibilité du fluide) impose que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ , soit encore

$$\nabla \cdot \nabla\psi = 0 \Rightarrow \Delta\psi = 0.$$





## CHAPITRE 2

# Ondes de crue et inondations



CE CHAPITRE traite des crues lentes ou rapides. On va s'intéresser à une multitude de phénomènes tels que :

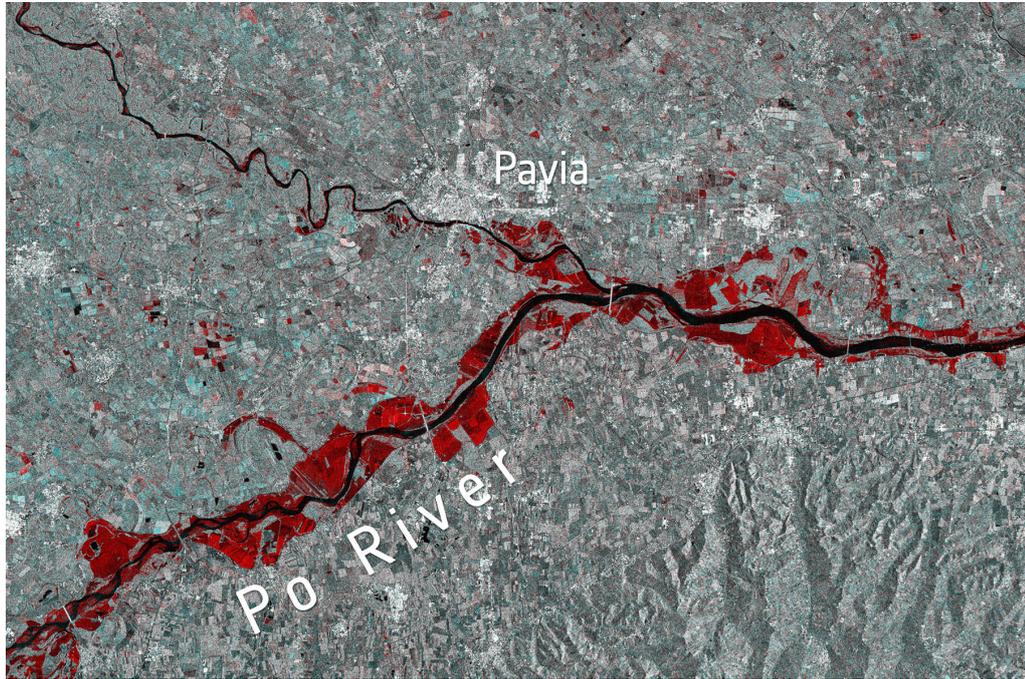
- crues lentes des grands fleuves conduisant souvent à des inondations ;
- crues torrentielles sous forme de crues liquides (avec transport solide) ;

Tous ces phénomènes peuvent être calculés, à des degrés divers de précision, par les équations de Saint-Venant ou des équations approchées tirées des équations de Saint-Venant. Nous commençons par décrire les phénomènes physiques de façon qualitative avant d'aborder chacun d'eux à travers des équations.

## 2.1 Phénomènes physiques

### 2.1.1 Inondation et crue

Une inondation peut être définie selon les auteurs comme une « irruption d'eau sur un terrain normalement sec » comme une « submersion par l'eau débordant du lit normal d'un cours d'eau », ou comme « une accumulation d'eau provenant de drainage, sur des zones qui ne sont pas normalement submergées ». Il s'agit d'une situation temporaire qui peut être dommageable (destruction d'habitations, par exemple) ou bénéfique (apport d'alluvions fertilisants, par exemple). Les causes des inondations sont multiples et peuvent être classifiées comme on le montre ci-après.



**Figure 2.1** – Inondation le long du Pô en novembre 2019 au niveau de la confluence avec le Tessin à Pavie (Italie). Source : [Agence Spatiale Européenne](#).

### Inondations fluviales et crues

On fait la distinction entre crue et inondation :

- les *inondations fluviales* sont les plus fréquentes et également les plus dommageables. Elles surviennent à la suite de longues périodes de pluie ou de la combinaison de pluies avec la fonte des neiges et glaces. Elles peuvent concerner des surfaces très importantes (plusieurs centaines à milliers de km<sup>2</sup>). La crue du Pô est un exemple récent d'inondation sur de grandes étendues (voir figure 2.1). La figure 2.4 montre des exemples d'inondations récentes en Suisse et en France ;
- les *crues* sont des phénomènes brutaux qui surviennent à la suite de violentes précipitations sur un périmètre limité et souvent dans un contexte montagneux, de piémont, ou de collines. Elles sont soudaines, de courte durée et ont un débit de pointe relativement élevé. Pour souligner leur caractère brutal, on parle souvent de « crue éclair » (*flash flood* en anglais). En zone de montagne, elles peuvent être extrêmement dévastatrices, d'autant plus qu'elles ont une capacité de charriage très importante, pouvant conduire aux laves torrentielles. Le 3 octobre 2020, la tempête Alex déverse 400 à 600 mm de pluie en moins de 24 h sur le sud de la France entre les vallées de la Tinée et de la Vésubie ([Payrastré et al.](#),

2022; Liébault *et al.*, 2024; Pons *et al.*, 2024), ainsi que sur le nord du Piémont. Les crues de l'automne 2000 sur le Val d'Aoste, la haute Maurienne, et le Valais (Gondo, Fully pour le Valais) sont des exemples de crues quasi concomitantes sur une période de temps courte. Les crues du sud-est de la France offrent des exemples dramatiques de crues éclair sur de grands bassins-versants dans un contexte de colline : pour la crue historique du Tarn de mars 1930, on estima le débit à  $6000 \text{ m}^3/\text{s}$  contre  $160 \text{ m}^3/\text{s}$  pour le débit de pointe annuel. Ces crues font souvent des victimes compte tenu de leur soudaineté et de la force du courant : la crue d'octobre 1988 à Nîmes fit 10 morts à Nîmes, la crue de l'Ouvèze à Vaison-la-Romaine fit 51 morts en 1992 (voir figure 2.2), la crue de l'Aude fit 35 victimes en 1999 (Gaume *et al.*, 2009), la tempête Alex d'octobre 2020 fit 27 morts en France et en Italie.



**Figure 2.2** – Crue éclair de l'Ouvèze à Vaison-la-Romaine (Vaucluse, France) le 22 septembre 1992 à la suite de pluies intenses (environ 200 mm de pluie en 5 h). La crue fit 51 morts. Source : M. J. Tricart.

On peut relier les inondations à des scénarios météorologiques, qui sur l'Europe sont bien établis :

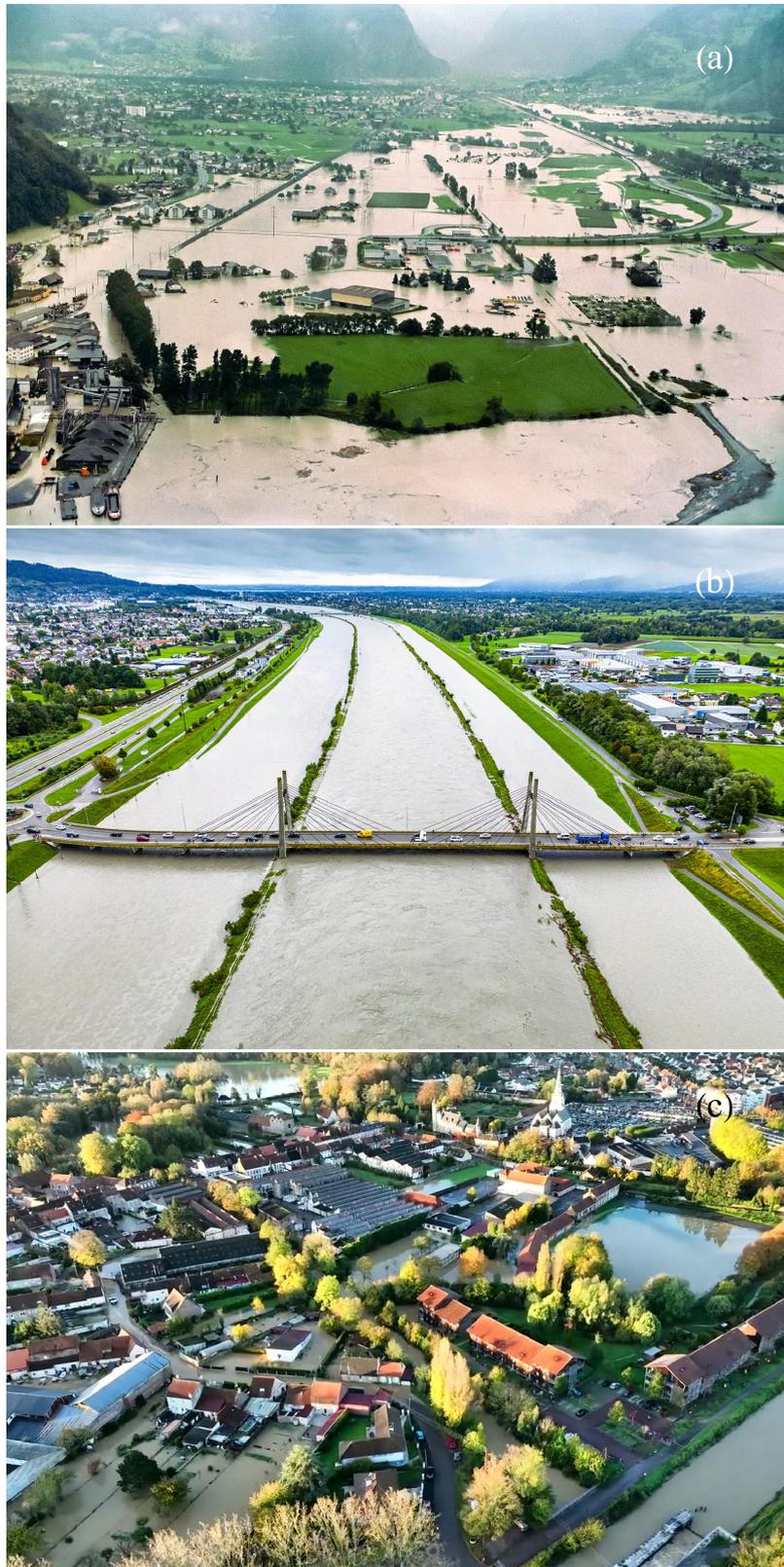
- les inondations hivernales, causées par des dépressions d'ouest associées à un front chaud, qui apportent des précipitations pouvant être longues, continues et intenses. Le sol se sature et de grands volumes d'eau ruissellent (crue de l'Aa,



**Figure 2.3** – Vue aérienne du pont sur la Vésubie à Saint-Martin-Vésubie (Alpes-Maritimes, France) le 3 octobre 2020. Le 2 octobre 2020, la tempête Alex a déversé environ 400 mm de pluie sur quelques heures sur le Mercantour, causant des crues majeures de la Roya et de la Vésubie (Liébault *et al.*, 2024). Source : [Huffington Post](#).

petit fleuve côtier du Pas-de-Calais et largement canalisé, en novembre 2023 et janvier 2024 sur la figure 2.4) ;

- les inondations dues à la fonte des neiges se produisent lorsque le stock neigeux est encore important au printemps et lorsque du vent chaud provenant du sud traverse les Alpes. Si des précipitations accompagnent ce vent, les volumes d’eau ruisselée sont également importants ;
- les inondations dues aux précipitations convectives d’été ou d’automne peuvent avoir des effets catastrophiques sur des régions fortement urbanisées. Elles sont de type « crue éclair » (crues de la Vésubie sur la figure 2.3) ;
- les inondations dues aux grandes marées, qui affectent principalement les Pays-Bas (tempête de janvier 1953).



**Figure 2.4** – (a) Crue de la Reuss en août 1987 (UR). (b) Crue du Rhin en août 2023 (Diepoldsau, SG). (c) Inondation à Arques (Pas-de-Calais, France) en janvier 2024 lors de la crue de l’Aa et de ses canaux. Source : [BAFU](#), [Le Temps](#) et [AFP](#).

### **Remontées de nappe**

Les remontées de nappe surviennent à la suite de la saturation du sol en eau et, par conséquent, lorsqu'il n'est plus en mesure d'absorber de nouvelles quantités d'eau, soit par un apport direct (pluie), soit par un apport indirect (écoulement souterrain, ruissellement à partir des versants). Dans les zones urbanisées (l'Oise en France) ou certaines régions géologiquement favorables (avec des terrains aquifères calcaires ou crayeux comme dans la Somme), ces remontées de nappe causent des inondations assez fréquentes. Au printemps 2001, après un hiver très humide, plus de 3000 personnes sont sinistrées dans la région d'Abbeville (Somme), leur maison restant inondée pendant deux à trois mois.

### **Débordement de lac**

Les lacs, lorsque leur exutoire a une capacité d'évacuation (naturelle ou artificielle) limitée, peuvent voir leur niveau d'eau augmenter de plusieurs mètres, comme ce fut le cas au Tessin en 1993 ou plus récemment en novembre 2014 avec le lac Majeur. L'inondation historique est celle de 1868 pour la région du lac Majeur, causant la mort de mort d'environ 50 personnes.

### **Rupture de barrage**

On se reportera au chapitre 3 pour plus de renseignements.

### **Ruissellement**

Dans les zones urbanisées, le ruissellement sur les chaussées lors de violents orages peut provoquer des inondations dans les maisons attenantes. Ces problèmes sont souvent associés à un dysfonctionnement du réseau d'évacuation des eaux pluviales, à des obstructions de cours d'eau ou de drain, ou à des orages particulièrement intenses. Les photographies de la figure 2.5 montrent un exemple d'inondations provoquées le ruissellement des eaux sur les chaussées goudronnées de Châtel à la suite d'un violent orage sur le Morclan en juin 2000.

### **Autres phénomènes**

D'autres types d'inondations, plus anecdotiques pour nos contrées, sont également possibles. Parmi ceux-ci, mentionnons le phénomène de seiche, due à des phénomènes oscillatoires dans les grandes étendues d'eau fermées (par exemple les grands lacs aux États-Unis), les tsunamis affectant principalement les côtes japonaises, les marées de



**Figure 2.5** – Inondations lors de l’orage du 5 juin 2000 à Châtel (Haute-Savoie, France).  
Source : Thierry Hauteville.

tempêtes associées aux cyclones tropicaux, les mouvements d’affaissement du terrain ou encore l’écroulement d’un barrage naturel. Les inondations des cotes de l’Océan Indien en Asie du Sud-Est à Noël 2004 ou les inondations à la Nouvelle-Orléans après le passage de l’ouragan Katrina sont des exemples d’inondations dues à des tsunamis ou des cyclones.

### **2.1.2 Dommages causés par les inondations**

Le tableau 2.1.2 fournit le nombre moyen annuel de personnes tuées par des inondations pour chaque continent. Nous donnons des valeurs moyennées à l’échelle de la décennie. Nous indiquons également le coût économique des dommages dus aux inondations.

Les inondations représentent chaque année un pourcentage important des pertes économiques dues aux catastrophes naturelles (56 % du total mondial en moyenne depuis 2020). Depuis 2020, elles représentent en moyenne 27 % du nombre de morts à des catastrophes naturelles à l’échelle de la planète dues. Parmi l’ensemble des continents, l’Asie est celui qui paie le plus lourd tribut aux inondations : cette situation est évidemment à mettre en relation avec les grands fleuves chinois<sup>1</sup> et le rôle particulier

1. En Chine, les plaines inondables ne représentent qu’une partie infime du territoire, mais elles concentrent la population et l’activité agricole. Par exemple, pour le Yangtse, elle représente 1,5 % de la surface du pays, mais elle est habitée par 250 millions d’habitants ; 45 % de la production du riz et des autres céréales y est produite.

**Tableau 2.1** – Nombre annuel moyen de morts dus aux inondations en fonction des continents et des décennies depuis 1980 ; le nombre en parenthèses indique le nombre relatif de morts par rapport à toutes les victimes de catastrophes naturelles. Coût annuel moyen en milliards de dollars (G\$) des inondations en fonction des continents et des décennies depuis 1980 ; le nombre entre parenthèses représente le coût relatif des inondations par rapport au coût des dommages causés par des événements naturels. Les événements naturels considérés sont : inondation, sécheresse, activité volcanique, séisme, et mouvement de terrain. Source : [Our World in Data](#).

<i>continents</i>	Nombre annuel de morts				
	1980–89	1990–99	2000–09	2010–19	2020–
Europe	80 (3 %)	96 (22 %)	96 (64 %)	89 (68 %)	74 (78 %)
Asie	4194 (75 %)	5293 (34 %)	3709 (8 %)	3723 (43 %)	3513 (20 %)
Afrique	165 (0 %)	732 (86 %)	795 (63 %)	723 (24 %)	1811 (74 %)
Océanie	16 (82 %)	4 (2 %)	9 (22 %)	12 (20 %)	15 (59 %)
Amérique du Sud	397 (12 %)	3158 (89 %)	308 (66 %)	389 (63 %)	374 (78 %)
Amérique du Nord	248 (18 %)	257 (81 %)	471 (74 %)	130 (1 %)	99 (12 %)
	Coût économique annuel en G\$				
Europe	1,0 (18 %)	2,8 (53 %)	5,4 (86 %)	4,8 (61 %)	13,1 (75 %)
Asie	2,0 (85 %)	14,3 (46 %)	7,7 (31 %)	26,4 (44 %)	23,7 (55 %)
Afrique	0,1 (14 %)	0,1 (17 %)	0,3 (35 %)	0,4 (49 %)	2,1 (82 %)
Océanie	0,0 (2 %)	0,1 (33 %)	0,5 (69 %)	1,1 (26 %)	3,6 (99 %)
Amérique du Sud	0,8 (55 %)	0,7 (64 %)	0,7 (69 %)	1,4 (24 %)	0,9 (27 %)
Amérique du Nord	0,2 (12 %)	3,1 (47 %)	2,0 (67 %)	5,1 (45 %)	2,8 (22 %)

joué par la mousson. Depuis les années 2020, l’Afrique paye un tribut encore plus lourd aux inondations que l’Asie quand on rapporte le nombre de victimes à sa population (l’Afrique est quatre fois moins peuplée que l’Asie).

En Europe, le coût des dommages est croissant depuis 2000. Cette hausse est parfois interprétée comme une augmentation du nombre d’événements catastrophiques due au changement climatique, mais il n’y a pas de tendance claire dans l’évolution de la fréquence et de l’intensité des précipitations, des crues, et des dommages ([Sharma et al., 2018](#); [Berghuijs et al., 2017, 2019](#); [Brunner et al., 2019a,b](#)). Un autre facteur peut être lié à l’accroissement de zones urbanisées depuis 1970 dans des secteurs soumis à des crues rares, mais potentiellement dévastatrices. On note en effet que ce sont souvent les aménagements qui sont en cause. Par exemple, lors de la crue de l’Ahr en juin 2021 (voir figure 2.6), c’est la construction récente de bâtiments dans le lit majeur de l’Ahr qui a été la cause de la catastrophe plus que l’intensité de la crue ([Wüthrich et al., 2024](#)).



**Figure 2.6** – Vue aérienne d’Altenbrugg (Altenahr, Rhénanie-Palatinat, Allemagne). (a) Avant la crue de l’Ahr de juin 2021. (b) Le 21 juin 2021. Source : [Météo Paris](#).

### 2.1.3 Crues torrentielles

Les crues torrentielles sont des écoulements d’eau avec un fort transport solide, qui se produisent dans les torrents et les rivières de montagne ou de piémont. On distingue :

- les crues avec charriage : le cours d’eau transporte du sédiment grossier par roulement, glissement, saltation le long du lit (processus appelé charriage). Ce type de crue se produit dans les cours d’eau dès que le débit est suffisamment fort pour mettre en mouvement les matériaux composant le lit de la rivière. Contrairement aux rivières de plaine, où le sédiment est relativement fin et transporté en suspension dans l’eau, les rivières torrentielles et les torrents peuvent transporter des volumes importants de matériaux, avec une échelle granulométrique étendue (du micromètre à plusieurs décimètres). Des crues comme celle de Brigue en septembre 1993 (voir figure 2.7) peuvent provoquer des dommages importants en provoquant l’obstruction des ponts, l’exhaussement du lit, l’inondation des berges, et un important dépôt solide ;
- les laves torrentielles : lorsque la pente est forte, le transport par charriage est instable. La gravité est en effet suffisante à maintenir les particules en mouvement une fois qu’elles ont été érodées. Une lave torrentielle est donc un transport en masse d’un mélange de blocs, de terre, et d’eau ; la concentration solide est très importante (de l’ordre de 70–80 %). Le mélange prend alors souvent l’apparence d’une boue ou d’un béton. Les laves torrentielles ont donc un comportement mécanique très différent des crues liquides et, d’une certaine façon, elles sont plus proches d’une avalanche que d’une crue. La plupart des torrents peuvent

produire avec une fréquence plus ou moins importante des laves torrentielles. Certains torrents comme le Nant du Pissot au-dessus de Villeneuve (Vaud) ne fournissent des laves qu'en moyenne une fois par siècle ; ce sont souvent des torrents à clappiers : le matériau mobilisé par les laves torrentielles provient de l'éboulement de falaises (les éboulis sont les « clappiers » ou clappes) et il faut plusieurs années à décennies pour former un stock suffisant de matériau mobilisable. D'autres torrents sont plus actifs car le terrain présente souvent une instabilité à un niveau local (berges) ou étendu (mouvement de terrain affectant une grande partie du bassin-versant). C'est le cas par exemple de l'Illgraben, qui peut produire plusieurs laves torrentielles chaque année.

Signalons que certains écoulements naturels sont très proches des laves torrentielles que nous rencontrons dans les Alpes :

- les *lahars* sont des écoulements d'un mélange d'eau et de cendres, que l'on rencontre dans les régions volcaniques. Les éruptions volcaniques peuvent en effet déposer des quantités colossales de cendres, qui sont ensuite très facilement érodables. Des catastrophes récentes en Indonésie, Philippines (volcan Pinatubo en juin 1991) sont consécutives à de fortes pluies (voir figure 2.7). En Europe, la catastrophe de Sarno et Quindici (Italie) en mai 1998 est due à un mouvement de terrain affectant des sols volcaniques (dépôt de cendres du Vésuve) ; elle fit 137 morts et environ 300 M€ de dommages ;
- au cours des éruptions volcaniques, le mélange de cendres et d'eau (par exemple résultant de la fusion d'un manteau neigeux ou d'un glacier) peut provoquer des coulées froides de cendres, semblables aux lahars. En novembre 1985, le volcan Nevado del Ruiz en Colombie entra en éruption ; la fusion de la glace forma une coulée de cendres, qui engloutit la ville d'Armero et d'autres villages (23 000 morts environ). En mai 1980, l'éruption du volcan Mount Saint Helens aux États-Unis provoqua un affaissement complet du versant nord du volcan et causa la formation de lahars dévastateurs ; la vallée de la rivière North Fork Toutle fut comblée de sédiments sur une longueur d'environ 22 km et sur une épaisseur moyenne de 45 m (épaisseur pouvant localement atteindre les 200 m) ;
- certains mouvements de terrain ou écroulements peuvent se mettre à accélérer brutalement et causer des écoulements proches des laves torrentielles lorsque la teneur en eau est suffisante. En juillet 1965, le glissement de terrain de la Ravoire de Pontamafrey (France) accéléra soudainement après un printemps humide et forma une lave torrentielle de plusieurs centaines de milliers de m<sup>3</sup>, qui coupa la route nationale et la ligne de chemin de fer, isolant toute la vallée de Maurienne.



**Figure 2.7** – (a) Brigue (VS) en septembre 1993 (cliché J.-P. Jordan, OFEG); (b) lave torrentielle à Fully (VS) [DR]; (c) la vallée de la rivière Parua près de Bamban aux Philippines après les lahars de juin 1991 déclenchés à la suite de l'éruption du Pinatubo en avril 1991 (source : Markus Zimmermann, Geo7, Berne).

## 2.2 Origine des crues

À l'échelle de la planète et si on prend des temps longs (allant jusqu'au paléolithique), les plus grosses crues connues par l'homme ont été principalement causées par des phénomènes géologiques tels que des ruptures de barrages de glace ou remblais naturels barrant des vallées fluviales (voir tableau 2.2)<sup>2</sup>. Quoique la plupart de ces crues se soient produites à la fin de la dernière glaciation marquant le pléistocène, il existe encore de nos jours plusieurs sites qui peuvent générer de tels phénomènes. Par exemple, dans le Pamir au Tadjikistan, un tremblement de terre en 1911 a causé un glissement de terrain, qui a barré le Bartang et formé un lac naturel le Sarez. Le remblai naturel haut de 600 m stocke un volume d'eau de 16 km<sup>3</sup> (1/5 du Léman) (Schuster & Alford, 2004). Sa rupture menace les populations à l'aval (5 millions de personnes). Le caractère paroxystiques de ces crues a poussé à leur donner le nom de « méga-crues » (*megaflood* en anglais).

---

2. *Pléistocène*: c'est une époque géologique qui marque le début du quaternaire, couvrant la période allant de 2,58 millions d'années à 11 700 ans avant le présent, et marquée par de grands cycles glaciaires. Cet âge est suivi par l'*holocène*.

**Tableau 2.2** – Cause des principales crues majeures connues dont le débit de pointe a dépassé 100 000 m<sup>3</sup>/s. D'après (O'Connor & Costa, 2004).

<i>nom</i>	<i>région</i>	<i>date</i>	$Q_p$ ( $\times 10^6$ m <sup>3</sup> /s)	<i>cause probable</i>
Kuray	Altaï, Russie	fin pléistocène	18	barrage de glace
Missoula	nord ouest EUA	fin pléistocène	17	barrage de glace
Lacs Darkhat	Mongolie	fin pléistocène	4	barrage de glace
Lacs Jassater	Altaï, Russie	fin pléistocène	2	barrage de glace
Lacs Yaloman	Altaï, Russie	fin pléistocène	2	barrage de glace
Lacs Ulymon	Altaï, Russie	fin pléistocène	1,9	barrage de glace
Lake Agassiz	Alberta, Canada	début holocène	1,2	déverse de lac proglaciaire
Aniakchak	Alaska, USA	fin holocène	1	brèche dans une caldera
Lake Bonneville	nord ouest EUA	fin pléistocène	1	surverse de lac
Lake Regina	Canada/EUA	fin pléistocène	0,8	barrage de glace
Jökulsá á Fjöllum	Islande	début holocène	0,7	éruption volcanique en zone glaciaire
rivière Indus	Pakistan	1841	0,54	barrage de remblais
rivière Amazone	Obidos, Brésil	1953	0,37	pluie
Katla	Islande	1918	0,3	éruption volcanique en zone glaciaire
rivière Wabash	Indiana, EUA	fin pléistocène	0,27	barrage de glace
rivière Toutle	nord-ouest USA	fin holocène	0,26	barrage de remblais
rivière Amazone	Obidos, Brésil	1963	0,25	pluie
rivière Amazone	Obidos, Brésil	1976	0,24	pluie
rivière Columbia	nord-ouest EUA	env. 1450	0,22	barrage de remblais
Lac Agassiz	Canada/EUA	début holocène	0,2	surverse de lac proglaciaire
rivière Lena	Kasur, Russie	1967	0,19	bouchon de glace et neige
rivière Lena	Kasur, Russie	1962	0,17	bouchon de glace et neige

rivière Lena	Kasur, Russie	1948	0,17	bouchon de glace et neige
Lac Agassiz	Canada/EUA	fin pléistocène	0,13	barrage de glace
Rivière Porcupine	Canada/EUA	fin pléistocène	0,13	barrage de glace
rivière Yangtze	Chine	1870	0,11	pluie
Russell Fiord	Alaska, EUA	1986	0,1	barrage de glace

---

Si la plupart des méga-crues sont le fait de phénomènes géologiques (O'Connor & Costa, 2004; O'Connor & Beebee, 2009), leur fréquence d'occurrence est faible et elles ne concernent que des régions spécifiques. La plupart des crues concernant des zones urbanisées sont consécutives à des phénomènes météorologiques. Ainsi, dans les Alpes, on observe trois scénarios majeurs dans la formation des crues :

- les pluies brèves et intenses : typiquement des orages de fin d'après-midi l'été quand il fait chaud et humide. La saison à risque est l'été (juin à septembre). Les débits spécifiques de pointe se situent dans une fourchette large  $1-10 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$  pour une période de retour  $T = 10$  ans. Le coefficient d'écoulement est souvent moyen (0,3 à 0,8). Les crues sont rapides et ne durent en général que quelques heures. Le plus souvent, seul un bassin-versant est touché de façon isolée. En conditions exceptionnelles, des valeurs dépassant  $20 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$  ont été observées (crue de l'Orba dans les Alpes italiennes en août 1935 ou bien du Tech en octobre 1940 dans les Pyrénées) lors d'épisodes de pluie diluviens et hors normes (pour l'Europe) sur des massifs montagnes proches de la Méditerranée ;
- les pluies soutenues sur de longues périodes (plusieurs jours, parfois plusieurs semaines) liées au passage d'un ou plusieurs systèmes dépressionnaires bien organisés sur les Alpes. La saison à risque est en général l'automne et le début du printemps, très exceptionnellement en hiver. Les crues sont lentes, durent plusieurs jours, et concernent une vallée entière, voire tout un massif ou une région. Les débits spécifiques de pointe dépassent exceptionnellement  $1-2 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$  pour  $T = 10$  ans. Le coefficient d'écoulement est élevé (de 0,6 à 1) ;
- la fonte des neiges au printemps ou bien un important redoux accompagné de pluie durant l'hiver ou le printemps. Les crues sont lentes et étalées sur plusieurs jours à semaines. La saison à risque est la fin du printemps (mai et juin). Les débits spécifiques de pointe dépassent exceptionnellement  $1 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$  pour  $T = 10$  ans.

La réponse d'un bassin-versant à une pluie est variée. Certains bassins-versants sont sensibles à tous les scénarios décrits ci-dessus tandis que d'autres ne réagissent qu'à un scénario précis. La réponse d'un bassin-versant à une pluie dépend :

- de la forme générale du bassin-versant : selon que le bassin-versant est de forme oblongue ou ramassée, le temps mis par l'eau pour atteindre l'exutoire peut différer notablement ;
- la densité du réseau hydrographique drainant le bassin-versant ;
- le couvert végétal : densité, nature, réseau racinaire, etc.
- l'inclinaison moyenne des pentes ;
- la nature des sols, la géologie du sous-sol, la capacité d'infiltration et de résurgence, l'existence de surfaces imperméables (glacier, route, etc.) ;
- l'altitude et ses effets sur la limite des neiges, nature pédologique du sol, pergisol/permafrost, végétation, etc. ;

- la possibilité de blocage de cellules orageuses ou un effet de barrière sur le passage d'une perturbation.

On peut distinguer trois classes de réponses :

- réponse rapide (groupe 1) : le bassin-versant répond à peu près systématiquement et de la même façon aux pluies brèves et intenses. Aucune crue ne survient après des précipitations longues, mais peu soutenues. Le débit de crue dépend foncièrement de l'intensité des pluies : plus l'intensité est forte, plus le débit de pointe est élevé. Le temps de montée et la durée spécifique de la crue sont courts. Les petits bassins-versants de montagne, raides et peu végétalisés, entrent le plus souvent dans cette catégorie. Le torrent de l'Alptal (SZ) en est un exemple ;
- réponse moyenne (groupe 2) : le bassin-versant répond de façon atténuée aux pluies mêmes intenses ou soutenues sur plusieurs jours. En général, la capacité d'infiltration est bonne, le ruissellement est faible (forte résistance, végétation dense, pente modérée). Toutefois, des concours de circonstances font qu'exceptionnellement des crues peuvent se produire avec des débits importants ;
- réponse lente (groupe 3) : le bassin-versant ne répond pas ou faiblement aux pluies. Le débit de pointe est généralement faible et l'onde de crue est assez étalée.

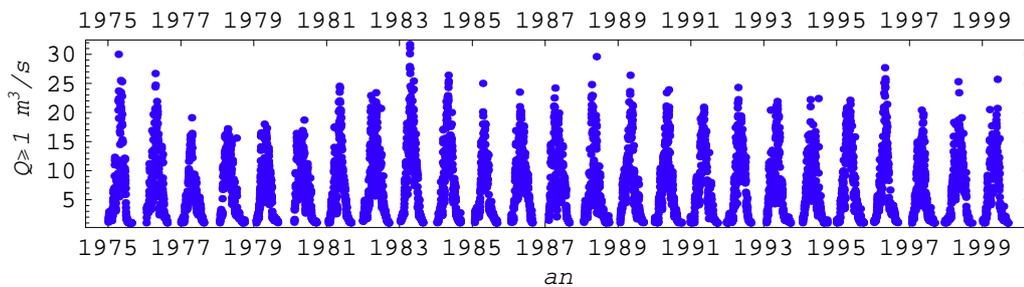
**Tableau 2.3** – Nom de la rivière, surface  $S$  du bassin-versant ( $\text{km}^2$ ), région et localité où le débit est estimé, débit spécifique de pointe en conditions décennales  $Q_{s,10}$  ( $\text{m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ ), surface occupée par la végétation selon son type, pente moyenne (%) du bassin-versant, pluie décennale horaire  $P_{10}(1)$  et journalière  $P_{10}(24)$ , nature géologique du terrain. D'après (Graff, 2004).

Nom	$S$	Région	Localité	$Q_{s,10}$	% nu	% pâturage	% boisé	Pente	$P_{10}(1)$	$P_{10}(24)$	Géologie
<b>Groupe 1</b>											
Laval	0,86	Alpes-du-Sud	Draix	14,3	68	10	22	58	32	100	marnes
Erlenbach	0,64	Suisse Centrale	Alptal, Schwyz	7	0	60	40	20	35	120	flysh
<b>Groupe 2</b>											
Rimbaud	1,5	Alpes-du-Sud	Toulon	5,2	-			35		160	gneiss
Latte	0,19	Massif Central	Mont Lozère	3,5	-						granit
Sapine	0,54	Massif Central	Mont Lozère	2,7							granit
<b>Groupe 3</b>											
Rietholzbach	3,31	Suisse Centrale	Mosnang	2,1		76		20			molasse
Lumpenenbach	0,93	Suisse Centrale	Alptal, Schwyz	4,1		55	20	15	40	140	flysh
Vogelbach	1,55	Suisse Centrale	Alptal, Schwyz	3,1		10	65	15	40	110	flysh
Brusquet	1,08	Alpes-du-Sud	Draix	1,3	13		87	53	44	92	marnes

## 2.3 Définition de la période de retour: du problème au calcul mathématique

### 2.3.1 Problématique

Pour un cours d'eau naturel, le débit varie en fonction du temps au gré des conditions météorologiques sur le bassin-versant et d'autres processus (fonte de la neige, circulation d'eau souterraine). En général, il existe des cycles annuels, mais selon les précipitations, le débit peut évoluer d'une année sur l'autre d'une façon extrêmement variable (voir l'exemple de la Lonza, un affluent du Rhône, à la fig. 2.8). Ce qui va nous intéresser ici c'est de caractériser les crues, donc ce qui se passe pour des débits forts, c'est-à-dire en pratique des débits maximaux.

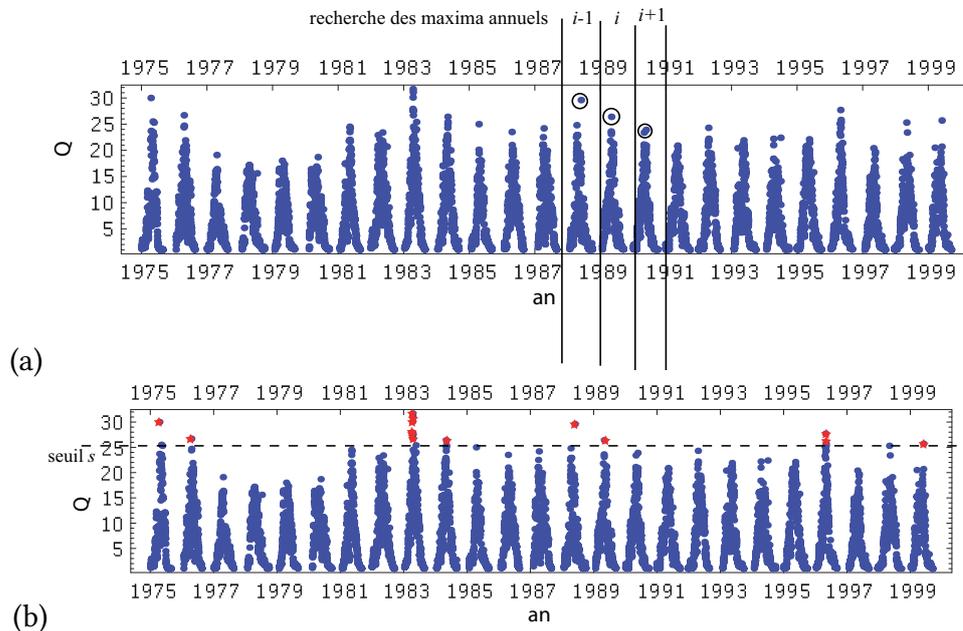


**Figure 2.8** – Variation du débit de pointe journalier sur la rivière Lonza (Valais) sur la période 1974–1999. Chaque point représente le débit maximal journalier.

Plusieurs méthodes s'offrent en pratique pour définir un débit maximal (voir figure 2.9):

- la méthode des maxima annuels consiste à prendre la valeur maximale observée chaque année. On fait donc une partition de la série temporelle en blocs d'une année (en général, année civile);
- la méthode par dépassement d'un seuil consiste à se fixer un seuil  $s$  suffisamment élevé et à prendre toutes les valeurs au-dessus de ce seuil.

En général, on cherche à relier la fréquence d'occurrence et l'intensité (débit) de la crue. Cette relation est souvent recherchée par (i) une caractérisation de la probabilité d'occurrence du phénomène en fonction de l'intensité, (ii) le calcul du nombre de fois qu'une crue d'une certaine intensité peut se produire par unité de temps, ou (iii) le temps qui sépare deux événements de même intensité ou dont l'intensité dépasse un certain seuil. La plupart du temps, toutes ces questions sont connectées et la réponse à l'une fournit la réponse aux autres. Ici, on va s'intéresser à la relation intensité-fréquence que l'on va définir à travers la loi de probabilité que le débit (maximal)  $Q$



**Figure 2.9** – Définition des maxima de débits par (a) la méthode des maxima annuels et (b) la méthode par dépassement d'un seuil  $s$ .

dépasse une certaine valeur  $q$  :

$$P = \text{prob}(Q > q) = \int_q^{\infty} f(\eta) d\eta,$$

avec  $f = dP/dq$  la densité de probabilité ; on parle de *probabilité de dépassement*. Les mathématiciens travaillent en général avec la *probabilité de non-dépassement*

$$P = \text{prob}(Q < q) = \int_0^q f(\eta) d\eta,$$

On a la relation :  $P + P' = 1$  car, par définition des probabilités,  $\int_q^{\infty} f(\eta) d\eta = 1$ .

Plusieurs théories ont été proposées depuis le début du xx<sup>e</sup> siècle pour calculer  $f$  ou  $P$ . Aujourd'hui, la théorie des valeurs extrêmes est la plus couramment utilisée. Elle repose sur des hypothèses (stationnarité, indépendance des variables, etc.) qui sont le plus souvent vérifiées en Europe. Dans certaines régions (notamment le pourtour méditerranéen), cette théorie peut être mise en défaut car les crues sont générées par des processus très différents (la « population » des événements, au sens statistique du terme, est donc très hétérogène).

## 2.3.2 Théorie des valeurs extrêmes

### Théorie mathématique

La théorie des valeurs extrêmes démontre que, sous réserve que  $X$  vérifie quelques conditions, cette loi tend vers une loi de forme générique quand  $N \rightarrow \infty$ , dont la fonction de répartition s'écrit (Coles, 2001):

$$P(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left[ - \left( 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right]. \quad (2.1)$$

On l'appelle *la distribution généralisée des valeurs extrêmes*, notée souvent GEV dans la littérature technique pour *Generalized Extreme Value*. Attention, le terme élevé à la puissance  $-1/\xi$  peut être négatif.

La distribution généralisée des valeurs extrêmes dépend de trois paramètres: un paramètre de localisation  $\mu$ , un paramètre de forme  $\xi$ , et un paramètre d'échelle  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ). En fait, cette forme générique synthétise trois distributions élémentaires:

- la *loi de Gumbel* est une loi à deux paramètres définie sur  $\mathbb{R}_+$ , obtenue en faisant tendre  $\xi$  vers 0:

$$Gu(x; \mu, \sigma) = \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right].$$

La moyenne est:  $\mathbb{E}(X) = \mu + \sigma\gamma$  (avec  $\gamma \approx 0,5772$  la constante d'Euler); la variance est:  $\text{Var}(X) = \sigma^2\pi^2/6$ .

- la *loi de Fréchet* est une loi à trois paramètres définie sur  $]-\sigma/\xi, +\infty[$ , obtenue en prenant  $\xi > 0$ :

$$Fr(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left( - \frac{1}{(1 + \xi(x - \mu)/\sigma)^{1/\xi}} \right).$$

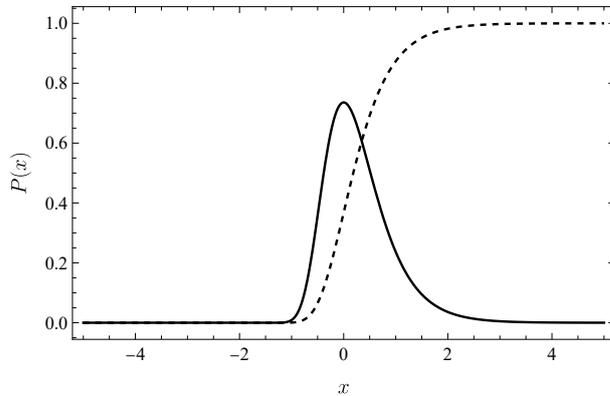
- la *loi de Weibull*<sup>3</sup> est une loi à trois paramètres définie sur  $]-\infty, \mu + \sigma/|\xi|[$ , obtenue en prenant  $\xi < 0$ . On peut utiliser la même fonction de répartition que précédemment ou bien l'arranger un peu:

$$We(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left( - \left( |\xi| \frac{\mu + \sigma/|\xi| - x}{\sigma} \right)^{1/|\xi|} \right).$$

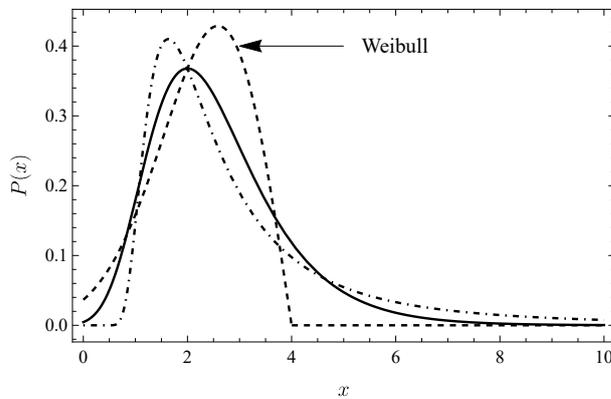
Sur la figure 2.10, une distribution particulière de la loi de Gumbel a été reportée. Par rapport à la loi de Gauss-Laplace, on notera la forme dissymétrique de la courbe

3. Attention, il existe aussi dans la littérature technique des lois de distribution dite de *Weibull* mais qui se présentent sous une forme simplifiée (loi à deux paramètres) qu'il ne faut pas confondre avec la forme générale donnée par la théorie des valeurs extrêmes.





**Figure 2.10** – Représentation graphique de la loi  $\mathcal{G}u(0, 1/2)$ . La courbe continue représente la densité de probabilité tandis que la courbe à tiret représente la fonction de répartition.



**Figure 2.11** – Représentation graphique des densités de probabilité de la loi  $\mathcal{G}u(2, 1)$  (courbe continue), de Fréchet  $\mathcal{F}r(\mu = 2, \sigma = 1, \xi = 1/2)$  (courbe à tiret court), et de Weibull  $\mathcal{W}e(\mu = 2, \sigma = 1, \xi = -1/2)$  (courbe à tiret long).

puisque la queue vers les grandes valeurs est épaisse : il y a une convergence lente vers 0 de  $\mathcal{G}u(x)$  pour  $x \rightarrow \infty$ . Cela a des répercussions très importantes car cela veut dire que des fluctuations de grande amplitude par rapport aux valeurs les plus fréquentes ne sont pas rares.

Sur la figure 2.11, les densités de probabilité des trois distributions sont reportées. À noter les points suivants :

- La lente convergence de la densité de la loi de Fréchet vers 0 quand  $x$  croît, ce qui implique que la fonction de répartition tend lentement vers 1. En pratique, cela signifie que pour des événements distribués selon une telle loi, des phénomènes rares peuvent être observés avec une amplitude sans commune mesure avec ce qui est observé ordinairement.
- La loi de Weibull tend vers une valeur limite, puisqu'en  $x = \mu + \sigma/|\xi|$ , on a  $\mathcal{W}e(x) = 1$  ( $x = 4$  sur la figure 2.11) et la densité de probabilité nulle. En pratique, la loi de Weibull peut servir à décrire des phénomènes qui tendent vers un palier (en pouvant l'atteindre).

Un point que nous n'abordons pas ici mais qui a son importance : la théorie des

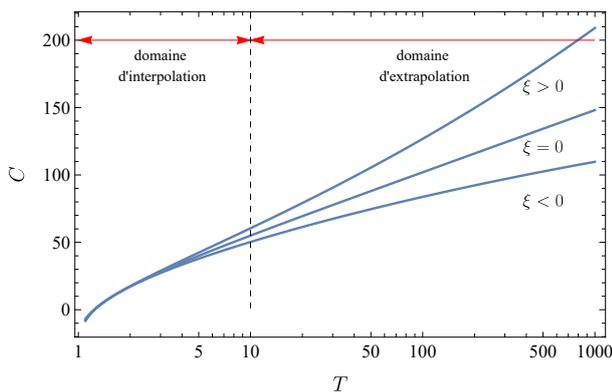
valeurs extrêmes garantit que les valeurs maximales d'un échantillon de valeurs indépendantes et identiquement distribuées sont distribuées par une loi de forme générique donnée par l'équation (2.1), mais nous n'avons pas précisé ici la vitesse de convergence. Celle-ci peut être assez lente, ce qui a une conséquence pratique importante : pour un échantillon de valeurs empiriques de taille réduite, une partie des valeurs sera effectivement bien distribuée selon une loi de valeurs extrêmes, mais les valeurs les plus fréquentes peuvent s'éloigner très sensiblement de cette loi asymptotique.

### Théorie des valeurs extrêmes : formulation pour les ingénieurs

Lorsqu'on travaille avec des lois de valeurs extrêmes, il est plus agréable de travailler dans un diagramme semi-logarithmique et avec la période de retour définie comme  $T = 1/P$  (voir *infra*). Dans un tel système de représentation (voir figure 2.12)

- la loi de Gumbel ( $\xi = 0$ ) apparaît alors comme une droite ;
- la loi de Fréchet ( $\xi > 0$ ) comme une courbe convexe (orientée vers le haut) ;
- la loi de Weibull ( $\xi < 0$ ) comme une courbe concave (orientée vers le bas).

Le tableau 2.4 recense l'ensemble des distributions de loi de valeurs extrêmes. Le rôle de l'exposant  $\xi$  est capital car il conditionne le comportement des valeurs extrêmes comme le montre le schéma de la figure 2.12. Très souvent, on possède des données et on cherche à caler une loi de la forme donnée ci-dessus mais la moindre erreur sur le calcul de l'exposant  $\xi$  entraîne des valeurs significativement différentes dès que l'on va chercher à extrapoler la courbe pour déterminer les valeurs extrêmes.



**Figure 2.12** – Comportement de la loi de probabilité  $G$  en fonction de  $\xi$  ( $\xi = -0,2; 0; 0,2$ ). L'ellipse représente le domaine où l'on dispose en général de mesures.

**Tableau 2.4** – Densité de probabilité, fonction de répartition  $P$  (dépassement), et quantiles  $Q$  pour les lois de valeurs extrêmes. On introduit la période de retour comme  $T = P^{-1}$ .

fonction	$\xi \neq 0$	$\xi = 0$
densité de probabilité	$f = \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{(q-\mu)\xi}{\sigma} + 1\right)^{-1/\xi}} \left(\frac{(q-\mu)\xi}{\sigma} + 1\right)^{-\frac{\xi+1}{\xi}}$	$f = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{\mu-q}{\sigma}} - e^{-\frac{\mu-q}{\sigma}}$
fonction de répartition	$P = e^{-\left(\frac{(q-\mu)\xi}{\sigma} + 1\right)^{-1/\xi}}$	$P = e^{-e^{\frac{\mu-q}{\sigma}}}$
quantile ( $Q(P)$ )	$Q = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left(1 - (-\ln(1 - P))^{-\xi}\right)$	$Q = \mu - \sigma \ln(-\ln(1 - P))$
quantile ( $Q(T)$ )	$Q = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left(1 - (-\ln(1 - \frac{1}{T}))^{-\xi}\right)$	$Q = \mu - \sigma \ln(-\ln(1 - \frac{1}{T}))$

### 2.3.3 Définition de la période de retour

#### Définition pour un processus à une seule variable aléatoire

En ce qui concerne la période de retour pour un phénomène aléatoire caractérisé par une seule variable  $X$  (aléatoire), la période de retour est une construction qui consiste à relier la probabilité  $P' = \text{prob}(X < x)$  (c'est-à-dire la probabilité  $P'$  que la variable  $X$  soit inférieure une valeur  $x$ ) à un temps arbitraire, appelé « période de retour » :

$$T = \frac{1}{1 - P'} = \frac{1}{P} \quad (2.2)$$

Comme c'est une probabilité (donc un nombre réel entre 0 et 1), la fonction  $P$  n'a pas d'unité alors qu'en général, on attribue l'unité « ans » à  $T$ . Comme on le voit, cette définition est une définition opérationnelle et empirique, qui facilite les choses pour l'ingénieur. On peut la justifier mathématiquement avec des modèles de Poisson et de tirage d'urne, mais des difficultés sérieuses apparaissent dès lors que l'on va caractériser un événement « extrême » comme un événement dépassant un certain seuil ou bien le maximum sur un intervalle de temps donné (généralement l'année) (Meylan *et al.*, 2008). Si on ne regarde que le comportement asymptotique (donc pour  $P$  devant proche de 1,  $T$  très grand), on peut, par construction, faire coller les définitions sur des blocs de temps et par dépassement de seuil. En pratique, cela veut dire que, sous réserve que les hypothèses de la théorie des valeurs extrêmes soient valides et si on a des séries temporelles suffisamment longues, les deux approches convergent (Coles, 2001). Pour des séries courtes, des différences significatives existent. Toujours, en restant dans le domaine des processus à une variable aléatoire, on pourrait faire des constructions différentes de la distribution de l'intensité et de la fréquence d'occurrence des phénomènes pour s'abstraire des problèmes de convergence. C'est le cas par exemple des modèles employés pour les processus industriels, dits de *renouvellement*,

qui ont été également employés avec succès en hydrologie (Miquel, 1984). Ces constructions ne font pas appel aux arguments asymptotiques qui sous-tendent la théorie des valeurs extrêmes.

### Définition pour un processus à deux variables aléatoires

Les choses se corsent lorsqu'on aborde des processus caractérisés par deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Dans le cas général, si on continuait de définir la période de retour en termes de probabilité jointe

$$T = \frac{1}{1 - P'(X,Y)},$$

Avec  $P(X,Y) = \text{prob}(X < x, Y < y)$ , alors, la période de retour n'est plus définie de façon univoque, mais varie selon les valeurs de  $x$  et  $y$ . Une fois que l'on a constaté le problème, on a deux choix :

- soit travailler avec des probabilités marginales

$$T = \frac{1}{1 - P'(X)},$$

- ou avec des probabilités conditionnelles

$$T = \frac{1}{1 - P'(X|Y)},$$

- soit considérer qu'on a, d'une façon ou d'une autre, une relation étroite entre  $X$  et  $Y$ , donc si l'on connaît  $X$ , on connaît  $Y$  :  $X = f(Y)$ . On se ramène donc à un processus à une variable.

Pour les crues/inondations de plaine, les efforts des hydrologues ont porté sur la construction d'hydrogramme de crue synthétique (donc des constructions intellectuelles), qui lie volume de crue et débit. Pour l'application de la méthode en France, on trouvera une littérature abondante du Cemagref (Gilard, 1998; Lang & Lavabre, 2007). Pour la Suisse, on peut se référer utilement au guide de Spreafico *et al.* (2003), qui éclaire bien les différentes approches et leur applicabilité selon le contexte, et aux guides de l'Office fédéral de l'environnement pour les recommandations quant à la mise en pratique pour le zonage réglementaire (Loat & Petrascheck, 1997). En gros, si on connaît le débit de pointe, on peut construire un hydrogramme caractéristique qui représente en moyenne les crues ; à cet hydrogramme de référence ne correspond qu'un volume de crue. Connaissant l'hydrogramme, on peut se servir des lois de l'hydraulique pour déduire les hauteurs d'eau ou les vitesses d'écoulement. Comme au final, on n'a qu'une variable (le débit de pointe) dont toutes les autres dérivent, on n'a en fait affaire qu'à un processus à une variable. L'approche est pertinente tant que les hypothèses du modèle

sont valables (ce qui reste toujours à vérifier quand on en a la possibilité). Jusqu'à présent, l'expérience de milliers d'ingénieurs et d'universitaires dans le monde a montré une certaine robustesse de l'approche, même si naturellement elle est loin d'être parfaite. On notera aussi que la comparaison sur différents pays montre des variations méthodologiques importantes même si les principes fondateurs sont souvent les mêmes.

### 2.3.4 Cas des barrages

Pour d'autres phénomènes hydrologiques, tels que les crues qui menacent les grands barrages (dimensionnement des évacuateurs de crue), il a fallu obtenir des définitions opérationnelles de la crue de projet – une crue de très grande période de retour (1000 à 10 000 ans) – qui diffèrent notablement des autres méthodes (on doit à ces réflexions sur la sécurité des grands barrages la notion de courbe enveloppe, la méthode du gradex, le concept de pluie maximale probable, etc.). Pour l'anecdote, citons Jean Francou et Jean Rodier (Francou & Rodier, 1967):

*« Avant qu'il ne fut question de Kariba, quelques hommes de chantier, apparemment philosophes autant qu'ingénieurs, s'étaient déjà donné de la crue millénaire une définition assez impertinente: c'est la crue qui a de bonnes chances d'intervenir au cours des deux années les plus critiques de la construction d'un barrage. »*

## 2.4 Estimation du débit par corrélation

### 2.4.1 Méthode Crupédix

La méthode Crupédix est une formule qui permet d'évaluer le débit de pointe de période de retour  $T = 10$  ans. La formule a été obtenue à partir d'une analyse statistique sur 630 bassins-versants documentés français dont la taille variait entre 1,4 et 52 000 km<sup>2</sup>:

$$Q_{crup.} = \hat{Q}_{p,10} = R S^{0,8} \left( \frac{P_{j,10}}{80} \right)^2 \quad [\text{m}^3/\text{s}],$$

avec  $S$  la surface du bassin-versant en km<sup>2</sup>,  $P_{j,10}$  la pluie journalière décennale (en mm), et  $R$  un coefficient régional qui vaut  $R = 1$  partout en France sauf sur le Massif Central, les Pyrénées, le Languedoc-Roussillon, le bassin de la Seine et de la Meuse, la Vendée et une partie de l'Aquitaine.

Selon Galéa & Ramez (1995), il y a seulement une probabilité de 70 % que le vrai débit se situe entre  $\frac{1}{2}Q_{crup.}$  et  $2Q_{crup.}$

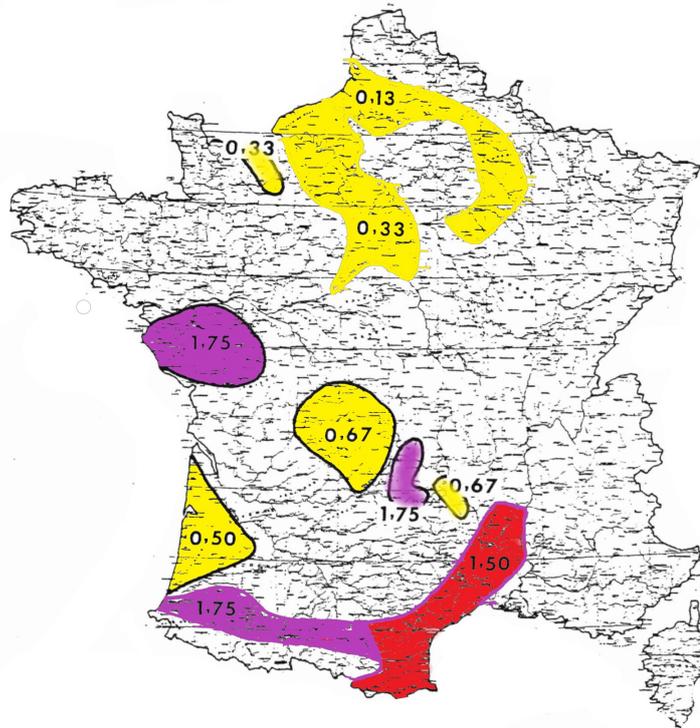


Figure 2.13 – Valeur du paramètre  $R$  dans la méthode Crupédix.

### 2.4.2 Courbe enveloppe

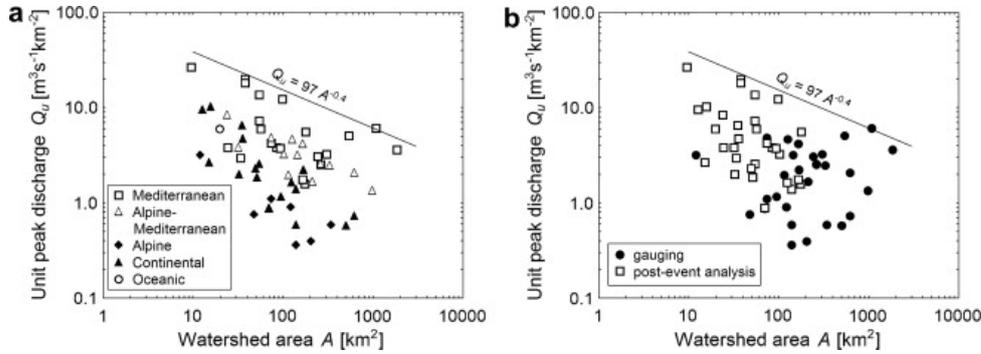
Plusieurs formules empiriques ont été calées en corrélant (par régression linéaire) le débit de pointe mesuré/estimé et la superficie d'un bassin versant sous la forme d'une loi puissance

$$Q_p = aS^b \quad (2.3)$$

avec  $Q_p$  le débit de pointe (en m<sup>3</sup>/s),  $S$  la superficie (en km<sup>2</sup>),  $a$  et  $b$  sont deux paramètres qui dépendent du contexte hydrologique. On parle de courbe enveloppe car en général, ces courbes cherchent à fournir une borne maximale des débits de pointe. La figure 2.14 montre des courbes enveloppes de crues éclair pour différentes régions en Europe. Le tableau 2.5 fournit les valeurs de  $a$  et  $b$  de l'équation (2.3) pour des crues éclair en Europe, en France, dans le monde, et en Suisse. Le tableau 2.6 donnent ces valeurs pour des crues sur différents bassins-versant suisses. Une courbe enveloppe d'équation un peu plus complexe que la loi puissance (2.3) a été ajustée sur des données de crue issues de plusieurs bassins-versants dans le monde :

$$Q_p = \frac{3009,2}{(S + 41,31)^{0,78}} S,$$

avec  $Q_p$  le débit de pointe (en m<sup>3</sup>/s),  $S$  la superficie (en km<sup>2</sup>) (Hingray *et al.*, 2009).



**Figure 2.14** – Variation du débit spécifique (de pointe) en fonction de la superficie du bassin versant, avec (a) selon la localisation du bassin versant et (b) la nature de la mesure. D’après (Marchi *et al.*, 2010).

**Tableau 2.5** – Valeurs des coefficients  $a$  et  $b$  selon le contexte météorologique.

Zone géographique	$a$	$b$	$S$	$T$	Source
Gard	30	0,75	20 à 400 km <sup>2</sup>	$T = 100$	(Lang & Lavabre, 2007)
Monde	350	0,6	$S < 10^4$ km <sup>2</sup>	rare <sup>a</sup>	(Gaume <i>et al.</i> , 2009)
Méditerranée	97	0,6	1 à 10 <sup>4</sup> km <sup>2</sup>	rare	(Gaume <i>et al.</i> , 2009)
Europe	230	0,43	1 à 10 <sup>4</sup> km <sup>2</sup>	rare	(Marchi <i>et al.</i> , 2010)
Monde	850	0,357	$S \geq 100$ km <sup>2</sup>	extrême <sup>b</sup>	(Marchi <i>et al.</i> , 2010)
Zone océanique <sup>c</sup>	4,05	0,72	1 à 10 <sup>4</sup> km <sup>2</sup>	$T \sim 1000$ ans	(Lang & Lavabre, 2007)
Zone de piedmont <sup>d</sup>	7,4	0,72	1 à 10 <sup>4</sup> km <sup>2</sup>	$T \sim 1000$ ans	(Lang & Lavabre, 2007)
Zone méditerranéenne <sup>e</sup>	16,4	0,72	1 à 10 <sup>4</sup> km <sup>2</sup>	$T \sim 1000$ ans	(Lang & Lavabre, 2007)
Suisse	$c^f$	0,66	10 à 500 km <sup>2</sup>	$T = 100$ ans	(Spreafico <i>et al.</i> , 2003)
Suisse	7,2	0,566	1 à 10 <sup>4</sup> km <sup>2</sup>	$T = 100$ ans	(Spreafico <i>et al.</i> , 2003)

<sup>a</sup> Rare ici veut dire que la période de retour est dans une fourchette  $T = 100 - 1000$  ans.

<sup>b</sup> Extrême ici veut dire que la crue était exceptionnelle et correspondait à la plus grosse crue connue.

<sup>c</sup> Bassin de la Loire, Bretagne, Saône, Moselle.

<sup>d</sup> Pyrénées, Préalpes, Dordogne, Pyrénées centrales et occidentales, Aude, Ariège, Drôme.

<sup>e</sup> Alpes maritimes, Corse, Cévennes, Tarn, Ardèche, Haute-Loire, Pyrénées orientales.

<sup>f</sup> Pour des terrains relativement plats, bordés de collines peu élevées, on a  $c = 2,5 - 4$ . Pour des terrains vallonnés, on a  $c = 4 - 6$ . Pour des terrains vallonnés des Préalpes, on a  $c = 6 - 9$ . Pour des bassins-versants à forte pente, on a  $c = 9 - 12$  sauf en zone glaciaire ( $c = 3 - 5$ )

**Tableau 2.6** – Valeurs des coefficients  $a$  et  $b$  pour calculer le débit de pointe centennal selon les régions en Suisse. Adapté de (Spreafico *et al.*, 2003).

Région	$a$	$b$
Jura, Neuchâtel	1,44	0,73
Jura bernois	5,98	0,59
Saint Gall, Thurgovie	2,65	0,61
Zürich	7,86	0,58
Argovie, Bâle	0,68	0,79
Alpes vaudoises	7,18	0,60
Berne	17,66	0,54
Mont-Blanc, Valais oriental	4,36	0,64
Valais central	1,3	0,74
Oberland oriental	1,4	0,78
Tessin oriental	0,83	0,58
Tessin occidental	12,41	0,69
Grisons orientales	0,9	0,83
Grisons occidentales	4,41	0,74

## 2.5 Estimation du débit par la méthode du gradex

### 2.5.1 Méthode du gradex

La méthode du gradex a été proposée à la fin des années 1960 par Pierre Guillot et Daniel Duband (EDF) (Guillot & Duband, 1967). Le principe de la méthode est très simple, ce qui explique son large succès et sa popularité. Cette méthode se fonde sur les observations suivantes :

- la plupart des pluies maximales annuelles sont distribuées selon une loi exponentielle ou une loi de Gumbel. Ainsi deux pluies extrêmes  $P_1$  et  $P_2$  de période de retour respective  $T_1$  et  $T_2$  vérifient la relation

$$P_2 - P_1 = G \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (2.4)$$

avec  $G > 0$  un coefficient exprimé en mm (si les pluies en mm) et appelé le *gradex* des pluies ;

- l'infiltration dans le sol diminue au cours du temps du fait de la saturation progressive du sol. Lorsque le sol est saturé, toute l'eau qui continue de précipiter ruisselle au sol. Cette eau ruisselée participe directement au volume de crue ;
- lorsque le sol est saturé, tout surcroît de pluie pendant une durée égale au temps de concentration  $t_c$  se transforme intégralement en un surcroît de débit sur une durée à peu près égale à  $t_c$  (à 10–20 % près).

De ces observations, on admet l'hypothèse du gradex : la courbe intensité-fréquence des pluies de durée  $t_c$  est parallèle à la courbe intensité-fréquence du débit. En conséquence, lorsque sur un bassin-versant on dispose de données de pluie sur une période suffisamment longue (quelques dizaines d'années), on peut estimer les débits extrêmes en considérant que le gradex des débits  $G_q$  (en  $\text{m}^3/\text{s}$ ) équivaut à celui des pluies  $G_p$  (en mm) lorsqu'on les exprime dans la même unité, c'est-à-dire

$$G_q = \frac{S}{3,6t_c} G_p, \quad (2.5)$$

avec  $S$  la superficie du bassin-versant en  $\text{km}^2$ ,  $t_c$  le temps de concentration en  $h$ , 3,6 un facteur de conversion des unités. On se sert du temps de concentration  $t_c$  comme durée caractéristique car c'est la durée optimale de pluie : en effet, une pluie de durée  $d < t_c$ , l'intensité de pluie (rappelons la loi de Montana  $I_m = ad^{-b}$ ) est supérieure à l'intensité  $I_c$  associée au temps  $t_c$  ( $I_c = at_c^{-b}$ ), mais seule une partie du bassin-versant contribue à la crue (puisque toutes les gouttes d'eau n'ont pas pu atteindre l'exutoire) et donc le début résultant est plus petit que le débit  $Q_c$  généré par une pluie de durée  $t_c$ . Lorsque  $d > t_c$ , tout le bassin-versant contribue, mais l'intensité moyenne associée est plus faible, donc le débit résultant est aussi plus faible.

Le temps de concentration est le plus souvent estimé à l'aide de formules empiriques. En théorie, il est défini comme le temps maximal que met une goutte pour parcourir tout le bassin-versant jusqu'à l'exutoire de ce bassin. Dans les modèles hydrologiques, le temps de concentration est souvent compris comme le temps entre la fin de la pluie nette et la fin du ruissellement direct. En pratique, c'est une grandeur difficile à évaluer. Il existe plusieurs formules d'usage courant, certaines relativement vieilles comme la formule de Kirpich qui date de 1940 et a été élaborée à la suite des crues qui ont frappé le nord-est des États-Unis en 1936 (Folmar *et al.*, 2007); les données ayant servi à l'élaboration de ces formules sont souvent indisponibles et il convient d'être particulièrement méfiant dans l'utilisation des formules empiriques. Des différences d'un ordre de grandeur entre les formules ne sont pas rares. Il faut en général choisir la formule qui correspond le mieux au type de bassin-versant analysé. Parmi les formules classiques et très générales (donc souvent très approximatives), on peut citer :

- formule de Turraza

$$t_c = 0,108 \frac{\sqrt[3]{SL}}{\sqrt{i_m}} \quad (2.6)$$

- $t_c$  : temps de concentration en h ;
- $S$  : surface du bassin-versant en  $\text{km}^2$  ;
- $L$  : longueur du chemin hydraulique le plus long en km ;
- $i_m$  : pente moyenne pondérée le long du thalweg en % définie comme

$$\frac{1}{\sqrt{i_m}} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \frac{\ell_k}{\sqrt{i_k}},$$

avec  $\ell_k$  la longueur du  $k^{\text{e}}$  tronçon du thalweg, de pente  $i_k$ .

- Formule de Kirpich

$$t_c = 19,47 \times 10^{-3} \frac{L^{0,77}}{i^{0,385}}$$

- $t_c$  : temps de concentration en mn ;
- $L$  : longueur du chemin hydraulique en m ;
- $i$  : pente moyenne du cours d'eau en %.

En se servant de la relation (2.4) et en considérant que la période de retour pour laquelle on observe la saturation du sol est  $T = 10$  ans, on aboutit à une approximation dite du gradex de la loi intensité-fréquence pour les débits

$$Q = Q_{10} + G_q \ln \frac{T}{10}, \quad (2.7)$$

avec  $Q_{10}$  le débit de pointe décennal.

Dans cette méthode, le débit décennal  $Q_{10}$  et le temps de concentration doivent être estimés indépendamment. Des variations de cette méthode ont été proposées. En particulier, la « formulation esthétique » lisse la transition entre les régimes des crues

ordinaires et des crues extrêmes. Plus récemment, la prise en compte du type de conditions météorologiques a permis d'améliorer la performance de cette méthode (Paquet *et al.*, 2006).

### 2.5.2 Méthode QdF

La méthode QdF est une méthode développée par Prudhomme, Galéa, et Javelle au Cemagref de Lyon (France), qui permet de donner une relation intensité-fréquence pour le débit en fonction du débit décennal (qui doit être connu ou bien évalué par ailleurs), de la superficie du bassin-versant, du gradex des pluies, et du type de réponse du bassin-versant.

#### Principe

Il y a trois idées de base :

1. L'idée fondamentale de la méthode QdF est qu'on peut étudier les hydrogrammes de crue en les caractérisant par des débits  $Q$  moyens ou bien systématiquement dépassés sur des durées  $d$  variables ; chaque hydrogramme est valable pour une période de retour ou fréquence  $F$  donnée. D'où le nom QdF.
2. L'extrapolation des quantiles de débit se fait selon une approche de type gradex : on suppose que la courbe  $Q(T)$  varie parallèlement à la courbe des pluies  $P(T)$  pour les périodes de retour  $T$  suffisamment grandes.
3. Pour une même région, le comportement des bassins-versants est à peu près identique. Il existe une « loi-maitresse » valable régionalement qui permet de représenter la réponse hydrologique des bassins-versants à l'aide d'une seule courbe adimensionnelle. Il existe donc également des « marqueurs » qui permettent d'adimensionnaliser les variables hydrologiques. Ici, on va considérer deux marqueurs ou échelles (durée et débit)  $D_*$  et  $Q_*$ , qui sont propres à chaque bassin-versant ; le principe de régionalisation affirme que les débits et durées sur un bassin-versant (BV) sans observation peuvent être estimés à partir des débits et durées observées sur un bassin-versant de référence par une simple loi d'homothétie

$$\left( \frac{Q(T, d)}{Q_*} \right)_{\text{BV de réf.}} = \left( \frac{Q(T, d)}{Q_*} \right)_{\text{BV non obs.}},$$

$$\left( \frac{d}{D_*} \right)_{\text{BV de réf.}} = \left( \frac{d}{D_*} \right)_{\text{BV non obs.}}.$$

### Sélection d'un modèle

Pour la France métropolitaine, il existe trois réponses types de bassin-versant :

- type « Soyans » : le bassin-versant typique est celui du Roubion (Drôme provençale). Il est caractéristique des bassins-versants avec des écoulements rapides et un faible stockage (climat à dominante continentale). Les crues ne durent généralement pas très longtemps ; l'hydrogramme est pointu. Les crues extrêmes ne sont pas en continuité avec les crues ordinaires ;
- type « Florac » : le bassin-versant typique est celui de la Mimente à Florac, dans la partie méridionale des Cévennes (Lozère), donc sous influence climatique méditerranéenne. Ce bassin sert de référence pour des crues rapides, mais avec un stockage ; une partie de l'eau stockée est restituée durant la crue, ce qui allonge la durée de la crue et augmente son volume, sans toutefois accroître le débit de pointe ;
- type « Vandenesse » : le bassin-versant typique est celui de la Dragne (Nièvre, Bourgogne). Les crues sont volumineuses et s'étalent sur des durées longues comme c'est souvent le cas pour régions à dominante océanique.

Pour les régions tempérées hors de France métropolitaine, il est possible d'appliquer la méthode QdF, mais il est vraisemblable qu'il faille choisir d'autres sites de référence.

Selon sa situation et sa taille, les caractéristiques d'un bassin-versant varient d'amont en aval, avec une modification du régime des crues : plus la taille augmente, plus le volume de crue tend à être important et moins l'hydrogramme est pointu. Une même rivière peut générer des crues de type « Soyans » dans la partie supérieure et des crues « Vandenesse » à sa confluence.

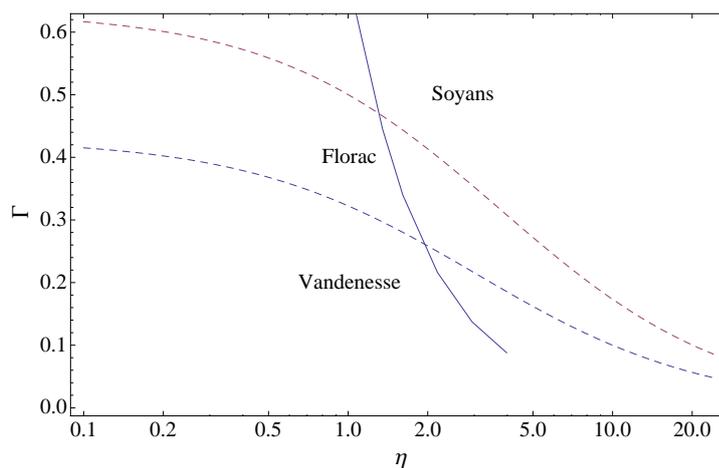
La question qui se pose est : parmi ces modèles de référence, quel est le modèle le plus approprié pour décrire un bassin-versant quelconque pour lequel on n'a pas ou peu de données hydrologiques ? La réponse apportée par la méthode QdF est la suivante : on trace la variation du gradex adimensionnel  $\Gamma = \hat{G}_p/Q_{10}$  des pluies en fonction de la durée  $\eta$  (adimensionnelle) de la pluie et on compare cette courbe avec les courbes limites séparant les domaines Soyans, Florac, et Vandenesse. Ces courbes limites sont au nombre de deux

$$L_1(\eta) = \frac{1}{0,768\eta + 2,332}, \quad (2.8)$$

$$L_2(\eta) = \frac{1}{0,419\eta + 1,580}, \quad (2.9)$$

avec  $\eta = d/D_*$ . En pratique, on considère des durées de pluie allant de  $\frac{1}{2}D_*$  à  $5D_*$  ; on calcule le gradex  $G_p$  des pluies associées à ces durées et à l'aide de l'équation (2.12), on exprime ces gradex de pluie en gradex de débit et on les norme en les divisant par  $Q_{10}$  pour obtenir  $\Gamma = \hat{G}_p/Q_{10}$ . On reporte ensuite les couples  $(\eta, \Gamma)$ .

♣ **Exemple.** – Sur un petit bassin-versant du Chablais, d’une superficie de  $2 \text{ km}^2$ , l’étude des pluies a donné les estimations suivantes du gradex des pluies:  $G_p = 3,7$  mm pour  $d = 1$  h,  $4,8$  mm pour  $d = 2$  h,  $5,5$  mm pour  $d = 3$  h,  $7,0$  mm pour  $d = 6$  h,  $8,9$  mm pour  $d = 12$  h,  $11,4$  mm pour  $d = 24$  h. Une estimation empirique du débit décennal donne  $Q_{10} = 3 \text{ m}^3/\text{s}$  et une durée spécifique  $d_s = 1$  h. On pose  $D_* = d_s$ ; le gradex des pluies est transformé en gradex de débit à l’aide de la relation (2.12). Cela fournit  $\hat{G}_p(d = 1) = 2,05 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\hat{G}_p(d = 2) = 1,33 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\hat{G}_p(d = 3) = 1,02 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\hat{G}_p(d = 6) = 0,65 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\hat{G}_p(d = 12) = 0,41 \text{ m}^3/\text{s}$ , et  $\hat{G}_p(d = 24) = 0,26 \text{ m}^3/\text{s}$ . On forme ensuite la suite  $(\eta_i, \Gamma_i)$ , avec  $\eta_i = d_i/D_*$  et  $\Gamma_i = \hat{G}_p/Q_{10}$ , où  $d_i = 1, 2, 3, 6, 12,$  et  $24$  h. On reporte sur la figure 2.15 la courbe empirique  $\Gamma = \Gamma(\eta)$  et les limites entre les comportements de type Soyans, Vandenesse, et Florac. On note qu’aux temps courts ( $\eta < 2$ ), le comportement est de type Soyans, mais qu’aux temps longs ( $\eta > 2$ ) le comportement se rapproche de celui de Florac, voire Vandenesse. Comme on se situe dans un contexte de petit bassin-versant de montagne, caractérisé par des crues rapides et brèves, le comportement retenu est de type Soyans.



**Figure 2.15** – Variation de  $\Gamma$  en fonction de  $\eta$  pour le Chablais. La courbe continue représente la courbe empirique  $\Gamma = \Gamma(\eta)$  pour un poste du Chablais – simple interpolation linéaire des points  $(\eta_i, \Gamma_i)$  – et les courbes à tiret représentent les courbes  $L_1$  et  $L_2$ .

### Loi débit-fréquence

La loi débit-fréquence est fondée sur la méthode du gradex dans sa version dite « formulation esthétique ». Le quantile de débit suit une loi de Gumbel pour les petites périodes de retour ( $T \leq 20$  ans), puis la « formulation esthétique » (pour  $20 \leq T \leq$

1000):

$$\frac{Q(T, d)}{Q_*} = A(\eta) \ln T + B(\eta) \text{ pour } 0,5 \leq T \leq 20 \text{ ans,} \quad (2.10)$$

$$\frac{Q(T, d) - Q(10, d)}{Q_*} = C(\eta) \ln \left( 1 + \frac{A(\eta) T - 10}{C(\eta) 10} \right) \text{ pour } 20 \leq T \leq 1000 \text{ ans,} \quad (2.11)$$

où  $Q(10, d)$  est le débit décennal obtenu à l'aide de l'équation (2.10). Les fonctions  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sont de la forme  $f(\eta)$  avec

$$f(\eta) = \frac{1}{\alpha_1 \eta + \alpha_2} + \alpha_3.$$

Les lois (2.10–2.11) sont valables aussi bien pour des débits moyens  $Q_m(d)$  ou des débits seuils  $Q_s(d)$ . Les paramètres des lois changent selon le type de variable employée. Les tableaux 2.5.2 et 2.5.2 fournissent les valeurs des paramètres selon que, respectivement, l'on opte pour un débit moyen  $Q_m$  ou un débit seuil  $Q_s$ .

**Tableau 2.7** – Valeurs des coefficients  $\alpha_i$  pour les fonctions  $A$ ,  $B$ , et  $C$  lorsqu'on cherche à calculer le débit moyenné sur une période  $d$ .

Modèle	$A$			$B$			$C$		
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
Soyans	0,87	4,60	0	1,07	2,50	0,099	0,569	0,690	0,046
Florac	1,12	3,56	0	0,95	3,18	0,039	1,56	1,91	0,085
Vandenesse	2,635	6,19	0,016	1,045	2,385	0,172	1,083	1,75	0

**Tableau 2.8** – Valeurs des coefficients  $\alpha_i$  pour les fonctions  $A$ ,  $B$ , et  $C$  lorsqu'on cherche à calculer le débit seuil sur une période  $d$ .

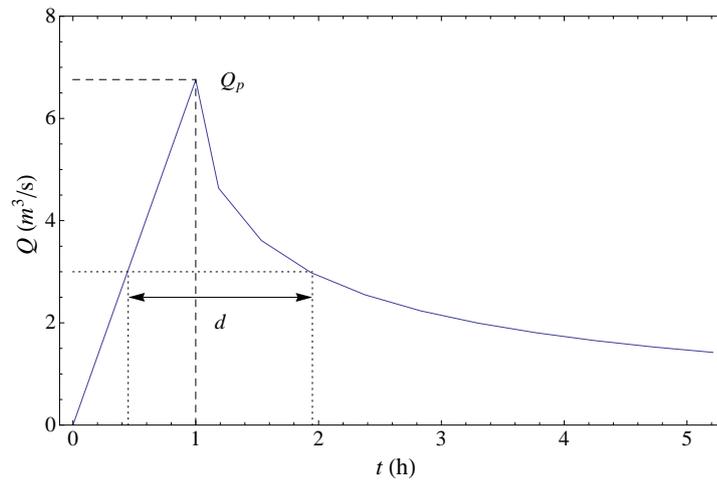
Modèle	$A$			$B$			$C$		
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
Soyans	2,57	4,86	0	2,10	2,10	0,050	1,49	0,660	0,017
Florac	3,05	3,53	0	2,13	2,96	0,010	2,78	1,77	0,040
Vandenesse	3,970	6,48	0,010	1,910	1,910	0,097	3,674	1,774	0,013

## Hydrogramme synthétique

La formulation QdF en termes de débit seuil permet d'obtenir un hydrogramme de crue synthétique. Cet hydrogramme est par ailleurs consistant avec les quantiles de débit moyen  $Q_m$ . L'hydrogramme pour une crue de période de retour  $T$  est défini par :

- $t < d_s$ , une courbe (droite) de montée :  $Q = Q_m t / d_s$ . Il y a une augmentation linéaire du débit  $Q$  jusqu'au temps  $t = d_s$  où le débit atteint le débit de pointe  $Q_p$ ;

- $t = d_s$ , un débit de pointe:  $Q_p = Q_m(T, d_p)$ . C'est le débit moyen instantané, donc un débit observé sur une durée  $d_p = 1 \text{ s} = 0,0003 \text{ h}$ ;
- $t > d_s$ , une courbe de décrue:  $Q = Q_s(T, d)$ . Le débit à l'instant  $t$  se calcule à partir du débit seuil dépassé sur une durée  $d = t - d_s Q/Q_p$ .



**Figure 2.16** – Principe de formation de l'hydrogramme.

## 2.6 Estimation du débit par des méthodes de transformation pluie-débit

Les débits dans les rivières sont souvent des données peu disponibles : hormis pour certaines grandes villes ou bien pour des sites avec un intérêt hydroélectrique, il y a peu de postes de mesures installés. Comme par ailleurs les débits peuvent varier de façon substantielle le long des cours d'eau en fonction des apports par les affluents et que les séries de données sont souvent courtes, il reste difficile d'estimer les quantiles de débit en un point donné d'un cours d'eau. Il est dès lors très tentant de contourner cette difficulté en cherchant à relier les débits aux pluies qui sont censées les générer. En effet, les pluies sont mieux connues, plus faciles à mesurer ; leur distribution spatiale est un peu mieux appréhendée que les débits et leur distribution temporelle se prête bien à une analyse statistique de type théorie des valeurs extrêmes. Très tôt les hydrologues ont donc cherché à développer des modèles de transformation pluie-débit qui visent à reproduire la génération d'une crue à partir de la pluie. Nous allons passer en revue quelques-uns des modèles les plus connus

Comme toute simplification de la réalité, ce type de modélisation est limité par

- la complexité des interactions entre le sol, l'atmosphère, et l'eau ;
- le nombre de paramètres conceptuels qui sont introduits et qui rendent difficile les procédures de calage.

Il y a en général deux sous-modèles dans un modèle de transformation pluie-débit :

- un module de passage de la pluie brute (pluie précipitée) à la pluie efficace (pluie participant à la crue). Cette transformation nécessite de connaître les pertes dues à l'interception par les végétaux, la rétention dans le sol, le ruissellement direct, etc. ;
- un module de transformation de la pluie efficace en volume de crue. Cette transformation nécessite de modéliser les différents processus de ruissellement, drainage, et écoulement dans le cours d'eau jusqu'à l'exutoire.

Les différentes transformations sont basées sur des représentations le plus souvent conceptuelles du fonctionnement du bassin-versant, avec parfois une approximation physique du comportement réel.

Nous commençons par décrire une méthode très simple dite « méthode rationnelle », qui a été utilisée dès la moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. Ce modèle calcule le débit de pointe à partir du volume d'eau précipité et d'un temps caractéristique (temps de concentration). Nous voyons ensuite deux méthodes un peu plus élaborées : le modèle SCS et sa variante française SoCoSe. Ces méthodes calculent le débit à partir du volume d'eau ruisselé, c'est-à-dire le volume d'eau précipité auquel on a retranché l'eau interceptée par la végétation et l'eau infiltrée dans le sol. Nous décrivons ensuite un modèle conceptuel un peu plus complexe, où le sol est modélisé comme un réservoir. Avec ce type de

modèles, on entre véritablement dans le domaine des outils utilisables aussi bien pour la prévision de crues que dans les calculs hydrauliques. Un modèle comme le modèle suédois HBV (hydrologiska byrans vattenbalansavdelning) est par exemple utilisé en Suisse pour la prévision des crues sur le Rhin jusqu'à Bâle.

Notons que nous ne parlerons pas ici des modèles spatialement distribués, qui affinent la description des crues en scindant le bassin-versant en plusieurs unités hydrologiquement homogènes. Le modèle TOPMODEL développé par Beven et Kirby est l'un des plus connus. La classe de modèles ORAGE, SOCONT, puis MINERVE a été développée à l'EPFL pour décrire des crues sur des bassins-versants alpins (Bérod, 1994; Jordan, 2007). Ces modèles tiennent compte d'une multitude de processus hydrologiques pour évaluer l'apport des précipitations et leur effet sur la génération d'une crue: infiltration, évaporation, interception par les végétaux, fusion de la neige et des glaciers. Le débit drainé par une parcelle du bassin-versant est ensuite évacué par un cours d'eau; on parle de routage de crue (flood routing). On peut alors utiliser des outils de calcul hydraulique tels que les équations de Saint-Venant. Ce type de procédures sort du cadre de ce cours, mais le lecteur peut se référer au cours d'hydraulique ainsi qu'à des livres spécialisés (Brutsaert, 2005).

### 2.6.1 Méthode rationnelle

La méthode la plus ancienne d'estimation du débit de pointe à partir des pluies est appelée méthode rationnelle. La pluie est supposée d'intensité  $i_p$  constante sur une durée  $t = t_c$  et le volume de crue est proportionnel au volume de pluie. La réponse en débit est un hydrogramme triangulaire, de durée  $2t_c$  et de débit de pointe  $Q_p$ . Le volume de pluie est  $V_p = t_c i_p S$ . Le volume de crue est

$$V_c = 2 \times \frac{1}{2} Q_p t_c,$$

avec  $S$  la surface du bassin-versant. On suppose que le coefficient de proportionnalité est  $C$  ( $0 < C \leq 1$ ), appelé encore coefficient de ruissellement de pointe. De l'égalité  $V_c = CV_p$ , on tire

$$Q_p = C i_p S.$$

Notons que  $i_p$  est généralement exprimé en mm/h alors que  $Q_p$  est en  $\text{m}^3/\text{s}$ . Pour que la formule précédente soit dans ces unités, on modifie la formule de la façon suivante

$$Q_p = \frac{C i_p S}{3,6} \quad [\text{m}^3/\text{s}].$$

### Variables hydrologiques employées

Pour faire les calculs d'hydrogramme, on ne sert pas du débit instantané  $Q(t)$  car il y a trop d'informations. À la place, on suppose que tout hydrogramme peut se présenter

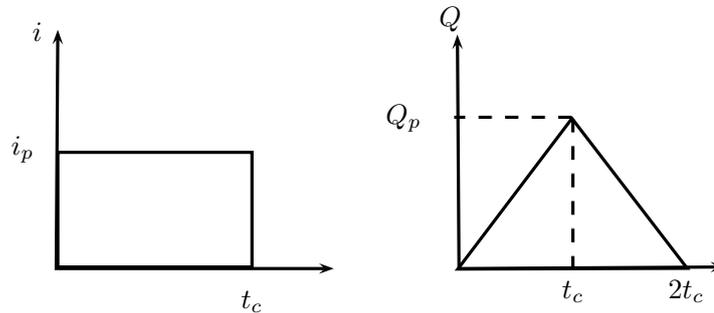


Figure 2.17 – Principe de transformation pluie-débit dans la méthode rationnelle.

Tableau 2.9 – Quelques valeurs guides de  $C$  selon l'occupation du sol.

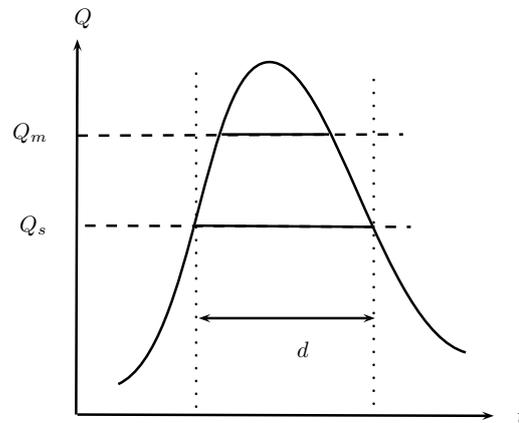
Type de surface	$C$
zone urbanisée	0,7–0,95
zone résidentielle	
lâche	0,3–0,5
dense	0,5–0,75
parcs	0,1–0,2
pelouse	
terrain meuble, peu pentu ( $i < 2\%$ )	0,05–0,2
terrain peu perméable et pentu ( $i > 5\%$ )	0,15–0,25

sous la forme d'un hydrogramme synthétique de crue, avec une courbe montante et une courbe descendante (décrue), appelé encore hydrogramme mono-fréquence car il n'y a qu'un seul pic de crue. On introduit deux variables qui permettent de réduire l'information nécessaire (voir figure 2.18) :

- le débit seuil  $Q_s(d)$  de durée  $d$  est la plus grande valeur de débit qui est systématiquement dépassée au cours d'une durée  $d$  de la crue. La forme supposée de l'hydrogramme fait que la relation  $Q_s(d)$  est unique et continue ;
- le débit moyen  $Q_m(d)$  de durée  $d$  est la valeur moyenne du débit sur une durée  $d$ .

Pour un pays au climat tempéré comme la France, on considère deux échelles de débit et de temps, qui sont appelées marqueurs :

- $Q_* = Q_{10}$  le débit de pointe instantané de la crue décennale. Ce débit sert à séparer les débits ordinaires correspondant aux petites crues fréquentes et les débits plus importants ;
- l'échelle de temps (durée)  $D_*$  peut être définie comme le temps de concentration  $t_c$  (voir équation (2.6) p. ex.) ou bien la durée spécifique  $d_s$  (voir équation (2.17) p. ex.). L'avantage de  $d_s$  est que c'est une donnée mesurable alors que  $t_c$  reste



**Figure 2.18** – Définition du débit seuil  $Q_s$  (débit systématiquement dépassé pendant une durée) et du débit moyen  $Q_m$ .

une variable plus conceptuelle.

Dans les deux cas, il faut utiliser des formules empiriques pour déterminer les « marqueurs ». Par exemple, la méthode Crupédix peut donner un ordre de grandeur de  $Q_{10}$ , tandis que la méthode Socose (voir § 2.6.3) peut fournir une estimation de  $d_s$ .

Les autres données du problème peuvent s'exprimer en unités de temps ou de débit. Par exemple, quand on utilise le gradex des pluies pour différentes durées  $d$ , on peut le transformer en gradex adimensionnel de la façon suivante : tout d'abord, on transforme les unités de mm en  $\text{m}^3/\text{s}$  à l'aide de la relation

$$\hat{G}_p \text{ [m}^3/\text{s]} = \frac{S}{3,6d} G_p \text{ [mm]}, \quad (2.12)$$

avec  $S$  la surface du bassin-versant exprimée en  $\text{km}^2$  et  $d$  la durée de la pluie en  $h$ .

### 2.6.2 Méthode SCS

Cette méthode a été développée au cours des années 1960 au Soil Conservation Service (SCS) de l'United States Forest Administration (USFA), ce qui explique son nom. Elle s'applique pour les petits bassins-versants en milieu rural, sans observations.

Elle repose sur les quatre hypothèses suivantes :

- lorsque la pluie tombe, une partie est interceptée par la végétation. Il faut transformer la pluie brute  $P_b$  en pluie utile  $P_u$

$$P_u = P_b - I, \quad (2.13)$$

où  $I$  est l'interception par la végétation (en mm).

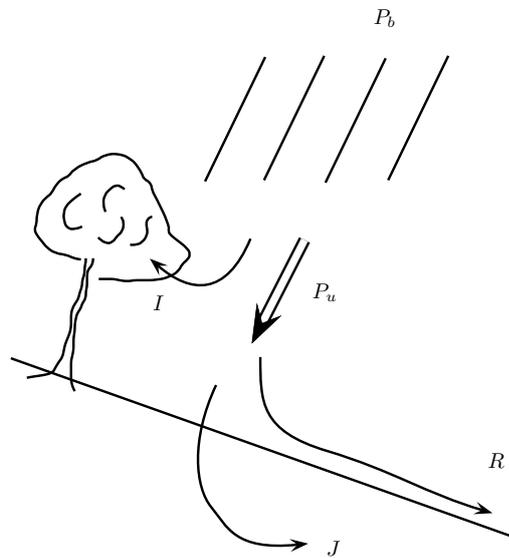


Figure 2.19 – Schéma de la méthode SCS.

- la pluie qui atteint le sol participe au ruissellement  $R(t)$  et à l'infiltration  $J(t)$

$$P_u = R + J. \quad (2.14)$$

- Le rapport entre l'eau ruisselée ( $R$ ) et l'eau précipitée ( $P_u$ ) est égal au rapport entre la quantité d'eau  $J(t)$  infiltrée au temps  $t$  et la quantité maximale d'eau  $J_\infty$  que le sol peut recevoir quand il y a saturation

$$\frac{R(t)}{P_u} = \frac{J(t)}{J_\infty}. \quad (2.15)$$

Cette hypothèse très forte peut être démontrée dans le cas où la saturation dans le sol au cours du temps suit une loi de Horton (variation exponentielle de l'intensité d'infiltration) (Yu, 1998).

- l'interception par la végétation est indépendante de la pluie utile et est liée à la capacité maximale d'infiltration

$$I = 0,2J_\infty. \quad (2.16)$$

C'est une loi empirique tirée des observations.

En combinant les équations (2.13) à (2.15), puis en servant de la relation empirique (2.16), on tire la relation

$$\frac{R}{P_u} = \frac{P_u}{P_u + J_\infty}.$$

De là, on déduit que la quantité d'eau ruisselée vaut

$$R = \frac{P_u^2}{P_u + J_\infty} = \frac{(P_b - 0,2J_\infty)^2}{P_b + 0,8J_\infty}.$$

Dans ce modèle, la quantité d'eau ruisselée dépend de façon non linéaire de la quantité de pluie reçue  $P_b$ ; la relation est aussi fonction d'un seul paramètre (capacité maximale d'infiltration du sol)  $J_\infty$  qui doit être calé (voir ci-dessous).

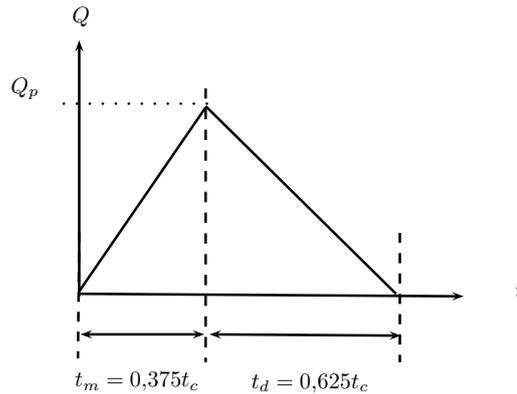


Figure 2.20 – Hydrogramme de crue dans la méthode SCS.

Cette pluie brute génère une crue, dont le débit de pointe peut être estimé en considérant un hydrogramme triangulaire (voir figure 2.20). Le volume de crue étant  $R$ , on déduit que si  $t_c$  est le temps de concentration,  $t_m$  le temps de montée (estimé ici à  $t_m = 0,375t_c$ ), on déduit

$$Q_p = 2 \frac{SR}{3,6t_c} \approx 0,2 \frac{SR}{t_m} \text{ [m}^3\text{/s]},$$

avec  $S$  la surface du bassin-versant en  $\text{km}^2$ ,  $t_c$  le temps de montée en  $h$ . Rappelons que le facteur 3,6 provient de la conversion des unités en  $\text{m}^3/\text{s}$ . Le temps de concentration doit être estimé indépendamment.

Reste à évaluer le seul paramètre du modèle, qui est la capacité maximale d'infiltration du sol)  $J_\infty$ . Ce paramètre dépend de l'état d'humidité dans le sol et du type d'occupation des sols. Le bassin-versant doit être subdivisé en parcelles de surface  $S_i$  à interception  $J_i$  homogène. L'interception moyenne du bassin-versant est alors calculée par une moyenne pondérée

$$\frac{J_\infty}{S} = \sum_i \frac{J_i}{S_i}.$$

Chaque valeur de  $J_i$  est évaluée à partir du coefficient de ruissellement  $C_n$

$$J_i = 25,4 \left( \frac{1000}{C_n} - 10 \right).$$

**Tableau 2.10** – Quelques valeurs guides de  $C_n$  selon le type de sol et la densité de la végétation. Sol A: sol sablonneux (très perméable); sol B: sol sableux ou limoneux (perméable); sol C: sol argileux à limoneux (peu perméable); sol D: sol argileux (très peu perméable). D'après (Ponce, 1994).

culture	végétation	sol A	sol B	sol C	sol D
jachère		77	86	91	94
céréales	lâche	63	74	82	85
	dense	61	73	81	84
légumineuse	lâche	64	75	83	85
	dense	55	69	78	83
prairie		30	58	71	78
bois	lâche	45	66	77	83
	dense	25	55	70	77
pistes, routes		72	82	87	89

### 2.6.3 Méthode Socose

La méthode Socose est une variante française de la méthode SCS, développée par Claude Michel au Cemagref. Elle a été ajustée sur 5000 crues survenues dans 187 bassins-versants de 2 à 200 km<sup>2</sup>. Par rapport à la méthode SCS, elle introduit les expressions suivantes pour le paramètre de rétention  $J$  et la durée spécifique  $d_s$  (en remplacement du temps de montée)

$$\ln d_s = -0,69 + 0,32 \ln S + 2,2 \sqrt{\frac{P_a}{P_{10} t_a}}, \quad (2.17)$$

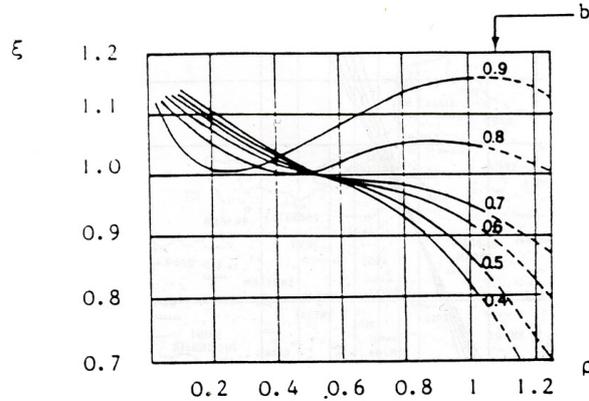
$$J = 260 + 21 \ln \frac{S}{L} - 54 \sqrt{\frac{P_a}{P_{10}}}, \quad (2.18)$$

avec  $J$  exprimée en mm,  $d_s$  en h,  $P_a$  le cumul annuel moyen de précipitations (en mm),  $P_{10}$  la pluie maximale journalière décennale (en mm),  $t_a$  la température moyenne annuelle réduite au niveau de la mer (en °C),  $L$  le chemin hydraulique le plus long jusqu'à l'exutoire,  $S$  la surface en km<sup>2</sup> – avec  $S \geq 2$  km<sup>2</sup> – (voir figure 2.22).

La méthode propose un hyétogramme de projet

$$P(t) = a \left( \frac{t}{\left[ \left( \frac{t}{d_s} \right)^2 + 2 \frac{d_s}{t} - 2 \right]^{3/7}} \right)^{1-b}$$

valable pour  $0 < t \leq 2d_s$  qui représente la pluie d'intensité maximale. La pluie totale durant l'événement de durée  $d_s$  est donc  $P(2d_s) = a(1,25d_s)^{1-b}$ . Le passage de la pluie locale à la pluie moyenne sur le bassin-versant se fait à l'aide du coefficient



**Figure 2.21** – Valeur du coefficient  $\xi$  en fonction du paramètre  $\rho$  et du coefficient de Montana  $b$ .

d'épicentrage  $k_a$ . La méthode Socose introduit donc un indice  $k$  appelé « indice pluviométrique »

$$k = \frac{24^b}{21} \frac{P_{10}}{1 + \frac{\sqrt{S}}{30 \sqrt[3]{d_s}}},$$

avec  $b$  le coefficient de Montana ( $P = at^{1-b}$ ). La méthode Socose définit également deux paramètres

$$\rho = 1 - 0,2 \frac{J}{k(1,25d_s)^{1-b}}$$

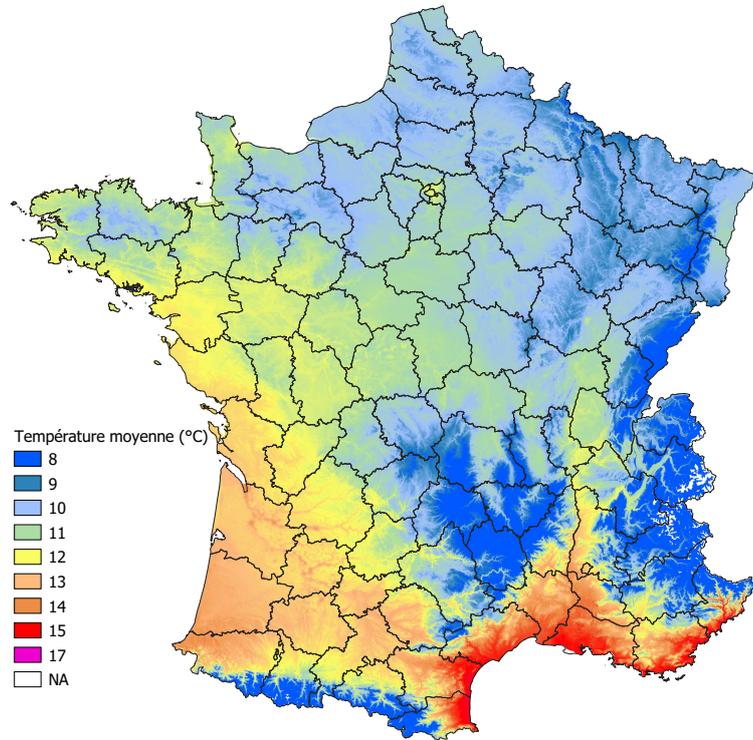
et  $\xi$  est un paramètre proche de 1, qui est déterminé à partir d'une abaque (voir figure 2.21). Le débit de pointe décennal est

$$Q_{10} = \xi \frac{kS}{(1,25d_s)^b} \frac{\rho^2}{15 - 12\rho} \text{ [m}^3\text{/s]}.$$

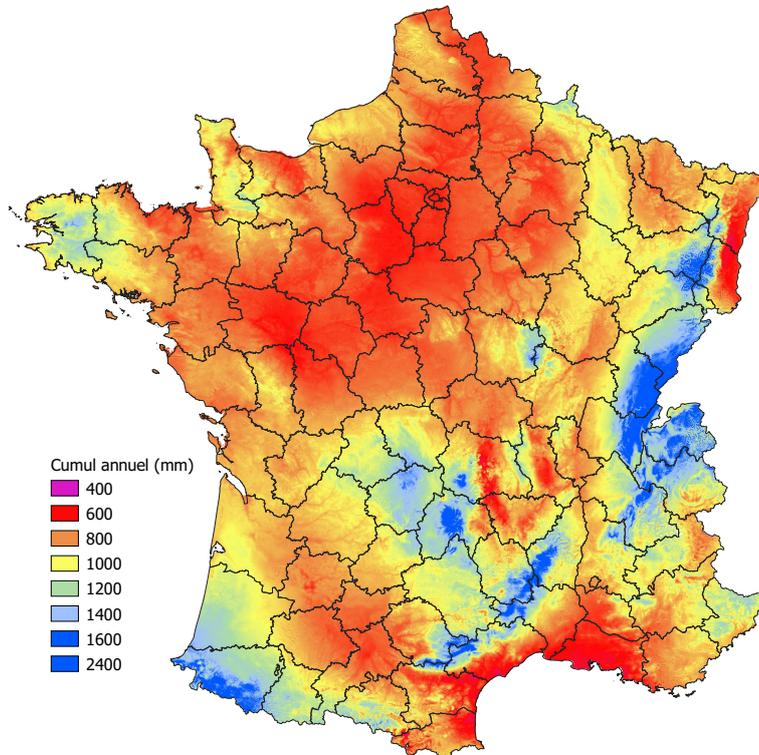
L'hydrogramme associé à cette méthode a pour équation

$$Q(\tau) = Q_{10} \frac{2\tau^4}{1 + \tau^8},$$

avec  $\tau = 2t/(3d_s)$  un temps adimensionnel.



(a)



(b)

**Figure 2.22** – distribution du cumul annuel moyen de précipitations  $P_a$  sur la France (à droite) et distribution des températures moyennes annuelles  $t_a$  (à gauche). D’après (Joly *et al.*, 2010).

### 2.6.4 Modèle réservoir GR4

#### Principe

Les modèles à  $n$  réservoirs et  $p$  paramètres sont des représentations conceptuelles du fonctionnement d'un bassin-versant qui généralisent le modèle SCS. La principale nouveauté est qu'on considère maintenant que le sol agit comme un réservoir et qu'en conséquence, une partie de l'eau infiltrée est restituée avec un temps de latence au cours d'eau en crue. Nous considérons ici un des modèles qui offre le meilleur compromis entre simplicité et performance (Perrin *et al.*, 2001) : il s'agit d'un modèle à un réservoir et 4 paramètres ; ce modèle est appelé GR4 (pour Génie Rural à 4 paramètres) et fait partie d'une classe de modèles conceptuels de transformation pluie-débit développés par Claude Michel au Cemagref (Rojas-Serna, 2005). Il offre une approximation satisfaisante des petits bassins-versants rapides (Graff, 2004). Il existe plusieurs formulations de ce modèle, qui généralement se distinguent par le pas de temps employé : les modèles de type GR4H à pas de temps horaire pour les crues rapides et les modèles GR4J à pas de temps journalier pour les crues lentes (Perrin *et al.*, 2003; Oudin *et al.*, 2008). Ici, nous ferons une présentation générale indépendante du pas de temps (on emploie donc des équations différentielles au lieu des équations de bilan employées dans les modèles d'ingénierie).

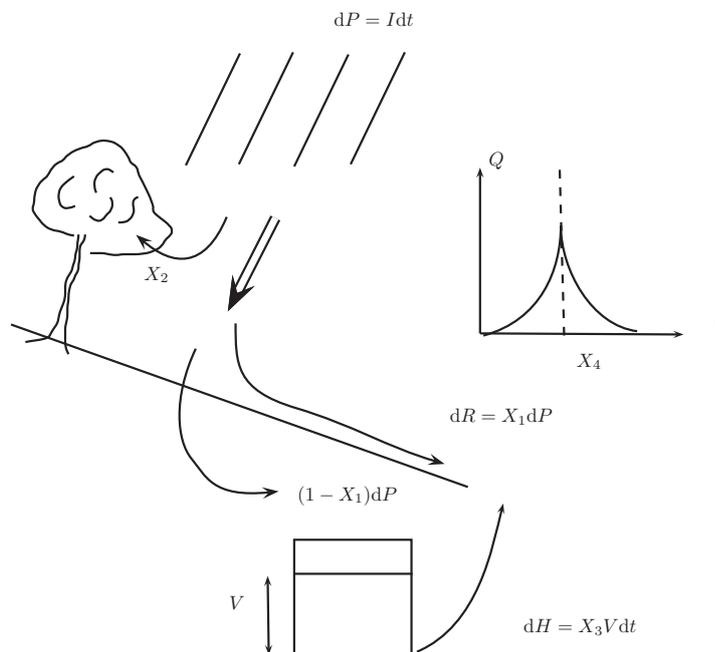


Figure 2.23 – Schéma de principe d'un modèle réservoir GR4.

Le modèle prend en compte quatre phénomènes (voir figure 2.23):

- les pertes initiales (interception par la végétation) sont en général faibles. On les prend égales à une valeur  $X_2$  (en mm);
- une fois que la capacité d'interception est saturée, il y a ruissellement. La quantité d'eau ruisselée par unité de temps est liée à la pluie précipitée  $dP = I(t)dt$

$$dR(t) = X_1 dP, \quad (2.19)$$

avec  $X_1$  un coefficient sans dimension (exprimé en %);

- dans le même temps  $dt$ , une partie de l'eau  $(1 - X_1)Idt$  est infiltrée et stockée dans un réservoir dont le volume initial est nul  $V(0) = 0$ ;  $V$  est un volume par unité de surface, il s'exprime donc en mm. Une partie du volume stocké est restituée par des écoulements hypodermiques au cours d'eau

$$dH(t) = X_3 V(t)dt, \quad (2.20)$$

avec  $X_3$  un taux de vidange linéaire (exprimé en %/h);

- le temps de montée  $t_m$  de l'hydrogramme est noté  $X_4$  (en h). On suppose que l'hydrogramme est symétrique, donc  $t_d = X_4$ . La lame totale d'eau transmise au cours d'eau est  $T = R + H$ .

Les valeurs moyennes des coefficients  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , et  $X_4$  sont données dans le tableau 2.11.

**Tableau 2.11** – Valeurs moyennes des coefficients pour les différents bassins-versants. Adapté de (Graff, 2004).

Nom	Surface km <sup>2</sup>	Région	$X_1$ %	$X_2$ mm	$X_3$ %/h	$X_4$ h	$R/T$ %
<b>Groupe 1</b>							
Laval	0,86	Alpes-du-Sud	57,6	7,28	2,4	0,38	91
Erlenbach	0,64	Suisse Centrale	46,5	13,6	16,2	0,63	53
<b>Groupe 2</b>							
Rimbaud	1,5	Alpes-du-Sud	35,4	40	2,28	1,07	57
Latte	0,19	Massif Central	14,4	75,4	3,96	0,78	41
Sapine	0,54	Massif Central	15,7	71,1	0,90	1,03	34
<b>Groupe 3</b>							
Rietholzbach	3,31	Suisse Centrale	26,5	17	2,82	1,11	41
Lumpenenbach	0,93	Suisse Centrale	22,6	12,2	9,6	0,5	41
Vogelbach	1,55	Suisse Centrale	31,4	11,5	5,88	0,64	56
Brusquet	1,08	Alpes-du-Sud	13,8	22,4	0,72	1,63	54

Il reste une dernière opération pour passer de la pluie au débit. Sur le plan physique, ce passage est complexe car il implique des processus très différents: ruissellement le

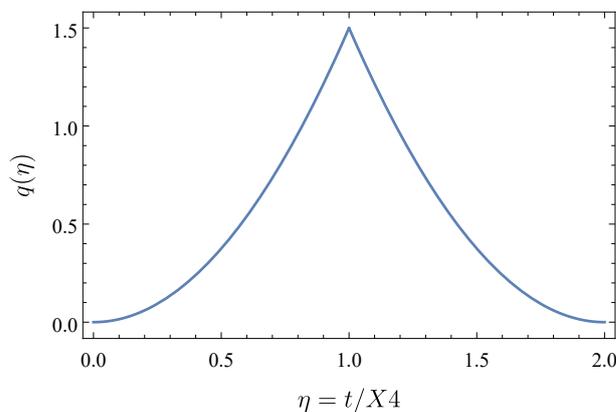
long du sol, drainage des sols, propagation d'une intumescence de crue le long d'un cours d'eau à la géométrie plus ou moins complexe (cours d'eau principal et tributaires), etc. Mathématiquement, on remplace tous ces processus par une « boîte noire », qui permet de relier le débit à la pluie nette par l'intermédiaire d'une *fonction de transfert*. L'idée de base est calquée sur la théorie de la réponse linéaire (Dooge, 1973; Brutsaert, 2005). On peut l'exprimer de la façon suivante : on considère une pluie unitaire de durée infinitésimale (c'est-à-dire la quantité de pluie est de 1 mm et la durée est infiniment petite); dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, cette impulsion initiale est une fonction de Dirac  $\delta$ . Cette pluie se produisant à l'instant  $t = 0$  génère une crue unitaire, dont l'hydrogramme est appelé l'*hydrogramme unitaire instantané*. La figure 2.24 montre l'allure de l'hydrogramme pour le modèle étudié ici ; son équation est

$$q(t) = \frac{3}{2X_4}\eta^2 \text{ pour } 0 \leq \eta \leq 1,$$

$$q(t) = \frac{3}{2X_4}(2 - \eta)^2 \text{ pour } 1 \leq \eta \leq 2,$$

$$q(t) = 0 \text{ pour } \eta > 2,$$

avec ici  $\eta = t/X_4$ ; l'unité de  $q$  est 1/s (le fait que l'on introduise l'unité 1/s est justifié pour que le débit final  $Q$  soit en  $\text{m}^3/\text{s}$ ). La fonction  $q$  est aussi appelée *fonction de transfert* car elle permet de passer d'une pluie quelconque au débit induit par cette pluie. Le choix de cette fonction est arbitraire, mais il doit satisfaire la contrainte  $\int_t q(t)dt = 1$ . Physiquement, on peut interpréter la fonction de transfert  $q$  comme une fonction qui étale le volume de pluie nette sans en changer son volume total.



**Figure 2.24** – Hydrogramme unitaire  $q(\eta)$  d'un modèle réservoir GR4.

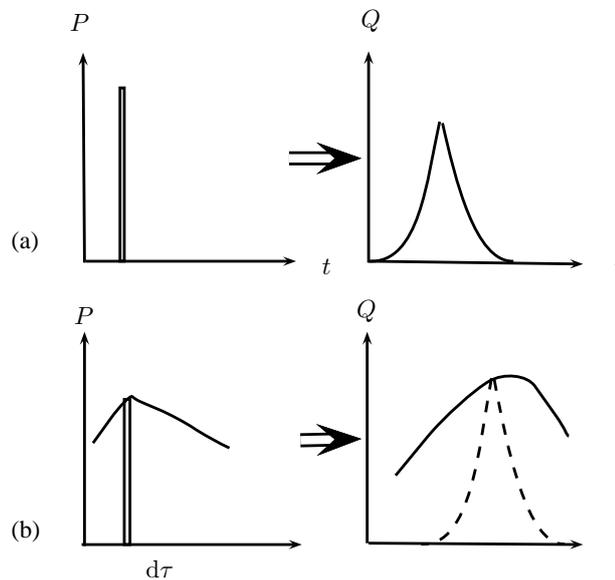
Comme le schématise la figure 2.25, une pluie complexe peut être décomposée en une succession d'impulsions. En effet, on peut par définition écrire

$$P(t) = \int I(\tau)d\tau,$$

où  $\tau$  est une variable d'intégration. On peut interpréter  $I(\tau)d\tau$  comme pluie de durée  $d\tau$ , qui vaut  $I$  fois la pluie unitaire  $\delta(t - \tau)$ . Comme une pluie unitaire provoque une crue unitaire  $q(t - \tau)$ , la pluie  $I(\tau)d\tau$  provoque une crue élémentaire  $I(\tau)q(t - \tau)d\tau$ . Comme le système est supposé linéaire, la réponse totale du système est la somme de toutes les contributions élémentaires. En intégrant sur le temps et en multipliant par la surface  $S$  du bassin-versant, on déduit le débit résultat de la pluie  $P(t)$

$$Q(t) = \alpha S \int_0^t I(\tau)q(t - \tau)d\tau, \tag{2.21}$$

où  $S$  est ici exprimé en  $\text{km}^2$  et  $\alpha = 1/3,6$  (comme pour la méthode rationnelle, la conversion des unités pour aboutir à des  $\text{m}^3/\text{s}$  nécessite d'introduire  $\alpha$ ). Cette opération est un produit de convolution entre l'intensité nette  $I$  et la fonction de transfert  $q$ . En pratique, la pluie n'est pas une fonction continue, mais une succession de valeurs discrètes (un histogramme); il est alors d'usage de remplacer l'équation (2.21) par un produit de convolution discret; c'est un point que nous n'aborderons pas ici. Dans le modèle GR4, ce n'est pas la pluie  $I$  que l'on va utiliser, mais la lame d'eau  $T$  représentant la somme du volume d'eau ruisselée et du volume d'eau restituée après infiltration et stockage dans le sol-réservoir.



**Figure 2.25** – (a) Réponse à une impulsion de pluie. (b) décomposition d'une pluie complexe en une série d'impulsions élémentaires.

### Application

On va examiner ici la solution dans le cas d'une pluie d'intensité constante pendant une durée  $t_0$ .

Le bilan hydrique dépend du niveau dans le réservoir. Le volume  $V$  obéit à l'équation

$$\frac{dV}{dt} = -X_3V(t) + (1 - X_1)\frac{dP}{dt}. \quad (2.22)$$

Considérons une pluie d'intensité constante  $I = dP/dt = I_0$ , qui commence à  $t = 0$  et s'arrête à un instant  $t_0$ . Durant les premiers instants, la pluie est interceptée. Jusqu'au temps  $t_1 = X_2/I_0$ , il n'y a pas d'eau qui atteint le sol; on suppose que  $t_1 < t_0$ . Pour  $t \geq t_1$ , l'eau touche le sol, commence à ruisseler et à s'infiltrer. La résolution de l'équation (2.22) fournit

$$V(t) = I_0 \frac{1 - X_1}{X_3} e^{-(t-t_1)X_3} (e^{(t-t_1)X_3} - 1).$$

Le flux d'eau restituée au torrent à l'instant  $t_0 \geq t > t_1$  est donc

$$\dot{T} = X_3V + X_1I_0 = I_0 \left( (1 - X_1)e^{-(t-t_1)X_3} (e^{(t-t_1)X_3} - 1) + X_1 \right).$$

À l'instant  $t_0$ , la pluie s'arrête. Le niveau dans le réservoir diminue selon l'équation

$$\frac{d}{dt}V(t) = -X_3V(t),$$

avec pour condition initiale  $V(t_0) = V_0 = I_0 \frac{1-X_1}{X_3} e^{-(t_0-t_1)X_3} (e^{(t_0-t_1)X_3} - 1)$ . La solution est

$$V(t) = V_0 e^{-(t-t_0)X_3}.$$

Le flux total d'eau restituée au torrent à l'instant  $t > t_0$  est donc

$$\dot{T} = X_3V = X_3V_0 e^{-(t-t_0)X_3}.$$

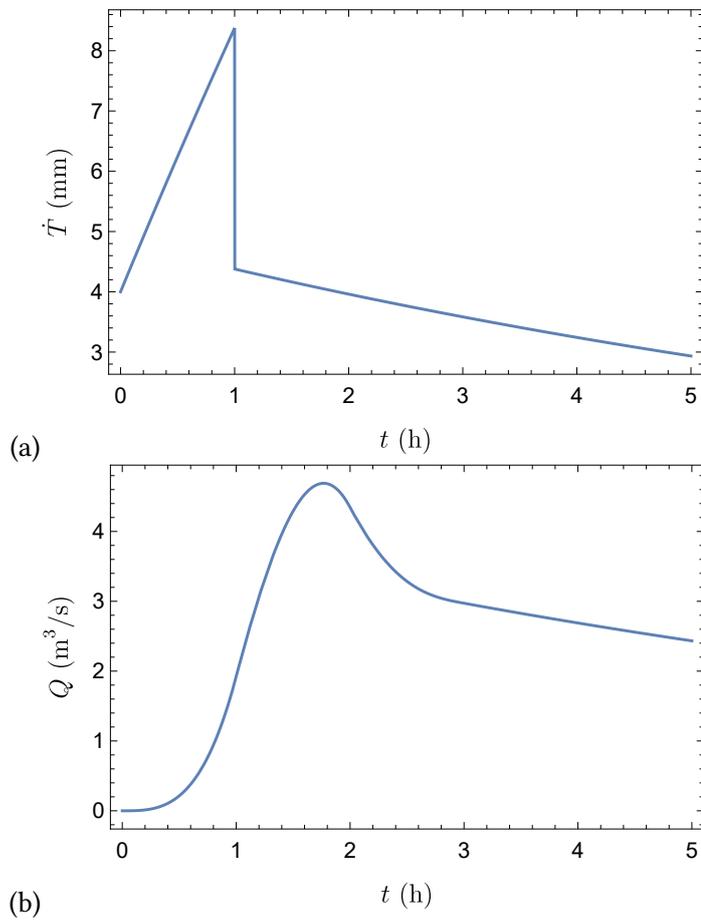
Le débit résultant est obtenu par le produit de convolution (2.21) en remplaçant  $I$  par  $\dot{T}$ :

$$Q(t) = \alpha S \int_0^t \dot{T}(\tau) q(t - \tau) d\tau.$$

En changeant la variable d'intégration, on obtient la relation suivante

$$Q(t) = \alpha S \int_0^t \dot{T}(t - \tau) q(\tau) d\tau,$$

qui peut s'intégrer facilement numériquement (et peut s'intégrer à la main, mais plus laborieusement).



**Figure 2.26** – (a) Variation de la lame d'eau  $\dot{T}$ . (b) Hydrogramme résultant. Calcul effectué avec:  $I_0 = 50$  mm/h pendant  $t_0 = 1$  h; paramètres du bassin-versant:  $S = 1$  km<sup>2</sup>,  $X_1 = 8$  %,  $X_2 = 0$  mm,  $X_3 = 0,1$  h<sup>-1</sup>, et  $X_4 = 1$  h.

### Pour aller plus loin

Il faut signaler la suite de modèles de type réservoir dans le langage R ([Coron et al., 2017](#); [Delaigue et al., 2018](#)): [airGR](#) et [airGRteaching](#).

## 2.7 Calcul de la propagation d'une onde de crue



- Vous souvenez-vous des équations de Saint-Venant ?
- ↪ Voir la définition au § 1.2.2.
- Que veut dire « conservatif » et « non conservatif » quand on parle d'équation ?
- ↪ Voir la définition au § 1.2.2.
- Y a-t-il une différence entre choc et ressaut ?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 2, § 2.1.2.

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel, les équations de Saint-Venant s'écrivent dans leur formulation non conservative :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.23)$$

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{\text{inertie}} = \underbrace{\rho g \sin \theta}_{\text{force motrice}} - \underbrace{\rho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{pression}} - \underbrace{\frac{\tau_p}{h}}_{\text{frottement}}. \quad (2.24)$$

Comme on l'a vu au chapitre 1, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.24) traduit l'équilibre entre plusieurs processus : termes inertiels, force motrice due à la gravité, gradient de pression hydrostatique, et frottement aux parois. Il est assez fréquent que seuls deux de ces processus soient prédominants par rapport aux autres même dans un régime qui n'est pas permanent uniforme. Le mouvement résulte alors de l'équilibre de deux processus :

- équilibre frottement  $\leftrightarrow$  force motrice. Si l'écoulement est uniforme, on ne traduit là que la condition (exacte) d'équilibre. Cet équilibre peut se maintenir lorsque l'on n'est pas trop éloigné du régime permanent uniforme. La hauteur varie au cours du temps, mais cette variation est tellement lente et de si petite amplitude qu'à tout instant, l'écoulement local se comporte comme s'il était dans un régime permanent uniforme (gradient de pression nul, inertie négligeable). On parle d'approximation d'*onde cinématique* (voir § 2.7.1). À noter également que si l'amplitude de l'onde est trop importante, il n'est rapidement plus possible de négliger le gradient de pression. Il se produit alors un équilibre entre trois processus : gradient de pression, frottement, force motrice. On parle d'*onde diffusive* (voir § 2.7.3);
- équilibre gradient de pression  $\leftrightarrow$  inertie. De l'eau au repos ou bien en écoulement permanent (sur une faible pente) présente une surface libre, qui peut être parcourue d'ondes. On parle assez souvent de vagues dans le langage courant pour désigner ces ondes. Si l'onde peut être considérée comme une petite perturbation de la surface libre, les deux processus dominants sont les termes inertiels et le gradient de pression. On parle d'approximation d'*onde dynamique* (voir § 4.2).

Notons que toutes les combinaisons de processus ne sont pas physiquement possibles ou intéressantes. Signalons enfin qu'il s'agit là d'ondes continues (c'est-à-dire dont les variables  $\bar{u}(x, t)$  et  $h(x, t)$  sont des fonctions continues). Les équations de Saint-Venant peuvent également générer des ondes discontinues, appelées *ondes de choc* en physique et *mascaret* ou *ressaut* en hydraulique (voir § 4.7).

Si les équations de Saint-Venant s'avèrent très utiles pour étudier les ondes, toutes les phénomènes ondulatoires ne peuvent être étudiés à l'aide de ces équations. Il faut rappeler que les équations de Saint-Venant sont fondées sur l'approximation d'écoulement peu épais ou d'onde longue (voir chap. 1).

### 2.7.1 Onde cinématique



- Vous souvenez-vous des équations de Saint-Venant ?
- ↪ Voir la définition au § 1.2.2.
- Qu'est ce que l'adimensionnalisation des équations ?
- ↪ Voir le cours de [mécanique des fluides](#).
- Qu'est ce que la convection ? la diffusion ?
- ↪ Voir les définitions au § 1.6.1 et au 1.6.4.
- Qu'est ce que la méthode aux perturbations ?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 1, § 1.7.3.

#### Définition

Même pour des écoulements non permanents et non uniformes, les variations dans l'espace et dans le temps sont tellement faibles que localement tout se passe comme si l'écoulement était permanent uniforme. C'est par exemple ce qui se passe sur de grands fleuves lors de crue : le niveau d'eau monte tellement lentement que la vitesse de l'écoulement s'adapte à la hauteur en suivant une loi de régime permanent.

Fixons quelques ordres de grandeur pour comprendre ce qui se passe et pour cela mettons de nouveau les équations sous forme adimensionnelle en introduisant des échelles :

$$\hat{u} = \frac{\bar{u}}{U_*}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L_*}, \quad \hat{t} = \frac{tU_*}{L_*}, \quad \hat{\tau}_p = \frac{\tau_p}{\rho g H_* \sin \theta}, \quad \text{et } \hat{h} = \frac{h}{H_*},$$

avec  $U_*$ ,  $L_*$ , et  $H_*$  des échelles de vitesse, de longueur, de profondeur. Les équations de Saint-Venant (2.23)–(2.24) s'écrivent donc :

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{h} \hat{u}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{U_*^2}{L_*} \left( \varrho \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \varrho \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) = \varrho g \sin \theta - \varrho g \cos \theta \frac{H_*}{L_*} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\tau_p}{\hat{h} H_*}. \quad (2.26)$$

En introduisant le nombre d'aspect  $\varepsilon = H_*/L_*$  et le nombre de Froude  $\text{Fr} = U_*/\sqrt{gH_*}$ , l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit également :

$$\text{Fr}^2 \varepsilon \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) = \sin \theta - \cos \theta \varepsilon \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\tau_p}{\varrho g H_*} \frac{1}{\hat{h}}. \quad (2.27)$$

Les valeurs typiques que l'on a au cours d'une crue lente sont :  $\text{Fr} \sim 0,1$  et  $\varepsilon \sim 10^{-3}$  (si l'on s'intéresse à de longs linéaires de rivière). On voit dans le bilan de quantité de mouvement que tous les termes sont petits sauf le terme moteur  $\sin \theta$  et le terme de frottement. On conclut que l'équation de conservation de la quantité de mouvement, qui est à l'origine une équation aux dérivées partielles, se réduit à l'équation scalaire

$$\frac{\hat{\tau}_p}{\hat{h}} = 1, \quad (2.28)$$

ou sous forme dimensionnelle

$$\frac{\tau_p}{\varrho g h} = \sin \theta, \quad (2.29)$$

qui n'est rien d'autre que la condition d'équilibre pour le régime permanent uniforme.

### Équation d'onde cinématique

On vient de voir que le cas d'une crue lente (typiquement ce qui se passe pour de grands bassins-versants), les termes inertiels jouent un rôle faible dans la propagation des ondes. On peut, en première approximation, considérer qu'en toute section la vitesse d'écoulement s'adapte immédiatement à tout changement de profondeur. Autrement dit, en résolvant l'équation (2.29) – en considérant une loi de type Chézy ou Manning–Strickler par exemple –, on obtient la relation  $\bar{u} = \bar{u}(h)$ , c'est-à-dire la relation obtenue en régime permanent.

Dans ce cas-là, la vitesse est la variable « esclave » ; la hauteur d'eau varie en fonction des apports amont (c'est la variable « maîtresse ») et la vitesse s'ajuste en fonction de  $h$ . On peut calculer les caractéristiques de l'onde de crue à l'aide de l'équation de continuité (2.23). En prenant l'exemple d'une courbe de tarage fondée sur la loi de Chézy, c'est-à-dire  $\bar{u}(h) = C\sqrt{i}\sqrt{h}$ , avec  $C$  le coefficient de Chézy et  $i = \tan \theta$  la pente, on tire de l'équation (2.23) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0,$$

l'équation d'onde cinématique

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0}, \quad (2.30)$$

avec

$$c = \bar{u} + h\bar{u}' = \frac{3}{2}C\sqrt{i}\sqrt{h}$$

la vitesse de propagation de l'onde (vitesse d'advection) et  $\bar{u}'$  est la dérivée de  $\bar{u}(h)$  par rapport à  $h$ . On note que l'onde de crue se déplace plus rapidement que l'écoulement moyen (50 % plus vite) et elle se déplace d'autant plus vite que la hauteur est grande.

Si on prend une loi de Manning–Strickler ( $\bar{u}(h) = K\sqrt{i}h^{2/3}$ ), on obtient une vitesse d'advection égale à

$$c = \frac{5}{3}K\sqrt{i}h^{2/3} = \frac{5}{3}\bar{u},$$

soit une valeur légèrement supérieure à celle obtenue avec la formule de Chézy.

Notons que l'équation (2.30) est une équation d'advection non linéaire. Comme  $c(h)$  est une fonction croissante de  $h$ , la vitesse croît avec la hauteur. Il arrive donc un moment où la crête d'une vague dépasse son pied et déferle (voir figure 1.72). Par la suite, on traite les variations trop brutales telles que le déferlement ou le ressaut hydraulique comme des discontinuités et on sert de l'équation de Rankine–Hugoniot (1.38) pour traiter ces discontinuités (voir figure 1.73).

### Équation de Kleitz–Seddon

Pour un canal de section quelconque, on peut montrer en suivant la même procédure que la célérité des ondes est donnée par la formule de Kleitz<sup>4</sup>–Seddon :

$$c = \frac{\partial Q}{\partial S}, \quad (2.31)$$

avec  $Q$  le débit total et  $S$  la section mouillée.

### 2.7.2 Exemple de résolution

On souhaite étudier la propagation d'une onde de crue. Par exemple, admettons que dans une rivière on ait un écoulement d'eau uniforme avec une hauteur  $h_0$  et un débit

---

4. Charles Kleitz (1808–1886) était un hydraulicien français, diplômé de l'École des Ponts et Chaussées. Il travailla principalement sur l'aménagement du Rhône et son travail d'ingénieur l'amena à publier des travaux en hydraulique. En particulier, il s'intéressa à la propagation des crues et aux hydrogrammes de crue. Il montra notamment comment on pouvait estimer la vitesse de propagation d'une crue en fonction de la hauteur d'eau et du débit. Sa formule fut, semble-t-il, découverte indépendamment une vingtaine d'années plus tard par James A. Seddon (1856–1921) dans son étude de la rivière Missouri.

$q_0$  le long d'un lit de pente  $i$  (régime permanent uniforme, frottement de type Manning-Strickler avec un coefficient  $K$ ). On modélise la crue par la méthode rationnelle :

$$q(t) = q_0 + \begin{cases} \frac{t}{t_c} q_p & \text{pour } 0 \leq t \leq t_c, \\ \left(2 - \frac{t}{t_c}\right) q_p & \text{pour } t_c \leq t < 2t_c. \end{cases} \quad (2.32)$$

avec  $q_p$  le débit de pointe et  $t_c$  le temps de concentration. Ce débit peut être converti en équivalent de hauteur d'eau pour fournir une condition à la limite à l'équation (2.30) :

$$h(0, t) = f(t) = \begin{cases} \left(\frac{q_p}{K\sqrt{i}} \frac{t}{t_c}\right)^{3/5} + h_0 & \text{pour } 0 \leq t \leq t_c, \\ \left(\left(2 - \frac{t}{t_c}\right) \frac{q_p}{K\sqrt{i}}\right)^{3/5} + h_0 & \text{pour } t_c \leq t < 2t_c. \end{cases} \quad (2.33)$$

où l'on s'est servi de la formule de Manning-Strickler pour passer des débits aux hauteurs. L'équation d'onde cinématique s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) + c(h) \frac{\partial}{\partial x} (h) = 0 \quad (2.34)$$

avec  $c(h) = 5K\sqrt{i}h^{2/3}/3$  la célérité. Cette équation se résout généralement numériquement, mais il est parfois de la résoudre analytiquement. Voyons cela de plus près.

### Résolution numérique

On adopte en général des schémas numériques de type « volumes finis » pour résoudre l'équation d'onde cinématique (2.34) (LeVeque, 2002). Des schémas de type différences finies sont également possibles tant que la solution ne développe pas de choc (LeVeque, 2007), ce qui en limite fortement l'intérêt pratique. La figure 2.27 montre un exemple de résolution numérique par la méthode des volumes finis.

La figure 2.28 montre les variations de hauteur  $h(x, t)$  en trois points  $x = 0$ ,  $x = 500$  m et  $x = 1500$  m. En examinant le temps nécessaire au pic de crue pour aller d'un point à l'autre, on peut estimer la vitesse moyenne de déplacement de l'onde de crue :

- Ainsi pour aller à  $x = 500$  m, il a fallu 190 s. On déduit que la vitesse moyenne du pic de crue est de 5,6 m/s. L'application de la formule de Kleitz-Seddon (2.31) nous dit que la célérité de crue est :

$$c = \frac{5}{3} K\sqrt{i} h_p^{2/3} = \frac{5}{3} K\sqrt{i} \left(\frac{q_0 + q_p}{K\sqrt{i}}\right)^{5/3} = 5,9 \text{ m/s}$$

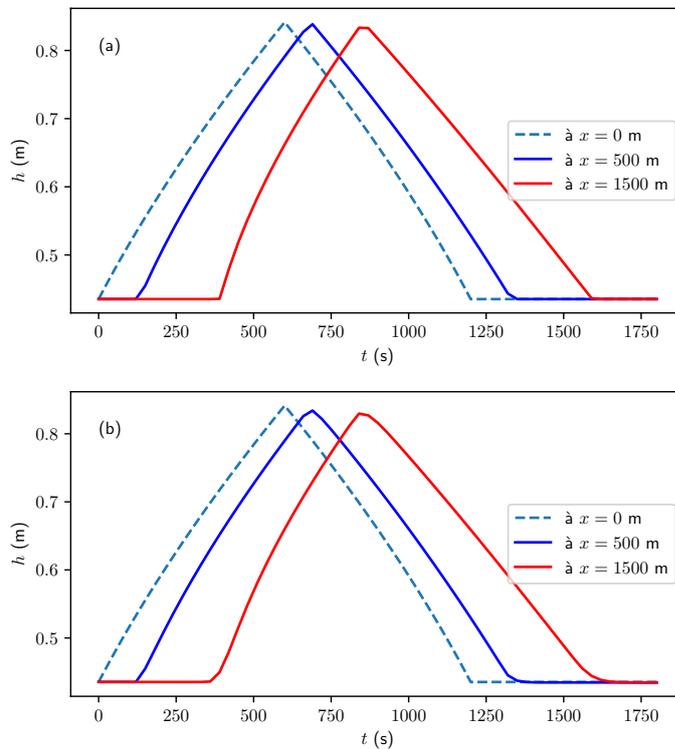
soit une valeur 6 % supérieure à la vitesse dans la simulation numérique.

**Figure 2.27** – Solution  $h(x, t)$  de l'équation (2.34) – avec ici  $i = 1 \%$ ,  $K = 40 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $q_0 = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $q_p = 3 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $t_c = 600 \text{ s}$ . L'équation a été résolue à l'aide de la méthode numérique des volumes finis (solveur de Roe étendu à l'ordre 2, limiteur du flux de type superbee) (LeVeque, 2002). Une durée de 30 min a été simulée.

- Pour aller à  $x = 1500 \text{ m}$ , il a fallu 240 s. On déduit que la vitesse moyenne du pic de crue est de 6,2 m/s, soit une valeur 5 % supérieure à la vitesse estimée par la formule de Kleitz–Seddon (2.31) .

La comparaison avec les variations de hauteur obtenues par la résolution complète des équations de Saint-Venant montre qu'en dépit de la simplicité de l'équation (2.34), l'approximation d'onde cinématique décrit correctement le comportement dynamique des ondes de crue.

De manière générale, l'approximation d'onde cinématique offre une bonne description des ondes de crue en particulier lorsque l'écoulement est suffisamment rapide ( $Fr = O(1)$ ). Dans la limite des petits nombres de Froude ( $Fr \rightarrow 0$ ), un amortissement important de l'onde se produit et l'approximation d'onde diffusive est alors en général plus précise. Les ondes de crue dans les gros cours d'eau peuvent souvent être traitées dans le cadre des ondes cinématiques. Il existe d'autres approximations (qui dépassent le cadre de ce cours) qui permettent d'approcher le comportement de la rivière lors du



**Figure 2.28** – Variation de hauteur lors du passage de la crue en  $x = 0$ ,  $x = 500$  m, et  $x = 1500$ . (a) Résultat obtenu par résolution numérique de l'équation d'onde cinématique (2.34) par la méthode des volumes finis. (b) Résultat obtenu en résolvant les équations de Saint-Venant (1.22)–(1.23) par la méthode des volumes finis (solveur de Roe).

passage d'une crue (Lighthill & Whitham, 1955; Ferrick, 2005).

### Résolution analytique

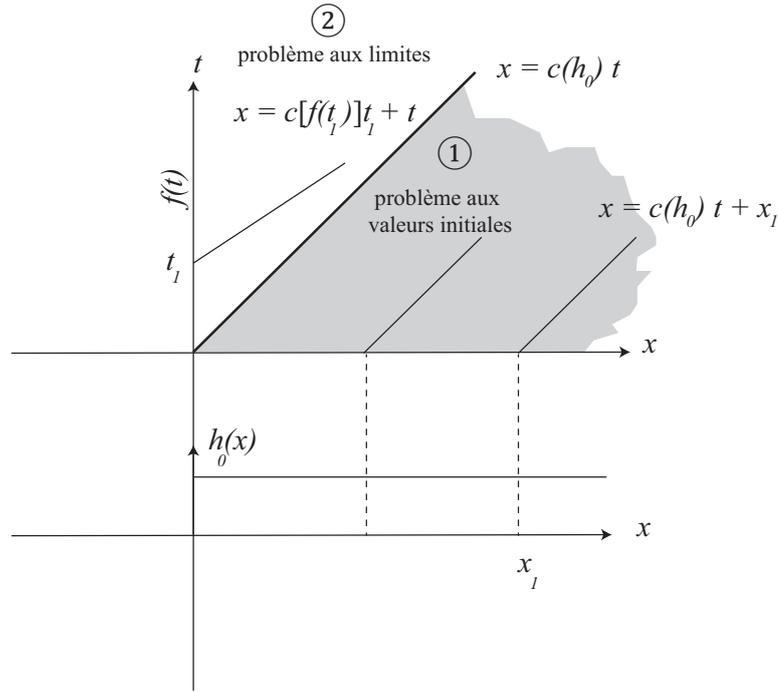
Montrons maintenant comment on peut résoudre l'équation d'onde cinématique (2.34) grâce à la méthode des caractéristiques. On va voir que c'est en général laborieux, ce qui que cette méthode est peu utilisable dans les cas pratiques, mais elle est fondamentale pour comprendre la théorie.

On peut écrire l'équation d'onde cinématique (2.34) sous la forme équivalente :

$$\frac{dh}{ds} = 0 \text{ le long d'une courbe caractéristique } \frac{dx}{ds} = c(h) \quad (2.35)$$

où  $c(h) = 5K\sqrt{i}h^{2/3}/3$  est la célérité. Toutes les courbes caractéristiques sont des droites. On peut décomposer le problème en un « problème aux valeurs initiales » (do-

maine 1) et un « problème aux limites » (domaine 2) comme cela est illustré sur la figure 2.29. On pourrait aussi considérer un domaine 3 qui correspond à un retour à l'état initial; le domaine 3 est séparé du domaine 2 par la droite  $t = 2t_c + x/c(h_0)$  (soit encore  $x = c(h_0)(t - 2t_c)$ ). Il n'est pas montré sur la figure 2.29.



**Figure 2.29** – Diagramme caractéristique. Le diagramme supérieur montre la famille de courbes caractéristiques  $x(s)$  dans le plan  $x-t$ . La courbe caractéristique  $x = c(h_0)t$  partant du point origine scinde le quadrant en deux domaines : le domaine 1 correspond au problème aux valeurs initiales tandis que le domaine 2 représente le problème aux limites. Pour le domaine 1 toutes les caractéristiques sont des droites parallèles. Le diagramme inférieur montre la condition initiale  $h(x,0) = h_0$ .

On commence par résoudre l'équation d'onde cinématique sous forme caractéristique pour le domaine 1 (voir figure 2.29)

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \frac{\partial x}{\partial s} = c(h_0) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial s} = 0 \quad (2.36)$$

avec pour conditions initiales

$$x(s = 0) = x_1, t(s = 0) = 0 \text{ et } h(s = 0) = h_0. \quad (2.37)$$

L'intégration est triviale :

$$h(x,t) = h_0. \quad (2.38)$$

Nous attaquons maintenant la résolution de l'équation d'onde cinématique sous forme caractéristique pour le domaine 2 (see figure 2.29)

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \frac{\partial x}{\partial s} = c(h) \text{ and } \frac{\partial h}{\partial s} = 0. \quad (2.39)$$

Les conditions initiales pour le problème aux limites s'écrivent sous forme paramétrique

$$x(s = 0) = 0, t(s = 0) = t_1 \text{ et } h(s = 0) = f(t_1) \quad (2.40)$$

La solution est

$$t = s + t_1, \quad (2.41)$$

$$x = c(f(t_1))s, \quad (2.42)$$

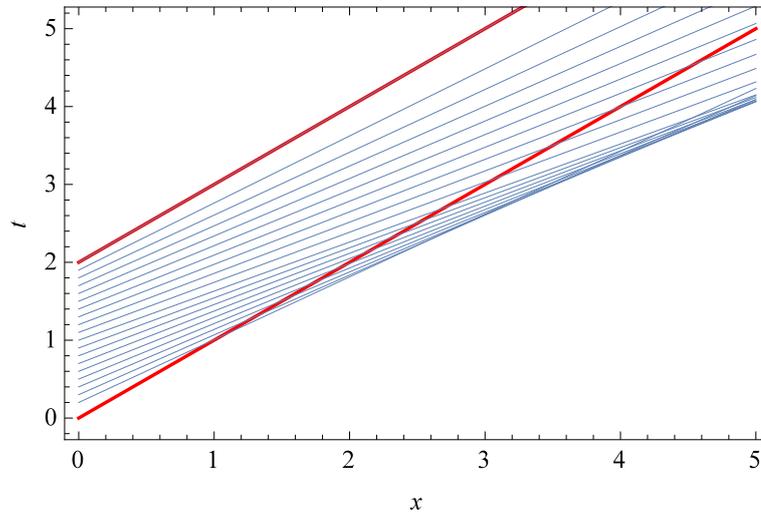
$$h = f(t_1). \quad (2.43)$$

Cette solution est implicite et doit être résolue numériquement. Comme le montre la figure 2.30, certaines caractéristiques se coupent, ce qui indique qu'il y a un choc qui se forme. Cela est confirmé si on fait des coupes : l'évolution de  $h$  en différentes positions (voir figure 2.31) montre que la solution numérique est irréaliste dans la phase de montée de la crue. De même si on trace  $h$  en fonction de  $x$  pour des temps donnés, on obtient localement des comportements aberrants, qui trahissent la présence d'un choc.

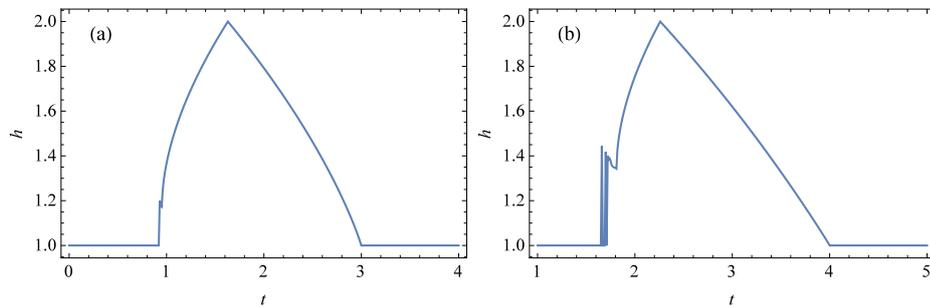
Pour traiter correctement le problème, il faut alors adjoindre l'équation de Rankine-Hugoniot (voir § 1.2.6) pour traiter le choc :

$$\dot{S} = \frac{[[F(h)]]}{[[h]]} = \frac{K\sqrt{i}(h^{5/3} - h_0^{5/3})}{h - h_0}, \quad (2.44)$$

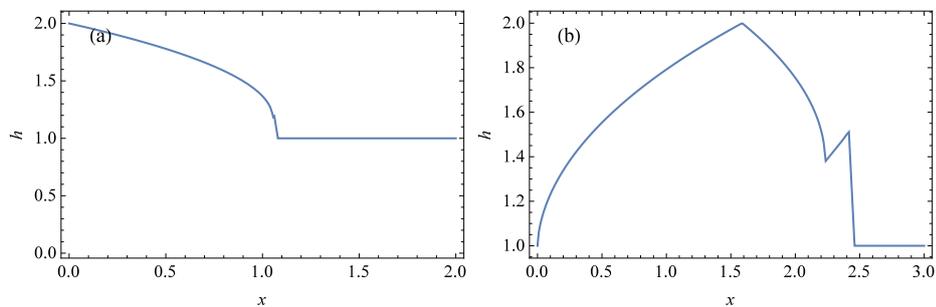
avec  $S(t)$  la position du choc,  $\dot{S}$  sa vitesse,  $F(h) = \bar{u}h = K\sqrt{i}h^{5/3}$ ,  $h$  la hauteur d'eau à gauche du front. On se reportera à l'exemple du § 3.4.4 pour voir comment traiter une condition de choc en parallèle de l'équation d'onde cinématique.



**Figure 2.30** – Diagramme caractéristique pour le problème étudié. (Pour simplifier la représentation, on a pris  $i = K = q_p = 1$ , ce qui correspond à une adimensionnalisation non détaillée ici.) Les courbes rouges représentent les caractéristiques qui délimitent le domaine 2 (parcouru par les droites caractéristiques) des domaines 1 et 3 (hauteur d'eau constante égale à  $h_0$ ).



**Figure 2.31** – Évolution de  $h$  en (a)  $x = 1$  et (b)  $x = 2$ .



**Figure 2.32** – Variation de  $h$  en (a)  $t = 1$  et (b)  $t = 2$ .

### 2.7.3 Onde diffusive



- Qu'est ce que la convection-diffusion ?
- ↪ Voir la définition au § 1.6.5.

Un problème apparaît assez rapidement dans la dérivation de l'équation de l'onde cinématique : en général, la pente du lit est très faible et il n'est pas rare que  $\sin \theta \sim \varepsilon$  ou  $\sin \theta \ll \varepsilon$  dans l'équation (2.27). Cela implique que pour les rivières à faible pente, on ne peut pas négliger le gradient de pression puisqu'il est du même ordre de grandeur, voire supérieur, que la force motrice.

Un autre problème majeur rencontré avec l'approximation d'onde cinématique est que ce modèle conduit à la formation d'onde de choc (ressaut hydraulique) compte tenu du caractère hyperbolique de l'équation du mouvement sans que cela corresponde à ce qui est observé.

Un modèle un peu plus fin est l'approximation d'*onde diffusive*, où l'on considère que la vitesse n'est pas reliée de façon univoque à la hauteur d'écoulement, mais peut varier relativement lentement. De la sorte, les termes inertiels dans les équations de Saint-Venant (1.20)–(1.21) disparaissent. On se retrouve alors avec l'équation de continuité (1.20)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (2.45)$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.21) amputée des termes inertiels

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \tan \theta - \frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta}, \quad (2.46)$$

avec  $\tau_p(q, h)$  donnée par une loi de type Chézy ou Manning–Strickler. En différentiant (2.45) par rapport à  $x$  et (2.46) par rapport à  $t$ , puis en les soustrayant membre à membre, on obtient une équation du second ordre de la forme

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta} \right),$$

soit encore en se servant de l'équation de continuité (2.45)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta} \right) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta} \right) \frac{\partial q}{\partial t}, \\ &= - \left( \frac{1}{\rho g h \cos \theta} \frac{\partial \tau_p}{\partial h} - \frac{\tau_p}{\rho g h^2 \cos \theta} \right) \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \tau_p}{\partial q} \frac{1}{\rho g h \cos \theta} \frac{\partial q}{\partial t}. \end{aligned}$$

Après réarrangement des termes, on aboutit à l'équation d'évolution de  $q$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \rho g h \cos \theta \left( \frac{\partial \tau_p}{\partial q} \right)^{-1} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \tau_p}{\partial h} - \frac{\tau_p}{h} \right) \left( \frac{\partial \tau_p}{\partial q} \right)^{-1} \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (2.47)$$

Il s'agit d'une équation d'advection-diffusion non linéaire, dont la résolution est rendue ici peu aisée car les coefficients d'advection et de diffusion dépendent non seulement de  $q$ , mais aussi de  $h$ . Cette équation peut être simplifiée si on la linéarise, c'est-à-dire on décompose les variables

$$q = q_0 + q' \text{ et } h = h_0 + h',$$

où  $(q_0, h_0)$  désigne l'état de l'écoulement en régime permanent uniforme et  $(q', h')$  représente la perturbation de l'état d'équilibre. L'approximation de l'équation (2.47) au premier ordre est alors

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = \rho g h_0 \cos \theta \left( \frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q_0} \right)^{-1} \frac{\partial^2 q'}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial h_0} - \frac{\tau_p(q_0, h_0)}{h_0} \right) \left( \frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q} \right)^{-1} \frac{\partial q'}{\partial x}. \quad (2.48)$$

Cette équation peut sembler de prime abord compliquée, mais il s'agit en fait d'une équation d'advection-diffusion linéaire :

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q'}{\partial x^2} + C \frac{\partial q'}{\partial x}. \quad (2.49)$$

dont le coefficient de diffusion est :

$$D = \rho g h_0 \cos \theta \left( \frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q_0} \right)^{-1},$$

et le coefficient d'advection est

$$C = - \left( \frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial h_0} - \frac{\tau_p(q_0, h_0)}{h_0} \right).$$

Dans le cas d'une loi de Manning-Strickler, on a

$$\tau_p = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{h^{1/3}} = \frac{\rho g}{K^2} \frac{q^2}{h^{7/3}},$$

d'où l'on déduit

$$D = \frac{1}{2} q_0 \cot \theta \text{ et } C = \frac{5}{3} \bar{u}_0 = \frac{dq_0}{dh_0}.$$

On vérifie que le coefficient d'advection dans le modèle d'onde diffusive est le même que le coefficient déterminé dans l'approximation d'onde cinématique. Cela montre que dans le cadre de l'approximation linéaire (petite perturbation autour du régime d'équilibre) l'onde de débit est advectée à une vitesse  $C = \frac{5}{3} u_0$ , mais diffuse également avec un coefficient  $D$  proportionnel au débit initial  $q_0$ . Contrairement à l'onde cinématique qui se raidit au cours de sa propagation, l'onde diffusive tend à s'étaler au cours du mouvement.

## Rupture de barrage

### 3.1 Rupture de barrage et phénomènes similaires

**I**L EXISTE aujourd'hui environ 45 000 barrages dans le monde pour la production hydroélectrique, l'alimentation en eau, ou bien la régulation des cours d'eau (Marche, 2008). Comme tout ouvrage de génie civil, les barrages peuvent connaître des défaillances de sécurité, qui peuvent aboutir à des accidents plus ou moins graves. Le taux de rupture moyen annuel est d'environ 3 pour l'ensemble des barrages construits dans le monde, mais actuellement le nombre de ruptures va en diminuant (Marche, 2008). Quelques catastrophes ont causé des dommages considérables et provoqué la mort des centaines ou des milliers de personnes :

- Malpasset (Var, France) : le 2 décembre 1959, le barrage-voûte barrant la rivière Reyran cède à cause d'un défaut géologique dans le massif où s'ancrait la voûte. Une vague de 40 mètres déferle sur la vallée et atteint la ville de Fréjus. Des blocs rocheux (jusqu'à 600 t!) sont entraînés et détruisent le quartier de Malpasset. En tout, ce sont 423 victimes qui sont déplorées.
- Vajont (Italie) : le 9 octobre 1963 un glissement de terrain a mobilisé 260 Mm<sup>3</sup> de terres et de roches dans la retenue du Vajont barrée par un barrage-voûte achevé en 1959 (Panizzo *et al.*, 2005). Deux vagues d'une hauteur prodigieuse (150–200 m) se sont engouffrées dans l'étroit ravin à l'aval du barrage 150 mètres de haut. La masse d'eau dévaste Longarone, Pirago, Rivalta, Villanova et Faè et de nombreux petits villages aux alentours (voir fig. 3.5). On estime à 1909 le nombre de personnes tuées. Le barrage n'a subi que de très légers dommages.
- Le barrage de Molare (bordure sud des Alpes italiennes au nord-est de Gênes) céda en août 1935 après des pluies diluviennes. Les évacuateurs de crue furent dans l'impossibilité d'évacuer le débit de crue généré par des pluies d'une intensité exceptionnelle (environ 500 mm dans la journée du 13 août 1935), ce qui entraîna la rupture de la digue de Zerbino. Une vague d'une hauteur de 20 mètres

dévasta la vallée de l'Orba, causant environ la mort de 100 personnes ([Visentini, 1936](#)).

Si ces accidents datent de plusieurs décennies à une époque où la connaissance technique n'était pas aussi poussée, on peut signaler quelques exemples récents de barrages qui ont cédé de façon spectaculaire :

- aux États-Unis, à Taum Sauk dans les collines du Missouri (voir figures 3.3 et 3.16), le remblai d'une retenue d'environ 5 millions de m<sup>3</sup> implantée à 1500 m d'altitude a cédé en décembre 2005 et a généré une onde de submersion dévastatrice, qui a rasé la forêt (sur une dénivellation de l'ordre de 700 m);
- en Ukraine, le barrage de Kakhovka a été miné par l'armée russe pour couvrir son retrait tactique sur la rive gauche du Dniepr en juin 2023 (voir figures 3.1). La plaine du Dniepr a été inondée jusqu'à Kherson.



**Figure 3.1** – Rupture du barrage de Kakhovka sur le Dniepr (Kherson, Ukraine) le 6 juin 2023. Le barrage a été détruit par une explosion, le plus vraisemblablement prévue par l'armée russe pour inonder la région de Kherson et ainsi ralentir une contre-offensive ukrainienne. Le volume de la retenue  $18 \times 10^9$  m<sup>3</sup> fut drainé en quatre jours. Source : [Youtube](#).



**Figure 3.2** – Érosion des berges contre lesquelles s'appuyait le barrage de Sweetwater en 1916.

### 3.1.1 Rupture de grand barrage

#### Causes de rupture

La rupture d'un barrage peut être causée :

- par l'érosion du parement provoquée par une *surverse* intempestive en cas de trop-plein (résultant d'une crue ou bien d'une arrivée d'eau mal contrôlée). Quelques cas historiques :
  - En décembre 2005, la digue de la retenue de Taum Sauk s'est ainsi rompue à la suite de défaillances de plusieurs systèmes de contrôle et de pompage, qui ont amené à un niveau d'eau trop important dans la retenue (voir figure 3.3).
  - En 1916, en Californie près de San Diego, le barrage (poids-voûte) de Sweetwater a connu une surverse à la suite de fortes pluies et d'une montée des eaux. La surverse n'a pas entraîné directement la ruine de l'ouvrage, mais elle a provoqué une érosion très importante de son appui latéral (voir figure 3.2).
  - En février 2017, dans des circonstances similaires et toujours en Californie, l'évacuateur de crue du barrage d'Oroville a subi des dommages, qui ont

laissé craindre que sa capacité d'évacuation soit amoindrie, que les eaux du lac montent, et qu'il y ait une surverse dans des terrains non préparés à recevoir un flux d'eau important (voir figure 3.6);

- par l'*infiltration* d'eau avec des phénomènes d'*érosion interne*<sup>1</sup> dans les remblais. Il y a plusieurs mécanismes d'érosion interne dans les ouvrages en remblai :
  - érosion progressive des parois d'un conduit préexistant (fissure de dessiccation, terrier d'animal fouisseur, racine, etc.), causant son élargissement de plus en plus rapide jusqu'à la rupture du remblai,
  - érosion de contact à l'interface entre deux couches de perméabilité très différente,
  - l'entraînement des particules les plus fines à travers le squelette granulaire (tri granulométrique appelé encore *suffusion*), amenant à des changements lents de perméabilité du remblai. La suffusion peut notamment causer le colmatage des filtres et drains dans un remblai disposant d'un noyau d'étanchéité.

Un cas historique majeur est fourni par le barrage de Teton (Idaho, États Unis), qui a cédé en quatre heures en juin 1976. La rupture est bien documentée puisqu'elle est intervenue après la découverte de trois « renards » sur la face aval du remblai (voir figure 3.8), mais il est alors trop tard pour agir. Plus récemment, la rupture de la digue la rivière Secchia (près de Modène, Italie) en janvier 2014 est attribuée à l'action d'animaux fouisseurs (porc-épic, renard, blaireau et castor);

- l'*érosion régressive* de la base du remblai. Un exemple est la rupture du barrage de Hell Hole dans la Sierra Nevada (Californie) en décembre 1964. Le barrage en remblai était en construction lorsque des pluies diluviennes ont gonflé les eaux de la rivière Rubicon que barrait l'ouvrage. Le canal de dérivation temporaire n'étant pas dimensionné pour une telle crue, l'eau déversa par-dessus le remblai. L'érosion régressive en pied du remblai entraîna la formation d'une brèche au bout de deux jours de surverse. Un accident similaire est arrivé lors de la construction du barrage de Tokwe Mukosi (Zimbabwe) en février 2014;
- par un problème dans les fondations. Cela peut être dû à un travail des massifs rocheux sous la pression de l'eau (notamment lors de la mise en eau du barrage) ou à des tassements différentiels. En 1963, le remblai réservoir de Baldwin Hills au sud de Los Angeles a cédé sous l'effet d'un tassement de sa fondation, sans doute induit par l'exploitation pétrolière à proximité;
- la rupture ou l'affaissement de la paroi du barrage. En décembre 1959, la retenue de Malpasset (Var, France) céda, libérant 48 millions de m<sup>3</sup> d'eau. La rupture du barrage provoqua une crue majeure jusqu'à Fréjus, causant la mort de 423 personnes (voir figure 3.7). Elle a détruit 155 bâtiments et en a endommagé 800 autres. En tout, ce sont 32 km<sup>2</sup> de terres cultivées qui ont été dévastés;

---

1. Ces phénomènes sont aussi appelés « renards » en français car longtemps on a cru que les trous observés dans les remblais n'étaient dus qu'à des animaux fouisseurs (ragondin, blaireau, etc.).

- la *fracturation hydraulique* (ou *claquage*) dans des sols composés d’une couche superficielle peu perméable (argileuse) et d’une couche sous-jacente plus perméable (sableuse). Des fissures horizontales peuvent alors se développer et entraîner des infiltrations d’eau sous le remblai ou des tassements différentiels dans la fondation du remblai ;
- la surverse induite par une seiche, une avalanche, ou un mouvement de terrain entraînant une grande masse d’eau par-dessus le barrage. La catastrophe du Vajont résulta d’un glissement de terrain, qui en pénétrant dans le lac de retenue a provoqué une vague qui submergea le barrage-voûte et s’engouffra dans un ravin étroit (voir figures 3.4 et 3.5) ;
- par un tremblement de terre, qui peut induire la rupture du barrage ou bien la formation de vagues déferlantes ;
- par une explosion. Deux cas historiques :
  - En 1943, durant la Seconde Guerre mondiale, les Alliés bombardèrent les barrages de Möhne et d’Edersee situés dans la Ruhr afin de réduire la production hydroélectrique et la ressource en eau allemande. À cet effet, les Anglais mirent au point une technique de bombardement spécifique afin de pouvoir créer une brèche dans d’épais murs en béton.
  - Plus récemment, en 2023, le barrage de Kakhovka en Ukraine fut détruit par une explosion lors de la guerre entre Ukraine et Russie (voir figure 3.1).

### Retours d’expérience

Selon [Marche \(2008\)](#), l’analyse des ruptures de barrage à travers le monde amène aux observations suivantes :

- il y a deux causes principales de rupture :
  - capacité insuffisante de l’évacuateur de crue (35 % des ruptures documentées),
  - problème de fondation (25 % des ruptures documentées) ;
- la probabilité de rupture d’un barrage en béton est peu dépendante de leur hauteur (probabilité de l’ordre de rupture de 0,6 % pour des barrages jusqu’à 100 m de haut) ;
- la probabilité de rupture d’un barrage en remblai croît avec la hauteur, passant de 0,2 % pour les toutes petites hauteurs (moins de 10 m) à 14 % pour les grands barrages (hauteur supérieure à 50 m) ;
- la phase de remplissage et les cinq premières années de service sont les plus critiques ;
- les barrages en remblai présentent un taux de rupture deux fois plus important que les barrages en béton (1,11 contre 0,54 %, respectivement) ;

- l'adoption de mesures réglementaires, comme la capacité minimale d'évacuation, a permis d'améliorer la sécurité des barrages, notamment aux États-Unis.

Selon l'étude de [Foster \*et al.\* \(2000\)](#) pour les accidents sur les grands barrages en remblai à travers le monde avant 1986, la rupture est due à un tremblement de terre dans 1 % des cas, à un problème structurel dans 5 % des cas, à de l'érosion interne dans 46 %, et à une surverse dans 48 % des cas.

Dans l'étude plus récente de [Bacchus \*et al.\* \(2019\)](#), les ruptures liées à un trop-plein et une surverse représentent 40 % des défaillances sur les grands ouvrages, et dans 75 % des cas, le problème est venu de l'évacuateur de crue. Si avant 1975, un mauvais dimensionnement était en cause dans 80 % des cas, il n'est impliqué depuis que dans 50 % des cas; l'obstruction de l'évacuateur, un défaut d'entretien, ou des défaillances sur des vannes sont devenus les causes majoritaires.

Le projet « Érosion Interne des Ouvrages Hydrauliques » (ERINOH) a été conduit en France par un groupement d'organismes publics et privés français au début des années 2010 ([Fry \*et al.\*, 2015](#); [Deroo & Fry, 2022](#)). Il s'est intéressé plus spécifiquement à la rupture des ouvrages en remblai. Le projet a notamment abouti à une base données qui recense 288 événements à travers le monde entre 1846 et 2014. Ces événements concernent :

- des grands barrages (16 événements);
- des petits barrages (30 événements);
- des digues de canal (32 événements);
- des digues fluviales (207 événements).

La majorité des problèmes ont donc été observés sur des ouvrages linéaires (digue le long de cours d'eau) de petites dimensions, certains très anciens (remontant au XVIII<sup>e</sup> siècle) et dont la constitution est moins complexe que les ouvrages en remblai des barrages modernes. Tous les événements n'ont pas conduit à la rupture complète de l'ouvrage: environ un tiers des événements ont été des incidents plus ou moins graves sans rupture de l'ouvrage. Lorsque la cause des accidents a pu être déterminée, les auteurs ont noté que presque les deux tiers de ces accidents résultaient d'érosion interne :

- formation d'une brèche totale (34 % des cas), dont 71 % intervenus lors d'une crue;
- formation d'une brèche partielle (15 % des cas);
- rupture par renard (4 % des cas)
- formation de renards sans rupture (20 % des cas);
- effondrement/tassement du sol/fontis (18 % des cas);
- érosion régressive des talus (5 % des cas);
- glissement du talus (4 % des cas).



**Figure 3.3** – Rupture du barrage de Taum Sauk dans le Missouri (États-Unis) en décembre 2005.



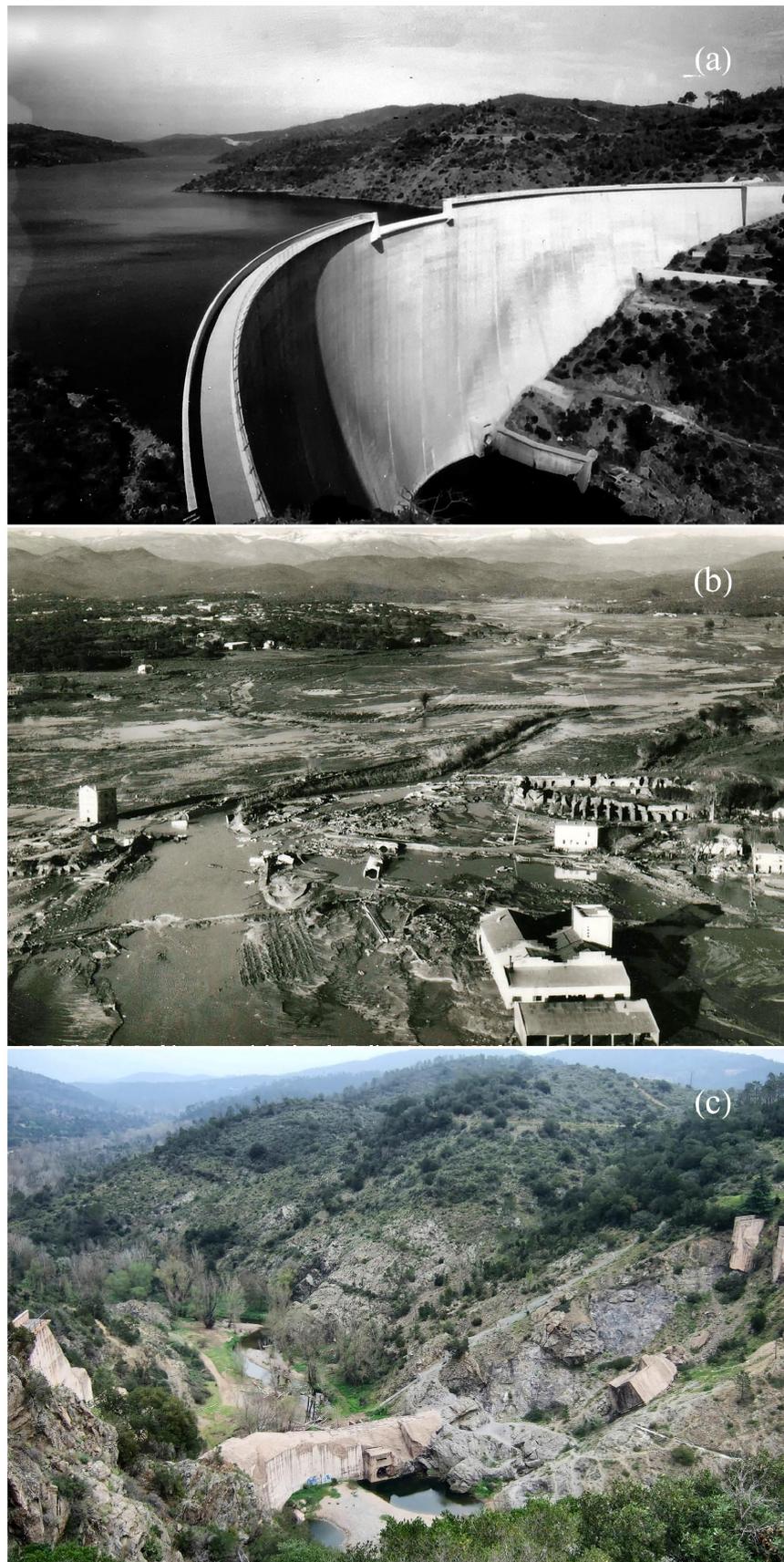
Figure 3.4 – Barrage du Vajont après le mouvement de terrain du 9 octobre 1963.



Figure 3.5 – Village de Longarone après la catastrophe de 1963. Source : [Montagna TV](#).



**Figure 3.6** – Évacuateur de crue du barrage d’Oroville (Californie). (a) Vue d’ensemble avant l’accident. (b) Évacuateur de crue en bon état de fonctionnement lors de la crue de juillet 2011. (c) Dommages sur l’évacuateur de crue après la crue de février 2017, qui a entraîné la ruine de l’ouvrage. Le barrage en remblai n’a pas été touché. Sources : California Department of Water Resources avec (a) Florence Low, (b) William Croyle, (c) Dale Kolke ; [Environmental Science Associates](#), [New Civil Engineer](#) et [Wikimedia](#).



**Figure 3.7** – Barrage de Malpasset. (a) Vue du barrage en 1959. (b) Le quartier des Arènes, Fréjus (Var, France), le 3 décembre 1959. (c) Vue actuelle depuis l’amont du barrage (Cliché Paul Royet). Source : [Irma Grenoble](#) (archives municipales de Fréjus et Paul Royet).

**Tableau 3.1** – Liste de quelques grands accidents intervenus sur des barrages de retenue artificielle. Se reporter au site [www.hydrocoop.org](http://www.hydrocoop.org) ou [www.wikiwand.com](http://www.wikiwand.com) pour de plus amples informations.

<i>Nom</i>	<i>Année</i>	<i>Lieu</i>	<i>Détails</i>	<i>Dommmages</i>
Dale Dike Reservoir	1864	South Yorkshire, Royaume-Uni	défaut de construction, fuite dans le mur	Loxley, Don, le centre de Sheffield dévastés (plusieurs centaines de morts)
South Fork Dam	1889	Johnstown, Pennsylvania, États-Unis	rupture consécutive à de fortes pluies (mais barrage mal entretenu)	2200 morts à Johnstown, Pennsylvania, USA,
Gleno	1923	Lombardie, Italie	rupture consécutive à de fortes pluies, ciment de mauvaise qualité et ancrages insuffisants	trois villages touchés, 356 morts
Llyn Eigiau Dam	1925	Dolgarrog, Royaume-Uni	rupture consécutive à de fortes pluies (630 mm en 5 j)	village de Dolgarrog endommagé, 17 morts
St. Francis Dam	1928	Valencia, Californie, États-Unis	instabilité géologique non détectée	~ 600 morts
Malpasset	1959	Fréjus, France	ouverture d'une faille géologique entraînant la rupture de la voûte	421 morts
Baldwin Hills Reservoir	1963	Los Angeles, Californie, États-Unis	subsidence causée par la sur-exploitation des champs de pétrole voisins	277 habitations détruites, 5 morts.
Barrage du Vajont	1963	Italie	vague d'impulsion créée par l'entrée massive d'un gigantesque mouvement de terrain	destruction de plusieurs villages, entraînant la mort de 2000 personnes environ

Buffalo Creek	1972	Virginie occidentale, États-Unis	affaissement d'une digue d'un terril minier (charbon) sous l'effet de fortes pluies	une crue d'un volume 0,5 Mm <sup>3</sup> d'un mélange de produits miniers et d'eau en résultat, détruisant plusieurs villages et tuant 125 personnes
Barrages Banqiao et Shimantan	1975	Chine	pluies extrêmes dépassant la capacité du barrage	la crue tua environ 26000 personnes ; 145 000 moururent à cause des épidémies et de la famine. En tout, 6 millions d'habitations furent détruites
Teton Dam	1976	Idaho, États-Unis	renard	11 personnes tuées, 13000 têtes de bétail emportées
Kelly Barnes Dam	1977	Géorgie, États-Unis	inconnu (erreur de conception ?)	39 morts
Lawn Lake Dam	1982	Rocky Mountain National Park, États-Unis	renard	0,8 Mm <sup>3</sup> d'eau furent libérés, causant la mort de 2 campeurs à l'aval et 31 millions US\$ de dommages à la ville d'Estes Park (Colorado).
Big Bay Dam	2004	Mississippi, États-Unis		104 bâtiments détruits
Barrage de Shakidor	2005	Pakistan	pluies extrêmes	~ 70 morts
Taum Sauk réservoir	2005	Lesterville, Missouri, États-Unis	sur-remplissage accidentel du barrage (erreur de consigne)	pas de victime
Barrage de Koshi	2008	Koshi, Népal	surverse après la mousson	250
Barrage de Xe-Pian Xe-Namnoy	2018	Attapeu, Laos	rupture après fortes pluies	36
Barrage de Rishiganga	2021	Chamoli, Inde	vague de submersion	145
Barrage de Kakhovka	2023	Kherson, Ukraine	ouvrage miné par l'armée russe	pas de victime, 16 000 personnes évacuées à Kherson

---



**Figure 3.8** – Rupture du barrage en terre de Teton (Idaho) le 5 juin 1976. Source : [Wikimedia](#).

### ***3.1.2 Rupture de petit barrage d'accumulation***

Les Alpes ont été équipées au cours du xx<sup>e</sup> siècle d'un grand nombre de barrages pour la production d'électricité. Plus récemment, au cours des 10–20 dernières années, des petits barrages ont été construits pour la production de neige de culture dans les stations de ski et, dans une moindre mesure, pour assurer l'approvisionnement en eau potable lors des pics de fréquentation touristique. On prévoit au cours des 10–20 prochaines années un accroissement considérable du nombre de petites retenues (d'un facteur 3 environ d'après les études prospectives) et une augmentation du volume de stockage (qui passerait de l'ordre de 50 000 m<sup>3</sup> en moyenne actuellement à quelques centaines de milliers de m<sup>3</sup> dans le futur).

Les petites retenues peuvent connaître des accidents plus ou moins graves. Ainsi, en août 2004 et au printemps 2005, deux ouvrages ont connu une rupture lors de leur mise en eau en France, entraînant une ruine partielle ou totale. En mars 2006, une retenue pour la production de neige de culture à Pelvoux (Hautes-Alpes, France) a été impactée et vidée par une avalanche, heureusement sans conséquence pour le camping (vide en saison) situé en contrebas. Une situation similaire est observée aux États-Unis, qui a un parc de 2,5 millions de petites retenues, un certain nombre d'entre elles étant considérées comme dangereuses (Brewitt & Colwyn, 2020).



**Figure 3.9** – Retenue d’altitude située dans le bassin-versant de la Bouisse (station de Pelvoux, Hautes-Alpes, France) après qu’une avalanche est entrée dans la retenue et a expulsé le volume d’eau le 9 mars 2006. Source : (Evette *et al.*, 2011).

### 3.1.3 Rupture de lac morainique et glaciaire

Aux risques qualifiés d’anthropiques mentionnés plus haut, il faut également ajouter les risques liés aux lacs naturels :

- notamment ceux qui sont en train de se former à la suite du retrait glaciaire. Durant le « petit âge glaciaire » (de la fin du xvi<sup>e</sup> siècle au milieu du xix<sup>e</sup> siècle), les glaciers des Alpes avaient fortement avancé. Leur retrait a laissé des moraines, qui ont piégé une partie des eaux de fonte des glaciers. Ces moraines sont en général constituées de matériaux très grossiers, sans réel liant si ce n’est une gangue de glace qui peut assurer une certaine cohésion ; elles sont en général assez hautes (avec un rapport hauteur/largeur assez faible) et raides ;
- outre ces lacs périglaciaires, les glaciers peuvent former des lacs glaciaires ou des poches d’eau en leur sein. La rupture des glaces emprisonnant le volume d’eau conduit à des crues importantes ;
- certains lacs peuvent se former lorsqu’une vallée drainée par un cours d’eau est soudainement obstruée. En effet, à la suite d’un écroulement rocheux, d’un déplacement du sol à la suite d’un tremblement de terre, d’un dépôt d’avalanche ou de lave torrentielle, le cours d’eau peut être barré, ce qui forme un lac naturel.

Les lacs morainiques peuvent céder pour plusieurs raisons (Clague & Evans, 2000; Korup & Tweed, 2006) :

- les lacs étant souvent entourés de pentes abruptes, des glissements de neige,

de sol, ou de glace sont possibles. Une avalanche ou un mouvement de terrain peut provoquer une intumescence qui submerge la moraine. Le flot déversé sur la paroi raide de la moraine entraîne en général une incision rapide, qui forme une brèche dans le talus morainique, puis la rupture d'une partie de la moraine. En août 1985, une avalanche de glace dans le lac Dig Tsho au Népal provoqua l'une des plus grosses crues d'origine glaciaire connues à ce jour (8 million m<sup>3</sup> d'eau libérés). En juillet 1983, une rupture du glacier Cumberland dans le lac Nostetuko (Canada) a généré une vague qui a incisé la moraine. Cette érosion s'est poursuivie pendant 4 h, formant une brèche entaillant sur une profondeur de 40 m, libérant  $6,5 \times 10^6$  m<sup>3</sup> d'eau et entraînant un volume d'environ  $10^6$  m<sup>3</sup> de sédiment ;

- le lac collectant les eaux de pluie, de fonte des neiges et des glaces, il peut déborder si les eaux drainées arrivent en quantité excessive. Le débordement entraîne en général la rupture de la moraine par érosion. En juillet 1996, le lac Ha! Ha! (Québec, Canada) déborda à la suite de précipitations très importantes (200 mm de pluie sur 5000 km<sup>2</sup>), ce qui entraîna la rupture de la digue morainique et une crue exceptionnelle (débit de l'ordre de 1100 m<sup>3</sup>/s, soit 8 fois la crue centennale). Le débordement de la rivière Ha! Ha! amena à la création d'un nouveau lit et mobilisa plusieurs millions de m<sup>3</sup> de sédiment (Lapointe *et al.*, 1998) ;
- comme une partie de la stabilité de la moraine est assurée par la glace contenue dans le matériau grossier, la fonte de cette glace peut amener à une perte de cohésion et à une perméabilité accrue, et finalement à la rupture (géotechnique) de la moraine sous l'effet de la poussée des eaux ;
- une instabilité (résonance) de vagues sur la surface du lac peut entraîner la formation d'ondes déferlantes qui submerge le moraine. Les oscillations de masses d'eau (phénomène appelé seiche) sont impliquées dans quelques ruptures de barrage dans le monde (Balmforth *et al.*, 2008) ;
- la perméabilité d'une moraine est très hétérogène. Le matériau présente en général une granulométrie bimodale avec, d'une part, de gros blocs et, d'autre part, des éléments plus fins (arène granitique, sable) qui colmate les vides entre blocs. L'eau peut néanmoins s'infiltrer et créer des « renards », c'est-à-dire des circulations d'eau au sein de la moraine. Si la conduite naturelle creusée par les eaux d'infiltration croît en taille, cela peut entraîner une forte érosion interne, puis la rupture de la moraine ;
- les tremblements de terre peuvent également déstabiliser une moraine et entraîner la rupture. Le tremblement de terre de mai 1970 au Pérou entraîna la vidange partielle du lac Safuna Alta, qui mobilisa environ 25 m d'eau dans le lac, soit  $5 \times 10^6$  m<sup>3</sup> d'eau ; en avril 2002, un écroulement rocheux affecta de nouveau ce lac (Hubbard *et al.*, 2005).

Les crues provoquées par la rupture d'un lac glaciaire ou morainique sont généralement dévastatrices. On parle parfois de *débâcle glaciaire*, et de *glacial lake outburst*



**Figure 3.10** – Le village de Täsch après la crue du Täschbach en juin 2001. Source : Crealp.

*flood* (GLOF) en anglais (Zhang *et al.*, 2024). Quelques exemples de rupture de lac :

- Les ruptures de poche glaciaire peuvent provoquer des dommages importants en zone de montagne à cause des fortes vitesses, mais également des nombreux débris et sédiments charriés par l’onde de crue. En Suisse, le glacier Giétro<sup>2</sup>, dominant aujourd’hui le barrage de Mauvoisin dans le val de Bagnes (Valais), a connu plusieurs débâcles meurtrières (1595 et 1818). En France, en 1898, la débâcle du glacier de Tête-Rousse a entraîné un mélange d’environ 300 000 m<sup>3</sup> d’eau, de glace ainsi que 800 000 m<sup>3</sup> de matériaux sur son parcours ; 175 personnes furent tuées à Saint-Gervais-les-Bains. Plus récemment, en juin 2001, le petit lac du Weingarten a rompu sa digue morainique et s’est déversé dans un torrent dominant le village de Täsch (Valais), remobilisant les laisses de crues (dépôts de lave de l’automne 2000) et causant d’importants dommages au village (voir figure 3.10).
- Les ruptures de barrage naturel sont aussi des causes de crue torrentielle dévastatrice. En 1191, un écoulement rocheux dans le défilé de la Vaudaine (France) barra la Romanche entre Bourg-d’Oisans et Grenoble ; un lac se forma, mais la

2. La catastrophe de Giétro (ou Giétroz) en 1818 a endeuillé le Valais : en plein petit âge glaciaire, des blocs de glace se détachent continuellement du glacier du Giétro et s’accumulent dans le lit de la Dranse de Bagnes jusqu’à faire obstacle à l’écoulement de la Dranse (au niveau actuel occupé par le barrage de Mauvoisin). C’est ainsi qu’entre 1806 et 1818, un lac de 3,5 km de long se forme à l’amont de ce cône. Malgré le percement d’une galerie pour drainer le lac, le barrage naturel cède sous la pression de l’eau, provoquant la vidange rapide du lac et causant la mort d’environ 40 personnes.

digue naturelle se rompit en 1219 et la vidange du lac entraîna une crue torrentielle d'ampleur exceptionnelle, qui aurait détruit en partie Grenoble (à l'époque une petite bourgade) (Berlioz, 1997). En 563, l'écroulement du Tauredunum dans la vallée du Rhône<sup>3</sup> a causé un tsunami sur le Léman, dont les effets dévastateurs se firent sentir jusqu'à Genève.

- Les scientifiques pensent qu'un effondrement d'un glacier du pic Raunthi (district de Chamoli, État d'Uttarakhand, près de la frontière tibétaine) en Inde a causé la formation d'un lac temporaire. Le 7 février 2021, la rupture du barrage de glace a entraîné une forte débâcle le long des rivières Alaknanda et Dhauliganga. Une cinquantaine d'ouvriers travaillant sur le barrage hydroélectrique de Rishiganga sont portés disparus (voir Fig. 3.12).

On emploie parfois le mot d'origine islandaise « jökulhlaup » pour désigner une crue liée à la libération d'un volume d'eau depuis un glacier concerné par une éruption volcanique (Roberts, 2005; Emmer, 2017).

Comme le montrait le tableau 2.2, la plupart des méga-crues sont consécutives à des ruptures de grands lacs glaciaires. La Suisse a été, et reste toujours, très concerné par ce risque, mais il reste très localisé dans certaines vallées, avec souvent les mêmes appareils glaciaires qui donnent naissance à des lacs, dont la rupture entraîne des débâcles (voir tableau 3.2). À l'échelle de la planète, les observations menées par plusieurs équipes montrent qu'avec le réchauffement climatique, le risque de débâcle a sensiblement augmenté (Westoby *et al.*, 2014; Emmer *et al.*, 2016; Nie *et al.*, 2018; Harrison *et al.*, 2018). Dans leur enquête à travers les différents continents, Carrivick & Tweed (2016) ont noté que les débâcles avaient pour origine

- dans 70 % des cas, des barrages glaciaires,
- dans 9 % des cas, des lacs morainiques,
- et pour 3 % des cas, des éruptions volcaniques.

(Il s'ensuit que 16 % n'ont pas une origine déterminée). Les régions connaissant le plus de débâcles sont l'Alaska, les Alpes, l'Islande, la cordillère Blanche au Pérou, et l'Himalaya.

### 3.1.4 Rupture de digue

En août 2002, l'Elbe et ses affluents entrèrent en crue, entraînant de graves inondations en Tchéquie et en Allemagne (environ 100 morts et 20 millions € de dommages).

---

3. Où est ce sommet? Dans un scénario actuellement couramment développé, l'écroulement aurait affecté la falaise de la Suche au Grammont (Kremer *et al.*, 2012). Pour expliquer le même phénomène, certains auteurs indiquent que l'éboulement serait parti des Dents du Midi et non du Grammont (Montandon, 1925), ce qui semblerait plus logique compte tenu de la configuration de la vallée du Rhône entre Martigny et Noville, si le tsunami est le résultat d'une débâcle.

**Tableau 3.2** – Quelques événements de débâcle glaciaire survenus en Suisse au cours des deux derniers siècles. Les volumes drainés  $V$  sont exprimés en millions de  $m^3$  et les débits de pointe en  $m^3/s$ . Source : (Haerberli, 1983; Walder & Costa, 1996; Raymond *et al.*, 2003; Bohorquez & Darby, 2008; Worni *et al.*, 2014).

Date	Lieu	$V$	$Q_p$
1818	glacier du Giétro (VS)	20	8000 à 20 000
1878	lac de Märjelen, glacier d'Aletsch (VS)	10,7	300
1913	lac de Märjelen, glacier d'Aletsch (VS)	4,5	195
1943	glacier de Ferpècle (VS)	1,6	400
1944	lac de Gorner, glacier du Gorner (VS)	6	200
1951	lac de Grindelwald (BE)	0,135	74,6
1952	glacier de Ferpècle (VS)	0,25	230
1968	lac de Gorner, glacier du Gorner (VS)	2,9	29
2008	lac de Grindelwald (BE)	0,57	111

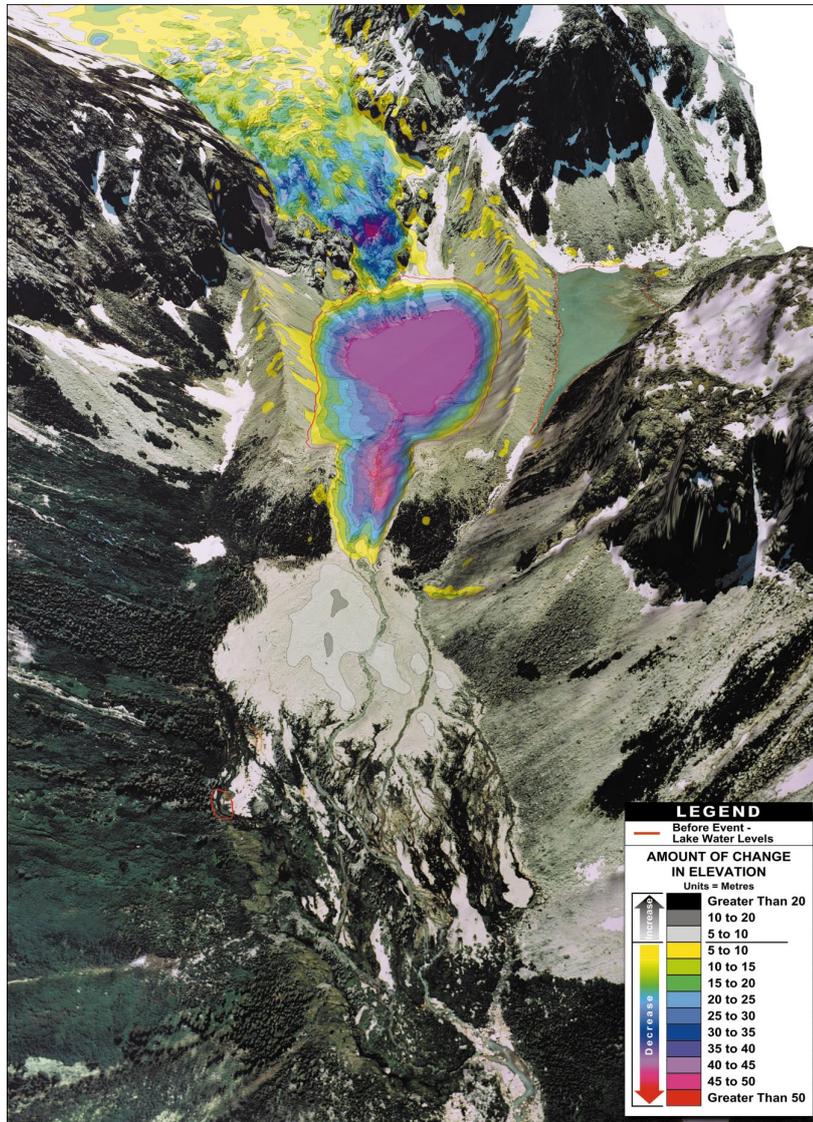
Plusieurs digues cédèrent entre Dresde et Magdebourg en Allemagne ; notamment, le bassin de rétention près de la bourgade de Glasshütte rompit et libéra 60 000  $m^3$  d'eau qui causa des dommages aux bâtiments de la ville.

### 3.1.5 Rupture de terrils et bassins de décantation

Certains phénomènes assimilés à des ruptures de barrage concernent des ruptures de terrils miniers, des bassins de rétention/décantation des eaux polluées, et aires de stockage<sup>4</sup>. Plus de 80 ruptures de tels bassins de décantation, dont au moins 18 au cours de la dernière décennie. Voici pour l'Europe quelques catastrophes marquantes :

- catastrophe de Bento Rodrigues (Brésil) : le 5 novembre, le village de Bento Rodrigues dans l'État de Minas Gerais est touché par un écoulement de boue toxique à la suite de la rupture de deux bassins de décantation. La cause de cette rupture n'est pas connue. Elle a mobilisé 60  $Mm^3$  de boue. On compte au moins 20 victimes. La vallée est fortement polluée (voir figure 3.13) ;
- catastrophe de l'usine d'Ajka (Hongrie) : le 4 octobre 2010, une digue haute de 30 m s'effondre et laisse s'échapper environ 1  $Mm^3$  de boues contenant des métaux lourds et résultant du traitement de l'uranium. La crue a dévasté Kolontar, le village le plus proche, et plus en aval Devecser et Somlóvásárhely. En tout, 9 personnes sont tuées, plusieurs sont brûlées par les boues toxiques, des bâtiments sont endommagés sur plusieurs hectares pour un coût estimé entre 5 et

4. Dans l'industrie minière, il est courant de stocker les eaux chargées de métaux lourds et autres polluants, produites lors de l'extraction et lavage des minerais, en les confinant dans des enceintes en remblai. Par évaporation, filtration, réactions chimiques, la phase liquide se sépare lentement de la charge solide.



**Figure 3.11** – Rupture du lac morainique Nostetuko (Colombie britannique, Canada) en juillet 1983. La chute du front du glacier Cumberland dans le lac a entraîné une onde de submersion, qui a incisé la moraine et formé une brèche. La photographie reporte les changements de topographie sur le site entre 1981 et 1994. D’après (Clague & Evans, 2000).

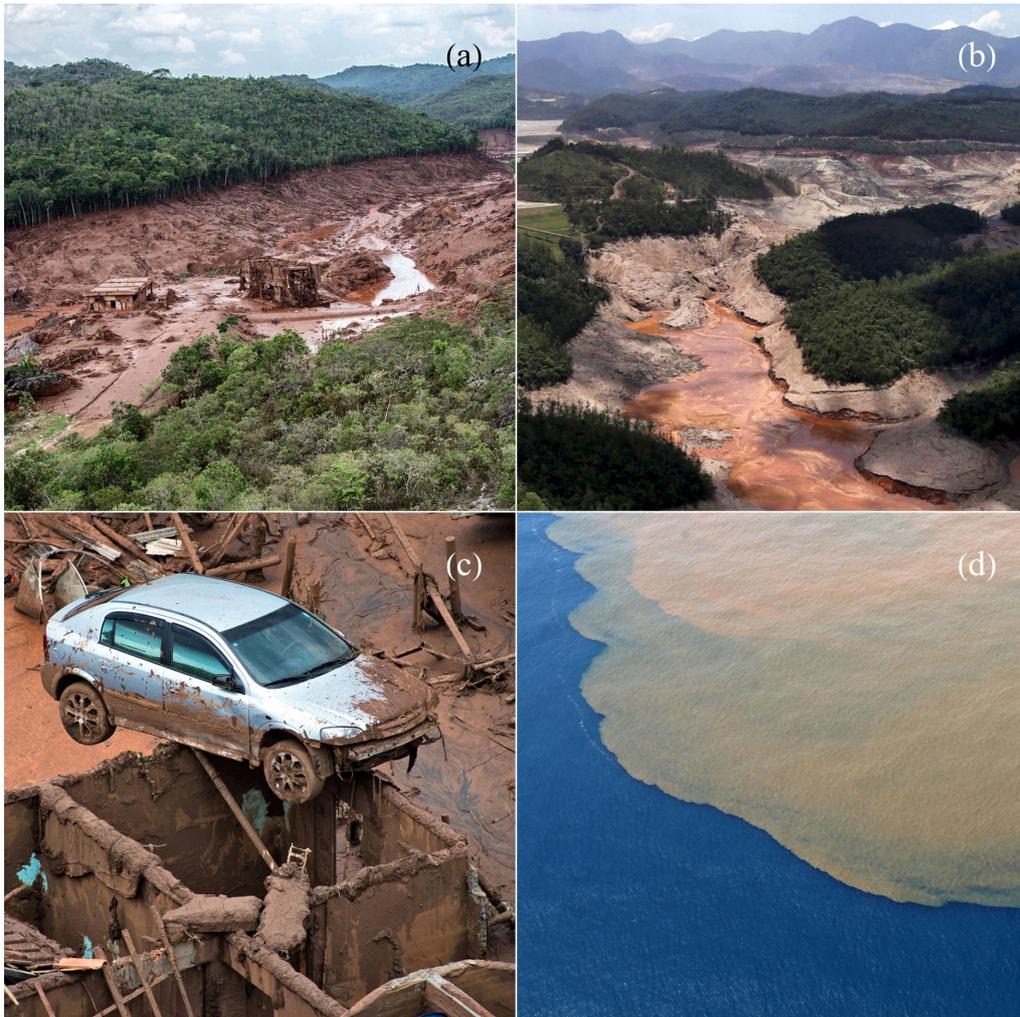
10 M€. Le sol et les eaux sont gravement pollués pour plusieurs années (voir figure 3.14);

- catastrophe d’Aznaicóllar (Andalousie, Espagne): le 25 avril 1998, la rupture



**Figure 3.12** – Passage de la débâcle glaciaire au niveau de l’usine hydroélectrique de Tapovan sur la Rishiganga (Chamoli, Inde) le 7 février 2021. Source : Utkarsh Singh (Twitter) sur [India Today](#).

- d’une digue libère un volume considérable ( $8 \text{ km}^3$ ) d’eau contaminée par des métaux lourds et de résidus miniers. La rupture a généré une onde de crue dans les rivières Guadiamar et Guadalquivir et a pollué le parc naturel de Doñana ;
- catastrophe du Val de Stava (Trentin-Haut-Adige, Italie): le 19 juillet 1985, un barrage retenant les boues de décantation d’une mine cède sous la pression de l’eau après qu’un drain vétuste s’est bouché. En environ une trentaine de secondes, ce sont quelque  $200\,000 \text{ m}^3$  de boue qui sont libérés et s’écoulent dans le Rio di Stava. La coulée de boue a tué 268 personnes et détruit 62 bâtiments dans le village de Stava, près de Tesero.



**Figure 3.13** – Le 5 novembre 2015, deux bassins de décantation miniers cèdent près de la ville de Bento Rodrigues (Brésil) causant victimes et pollution dans toute la vallée. Cet événement constitue sans doute la pire catastrophe écologique de toute l’histoire récente du Brésil. Source: [The Atlantic](#).



**Figure 3.14** – Zones inondées par la rupture du bassin de décantation de l’usine d’Ajka en Hongrie. Photographie satellitaire prise le 9 octobre 2010. Source : [NASA](#).

**Tableau 3.3** – Liste de quelques grands accidents au cours des deux dernières décennies. Source : [www.wise-uranium.org](http://www.wise-uranium.org).

<i>Date</i>	<i>Site</i>	<i>Type</i>	<i>Détails</i>	<i>Dommmages</i>
25 jan. 2019	Brumadinho, Minas Gerais, Brésil	rupture de digue	boue riche en minerai	pollution, 57 morts, 300 disparus
27 oct. 2016	Mulberry, Floride, EUA	doline	840 000 m <sup>3</sup> de boue riche en phosphate	pollution
5 nov. 2015	Bento Rodrigues, Brésil	rupture de digue	32 M m <sup>3</sup> de boue	pollution lourde sur 663 km de rivière, 17 morts
4 oct. 2010	Kolontár, Hongrie	rupture de digue	700 000 m <sup>3</sup> de boue déversés	8 km <sup>2</sup> de terres dévastés, 10 morts
29 août 2009	Karamken, Magadan, Russie	rupture de digue après de fortes pluies	?	1 mort, 11 maisons détruites
14 mai 2009	Huayuan County, Préfecture de Xiangxi, Chine	rupture de digue	?	3 morts
22 déc. 2008	Usine de Kingston, Harriman, Tennessee, EUA	rupture du mur de rétention	4,1 Mm <sup>3</sup> de boue lâchés	1,6 km <sup>2</sup> de terrain dévastés, pas de victime
8 sep. 2008	Taoshi, province de Shanxi, Chine	effondrement d'un terril à la suite de pluies	?	254 morts
30 avr. 2006	Miliang, Province de Shaanxi, Chine	rupture de digue lors du réhaussement	?	17 morts, forte pollution de la rivière Huashui
14 avr. 2005	Bangs Lake, Mississippi, EUA	rupture de terrils après des pluies	64 350 m <sup>3</sup> d'acide déversés	forte pollution
30 nov. 2004	Pinchi Lake, British Columbia, Canada	rupture de digue lors des travaux de rénovation	6,000 to 8,000 m <sup>3</sup> de débris déversés	5,500 ha de terrain concernés

5 sep. 2004	Riverview, Florida, USA	rupture de digue lors du passage du cyclone Frances	227,000 m <sup>3</sup> d'acide déversés	pollution marine
22 mai 2004	Partizansk, Primorski Krai, Russie	brèche dans la digue	160,000 m <sup>3</sup> de débris fins	pollution
20 mars 2004	Malvésí, Aude, France	rupture de digue	30 000 m <sup>3</sup> de boue déversés	pollution du canal du Tauran
3 oct. 2003	Cerro Negro, Petorca prov., Quinta region, Chili	rupture de digue	50,000 tonnes of débris lâchés	pollution
22 juin 2001	Sebastião das Águas Claras, Nova Lima district, Minas Gerais, Brésil	rupture de terril	?	5 morts
18 oct. 2000	Nandan county, province de Guangxi, Chine	rupture de digue	?	env. 115 morts
11 oct. 2000	Inez, Martin County, Kentucky, EUA	rupture de digue par effondrement de cavité	950 000 m <sup>3</sup> de débris déversés	120 km de rivières pollués
8 sep. 2000	mines d'Aitik, Gällivare, Suède	rupture de digue (drain mal dimensionné)	2,5 million m <sup>3</sup> déversés	?
10 mars 2000	Borsa, Roumanie	rupture de digue après de fortes pluies	22 000 t de métaux lourds lâchés	pollution de la rivière Vaser stream
30 jan. 2000	Baia Mare, Roumanie	rupture de digue par surverse	100 000 m <sup>3</sup> d'eaux polluées déversées	contamination majeure des eaux du bassin-versant de la Tisza

---

## 3.2 Rupture de barrage en ingénierie des risques

### 3.2.1 Bases réglementaires

En Suisse, les bases légales relatives à la sécurité des ouvrages d'accumulation sont contenues dans :

- historiquement, l'article 3bis de la loi fédérale du 22 juin 1877 sur la police des eaux;
- plus récemment l'ordonnance du 7 décembre 1998 sur la sécurité des ouvrages d'accumulation (OSOA).

L'article 3bis de la loi sur la police des eaux énonce que le Conseil fédéral doit veiller à ce que pour tout barrage (existant ou projeté), des mesures spécifiques soient mises en œuvre pour prévenir les dangers et les dommages qui pourraient résulter d'un problème dans leur construction, d'un défaut d'entretien, ou d'acte délibéré (bombardement, vandalisme, terrorisme).

L'ordonnance sur la sécurité des ouvrages d'accumulation (OSOA) complète la police des eaux. Cette ordonnance concerne tout ouvrage :

- dont la hauteur de retenue au-dessus du niveau d'étiage du cours d'eau (ou du niveau du terrain naturel) est supérieure ou égale à 10 m;
- dont la hauteur est comprise en 5 et 10 m, avec une capacité de retenue supérieure à 50 000 m<sup>3</sup>;
- qui représentent un danger particulier pour les biens et les personnes (selon les critères édictés au tableau 3.6).

L'OSOA confie la surveillance des petites retenues aux cantons.

En France, la réglementation relative à la sécurité des barrages a longtemps été dictée par la circulaire interministérielle du 14 août 1970, qui introduisait la notion de « barrage intéressant la sécurité publique » comme seul classement des retenues. Cette circulaire a été récemment abrogée et remplacée par le décret n° 2007-1735 du 11 décembre 2007 relatif à la sécurité des ouvrages hydrauliques. Ce décret introduit un classement avec quatre classes d'ouvrages définies selon la géométrie du barrage et le volume de la retenue (voir tableau 3.4). Le décret n° 93-743 du 29 mars 1993 (modifié par le décret n° 2007-397 du 22 mars 2007) relatif à la nomenclature des opérations soumises à autorisation indique que toute construction d'ouvrage hydraulique est soumise à autorisation préalable; la seule exception concerne les ouvrages de classe D qui ne barrent pas le lit mineur d'une rivière. Notons enfin que le préfet du département dans lequel l'ouvrage hydraulique est construit peut modifier le classement de cet ouvrage s'il y a suffisamment d'éléments qui établissent un risque pour les personnes et les biens.

**Tableau 3.4** – Classes de barrage de retenue en France en fonction de la hauteur  $H$  (mesurée verticalement entre le terrain naturel et le sommet de l’ouvrage) et  $V$  le volume d’eau exprimé en millions de  $m^3$ . D’après le décret du 11 décembre 2007 (Peyras & Mériaux, 2009).

Classe	Caractéristiques géométriques
A	$H \geq 20$ m
B	ouvrage non classé en A, et pour lequel $H^2\sqrt{V} \geq 200$ et $H \geq 10$ m
C	ouvrage non classé en A ou B et pour lequel $H^2\sqrt{V} \geq 20$ et $H \geq 5$ m
D	ouvrage non classé en A, B, ou C et pour lequel $H \geq 2$ m

Le classement a d’importances répercussions tant pour l’instruction du dossier (désignation du service instructeur, éléments du dossier) que pour l’exploitation de l’ouvrage (surveillance et auscultation, visite technique, dossier d’ouvrage, etc.). En particulier, le choix de la période de retour de la crue de projet pour les barrages en remblai dépend de la classe de l’ouvrage et du risque encouru, comme le récapitule le tableau 3.5.

**Tableau 3.5** – Période de retour minimale de la crue de projet des barrages en remblai en fonction de la classe, de la hauteur  $H$  (mesurée verticalement entre le terrain naturel et le sommet de l’ouvrage) et du volume  $V$  (exprimé en millions de  $m^3$ ). D’après (Peyras & Mériaux, 2009).

Classe	Absence d’enjeu	Présence d’enjeu
A	$T = 10\,000$ ans	$T = 10\,000$ ans
B	$T = 5\,000$ ans	$T = 10\,000$ ans
C	$T = 1\,000$ ans	$T = 5\,000$ ans
D avec $H^2V^{1/2} \geq 5$	$T = 500$ ans	$T = 1\,000$ ans
D avec $H^2V^{1/2} < 5$	$T = 100$ ans	$T = 1\,000$ ans

Pour toute information générale, on pourra consulter les deux opuscules sur la sécurité des barrages édités par la Commission internationale des grands barrages « Étude d’onde de submersion de barrage, synthèse et recommandations » (ICOLD, 1998) et « Évaluation du risque dans la gestion de la sécurité du barrage » (ICOLD, 2005).

### 3.2.2 Cas des petites retenues d’accumulation

En Suisse jusqu’à l’ordonnance sur la sécurité des ouvrages d’accumulation, les nouveaux ouvrages de retenue ont échappé aux contraintes réglementaires imposées aux grands barrages « intéressant la sécurité publique » car le plus souvent, ils sont de petite taille et offrent une capacité de retenue qui reste modérée (de l’ordre de  $10^4$ – $10^5$   $m^3$ ) (Bischof *et al.*, 2002a). L’ordonnance a permis de corriger cette situation en

confiant aux cantons le soin d'exercer une surveillance des petits ouvrages. En France, il n'existe pas de réglementation précise pour les petites retenues. Un récent rapport parlementaire – faisant suite à un rapport confidentiel d'EDF éventé par la presse – a pointé la situation jugée préoccupante du parc des barrages en France (Kert, 2008).

Les ouvrages d'accumulation sont pourtant placés dans un milieu naturel hostile et donc exposés à des contraintes sévères (cycle gel/dégel, vieillissement des bétons, géo-membranes, etc.) ainsi qu'à des dangers naturels (mouvement de terrain, avalanche, chute de blocs, etc.). Comme ils sont assez souvent construits à l'amont d'enjeux significatifs (typiquement une station de ski), leur rupture peut éventuellement causer des dommages sévères.

Pourtant, la prise en compte de la sécurité de ces ouvrages n'a été que partiellement prise en compte. Ainsi, une enquête menée dans le canton du Valais a révélé que 41 petites retenues avaient déjà construites et que parmi elles, 11 présentaient une menace sérieuse en cas de rupture. En France, une enquête diligentée par les services du Ministère française en charge de l'agriculture sur la Haute-Savoie en 2005 a mis en évidence des carences graves sur les 16 ouvrages de ce département (Mériaux *et al.*, 2005; Evette *et al.*, 2009):

- absence d'étude d'impact en cas de rupture du barrage pour la majorité des ouvrages;
- absence de qualification du bureau de maîtrise d'œuvre pour ce type d'ouvrage;
- étude hydrologique sommaire;
- évacuateur de crue sous-dimensionné dans 75 % des cas;
- défaut d'étanchéité des géo-membranes dans 30 % des cas;
- absence de dispositif d'auscultation et de procédure de suivi dans 80 % des cas.

La responsabilité de la maîtrise d'œuvre, maîtrise d'ouvrage, et des chargés d'étude était soulignée dans cette étude; on pourrait également dresser la liste des erreurs lourdes dans l'instruction des dossiers d'autorisation de travaux par les services en charge de ces dossiers. Ce qu'il convient donc de pointer ici, c'est l'insuffisance de la sécurité des petits barrages de montagne (Peyras & Mériaux, 2009).

L'effet de la rupture d'un petit barrage est l'un des points les plus importants pour estimer la sécurité d'un barrage et c'est assurément l'un des moins bien traités, ce qui peut s'expliquer par plusieurs éléments:

- forte pente des exutoires (typiquement plus de 10 %) alors que les codes de calcul à disposition des bureaux d'étude ne permettent pas de faire de l'hydraulique au-delà de quelques pour-cent;
- faible connaissance de la dynamique des ondes de rupture sur forte pente (la solution de Ritter est établie sur fond horizontal);
- fort transport solide potentiellement associé à l'onde de rupture;
- lit mobile composé de blocs de toute taille, dont certains restent en général en

place et influent sur le transport solide (notamment dans les lits avec une structuration alternée en seuils et mouilles);

- volume engagé relativement faible (quelques dizaines de milliers de m<sup>3</sup>), pour lequel les effets de frottement jouent un rôle essentiel dans la propagation;
- absence de connaissances précises sur les conditions initiales : ouverture d'une brèche dans le cas d'une petite retenue ? Effet de surverse en cas d'avalanche ou de mouvement de terrain (comme pour le Vajont en 1963) ?
- rôle de la rugosité du lit torrentiel (souvent de gros blocs) et des ouvrages de génie civil (ponts, seuils).

En pratique, ni les méthodes analytiques, ni les codes de calcul établis pour la rupture de barrage dans le cas des grandes retenues ne sont applicables pour de petites retenues en montagne. À défaut, les chargés d'étude emploient des méthodes très approximatives, voire fantaisistes comme l'utilisation de formules établies pour des laves torrentielles en régime permanent. Une étude récente menée au Canada sur l'emploi des méthodes dites simplifiées de calcul de l'onde de rupture a ainsi mis en évidence de graves problèmes de dimensionnement (Marche & Oriac, 2005).

### 3.2.3 Plan des études en ingénierie

Pour les calculs en ingénierie, on a généralement besoin de calculer :

- l'hydrogramme initial : en fonction de la brèche créée dans le barrage, il faut estimer le débit d'eau libéré au cours du temps. Il existe plusieurs méthodes de calcul fondées sur des données historiques (régression sur des observations) ou bien des modèles physiques reproduisant la rupture du remblai ou du béton;
- la propagation de l'onde de crue (*flood routing*) : il faut estimer comment le volume d'eau libéré se propage dans le cours d'eau. Cette estimation peut se faire :
  - à la main à l'aide de méthodes simplifiées;
  - numériquement en se servant de modèles « filaires » (écoulement unidimensionnel);
  - numériquement en utilisant des modèles bidimensionnels de type Saint-Venant.
- l'emprise des zones touchées par la crue : il faut cartographier les zones concernées par l'onde de crue. En Suisse, l'OFEN a fourni des critères pour distinguer différentes classes de danger (voir tableau 3.6).

### 3.2.4 Charges exceptionnelles

Les barrages sont dimensionnés pour résister à une multitude de phénomènes. Le risque de rupture toléré est généralement de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$  par an. En termes de

**Tableau 3.6** – Valeurs seuils pour la mesure du danger en cas d’inondation rapide. D’après les recommandations de l’OFEN (Bischof *et al.*, 2002b).

<i>Valeurs seuils</i>	<i>Effets</i>	<i>Règle d’assujettissement</i>
<p>danger élevé:  <math>h &gt; 2</math> m ou  <math>q &gt; 2</math> m<sup>2</sup>/s</p>	<p>Les personnes sont en danger même à l’intérieur des bâtiments. En cas d’érosion du lit et des berges, il y a aussi menace d’effondrement de constructions situées à proximité. Les laves torrentielles par l’effet de pression peuvent aussi conduire à la destruction de bâtiments.</p>	<p>L’ouvrage d’accumulation est assujetti si au moins une habitation, un lieu de travail, un bâtiment public, une place de camping publique, une route très fréquentée ou une ligne de chemin de fer est touchée.</p>
<p>danger moyen:  <math>2 \geq h &gt; 1</math> m ou  <math>2 \geq q &gt; 1</math> m<sup>2</sup>/s</p>	<p>Les personnes à l’extérieur et dans les véhicules sont menacées. La retraite vers les étages supérieurs des bâtiments est la plupart du temps possible. Des bâtiments, selon leur mode de construction, peuvent subir des dégâts.</p>	<p>L’ouvrage d’accumulation est assujetti si une habitation (de construction légère), un lieu de travail (construction légère), une place de camping publique ou si une route très fréquentée est touchée.</p>
<p>danger modéré:  <math>1 \geq h &gt; 0,5</math> m ou  <math>1 \geq q &gt; 0,5</math> m<sup>2</sup>/s</p>	<p>Les personnes à l’extérieur et dans les véhicules sont menacées. La retraite vers les étages supérieurs des bâtiments est la plupart du temps possible. Des bâtiments, selon leur mode de construction, peuvent subir des dégâts.</p>	<p>L’ouvrage d’accumulation est assujetti si une place de camping publique ou si une route très fréquentée est touchée.</p>
<p>danger faible:  <math>h \leq 0,5</math> m ou  <math>q \leq 0,5</math> m<sup>2</sup>/s</p>	<p>Les personnes ne sont pratiquement pas menacées tant à l’extérieur qu’à l’intérieur des bâtiments.</p>	<p>L’ouvrage d’accumulation n’est pas assujetti.</p>

période de retour (pour des phénomènes hydrologiques), cela veut dire qu'un barrage est généralement dimensionné pour résister à des phénomènes de période de retour 1000 à 10 000 ans. Pendant longtemps seuls les grands barrages étaient assujettis à cette contrainte de sécurité, mais dans de nombreux pays européens, la jurisprudence et l'état de l'art sont en train de changer pour les petits ouvrages.

Un barrage est soumis à des charges permanentes (son poids propre) et variables (la poussée des eaux retenues, les sous-pressions générées par la percolation des eaux sous le barrage), auxquelles il doit pouvoir résister sans dommage jusqu'à l'état limite de service. Il est également soumis à des charges exceptionnelles telles que :

- une crue des cours d'eau dans le bassin-versant alimentant la retenue et conduisant à faire monter le niveau des eaux. Si le niveau de la retenue dépasse le niveau des plus hautes eaux (PHE), le surplus doit être évacué par des évacuateurs de crue ou bien vidangé/turbiné. Certaines retenues comme celle de la Grande Dixence sont dépourvues d'évacuateur ;
- un séisme. Il existe des critères statistiques qui permettent selon la région considérée de définir un « séisme de projet » ou « séisme de vérification » auquel le barrage doit résister ;
- une avalanche ou un mouvement de terrain, qui en entrant dans la retenue peut provoquer une intumescence submergeant le barrage. En Suisse, la période de retour de l'avalanche de projet est de 300 ans ;
- la poussée des glaces, qui peut générer des efforts importants ou endommager la couche de géotextile imperméabilisant une retenue artificielle de petit volume (par exemple pour la production de neige de culture). Le phénomène de poussée des glaces est encore documenté, mais les valeurs citées dans la littérature technique se situent dans une fourchette large 20–300 kN/ml.

### 3.3 Mécanismes de rupture et hydrogramme initial

Le processus de rupture d'un barrage ou d'une digue a fait l'objet de plusieurs études pour en étudier la dynamique. Cela reste un processus complexe et assez souvent, il est commode de faire l'hypothèse d'un lâcher instantané du volume d'eau : on parle d'*effacement* du barrage. Cette hypothèse va dans le sens de la sécurité, mais peut conduire à majorer le risque hydraulique induit par l'onde de crue, en particulier pour les barrages en remblai (qui sont majoritaires) ou les barrages poids-voûtes ; pour des barrages voûtes en béton, l'hypothèse n'est pas déraisonnable car la rupture se produit en cas des problèmes dans les fondations, les appuis, ou une faiblesse structurelle, autant de problèmes qui peuvent conduire à une ruine rapide de l'ouvrage. D'autres causes exogènes tels que séismes ou attaque militaire sont des scénarios possibles.

### 3.3.1 Barrage en béton

Pour les barrages en béton, la rupture de barrage implique une fissuration rapide de la voûte en béton et l'ouverture d'une brèche dans des délais courts de quelques secondes. Il est d'usage de considérer que la rupture est soudaine. Tout ou partie de la voûte cède sous le poids de l'eau. Le barrage de Malpasset offre l'exemple d'une brèche de forme grossièrement triangulaire (voir figures 3.7 et 3.15). Le calcul se fait en supposant un effacement brutal de la voûte sur une certaine largeur, largeur qui est un paramètre à faire varier pour étudier l'influence sur l'onde de propagation.



Figure 3.15 – Brèche dans la voûte du barrage de Malpasset. Source : [wikimedia](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Malpasset_Dam.jpg).

### 3.3.2 Barrage en remblai

Pour des barrages en remblai, la rupture se fait graduellement, le plus souvent (i) lors de submersion du remblai pendant des durées significatives, (ii) à cause d'un défaut d'étanchéité ou (iii) en cas de faiblesse dans les fondations ou le sol. On considère qu'il se forme alors une ouverture progressive, appelée *brèche*, sur un temps  $t_b$  de plusieurs minutes (parfois quelques dizaines de minutes). On observe que la largeur  $\ell$  de la brèche est généralement située dans la fourchette  $h_b \leq \ell \leq 3h_b$ , où  $h_b$  est la hauteur du barrage. Pour ces barrages, le temps nécessaire à former une brèche varie de façon considérable (de quelques minutes à quelques heures) selon le matériau et la cause de la

rupture. Pour évaluer l'hydrogramme de crue au travers d'une brèche, il faut connaître la dynamique de formation de la brèche. Trois approches sont utilisées (Wu, 2011):

- les *méthodes empiriques* fournissent les principales dimensions de la brèche, le temps de formation, et le débit de pointe de l'hydrogramme de la crue (ICOLD, 1998; Chinnarasri *et al.*, 2004; Marche, 2008; Froehlich, 2008; Pierce *et al.*, 2010; Thornton *et al.*, 2011; Froehlich, 2016). Ces grandeurs sont obtenues à partir de régressions établies à partir d'événements documentés. Les méthodes empiriques sont simples d'emploi, mais leur marge d'incertitude atteint souvent l'ordre de grandeur pour le débit de pointe.
- les *modèles numériques* examinent l'érosion d'un remblai sous l'effet de l'eau (Singh, 1996; Faeh, 2007; Morris, 2009; Cao *et al.*, 2011; Wu *et al.*, 2012; Castro-Orgaz & Hager, 2013; Larocque *et al.*, 2013; Begam *et al.*, 2018). Parmi les plus utilisés en ingénierie, il y a Simba, HR Breach et Firebird (Wahl, 2017). S'ils sont en principe plus précis, ils sont aussi plus gourmands en termes d'information sur la constitution du remblai, l'état initial, et les conditions aux limites. Leur précision est limitée par des connaissances encore imparfaites sur les processus d'érosion.
- les *modèles conceptuels* prédisent la formation progressive d'une brèche à l'aide d'une série d'équations différentielles traduisant l'érosion d'un remblai et l'écoulement en conditions critiques d'une lame d'eau (Walder & O'Connor, 1997; Walder *et al.*, 2006; Macchione, 2008; Ng & Björnsson, 2003; Capart, 2013; De Lorenzo & Macchione, 2013; Wu, 2013; Boes *et al.*, 2015; Peter *et al.*, 2018; Macchione *et al.*, 2023). Ils sont de complexité intermédiaire entre les méthodes empiriques et les modèles numériques. En particulier, ces modèles permettent de prendre la géométrie du remblai et la forme de la brèche de façon plus fine que les équations empiriques. Le code BASEbreach développé par le VAW (ETHZ) offre une interface graphique et plusieurs modèles (Macchione, AWEL et Peter):

[gitlab.ethz.ch/vaw/public/basebreach/-/wikis/home](https://gitlab.ethz.ch/vaw/public/basebreach/-/wikis/home).

Quoique développé dans le cadre de la suite de modèles de calcul hydraulique Basement, ce code peut être exécuté indépendamment de Basement.

Ici, on fait le point sur les premières méthodes. Comme souvent en ingénierie, les formules empiriques conduisent à des valeurs très différentes (des écarts supérieurs à 500 % sont possibles) entre elles. Cette variabilité reflète en grande partie la diversité des modes de rupture et de constitution des remblais (granulométrie du remblai, caractéristiques du noyau étanche). Les valeurs calculées précédemment ne sont donc que des estimations très grossières. Une étude de sensibilité doit en général être menée pour apprécier les conséquences du choix de la méthode de formation de la brèche.



Figure 3.16 – Vue de la brèche dans le remblai de la retenue de Taum Sauk.

### Régressions à partir des données caractéristiques

Il existe un grand nombre de relations empiriques établissant une corrélation entre le débit de pointe et des grandeurs représentant le volume d'eau, les dimensions du barrage, et/ou la taille de la brèche. Ces relations ont le plus souvent été obtenues par régression sur des données tirées d'événements documentés. Parmi les plus simples, on trouve la formule de [Pierce \*et al.\* \(2010\)](#) qui donne le débit de pointe en fonction du volume d'eau  $V$  contenu derrière le barrage et la hauteur de ce volume  $H$

$$Q_p = 0,00919V^{0,745}, \quad (3.1)$$

ou bien

$$Q_p = 0,0176(VH)^{0,606}, \quad (3.2)$$

avec  $V$  volume en  $m^3$ ,  $H$  en m, et  $Q_p$  en  $m^3/s$ . Certaines formules fournissent également le débit maximal. La formule de Froehlich (1995) a été établie sur 22 événements bien documentés ; elle donne l'estimation suivante

$$Q_p = 0,607V_w^{0,295} H_w^{1,24}, \quad (3.3)$$

avec  $h_w$  la hauteur au droit de la brèche et  $V_w$  le volume d'eau vidangé. Le tableau 3.7 recense quelques-unes de ces régressions tandis que la figure 3.17 montre qu'il existe une grande dispersion des données (et cela est vrai quelle que soit la régression choisie).

**Tableau 3.7** – Formule empirique donnant le débit de pointe en fonction du volume d'eau  $V$  contenu derrière le barrage, la hauteur de ce volume  $H$ , la hauteur d'eau d'eau au droit de la brèche  $H_w$ , et le débit vidangé  $V_w$ . La hauteur  $H_w$  correspond à la hauteur  $h$  sur la figure 3.20. On a également reporté le coefficient de détermination  $R^2$  et le nombre de cas considéré pour la régression.

Référence	cas	formule	$R^2$
Kirkpatrick (1977)	13	$Q_p = 1,268(H_w + 0,3)^{2,5}$	0,79
Pierce <i>et al.</i> (2010)	72	$Q_p = 0,874H^{2,68}$	0,633
Pierce <i>et al.</i> (2010)	87	$Q_p = 0,00919V^{0,745}$	0,805
MacDonald & Langridge-Monopolis (1984)	23	$Q_p = 1,154(H_w V_w)^{0,412}$	0,788
Costa (1988)	31	$Q_p = 0,763(H_w V_w)^{0,42}$	0,745
Pierce <i>et al.</i> (2010)	87	$Q_p = 0,0176(HV)^{0,606}$	0,844
Froehlich (1995)	22	$Q_p = 0,607H_w^{1,24}V_w^{0,295}$	
Pierce <i>et al.</i> (2010)	87	$Q_p = 0,038H^{1,09}V^{0,475}$	0,85

### Temps de formation de la brèche

D'autres formules ont été établies pour fournir plus d'éléments sur l'hydrogramme de crue, notamment le temps de formation de la brèche. Ainsi, Fread et Harbaugh donne la formule suivante pour estimer l'ordre de grandeur de la largeur  $\ell$  de la brèche au bout d'un temps  $t_b$  (ICOLD, 1998; Marche, 2008) :

$$\ell = 0,657K_0\sqrt[4]{Vh} \text{ et } t_b = 7,14 \times 10^{-3} \frac{V^{0,47}}{h^{0,9}}, \quad (3.4)$$

avec  $V$  volume en  $\text{m}^3$ ,  $h$  hauteur d'eau de la retenue en m, et  $K_0$  un facteur qui vaut 1 pour une rupture par submersion et 0,7 pour une rupture par érosion interne. Singh (1996) propose plusieurs formules en fonction du rapport  $\zeta = h_s/h$  (avec  $h$  la hauteur du barrage et  $h_s = \sqrt[3]{V}$  une hauteur représentative du volume  $V$  de la retenue). La hauteur  $d$  ( $\bar{d}$  sa valeur moyenne) et la largeur  $\ell$  de la brèche sont données par :

$$\frac{\ell}{d} = 0,4\zeta. \quad (3.5)$$

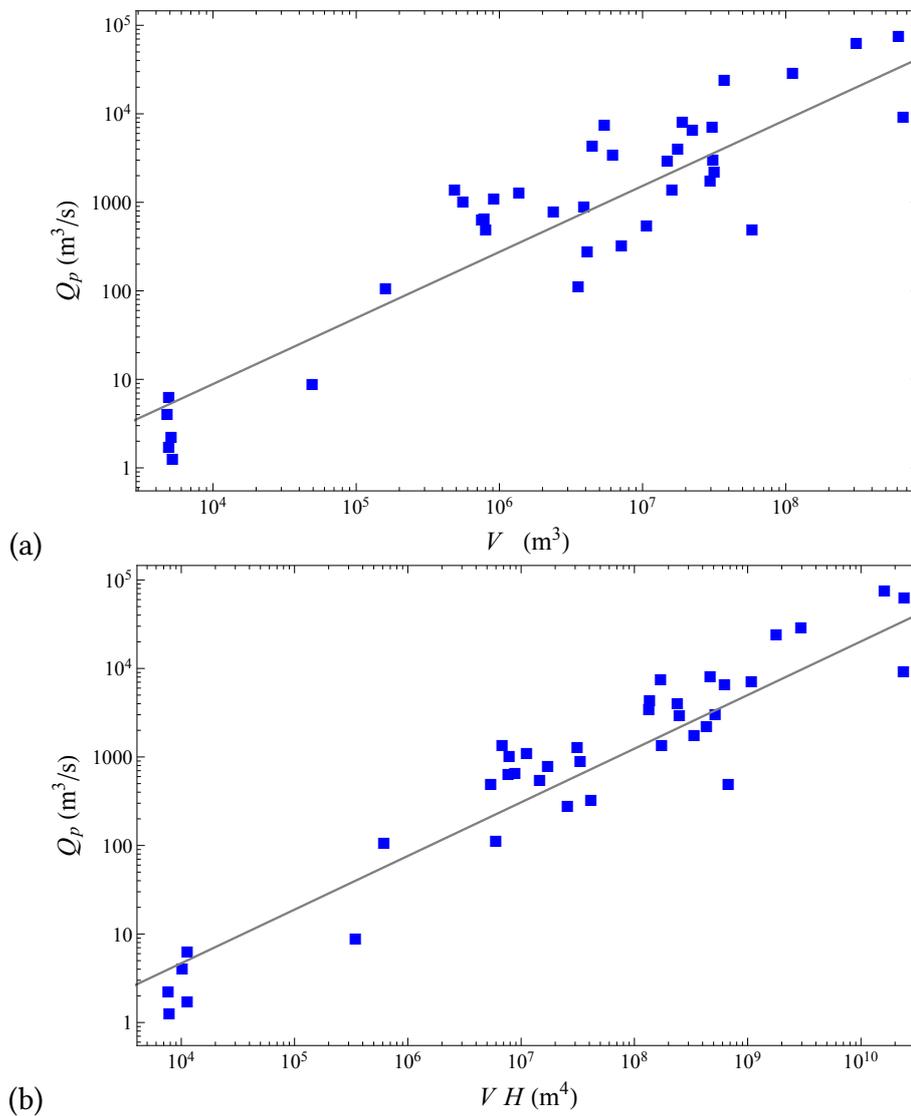
La brèche se forme en un temps :

$$t_b = 1,5\sqrt{\frac{h}{g}\frac{h}{\bar{d}}}\zeta,$$

tandis que le débit de pointe lors de la rupture est

$$Q_p = 0,0125\zeta\sqrt{gh^3\bar{d}^2}.$$

On se reportera au rapport de Wahl (1998) (US Bureau of Reclamation) pour une analyse plus complète des formules empiriques de calcul des paramètres de brèche. Sur la base



**Figure 3.17** – (a) Relation entre volume du barrage  $V$  et débit de pointe  $Q_p$  ; la courbe de régression (3.1) donne la tendance moyenne. (b) relation entre le produit  $VH$  (volume  $\times$  hauteur d'eau derrière le barrage) et débit de pointe  $Q_p$  ; la courbe de régression (3.2) donne la tendance moyenne. D'après [Pierce et al. \(2010\)](#).

de 74 ruptures de digue, [Froehlich \(2008\)](#) arrive aux corrélations suivantes

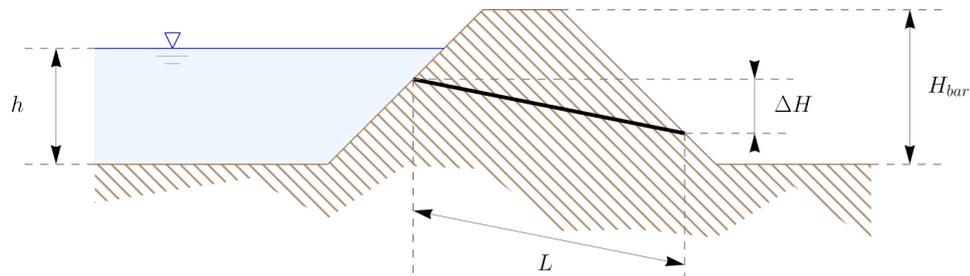
$$\ell = 0,27k_0V^{0,32}H_b^{0,04} \text{ et } t_b = 63,2\sqrt{\frac{V}{gh_b^2}}, \quad (3.6)$$

avec  $k_0 = 1,3$  si la rupture intervient par surverse et  $k_0 = 1,0$  dans les autres cas.

Ces relations ont été établies sur la base de documentés, dont la plupart concernaient des ruptures par surverse ; le temps de formation de la brèche est alors court, et les débits de pointe prennent des valeurs élevées. Comme cela a été souligné dans l'introduction de ce chapitre (voir § 3.1.1), les ouvrages linéaires en remblai de type digue cèdent majoritairement à cause d'un problème d'érosion interne (Bonelli, 2013; ICOLD, 2017; Deroo & Fry, 2022), et les temps de formation d'une brèche sont souvent bien plus longs. La difficulté principale d'estimation des temps de rupture pour de tels ouvrages est qu'il existe plusieurs mécanismes possibles et que ceux-ci dépendent des caractéristiques du sol (perméabilité, granulométrie, etc.). Bonelli *et al.* (2008) ont proposé une approche simplifiée où l'on considère un conduit de longueur  $L$  traversant un remblai de part en part (voir figure 3.18). De l'eau s'écoule à travers ce conduit sous l'effet d'une différence de charge hydraulique  $\Delta H$  entre l'entrée et la sortie du conduit. Le rayon  $R$  de ce conduit croît au cours du temps, et le temps caractéristique d'érosion est

$$t_r = 2 \frac{\varrho_s}{\varrho} \frac{L}{g \Delta H k_r} \quad (3.7)$$

avec  $\varrho_s$  la masse volumique du sol,  $\varrho$  celle de l'eau, et  $k_r$  [s/m] le coefficient de cinétique d'érosion, qui s'estime en laboratoire sur un échantillon de sol à l'aide d'un test de type « Hole erosion test » (on a typiquement  $k_r \sim 10^{-3}$  s/m).



**Figure 3.18** – Conduit de longueur  $L$  traversant un remblai. La charge hydraulique de part et d'autre est notée  $\Delta H$ . La hauteur du barrage en remblai est  $H_{bar}$ . Par défaut, on peut prendre  $\Delta H = H_{bar}$ .

La rupture<sup>5</sup> intervient au bout d'un temps  $t_{rup}$  :

$$t_{rup} = t_r \ln \frac{R_u - R_{min}}{R_d - R_{min}}, \quad (3.8)$$

5. Elle est ici définie comme l'effondrement du toit du conduit et l'ouverture d'une brèche à travers le remblai. Le temps de rupture est donc le temps nécessaire entre le moment où le conduit est détecté et le moment où le toit du conduit s'effondre.

avec :

- $R_{min}$  le rayon minimal du conduit associé de l'érosion interne :

$$R_{min} = 2 \frac{L\tau_c}{\rho g \Delta H},$$

où  $\tau_c$  est la contrainte critique du sol (avec  $\tau_c$  compris dans la plage 1–200 Pa) ;

- $R_d$  le rayon du conduit au moment où le conduit est détecté. En règle générale, on a :

$$R_d - R_{min} \sim 10 \text{ cm};$$

- $R_u$  le rayon ultime du conduit avant son effondrement, avec typiquement :

$$R_u \sim \frac{H_{bar}}{2}.$$

Avec ces hypothèses simplificatrices, [Bonelli et al. \(2008\)](#) arrivent à l'estimation suivante du temps de rupture :

$$t_{rup} \sim 5 \times 10^{I_r - 2} \quad (3.9)$$

avec  $t_{rup}$  exprimé en minutes et l'indice d'érosion  $I_r = -\log k_r$  (sans unité physique, mais  $k_r$  exprimé en s/m). Comme  $I_r$  se situe généralement dans la plage 2,7–3,6 pour les ouvrages en remblai de petite hauteur ( $5 \leq H_{bar} \leq 10$ ), le temps de rupture est compris entre 25 min et 200 min, ce qui est cohérent avec les informations disponibles.

## Recommandations OFEN

En Suisse, l'Office fédéral de l'énergie (OFEN) recommande de procéder ainsi pour le scénario de rupture ([Bischof et al., 2002b](#)) :

- pour les barrages-voûtes et barrages-poids : rupture totale et instantanée de tout le barrage (voir § 3.3.1) ;
- pour les digues : formation d'une brèche de forme trapézoïdale de base égale à deux fois la hauteur d'eau et avec une pente de talus de 1:1 (en veillant à ce que la surface ne soit pas plus grande que la digue elle-même) ;
- pour les barrages mobiles : rupture totale ou partielle en fonction du type de construction.

Le niveau d'eau est généralement le niveau des plus hautes eaux (PHE) admis dans la retenue. Pour certains petits ouvrages, en particulier en cas d'obstruction de l'évacuateur de crue par des flottants, il convient de prendre la hauteur du barrage (jusqu'au couronnement) comme niveau d'eau initial avant la rupture.

Le débit initial (au moment de la rupture) dépend de la forme de la brèche dans la digue. La figure 3.19 et le tableau 3.8 recensent quelques formules empiriques.

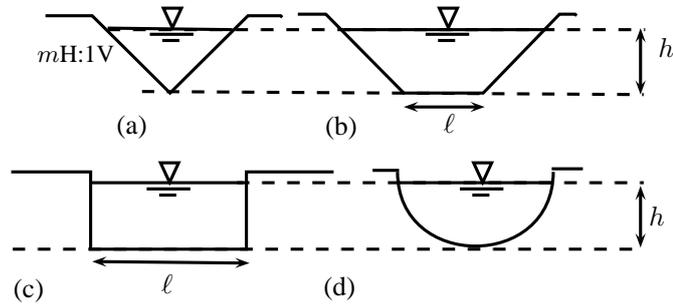


Figure 3.19 – Forme des brèches considérée dans les calculs.

**Tableau 3.8** – Débit instantané au moment de la rupture. Pour les talus, on considère des déclivités (fruit) de  $1/m$ .  $\ell$  désigne la largeur au miroir pour les profils paraboliques et rectangulaires, mais la base du trapèze pour une section trapézoïdale. D’après les recommandations de l’OFEN (Bischof *et al.*, 2002b).

Forme de la brèche	Débit instantané
triangulaire (a)	$Q_b = 0,72mh^{5/2}$
trapézoïdale (b)	$Q_b = 0,93\ell h^{3/2} + 0,72mh^{5/2}$
rectangulaire (c)	$Q_b = 0,93\ell h^{3/2}$
parabolique (d)	$Q_b = 0,54\ell h^{3/2}$

### 3.3.3 Barrage naturel en remblai

On considère des barrages naturels résultant d’un glissement de terrain, de moraines ou de laves torrentielles, et formant un lac d’accumulation. Pour des lacs morainiques, Costa & Schuster (1988) ont proposé une relation donnant le débit de pointe en fonction de l’énergie potentielle du lac (voir figure 3.20)

$$Q_p = 0,063(\rho gbV)^{0,42}, \tag{3.10}$$

avec  $V$  le volume d’eau vidangé (en  $m^3$ ),  $g$  l’accélération de la gravité,  $b$  la cote moyenne du fond de la brèche par rapport à un plan de référence (en m), et  $\rho$  la masse volumique de l’eau (en  $kg\ m^{-3}$ ). Voir aussi (Clague & Evans, 2000). Molinaro a retravaillé sur les données obtenues par Costa pour arriver à la formule basée sur une analyse dimensionnelle (ICOLD, 1998)

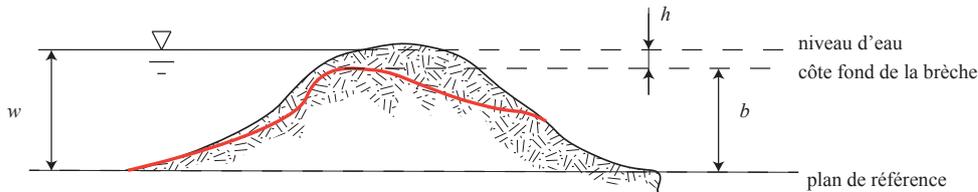
$$Q_p = 0,116h^2\sqrt{gh}\left(\frac{V}{h^3}\right)^{0,22}. \tag{3.11}$$

Pour des digues fusibles (en remblai grossier), la rupture se fait beaucoup plus rapidement, et Lempérière a proposé une équation dérivée de la formule de Molinari (ICOLD, 1998)

$$Q_p = 0,07h^2\sqrt{gh}\left(\frac{V}{h^3}\right)^{0,5}, \tag{3.12}$$

atteint en un temps

$$t_b = 10 \sqrt{h \frac{V}{g}} \tag{3.13}$$

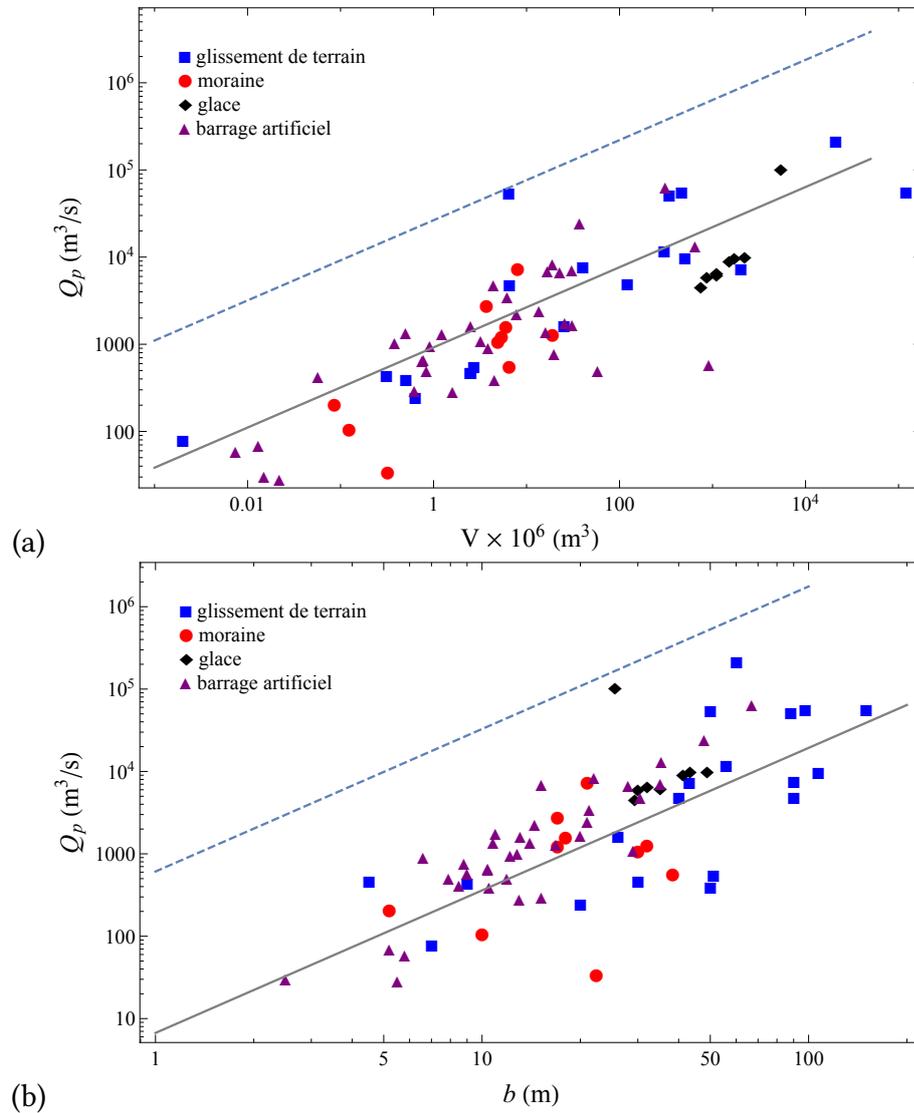


**Figure 3.20** – Coupe à travers un barrage naturel. La ligne rouge représente le fond de la brèche qui s’est formée à travers le remblai.

Walder & O’Connor (1997) ont examiné 72 événements suffisamment documentés. Ils ont calculé soit la tendance moyenne donnant le débit de pointe en fonction d’une variable-clé ( $V$  volume d’eau vidangé lors de la rupture,  $b$  cote de la brèche,  $bV$  énergie potentielle), soit la courbe enveloppe fournissant la borne supérieure. On note la marge d’incertitude considérable associée (voir figure 3.21). Le tableau 3.9 fournit les valeurs des courbes de régression ou enveloppe selon la nature du matériau.

**Tableau 3.9** – Équations donnant le débit de pointe  $Q_p$  et le matériau du remblai. On cale soit une loi de régression, soit une courbe enveloppe. Les valeurs des paramètres selon le type de variable choisie ( $V$  volume d’eau vidangé lors de la rupture,  $b$  cote de la brèche,  $bV$  énergie potentielle) sont indiquées ainsi que le coefficient de détermination  $R^2$ . D’après (Walder & O’Connor, 1997).

	$a$	$A$	$c$	$R^2$
équation $Q_p = aV^c$ (rég.) ou $Q_p = AV^c$ (env.)				
<i>glissement de terrain</i>	1,6	46	0,46	0,73
<i>barrage construit</i>	1,16	8,5	0,46	0,60
<i>moraine</i>	0,045	0,22	0,66	0,62
équation $Q_p = ab^c$ (rég.) ou $Q_p = Ab^c$ (env.)				
<i>glissement de terrain</i>	6,7	200	1,73	0,53
<i>barrage construit</i>	2,5	12	2,34	0,82
<i>moraine</i>	60,3	610	0,84	0,09
équation $Q_p = a(bV)^c$ (rég.) ou $Q_p = A(bV)^c$ (env.)				
<i>glissement de terrain</i>	0,99	25	0,4	0,76
<i>barrage construit</i>	0,61	2,9	0,43	0,70
<i>moraine</i>	0,19	1,1	0,47	0,49



**Figure 3.21** – (a) Relation entre volume vidangé  $V$  et débit de pointe  $Q_p$ ; la courbe de régression  $Q_p = 1,6V^{0,46}$  (courbe continue) donne la tendance moyenne, tandis que l’enveloppe (courbe discontinue)  $Q_p = 46V^{0,46}$  montre la borne supérieure. (b) relation entre cote de la brèche  $d$  et débit de pointe  $Q_p$ ; la courbe de régression  $Q_p = 6,7d^{1,73}$  (courbe continue) donne la tendance moyenne, tandis que l’enveloppe  $Q_p = 610V^{1,73}$  (courbe discontinue)  $Q_p = 46V^{0,46}$  montre la borne supérieure. Dans chaque cas, on distingue la nature du matériau constituant le barrage. D’après (Walder & O’Connor, 1997).

### 3.3.4 Barrage glaciaire

Des lacs glaciaires peuvent se former lorsqu'une vallée est barrée par un chute de glace. La vidange du lac glaciaire peut se produire lorsque (Walder & Costa, 1996):

- l'eau creuse un tunnel (ou plusieurs) entre la base rocheuse et le barrage de glace, mais le processus est instable et conduit souvent à la fermeture du tunnel;
- la poussée de l'eau ou bien sur la surverse provoque l'effondrement du barrage de glace. Dans ce cas, la configuration de la rupture est similaire à celle d'un barrage en remblai naturel.

À partir de l'étude de 10 ruptures de barrages glaciaires, Clague & Mathews (1973) ont trouvé que le débit de pointe  $Q_p$  était corrélé au volume vidangé  $V$

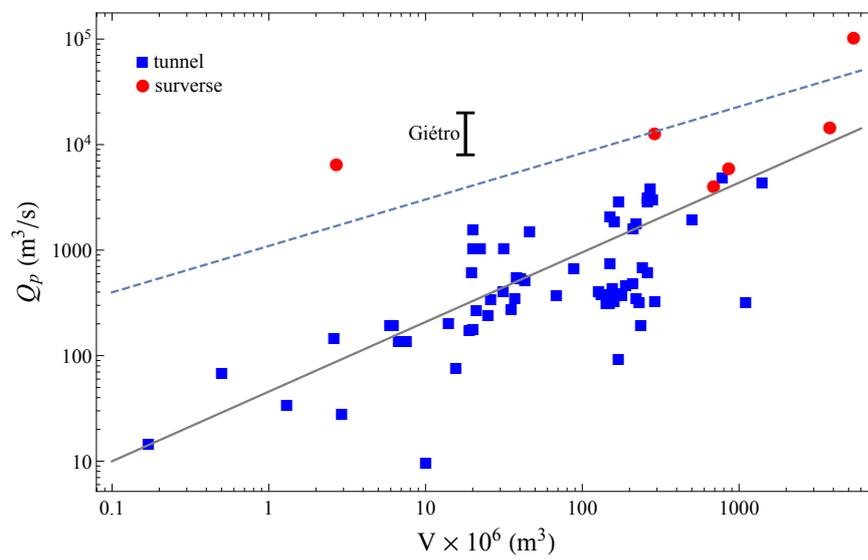
$$Q_p = KV^b,$$

avec  $Q_p$  en  $\text{m}^3/\text{s}$ ,  $V$  exprimé en  $10^6 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $K = 75$  et  $b = 0,67$  (Clague & Mathews, 1973; Costa, 1988; Walder & Costa, 1996; Ng & Björnsson, 2003). Sur la base d'une étude portant sur 72 événements documentés, Walder & Costa (1996) ont trouvé que la vidange par tunnel était le scénario majoritairement observé (avec 90 % des occurrences) et que le débit de pointe associé était bien plus faible que pour des ruptures classiques (voir figure 3.22):

$$Q_p = 0,005V^{0,66} \text{ avec } R^2 = 0,70, \quad (3.14)$$

avec  $V$  exprimé en  $10^6 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $Q_p$  en  $\text{m}^3/\text{s}$ . Pour des ruptures sans tunnel, Walder & Costa (1996) ont trouvé des régressions proches de celle obtenue par Clague & Mathews (1973) ou pour des glissements de terrain dans le tableau 3.9:

$$Q_p = 2,51V^{0,44} \text{ avec } R^2 = 0,58. \quad (3.15)$$



**Figure 3.22** – Relation entre volume vidangé  $V$  et débit de pointe  $Q_p$ . La courbe continue montre l'équation (3.14), tandis que la courbe discontinue représente l'équation (3.15). D'après (Walder & Costa, 1996).

## 3.4 Rupture de barrage en régime laminaire



- Vous souvenez-vous des équations de Navier–Stokes ?  
Qu’est ce que l’adimensionnalisation des équations ?
- ↪ Voir le cours de [mécanique des fluides](#).
- Connaissez-vous la méthode des caractéristiques pour résoudre une équation aux dérivées partielles ?
- ↪ Voir la méthode dans l’annexe 2, § 2.1.1
- Qu’est ce que la diffusion ? la diffusion-convection ?
- ↪ Voir la définition au § 1.6.5.
- Qu’est ce qu’une solution auto-similaire ?
- ↪ Voir la définition dans l’annexe 1, § 1.7.5.
- Qu’est ce que la méthode aux perturbations ?
- ↪ Voir la définition dans l’annexe 1, § 1.7.3.

Nous allons commencer par étudier la rupture de barrage pour des fluides newtoniens en régime laminaire. Cela ne concerne donc pas directement les écoulements d’eau claire (qui sont en régime turbulent). Cette étude représente deux intérêts :

- mieux comprendre les processus d’écoulements dans une géométrie de rupture de barrage en l’absence d’inertie ;
- développer des modèles théoriques pour décrire des écoulements naturels qui peuvent, en première approximation être considérés comme des écoulements newtoniens laminares.

En effet, quoique les matériaux naturels ne soient pas newtoniens, le modèle newtonien peut néanmoins offrir une première approximation du comportement. C’est ainsi que des modèles d’écoulement newtonien ont été employés pour décrire le mouvement d’avalanches ([Dent & Lang, 1983](#)) ou des laves torrentielles ([Hunt, 1994](#)).

### 3.4.1 Équations du mouvement

Nous allons résoudre l’équation de Huppert, qui représente le mouvement d’un fluide très visqueux sur un plan incliné :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.16)$$

Notons que cette équation est obtenue à partir des équations de Navier–Stokes en supposant que les termes inertiels sont négligeables et en utilisant l’approximation d’onde

cinématique (Huppert, 1982):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} = 0 \text{ avec } \bar{u} = \frac{\rho gh^2 \sin \theta}{3\mu}.$$

Les conditions aux limites sont données à la figure 3.23 : il s'agit du lâcher d'un volume fini de fluide. On suppose pour simplifier que la forme initiale est rectangulaire.

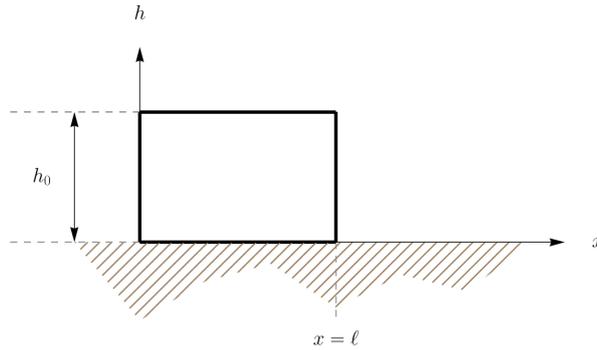


Figure 3.23 – Configuration initiale de l'écoulement.

Il s'agit d'une équation non linéaire de convection de la forme  $\partial_t h + c(h)\partial_x h = 0$  avec  $c(h) = \rho gh^2 \sin \theta / \mu$  ou bien encore  $\partial_t h + \partial_x f(h) = 0$  avec  $f(h) = \rho gh^3 \sin \theta / (3\mu)$ .

Cette équation se résout assez simplement avec les conditions aux limites. Il s'agit en effet d'un double problème de Riemann, un premier en  $x = 0$  et un autre en  $x = \ell$ . La figure 3.24 montre une résolution numérique de l'équation de Huppert. Nous allons voir comment résoudre cette équation analytiquement.

### 3.4.2 Problème de Riemann : définition

On appelle *problème de Riemann* un problème aux valeurs initiales de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x [f(h)] &= 0, \\ h(x, 0) = h_0(x) &= \begin{cases} h_L & \text{si } x < 0, \\ h_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.17}$$

avec  $h_L$  et  $h_R$  deux constantes. Ce problème correspond à l'évolution d'une fonction  $h$  initialement constante par morceaux, avec une discontinuité en  $x = 0$ . Ce problème est fondamentale pour la résolution théorique de problèmes ainsi que la résolution numérique des équations hyperboliques. En hydraulique, il a également son importance car la configuration étudiée correspond à la rupture d'un barrage sur fond sec ou humide. Dans le cas linéaire, une discontinuité initiale se propage ; réciproquement pour qu'une

**Figure 3.24** – Solution  $h(x, t)$  des équations de Huppert (3.16) avec une hauteur initiale de fluide  $h_0 = 50$  cm, une viscosité  $\mu = 400$  Pa·s, masse volumique  $\rho = 1000$  kg·m<sup>3</sup>, pente  $\theta = 15^\circ$ , longueur du réservoir  $\ell = 1$  m. Aucun frottement n'est pris en compte. Les équations ont été résolues à l'aide de la méthode numérique des volumes finis (solveur de Roe étendu à l'ordre 2, limiteur du flux de type superbee) (LeVeque, 2002). Une durée de 5 s a été simulée.

solution soit discontinue, il faut qu'elle le soit initialement. Le cas non linéaire est un peu complexe.

On va voir que selon que  $h_R$  est plus grand ou plus petit que  $h_L$ , différentes solutions peuvent être générées. Lorsque  $f'(h)$  est une fonction croissante (autrement dit, la fonction de flux est convexe  $f''(h) > 0$ ) et que  $h_L < h_R$ , la solution initialement discontinue devient continue car une onde dite de détente permet de relier les deux états initiaux et donc d'atténuer la discontinuité initiale. Inversement lorsque  $h_L > h_R$ , la discontinuité initiale se propage et la solution reste discontinue. Rappelons par ailleurs que même si la solution est initialement continue, une équation non linéaire peut générer des discontinuités au cours du temps. Lorsque la fonction  $f$  est elle-même complexe, des solutions plus ou moins compliquées au problème de Riemann peuvent en résulter.

### 3.4.3 Problème de Riemann : solution

#### Cas linéaire

Considérons tout d'abord le cas linéaire où  $f(h) = ah$ , avec  $a$  une constante. La solution est triviale :

$$h(x, t) = h_0(x - at) = \begin{cases} h_L & \text{si } x - at < 0, \\ h_R & \text{si } x - at > 0. \end{cases}$$

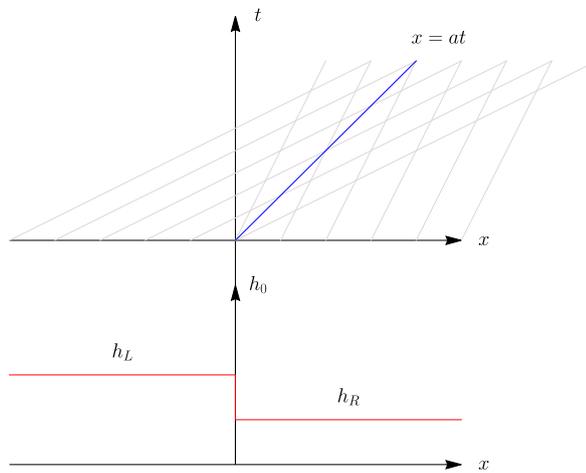


Figure 3.25 – Problème de Riemann dans le cas linéaire.

La discontinuité se propage avec une vitesse  $a$ , avec  $a$  vérifiant la relation de Rankine–Hugoniot

$$a = \frac{[[f(h)]]}{[[h]]} = \frac{f(h_R) - f(h_L)}{h_R - h_L}. \quad (3.18)$$

#### Cas non linéaire

**Cas général du flux convexe** ( $f'' > 0$ ) Dans le cas général (où  $f'' \neq 0$ ), le problème de Riemann est un problème aux valeurs initiales de la forme suivante :

$$\partial_t h + \partial_x [f(h)] = 0,$$

$$h(x, 0) = h_0(x) = \begin{cases} h_L & \text{si } x < 0, \\ h_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

avec  $h_L$  et  $h_R$  deux constantes. On suppose que  $f'' > 0$  en tout premier lieu ; le cas d'un flux non convexe sera considéré après. On va montrer qu'il existe deux types possibles de solution :

- soit une solution appelée *onde de détente* (ou bien onde simple) qui est continue,
- soit une solution discontinue qui représente la propagation de la discontinuité initiale (*onde de choc*).

Physiquement, une seule de ces solutions est possible et le choix sera dicté par une condition (dite d'entropie) selon la valeur respective de  $h_L$  et  $h_R$ .

**Onde de détente.** Notons tout d'abord que cette équation est invariante par la transformation  $x \rightarrow \lambda x$  et  $t \rightarrow \lambda t$ . Une solution générale peut donc être recherchée sous la forme  $H(\xi)$  avec  $\xi = x/t$ . En reportant cette forme générale dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$(f'(H(\xi)) - \xi) H' = 0.$$

Il y a deux types de solution à cette équation :

- *onde de détente* :  $(f'(H(\xi)) - \xi) = 0$ . Si  $f'' > 0$ , alors  $f'(h_R) > f'(h_L)$  ; l'équation  $f'(H) = \xi$  admet une seule solution lorsque  $f'(h_R) > \xi > f'(h_L)$ . On dit que  $h_L$  est relié à  $h_R$  par une *onde de détente* :  $\xi = f'(H(\xi))$ . En inversant  $f'$ , on trouve la solution recherchée

$$h(x, t) = f'^{(-1)}(\xi) ;$$

- *état constant* :  $H'(\xi) = 0$ . C'est la solution triviale  $h(x, t) = \text{cte}$ . Cette solution ne vérifie pas le problème initial.

La solution s'écrit donc

$$h(x, t) = \begin{cases} h_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq f'(h_L), \\ f'^{(-1)}(\xi) & \text{si } f'(h_L) \leq \frac{x}{t} \leq f'(h_R) \\ h_R & \text{si } \frac{x}{t} \geq f'(h_R). \end{cases} \quad (3.19)$$

**Onde de choc.** On a précédemment vu que l'existence de solutions faibles (discontinues) à l'équation différentielle hyperbolique (3.17). En admettant une discontinuité le long d'une droite  $x = s(t) = \dot{s}t$ , on tire :  $[[f(h)]] = \dot{s}[[h]]$ . La solution est alors :

$$h(x, t) = \begin{cases} h_L & \text{si } x < \dot{s}t, \\ h_R & \text{si } x > \dot{s}t. \end{cases}$$

Il y a alors formation d'une onde de choc de vitesse  $\dot{s}$  donnée par :

$$\dot{s} = \frac{[[f(h)]]}{[[h]]} = \frac{f(h_R) - f(h_L)}{h_R - h_L}. \quad (3.20)$$

**Sélection de la solution physique.** Deux cas de figures peuvent se présenter (rappelons que  $f'' > 0$ ). On appelle  $\lambda(h) = f'(h)$  la vitesse caractéristique (voir section ci-dessous); c'est la pente de la caractéristique (droite) du problème.

- 1<sup>er</sup> cas:  $h_R > h_L$ . Puisque  $f'' > 0$ , alors  $\lambda(h_R) > \lambda(h_L)$ . À l'instant initial  $t = 0$ , les deux caractéristiques définissent un cône. L'équation  $\xi = f'(H(\xi))$  a une solution sur l'intervalle  $\lambda(h_R) > \xi > \lambda(h_L)$ . Voir Fig. 3.26;
- 2<sup>ème</sup> cas:  $h_R < h_L$ . Les caractéristiques se croisent dès le temps initial  $t = 0$ . Le choc se propage à une vitesse  $\lambda(h_R) < \dot{s} < \lambda(h_L)$ . Cette dernière condition s'appelle *condition de Lax*; elle définit si la vitesse d'un choc est physiquement admissible.

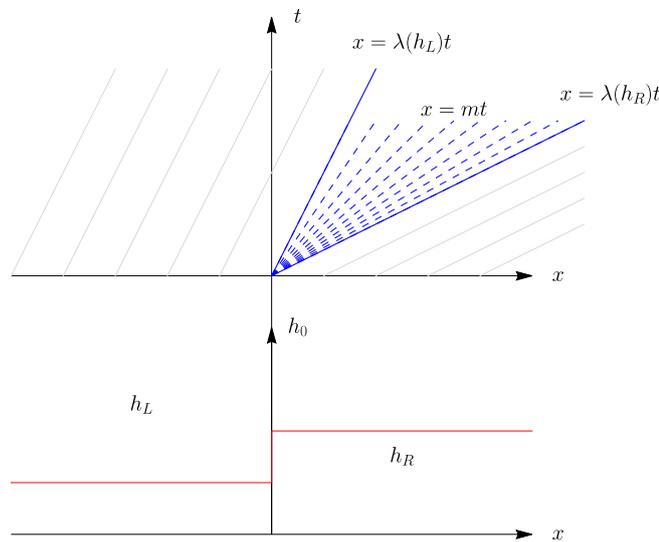


Figure 3.26 – Problème de Riemann dans le cas  $h_R > h_L$ .

### 3.4.4 Résolution des équations de Huppert

Il faut donc chercher les chocs et les ondes de détente associées à cette équation. Pour les solutions de type choc présentant une discontinuité en  $x = s(t)$ , on a une relation qui donne  $h$  de part et d'autre de  $x = s$

$$\dot{s}[[h]] = [[f(h)]] \tag{3.21}$$

en fonction de  $\dot{s}$  la vitesse de la discontinuité. Les ondes de détente sont des solutions auto-similaires de la forme  $\mathcal{H}(\xi)$  avec  $\xi = x/t$ . Ici, en substituant  $h(x, t)$  par  $\mathcal{H}(\xi)$  dans (3.16), on obtient

$$\mathcal{H}'(-\xi + c(\mathcal{H})) = 0,$$

ce qui veut dire qu'on a soit  $\mathcal{H}' = 0$ , soit

$$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta}} \xi. \quad (3.22)$$

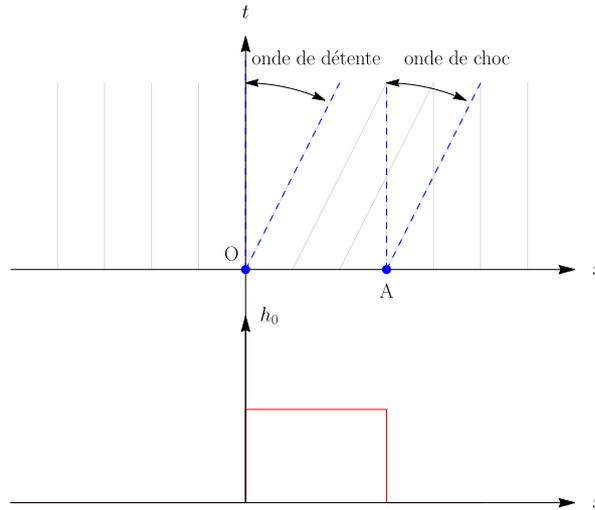


Figure 3.27 – Caractéristiques pour le problème de Huppert.

Notons que mise sous forme caractéristique, l'équation (3.16) s'écrit

$$\frac{dh}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = c(h). \quad (3.23)$$

Il s'ensuit qu'initialement les caractéristiques sont des droites, dont la pente est donnée par  $c(h_0)$  comme le montre la figure 3.27.

Dans les tout premiers temps, il se développe

- à droite un choc. D'après (3.20), on a

$$\begin{aligned} \dot{s}_0[[h]] &= [[f(h)]], \\ \dot{s}_0(0 - h_0) &= f(0) - f(h_0), \\ \dot{s}_0 &= \frac{f(h_0)}{h_0} = \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{3\mu} \end{aligned}$$

donc la caractéristique émanant de A a pour équation

$$x = \ell + \dot{s}_0 t = \ell + \frac{1}{3} \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{\mu} t.$$

- à gauche une onde de détente. La solution est donnée par (3.19). Du point O, il part un faisceau en éventail de courbes caractéristiques d'équation

$$x = mt,$$

avec  $m$  un réel variant entre 0 et  $m_0 = \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{\mu}$ .

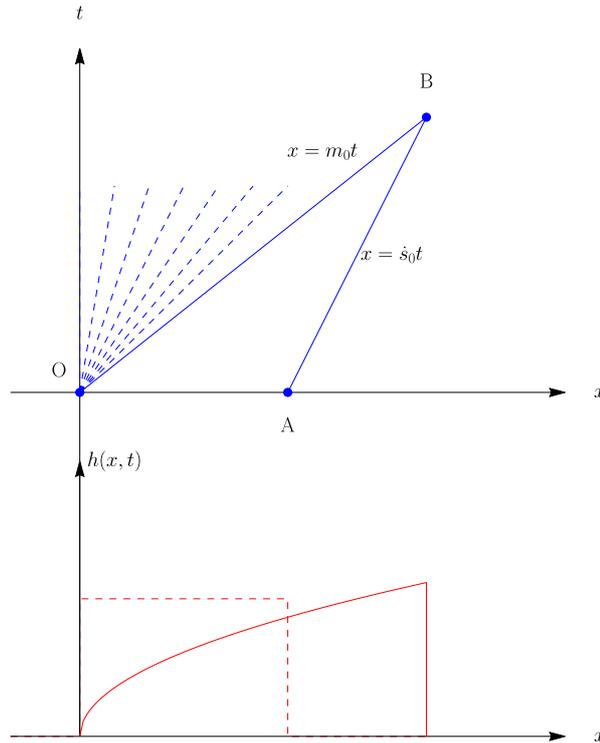


Figure 3.28 – Rencontre des deux caractéristiques.

Les deux caractéristiques  $x = m_0 t$  et  $x = \ell + \dot{s}_0 t$  se rencontrent au point B au temps  $t_B$

$$t_B = \frac{\ell}{m_0 - \dot{s}_0} = \frac{3}{2} \frac{\mu \ell}{\rho g h_0^2 \sin \theta}.$$

L'abscisse de B sera

$$x_B = m_0 t_B = \frac{3}{2} \ell.$$

La solution aux temps courts ( $0 \leq t \leq t_B$ ) est donc

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq m_0 t, \tag{3.24}$$

$$h(x, t) = h_0 \text{ pour } m_0 t \leq x \leq \ell + \dot{s}_0 t \tag{3.25}$$

$$h(x, t) = 0 \text{ pour } x > s(t) = \ell + \dot{s}_0 t \text{ ou } x < 0. \tag{3.26}$$

On vérifie par intégration que le volume est bien conservé.

Pour  $t > t_B$ , la hauteur à droite de  $x = s(t)$  est toujours 0, mais à gauche la hauteur a diminué; elle vaut d'après (3.16)

$$h_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{s}{t}}$$

d'où l'on déduit la nouvelle vitesse de choc

$$\begin{aligned} \dot{s}[[h]] &= [[f(h)]], \\ \dot{s}(0 - h_s) &= f(0) - f(h_s), \\ \dot{s} &= \frac{f(h_s)}{h_s} = \frac{\rho g h_s^2 \sin \theta}{3\mu} = \frac{1}{3} \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

En intégrant cette équation on trouve que la caractéristique associée au choc est

$$s(t) = x_B \left( \frac{t}{t_B} \right)^{1/3} = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3} \frac{\rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{\mu} t \right)^{1/3} = At^{1/3},$$

avec  $A = \left( \frac{9}{4} \frac{\rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{\mu} \right)^{1/3}$ . La solution aux temps longs ( $t > t_B$ ) est donc

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq At^{1/3}, \quad (3.27)$$

$$h(x, t) = 0 \text{ pour } x > s(t) = At^{1/3} \text{ ou } x < 0. \quad (3.28)$$

## 3.5 Rupture de barrage d'un fluide non visqueux

Nous allons nous intéresser à la rupture d'un barrage contenant un volume de fluide non visqueux. Contrairement au cas précédent (§ 3.4), nous négligeons ici tout effet dissipatif lié à la viscosité du fluide. On va tout d'abord étudier le cas d'un barrage contenant un volume infini de fluide sur un fond horizontal ; la solution est connue sous le nom de *solution de Ritter* car c'est Ritter (1892)<sup>6</sup> qui l'a établie à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. On va obtenir la solution de Ritter à l'aide différentes techniques, ce qui permettra de se familiariser avec ces techniques. Puis nous verrons comment prendre en compte l'effet d'un volume fini de fluide et l'effet de la pente. L'effet du frottement visqueux sera examiné ultérieurement.

### 3.5.1 Rupture de barrage d'un volume infini (solution de Ritter)

On considère un mur vertical qui retient un lac de retenue, dont le volume est supposé infini. La hauteur d'eau initiale est  $h_i$ . À l'instant  $t = 0$ , on suppose que le mur du barrage s'efface totalement et laisse s'écouler le volume d'eau sur un lit horizontal. C'est la géométrie la plus simple qu'on puisse imaginer. Le problème correspondant est appelé problème de rupture de barrage. La première solution analytique connue est due à Ritter. La méthode classique de résolution est fondée sur la *méthode des caractéristiques*. Nous allons voir cette méthode ainsi qu'une autre approche dite « méthode des formes autosimilaires » qui exploite les propriétés d'invariance des équations différentielles.

Rappelons que lorsqu'on néglige le frottement sur le fond et qu'on considère un fond horizontal, les équations de Saint-Venant s'écrivent sous forme non conservative

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.30)$$

---

6. August Ritter (1826–1908) était un ingénieur (génie mécanique) allemand. Il commença sa carrière dans des usines fabriquant des machines, puis en 1859 il obtient un poste à l'université d'Hannovre. Il fut nommé professeur de mécanique à Aix-la-Chapelle en 1870, où il finit sa carrière. Ses recherches l'ont amené à s'intéresser à différents problèmes pratiques de la mécanique et de la thermique. En particulier, il proposa en 1892 la première solution analytique du problème de rupture de barrage. En fait, la première solution mathématique de ce type de problème est vraisemblablement dû au mathématicien allemand Georg Friedrich Bernhard Riemann, qui proposa en 1859 une méthode générale de résolution des équations hyperboliques comme celles de Saint-Venant.

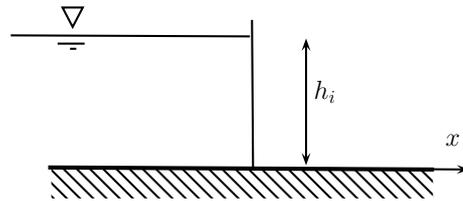


Figure 3.29 – Géométrie du problème dit de « rupture de barrage ».

Dans le cas d'une rupture de barrage, les conditions initiales et aux limites sont les suivantes

$$\begin{aligned} \text{pour } -\infty < x < \infty, u(x, 0) &= 0, \\ \text{pour } x < 0, h(x, 0) &= h_0, \\ \text{pour } x > 0, h(x, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

### Méthode des formes auto-similaires



- Comment s'écrivent les équations de Saint-Venant sous forme conservative ?
- ↪ Voir la définition au § 1.2.2.
- Qu'est ce qu'une solution auto-similaire ?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 1, § 1.7.5.

On recherche une solution sous la forme d'une solution auto-similaire

$$\bar{u} = t^{\beta/\alpha} U(\zeta) \text{ et } h = t^{\gamma/\alpha} H(\zeta),$$

avec  $\zeta = x/t^\alpha$  la variable de similarité,  $H$  et  $U$  deux fonctions à déterminer. En remplaçant  $\bar{u}$  et  $h$  par leur forme auto-similaire dans les équations (3.29–3.30), on trouve :  $\beta + \alpha = 1$  et  $\gamma + 2\alpha = 2$ . Pour que cette solution satisfasse les conditions initiales et aux limites, on doit poser  $\beta = \gamma = 0$ , d'où  $\alpha = 1$ . Le système d'équations (3.29–3.30) devient alors

$$\begin{aligned} H \frac{dU}{d\zeta} + (U - \zeta) \frac{dH}{d\zeta} &= 0, \\ (U - \zeta) \frac{dU}{d\zeta} + g \frac{dH}{d\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

On aboutit alors à un système d'équations, qui mis sous forme matricielle s'écrit

$$\begin{pmatrix} H & U - \zeta \\ U - \zeta & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U' \\ H' \end{pmatrix} = 0,$$

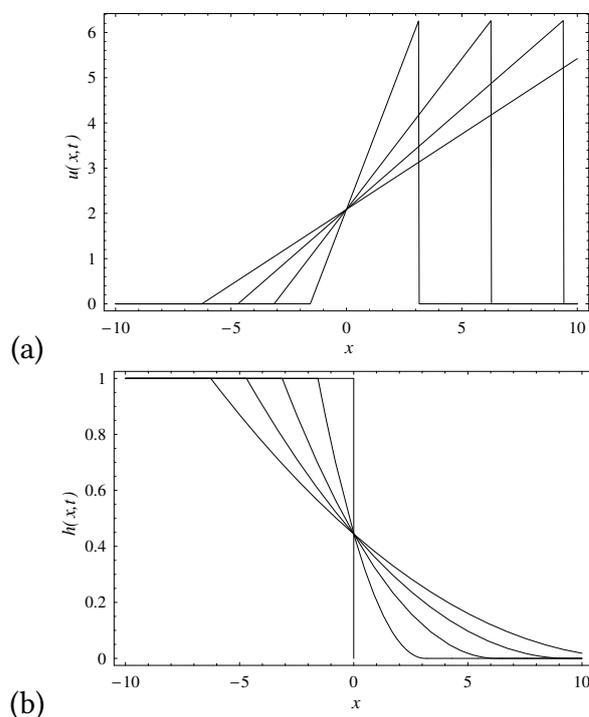
**Figure 3.30** – Solution  $h(x, t)$  des équations de Saint-Venant (3.29)–(3.30) avec une hauteur initiale  $h_0 = 1$  m. Les équations ont été résolues à l’aide de la méthode numérique des volumes finis (solveur geoclaw étendu à l’ordre 2, limiteur du flux de type superbee) (George, 2008). Une durée de 40 s a été simulée.

où le prime symbolise la dérivée selon  $\zeta$ . Pour que ce système admette une solution non triviale, il faut que son déterminant s’annule, ce qui conduit à  $gH = (U - \zeta)^2$ . On substitue cette relation dans le système d’équations ci-dessus et on tire  $U' = 2\zeta/3$ , d’où  $U = 2(\zeta + c_0)/3$ , où  $c_0$  est une constante d’intégration,  $H = 4(c_0 - \frac{1}{2}\zeta)^2/(9g)$ . La constante  $c_0$  est trouvée en se servant des conditions aux limites:  $c_0 = \sqrt{gh_0}$ . Retournant aux variables originales, on déduit finalement la solution dite de Ritter des équations de Saint-Venant

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u} = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} + c_0 \right), \quad (3.32)$$

$$h(x, t) = \frac{1}{9g} \left( -\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2. \quad (3.33)$$

La justification du terme de forme auto-similaire apparaît clairement quand on examine la solution tracée sur la figure 3.31 : les solutions se ressemblent toutes et semblent



**Figure 3.31** – Solution du problème de rupture de barrage aux temps:  $t = 0 ; 0,5 \text{ s} ; 1 \text{ s} ; 1,5 \text{ s} ; 2 \text{ s}$ . (a) Variation de la vitesse moyenne  $u$  en fonction de  $x$  pour les différents temps; notons que la variation verticale au niveau du front n'est pas la solution physique et ne sert ici qu'à positionner le front. (b) variation de la hauteur en fonction de  $x$  pour différents temps.

être des formes « étirées » à partir d'une seule courbe. Quelques autres remarques :

- le front est le point où  $h = 0$ , donc ici c'est le point tel que  $x = 2c_0t$ , ce qui indique que la vitesse du front est  $u_f = 2c_0$ . C'est une valeur qui ne dépend que de la hauteur initiale et d'aucun autre paramètre (comme le volume de fluide). Cette valeur est aussi le double de la célérité des ondes en eau peu profonde  $c_0 = \sqrt{gh_0}$ ;
- la forme du front est parabolique : le fluide se présente comme une lame de plus en plus fine au fur et à mesure que l'on s'approche du front. Cela n'est pas cohérent avec les observations puisqu'en général le front se présente plutôt comme un mur d'eau. On verra comment on peut expliquer cela en faisant intervenir localement la rugosité du lit (voir § 3.7.1);
- toutes les courbes  $h(x, t)$  passent par le point  $x = 0$  et  $h = 4c_0^2/(9g) = 4h_0/9$ . De même, toutes les courbes  $u(x, t)$  passent par le point  $x = 0$  et  $u = 2c_0/3$ . Cela montre que la rupture de barrage est équivalent à injecter un débit constant et égal à  $uh = 8\sqrt{gh_0^3}/27$ .

### Méthode des caractéristiques



- Qu'est-ce qu'un invariant de Riemann ?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 2, § 2.1
- Connaissez-vous la méthode des caractéristiques pour résoudre une équation aux dérivées partielles ?
- ↪ Voir la méthode à l'annexe 2, § 2.1.1.
- Qu'est-ce que le problème de Riemann ? Qu'appelle-t-on « onde simple » et « onde de choc » ?
- ↪ Voir les définitions dans l'annexe 2, § 2.1.3.

On transforme les équations de Saint-Venant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3.35)$$

en un système d'équations différentielles ordinaires en soustrayant ou additionnant membre à membre chaque équation

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh}, \quad (3.36)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh}. \quad (3.37)$$

Cela fait apparaître deux nouvelles inconnues :  $r = u + 2\sqrt{gh}$  et  $s = u - 2\sqrt{gh}$ , dites *variables de Riemann*. Dans le cas présent, les variables  $r$  et  $s$  sont constantes le long des courbes caractéristiques d'équation  $dx/dt = \lambda_{\pm}$ . Pour cette raison elles sont appelées *invariants de Riemann*.

Les équations de Saint-Venant sont équivalentes au système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d}{dt}(u \pm 2\sqrt{gh}) = 0,$$

le long des courbes caractéristiques  $C_{\pm} : dx/dt = u \pm \sqrt{gh}$ .

Si on considère une rupture de barrage, on doit avoir comme conditions initiales :

$$\begin{array}{lll} - \text{ pour la vitesse} & -\infty < x < \infty & u(x, 0) = 0 \\ - \text{ pour la hauteur} & x < 0 & h(x, 0) = h_0 \\ & x > 0 & h(x, 0) = 0 \end{array}$$

La perturbation engendrée à  $t = 0$  et  $x = 0$  par la rupture va se propager à l'amont et à l'aval.

Initialement, comme  $u$  et  $h$  sont constants, les variables  $r$  et  $s$  le sont aussi. Après la rupture, toute la partie du volume d'eau qui n'est pas encore mise en mouvement

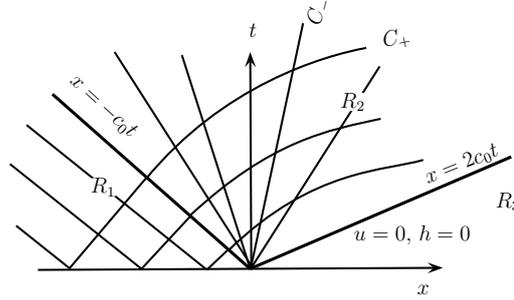


Figure 3.32 – Éventail des caractéristiques émanant du point origine.

est également caractérisée par des valeurs de  $r$  et  $s$  constantes. Mathématiquement, on montre que lorsqu'on a un domaine d'écoulement « constant » ( $R_1$  sur la figure 3.32), c'est-à-dire où  $u$  et  $h$  sont constants, il existe nécessairement un domaine dit « onde simple » ( $R_2$ ) avec une dépendance  $u(h)$  et une famille de caractéristiques qui sont des droites. Il existe un troisième domaine « vide » ( $R_3$ ) où l'écoulement n'est pas encore parvenu. On ne connaît pour l'instant pas les limites de ces différents domaines dans le plan  $x - t$ .

Examinons tout d'abord les caractéristiques  $C_+$  émanant de l'axe  $t = 0$  et  $x < 0$ . Le long de ces caractéristiques, les invariants sont

$$r = u + 2\sqrt{gh} = 2c_0, \quad (3.38)$$

avec  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  la vitesse initiale de l'onde de rupture. Ces caractéristiques ont pour équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh},$$

qui sont des courbes (que l'on ne connaît pas encore) dans le domaine  $R_2$ , mais des droites dans le domaine  $R_1$  puisque  $u$  et  $h$  sont constants. L'information est transmise le long de ces caractéristiques du domaine  $R_1$  vers le domaine  $R_2$ .

La caractéristique marquant les limites de cette zone non perturbée, que l'on appellera domaine  $R_1$  (voir figure 3.32), est la droite  $x = -c_0 t$  reportée en gras sur la figure 3.32. Cette caractéristique émanant de 0 représente tout simplement la propagation de la discontinuité initiale de  $h$  en  $x = 0$  (à  $t = 0$ ). Elle appartient à la famille  $C_-$  d'équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh},$$

qui avec les valeurs initiale à gauche de 0 donne ici  $dx/dt = -c_0$ . Dans le domaine  $R_2$ , la famille de caractéristiques  $C_-$  forme un réseau en éventail (onde simple centrée) d'équation

$$\frac{x}{t} = \lambda_- = u - \sqrt{gh}, \quad (3.39)$$

En résolvant le système d'équation (3.38–3.39), on trouve alors :

$$u = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} + c_0 \right), \quad (3.40)$$

$$h = \frac{1}{9g} \left( -\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2, \quad (3.41)$$

À noter qu'en  $x = 2c_0t$ , la hauteur devient nulle. Le domaine  $R_3$  représentant le domaine non encore concerné par la rupture de barrage est délimité par la caractéristiques  $x = 2c_0t$  qui est à la fois une caractéristique  $C_-$  et  $C_+$ . L'avancée du front se fait à la vitesse  $2c_0$ .

À noter qu'on a ici :  $u = 2(c_0 - \sqrt{gh})$  dans tout le domaine d'écoulement (c'est l'invariant  $r$  de Riemann qui se conserve). En reportant cette expression dans l'équation de conservation de la masse, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (2c_0 - 3\sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

qui est l'équation de l'onde cinématique, avec une vitesse de propagation  $2c_0 - 3\sqrt{gh}$ .

### Remarque sur les invariants de Riemann

Le passage du système (3.34–3.35) au système (3.36–3.37) peut ressembler à un tour de passe-passe puisqu'on a additionné et retranché des équations pour obtenir le résultat souhaité. En fait, cette transformation repose sur un mécanisme assez général de transformation des équations différentielles hyperboliques que l'on a explicité dans l'annexe 2.

## 3.6 Rupture de barrage dans un lit mouillé



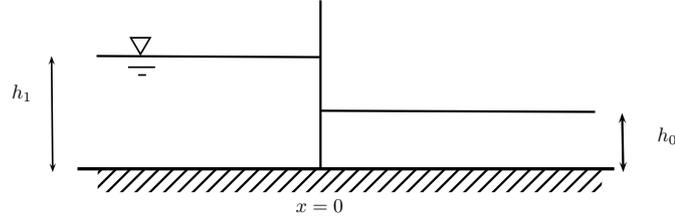
- Qu'est-ce que la relation de Rankine Hugoniot ?
- ↔ Voir la définition dans l'annexe 2, § 2.1
- Connaissez-vous la méthode des caractéristiques pour résoudre une équation aux dérivées partielles ?
- ↔ Voir la méthode dans l'annexe 1, § 1.7.2.
- Qu'est-ce que le problème de Riemann ? Qu'appelle-t-on « onde simple » et « onde de choc » ?
- ↔ Voir les définitions dans l'annexe 2, § 2.1.2.

La figure 3.33 montre une

**Figure 3.33** – Solution  $h(x, t)$  des équations de Saint-Venant (3.29)–(3.30) avec une hauteur à droite de  $h_0 = 50$  cm et à gauche de  $h_1 = 1$  m. Aucun frottement n'est pris en compte. Les équations ont été résolues à l'aide de la méthode numérique des volumes finis (solveur geoclaw étendu à l'ordre 2, limiteur du flux de type superbeee) (George, 2008). Une durée de 40 s a été simulée.

On considère un mur vertical qui sépare deux lacs de retenue, dont le volume est

supposé infini. La hauteur d'eau initiale à droite est  $h_0$ , celle à gauche est  $h_1 < h_0$  (voir figure 3.34). À l'instant  $t = 0$ , on suppose que le mur du barrage s'efface totalement et laisse s'écouler le volume d'eau de la gauche vers la droite.



**Figure 3.34** – Géométrie du problème dit de « rupture de barrage » avec un lit mouillé.

Rappelons que lorsqu'on néglige le frottement sur le fond et qu'on considère un fond horizontal, les équations de Saint-Venant s'écrivent sous forme non conservative

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.43)$$

Dans le cas d'une rupture de barrage sur lit mouillé, les conditions initiales et aux limites sont les suivantes

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty, u(x,0) &= 0, \\ x < 0, h(x,0) &= h_1, \\ x > 0, h(x,0) &= h_0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Le problème a été résolu par [Stoker \(1957\)](#). Le problème à résoudre entre dans la classe des problèmes de Riemann, dont l'annexe 2 présente une méthode générale de résolution. Comme le schématise la figure 2.11 de l'annexe 2, l'idée de base est de rechercher le chemin qui permet de l'état à gauche  $\mathbf{u}_\ell = (h_1, 0)$  à l'état à droite  $\mathbf{u}_r = (h_0, 0)$  en suivant un réseau de courbes de détente ou de choc. Pour passer de  $\mathbf{u}_\ell$  à  $\mathbf{u}_r$ , on passe par un état transitoire  $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$  en passant par une 1-onde de détente

$$u_* = S_1(h_* | h_1, 0) = 2\sqrt{gh_1} - 2\sqrt{gh_*}, \quad (3.45)$$

puis par une 2-onde de choc

$$u_* = R_2(h_* | h_0, 0) = (h_* - h_0) \sqrt{g \frac{h_* + h_0}{2h_* h_0}}. \quad (3.46)$$

On a ici un système de deux équations avec deux inconnues  $(h_*, u_*)$ . Comme l'illustre la figure 3.35, la solution au temps  $t$  comporte quatre régions :

- aux deux extrémités, les états initiaux non perturbés  $\mathbf{u}_\ell = (h_1, 0)$  et  $\mathbf{u}_r = (h_0, 0)$ ;

- une onde de détente qui permet de passer de  $\mathbf{u}_\ell = (h_1, 0)$  à  $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$ . Dans le plan caractéristique  $x - t$ , les 1-caractéristiques sont des droites en éventail (centrées sur O), limitées à gauche par la caractéristique  $x = -c_1 t$  (avec  $c_1 = \sqrt{gh_1}$  la vitesse de l'onde progressive) et à droite par la caractéristique  $x = \lambda_-^* t$  avec  $\lambda_-^* = u_* - \sqrt{gh_*}$ ;
- une onde de choc qui permet de passer de  $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$  à  $\mathbf{u}_r = (h_0, 0)$ . La vitesse du choc est donnée par la relation de Rankine–Hugoniot :

$$\dot{s} = \frac{[[hu]]}{[[h]]} = \frac{h_* u_*}{h_* - h_0}. \quad (3.47)$$

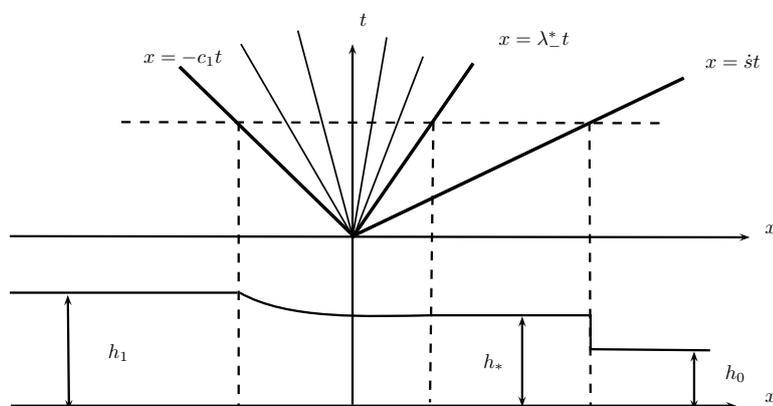
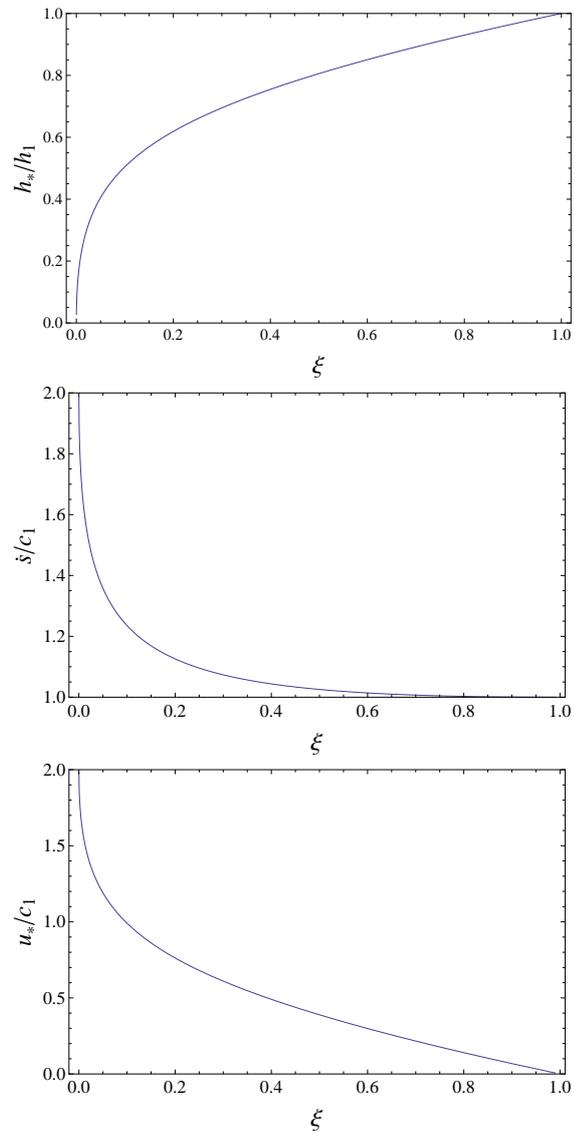


Figure 3.35 – Schéma de la solution.

Pour déterminer la solution du problème de Riemann (3.42)–(3.44), il suffit de déterminer l'état intermédiaire  $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$  et la vitesse du ressaut  $\dot{s}$  en résolvant le système d'équations algébriques (3.45)–(3.47). Comme le montre la figure 3.36, la solution comporte :

- une onde de détente pour  $-c_1 t \leq x \leq \lambda_-^* t$  où la hauteur varie progressivement de  $h_1$  à  $h_*$  (la vitesse croît de 0 à  $u_*$ );
- une onde de choc pour  $\lambda_-^* t \leq x \leq s(t)$  où la hauteur est constante et vaut  $h_*$  (la vitesse reste également égale  $u_*$ ).

La figure 3.36 montre comment varie  $h_*/h_1$ ,  $\dot{s}/c_1$ , et  $u_*/c_1$  en fonction du rapport initial  $\xi = h_0/h_1$  (on a  $0 \leq \xi \leq 1$ ). On note que lorsque  $\xi \rightarrow 0$  (le lit aval devient alors sec), on trouve que  $h_* \rightarrow 0$ ,  $\dot{s} \rightarrow 0$ , et  $u_* \rightarrow 2c_1$  comme cela est prédit par la solution de Ritter.



**Figure 3.36** – Variation de  $h_*/h_1$ ,  $\dot{s}/c_1$ , et  $u_*/c_1$  en fonction du rapport initial  $\xi = h_0/h_1$  dans le cas d'un lit aval mouillé.

## 3.7 Effet du frottement

La solution de Ritter a un intérêt théorique, mais elle est peu utile dans les applications pratiques à cause de ses hypothèses (lit horizontal, absence de frottement, volume infini). La figure 3.37 montre ce qui se passe sur un lit frottant (avec un coefficient de frottement  $K = 40 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ ) de pente 5 % lorsqu'on lâche un volume fini d'eau : le front n'a plus une forme d'arc de parabole, puis il se présente sous la forme d'un bombement. Sous l'action de la pesanteur, c'est tout le volume d'eau qui se met en mouvement. Pour étudier des cas d'intérêt pratique, il faut le plus souvent passer par des modèles numériques, mais des méthodes de calcul approché permettent de comprendre l'influence de tel ou tel paramètre sur la dynamique de l'écoulement. On va illustrer ceci avec l'estimation de l'effet du frottement sur la position du front.

**Figure 3.37** – Solution  $h(x, t)$  des équations de Saint-Venant avec une hauteur initiale  $h_0 = 15 \text{ m}$ , une pente du lit de 5 %, et un frottement de type Manning–Strickler  $K = 40 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ . Les équations ont été résolues à l'aide de la méthode numérique des volumes finis inclus dans Clawpack (solveur geoclaw étendu à l'ordre 2, limiteur du flux de type superbee) (George, 2008; Mandli *et al.*, 2016). Une durée de 50 s a été simulée.

Nous considérons le cas plus réaliste d'un fond horizontal résistant. La résistance

provoque :

- l'apparition d'une contrainte pariétale de la forme :

$$\tau_b = c_d u^2$$

pour un régime turbulent, avec  $c_d$  un coefficient de type Chézy (ce n'est pas rigoureusement la loi de Chézy), ou bien

$$\mu c \left( \frac{u}{h} \right)^n,$$

pour un régime laminaire, avec  $c$  un facteur de proportionnalité,  $\mu$  la viscosité,  $n$  un paramètre pris le plus souvent à  $n = 1$  pour un fluide newtonien.

- un cisaillement au sein de l'écoulement. On introduit donc un facteur  $\gamma$  dit *facteur de Boussinesq* tel que

$$\overline{u^2} = \gamma \bar{u}^2.$$

Les équations du mouvement sont écrites sous la forme (Hogg & Pritchard, 2004) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\tau_b}{\rho h}. \quad (3.49)$$

Le plus souvent, les mesures donnent  $1 < \gamma < 1,1$  et on fait donc l'approximation :  $\gamma = 1$ . Cette approximation ne pose problème que dans de rares cas (Hogg & Pritchard, 2004; Ancey *et al.*, 2006, 2007).

### 3.7.1 Méthode de Whitham : rupture de barrage sur fond plat

Whitham (1954) a proposé une méthode approchée pour calculer l'effet du frottement sur le front. Loin du front, la solution de Ritter est valable. Les champs de vitesse et de hauteur donnés par

$$u = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} + \sqrt{gh_0} \right) \text{ et } h = \frac{1}{9g} \left( -\frac{x}{t} + 2\sqrt{gh_0} \right)^2$$

sont donc valables jusqu'au point B, d'abscisse  $x = x_b(t)$ . Pour la région frontale située entre  $x_b$  et  $x_a$  (position du front), Whitham suggère de ne pas résoudre les équations mais d'intégrer les équations pour obtenir des équations globales du front (méthode de Pohlhausen). Il considère notamment que dans la région frontale, la variation de vitesse selon  $x$  est faible de telle sorte que l'on peut écrire  $u(x, t) = u(t)$ .

Notons que cette méthode intégrale ne permet pas de déterminer exactement la forme de la surface libre, mais il est possible d'en avoir une idée en faisant un simple

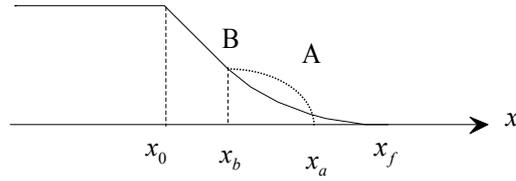


Figure 3.38 – Modification de la forme du front.

bilan de quantité mouvement près du front. En effet, en négligeant l'inertie du fluide au niveau du front, on tire que le gradient de pression doit contrebalancer le frottement

$$gh \frac{\partial h}{\partial x} = -c_d u^2(t),$$

or  $u(t) \approx dx_a/dt$  et  $c_d = 1/C^2$  un coefficient relié au coefficient de Chézy  $C$ . D'où l'on déduit l'approximation :

$$h(x) = \frac{dx_a}{dt} \sqrt{\frac{2c_d}{g}} \sqrt{x_a(t) - x}.$$

Pour obtenir les équations globales du fluide au niveau du front, on note que :

- la vitesse du fluide au point de transition  $x_b$  est  $u_b - dx_b/dt$ , où  $(u_b, h_b)$  sont les solutions de Ritter à gauche du point de transition B ;
- le flux de masse  $M$  s'écrit  $\rho h_b (u_b - dx_b/dt)$  ;
- le flux de quantité de mouvement est  $\rho h_b u_b (u_b - dx_b/dt)$ .

L'équation globale du mouvement s'écrit donc

$$\frac{dP}{dt} = \rho h_b u_b \left( u_b - \frac{dx_b}{dt} \right) + F + \frac{1}{2} \rho g h_b^2,$$

où  $P$  est la quantité de mouvement et  $F$  la force de frottement :

$$F = \int_{x_0}^{x_a} \rho c_d u^2 dx \approx \rho c_d u^2 (x_a - x_b).$$

Par ailleurs, puisque la vitesse est supposée constante dans la zone frontale, on a  $P = M u_b$ , or

$$\frac{dM}{dt} = \rho h_b \left( u_b - \frac{dx_b}{dt} \right),$$

avec  $x_b = c_0(3u_b/(2c_0) - 1)t$  et  $h_b = h_0(1 - u_b/(2c_0))^2$  d'après la solution de Ritter. L'intégration donne

$$M = \rho h_0 c_0 \left( 1 - \frac{u_b}{2c_0} \right)^3 t.$$

Notons que l'on peut trouver ce résultat directement en faisant remarquer que, dans la solution de Ritter  $M = \int_{x_b}^{x_f} \rho h dx$  (il n'y a pas de variation de masse, juste un changement de la surface libre et une vitesse front moins grande). On déduit la vitesse :

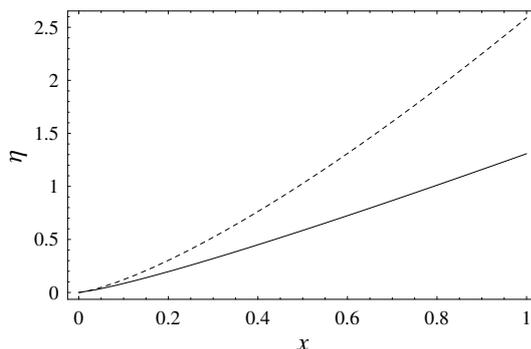
$$M \frac{du_b}{dt} = \frac{1}{2} \rho g h_b^2 - \rho c_d u_b^2 (x_a - x_b).$$

Introduisant les variables sans dimension  $\eta = c_d/h_0(x_f - x_a)$  et  $\tau = \sqrt{g/c_0} c_d t$ , on tire :

$$4\tau \dot{\eta} \ddot{\eta} + \dot{\eta}^4 = 16(2 - \dot{\eta})^2 (3\dot{\eta}\tau - 2\eta).$$

On s'est servi du fait que dans le front la vitesse est constante et égale à  $\dot{x}_a$  :  $u_b = \dot{x}_a$  ; de plus on peut aussi interpréter la vitesse du front en termes de vitesse relative  $\dot{\eta}$  en posant :  $\dot{x}_a = c_0(2 - \dot{\eta})$ . On ne peut pas résoudre directement cette équation numériquement car en  $\tau = 0$  le terme  $\ddot{\eta}$  tend vers une limite impropre. Il faut déterminer cette limite. Pour cela on va considérer ce qui se passe au premier ordre en  $\tau = 0$ . On pose  $\eta = K(\tau) = A\tau^n$  et on cherche  $n$  et  $A$ . En reportant cela dans l'équation on trouve au premier ordre  $n = 4/3$  et  $A = 3 \times 3^{2/3}/14^{1/3} \approx 2,58916$ . On trouve donc que  $\ddot{\eta} \rightarrow \infty$  quand  $\tau \rightarrow 0$ . On peut de là résoudre numériquement l'équation avec comme condition initiale  $\eta(\varepsilon) = K(\varepsilon)$  et  $\dot{\eta}(\varepsilon) = K'(\varepsilon)$  où l'on choisit  $\varepsilon$  très proche de 0 (typiquement  $\varepsilon = 10^{-6}$ ). On obtient la courbe reportée sur la figure 3.39.

On pourrait chercher le développement asymptotique plus loin en écrivant  $\eta = A\tau^n + B\tau^m + \dots$ , mais cela ne marche pas. On ne peut pas faire de développement de Taylor en 0 car les dérivées d'ordre 2 ou supérieures divergent. En fait, comme le montre la solution numérique, très rapidement  $\eta$  devient linéaire ; il ne sert donc à rien de chercher un développement polynômial vu que l'ordre 1 ( $\tau^{4/3}$ ) a une pente plus forte que 1.



**Figure 3.39** – Comparaison de la solution numérique (courbe continue) et de l'approximation asymptotique en  $\tau = 0$ .

Il faut plutôt rechercher la solution sous la forme d'une fonction rationnelle (approximation de Padé). Recherchons donc une solution sous la forme :

$$\eta = \frac{A\tau^{4/3}}{1 + B\tau^n}.$$

$B = 4 \times 42^{2/3}/59 \approx 0,81917$  et  $n = 1/3$ . On obtient la courbe à tiret mi-long de la figure 3.40. Si on pousse à un ordre supérieur, on obtient :

$$\eta = \frac{A\tau^{4/3}}{1 + B\tau^{1/3} + C\tau^{2/3}},$$

avec  $C \approx 0,204158$ . On obtient la courbe à tiret long de la figure 3.40, donnant un accord encore meilleur avec la courbe numérique.

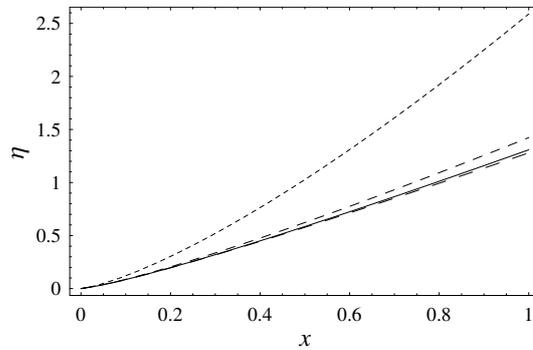


Figure 3.40 – Approximations successives de la solution.

On obtient ainsi l'approximation au premier ordre quand  $t$  est petit :

$$u_a = \frac{dx_a}{dt} = \sqrt{gh_0} \left( 2 - 3.452 \sqrt[3]{c_d t \sqrt{\frac{g}{h_0}}} \right).$$

Aux temps très longs, on peut recherche un nouveau développement asymptotique. La solution numérique nous pousse à rechercher une solution sous la forme  $\eta = \alpha\tau + \beta$ . Injectant cette forme dans l'équation différentielle, puis prenant  $\tau \rightarrow \infty$ , on trouve que  $\beta = 2$ . Donc, on aboutit à l'expression asymptotique :

$$u_a = \frac{dx_a}{dt} = \sqrt{gh_0} \sqrt{\frac{h_0}{2c_d t}}.$$





## CHAPITRE 4

### Vagues



CE CHAPITRE traite des vagues et des mouvements à la surface d'une étendue d'eau :

- vagues à la surface d'un plan d'eau (mer, lac) dues au vent ou à des courants ;
- vagues d'impulsion consécutives à l'entrée d'un écoulement (écroulement rocheux, avalanche, etc.) dans une retenue d'eau ;
- vagues géantes telles que les tsunamis ;
- vagues dues à l'instabilité de la surface libre.

Tous ces phénomènes peuvent être calculés, à des degrés divers de précision, par les équations de Saint-Venant ou des équations approchées tirées des équations de Saint-Venant. Nous commençons par décrire les phénomènes physiques de façon qualitative avant d'aborder chacun d'eux à travers des équations.

#### 4.1 Phénomènes physiques

Le mot « vague » (*wave* en anglais, *Welle* en allemand, *onda* en italien, *ola* en espagnol) désigne une multitude de phénomènes, où une onde se propage à la surface d'une étendue d'eau (océan, lac, cours d'eau).

Les vagues sont souvent associées au milieu marin. En haute mer, l'amplitude des vagues reste à peu près constante même si elles fluctuent considérablement autour d'une hauteur moyenne, dite *hauteur significative* (on est en pratique assez loin du schéma d'Airy où les vagues sont des oscillations sinusoïdales de la surface). À l'approche des côtes, la conservation de l'énergie entraîne un accroissement de l'amplitude des vagues selon un schéma qui est décrit plus loin pour décrire les tsunamis (voir § 4.5). Il existe également des cas où des vagues peuvent atteindre de très grande amplitude en haute mer de façon quasi-surnaturelle. Appelées « vagues scélérates » en

français, ces vagues ont longtemps été considérées comme des inventions de marins, mais les observations fiables se sont multipliées au  $xx^e$  siècle : en janvier 1995, la plateforme pétrolière Draupner en Mer du Nord fut impactée par une vague scélérate dont la hauteur a été évaluée à environ 27 m lors d'une tempête (alors que la hauteur significative était de 10 m), soit un rapport de 2,7 ! En février de la même année, le paquebot Queen Elisabeth II essuya une violente tempête dans l'Atlantique nord et l'équipage a mentionné avoir observé fondre sur eux un mur d'eau de 30 m de haut ; le bateau quoiqu'endommagé put regagner le rivage. Bien qu'il soit toujours difficile d'expliquer la physique du phénomène, il est apparu que plusieurs processus ondulatoires bruités et non linéaires peuvent donner naissance à des oscillations d'amplitude exceptionnelle. La théorie des ondes de Korteweg et de Vries (description à l'ordre 3 des ondes à la surface d'une étendue d'eau) permet de justifier, au moins dans le cas unidimensionnel, l'existence de ces vagues exceptionnelles ; des expériences en laboratoire ont également montré que l'on pouvait générer artificiellement de tels phénomènes dans des canaux. La photographie 4.1 montre l'impact d'une vague scélérate contre la proue d'un navire dans le Pacifique sud.



**Figure 4.1** – Source : proue d'un navire impacté par une vague de 12 m au large du cap Horn (déroit de Drake). Source : Lorraine Turci.

Des vagues peuvent également s'observer dans les rivières et les lacs. Ce sont le plus souvent de petites intumescences :

- amplifiées à l'approche d'une berge ou d'un côté (voir Fig. 4.3) ;

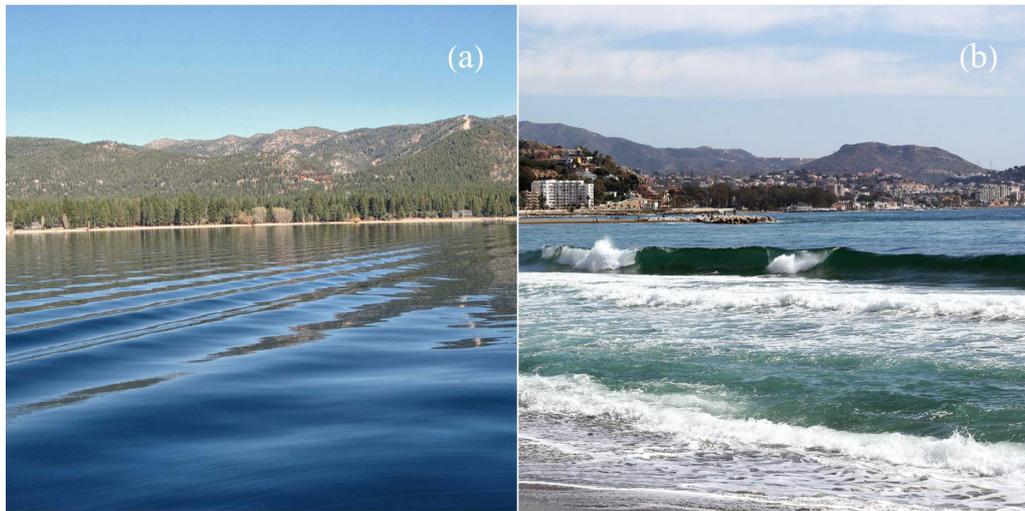
- liées à un obstacle (ou un objet mobile);
- induites par une variation du niveau de l'eau;
- provoquées par le vent.

La forme d'une vague peut changer, notamment lorsqu'elle parcourt de longues distances, rencontre un obstacle, ou bien déferle (voir fig. 4.4 à fig. 4.5).



**Figure 4.2** – (a) Sillage sur la rivière Nougoush (Bachkirie, Russie). (b) Le surfeur haïtien Kai Lenny surfant une vague de 20 m à Nazaré (Portugal). Source: Konstantin Tsibin et AFP.

Plus exceptionnellement, des vagues plus importantes peuvent se former dans les lacs et les rivières (voir figures 4.7 et 4.8). Notamment, les ondes d'impulsion (*impulse wave* en anglais, *Impulswelle* en allemand) sont des vagues créées par l'entrée d'une masse solide (comme un glissement de terrain) dans un volume d'eau. Le transfert de quantité de mouvement entre la masse glissante et l'eau provoque la formation d'une vague qui peut être dévastatrice. Les effets sont assimilables à ceux d'un tsunami. Ainsi, en 1958, un mouvement de terrain se produisit à la suite d'un tremblement de terre en Alaska; la masse de rocher pénétra dans l'eau d'une vaste baie bordant l'océan Pacifique et provoqua la formation d'une vague gigantesque. Celle-ci ravage tout le pourtour de la baie; elle a notamment remonté le versant d'une colline sur 524 m de hauteur (par rapport au niveau) de la mer (voir fig. 4.6) (Weiss *et al.*, 2009). Les grands lacs



**Figure 4.3** – (a) Vagues sur le lac Tahoe (Nevada, États-Unis). (b) Vagues en Méditerranée à Málaga (Espagne).



**Figure 4.4** – (a) Déferlement d'une vague sur le phare d'Argenton-en-landunvez (Bretagne, France). (b) Impact d'une vague sur le perré maçonné de la rivière Qiantang (baie de Hangzhou, Chine) connue comme le fleuve connaissant les plus grands mascarets [Didier Grimberg](#) et [The Atlantic](#).

suisses ont subi au cours des derniers siècles des dommages conséquents dus à des ondes d'impulsion comme le récapitule le tableau 4.1.



**Figure 4.5** – (a) Déferlement d'une vague à l'approche d'une plage à Saint-Barthélemy (Antilles françaises). (b) Déferlement de vagues dues au vent sur le lac Érié. Source: [Pierre Carreau](#) et [David Stanford](#).

L'essentiel de la recherche a porté sur les vagues d'impulsion générées par des glissements de terrain ou des écroulements rocheux, et il y a très peu de travaux sur celles causées par des avalanches ([Vila, 1987](#); [Zitti \*et al.\*, 2016](#); [Meng \*et al.\*, 2020](#)). Cette absence de recherches spécifiques ne reflète pas un désintérêt des scientifiques, mais l'absence d'événements d'ampleur documentés où des vagues d'impulsion causées par des avalanches auraient concerné des lacs d'accumulation. Ainsi, si l'on considère le dernier hiver catastrophique en Europe (en février 1999 avec 60 morts dans des habitations à travers les Alpes), le seul accident d'avalanche concernant une retenue d'eau a été l'accident de Gschinen (VS) dans les Conches le 24 février 1999; une première avalanche a vidé le lac de Trützi, et une seconde a mobilisé le dépôt de neige humidifiée et s'est écoulée jusqu'au Rhône, débordant sur sa droite la digue de contention protégeant le village – deux personnes tuées furent tuées dans leur maison – ([Ammann, 2000](#)).

Des avalanches de grande période de retour (souvent supérieure à 100 ans) ont été observées dans les Alpes, mais aucun dommage dû à une vague d'impulsion n'a été rapporté à ce jour. La menace des avalanches sur les grandes retenues a longtemps été considérée comme négligeable. Les photographies de la figure 4.8 montrent quelques exemples récents d'avalanches ayant atteint des lacs d'accumulation en Suisse. Dans sa thèse, Dieter Müller signale trois événements de vagues d'impulsion dans des lacs d'accumulation ([Müller, 1995](#)):

- En décembre 1958, une avalanche brisa la couche de glace du lac Fedaiia (Trentin-Haut-Adige, Italie). La vague d'impulsion d'environ 5 m d'amplitude a endommagé le garde-corps du barrage sur une longueur de 60 m.

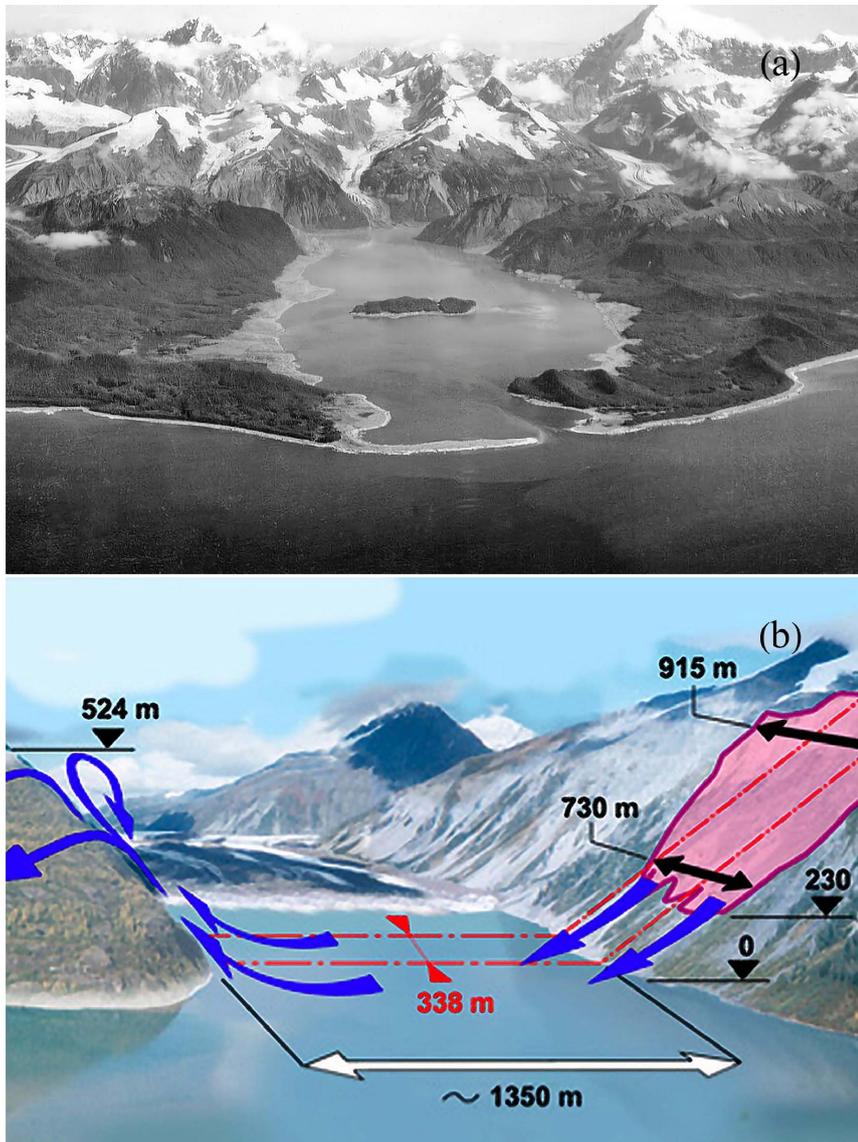
- En décembre 1962, une avalanche de grande ampleur (avec un volume de neige voisin du million de m<sup>3</sup>) a brisé la couche de glace du lac de Räterichsboden (Guttannen, BE). Une seiche d'environ 54 cm d'amplitude s'est produite. La projection de blocs de glace a endommagé le garde-corps sur quelques mètres.
- En janvier 1981, une avalanche (avec un volume voisin de 400 000 m<sup>3</sup>) a causé la formation d'une seiche dans le lac de Gigerwald (Pfäfers, SG). Compte tenu de la revanche de 15 m, la vague n'est pas passée par-dessus le barrage. La vague est remontée sur une hauteur de 6 m le long des berges.

Au Pérou, le lac Palcacocha<sup>1</sup> a été connu plusieurs vagues d'impulsion au cours des dernières (Somos-Valenzuela *et al.*, 2016; Chisolm & McKinney, 2018). Aucun dommage sur la digue en remblai n'a été rapporté.

**Tableau 4.1** – Formation de vagues d'impulsion sur les grands lacs suisses. D'après (Huber, 1982).

Date	Lieu	Cause	Dommages
563	Léman	rupture d'une embâcle sur le Rhône	tsunami sur le Léman
1435	lac de Zoug	rupture d'une berge	60 morts, 26 maisons détruites
1795	lac des 4 Cantons (Weggis)	glissement de terrain	400 sans-abris, 33 bâtiments détruits
1801	lac des 4 Cantons (Sisikon)	éboulement rocheux	10 morts, plusieurs bâtiments détruits
1806	lac de Lauerz (Goldau)	éboulement rocheux	457 morts
1862	lac de Lugano (Morcote)	glissement de terrain	1 mort
1887	lac de Zoug (Zoug)	rupture des quais	650 sans-abris, 20 habitations détruites
1891	Léman (Montreux)	rupture des quais	72 m de quai détruits
1923	lac de Davos	rupture d'une berge entraînant la vidange partielle du lac	1 mort
1946	lac de Walenstadt	éboulement rocheux	1 mort
1963	lac des 4 Cantons (Obermatt)	éboulement rocheux	2 morts

1. Voir la vidéo sur la vague de 2021 : [www.youtube.com/watch?v=MU-IKherEFE](https://www.youtube.com/watch?v=MU-IKherEFE).



**Figure 4.6** – (a) Vue aérienne de Lituya Bay en 1958 après la vague catastrophique ; le passage de la vague dans la forêt permet d'évaluer la remontée de la vague sur les berges [D.J. Miller, USGS] ; source : [geology.com](http://geology.com). (b) Schéma du glissement avec représentation des grandeurs géométriques ; source : (Weiss *et al.*, 2009) et [www.drgeorgepc.com](http://www.drgeorgepc.com).



**Figure 4.7** – Vague d’impulsion créée par un éboulement rocheux de 300 000 m<sup>3</sup> dans un lac morainique sous le glacier inférieur de Grindelwald (BE) le 22 mai 2009 ; source : [Tages Anzeiger](#).

**Tableau 4.2** – Liste des principales catastrophes dues à des vagues d’impulsion dans le monde. On indique la date de l’événement, le lieu et le pays, le volume du mouvement de terrain responsable de la vague, la hauteur de runup, et le nombre de victimes. D’après ([Heller, 2007](#)).

<i>Date</i>	<i>Lieu</i>	<i>Pays</i>	<i>Volume [Mm<sup>3</sup> ]</i>	<i>Runup [m]</i>	<i>Victimes</i>
22/02/1756	Tjelle	Norvège	15	46	38
21/05/1792	Shimabara	Japon	500	10	~ 15000
27/08/1883	Krakatau	Indonésie		35	~ 36000
13/03/1888	Ritter Island	Papouasie	5000	20	~ 100
04/07/1905	Disenchantment Bay	EUA	29	35	0
07/04/1934	Tajford	Norvège	2	62	41
13/09/1936	Ravnefjell	Norvège	1	74	73
09/07/1958	Lituya Bay	EUA	31	524	2
22/03/1959	Pontesei	Italie	5		1
09/10/1963	Vajont	Italie	240	270	~ 2000
18/03/1971	lac Yanahuin	Pérou	0,1	30	~ 500
18/05/1980	Mount St. Helens	EUA	430	200	0



**Figure 4.8** – Exemples d’avalanches touchant des lacs d’accumulation. (a) Lac gelé du barrage de Cleuson le 10 mars 2017 (crédit : P. Boven). L’avalanche issue des Luées (contrefort du Bec des Étagnes, 3232 m) s’est arrêtée sur la surface gelée du lac (2179 m). L’impact a fissuré l’épaisse couche de glace. (b) Avalanche en aérosol issue des pentes du Mutenstock (3079 m) déclenchée artificiellement atteignant le lac de Limmeren (Linthal, GL) en janvier 2016 (crédit : R. Stüssi). (c) Avalanche en aérosol issue du Selfanft (2949 m) atteignant le barrage de Limmeren (1848 m) en mars 2017 (crédit : R. Stüssi). Source : Schnee- und Lawinenforschung, [Lawinenbulletin und Schneesituation](#), Davos.

**Tableau 4.3** – Liste des principales catastrophes dues à des tsunamis. Source: [Wikipedia](#).

<i>Date</i>	<i>Zone concernée</i>	<i>nombre de victimes</i>	<i>hauteur de vague</i>
28 sep. 2018	Indonésie, Anak Krakatoa	2256	6 m
11 mars 2011	Japon, Tohoku	18 457	30 m
26 déc. 2004	sud-est Asie	>250 000	30 m
17 août 1999	Turquie, Izmit	17 480	3 m
17 jui. 1998	Papouasie	2000	15 m
12 déc. 1992	Indonésie	2200	26 m
17 août 1976	Indonésie	5000	5 m
22 mai 1960	Chili, Valdivia	5700	25 m
28 déc. 1908	Italie, Messine	98 000	13 m
27 août 1883	Océan indien, Krakatoa	36 000	40 m
21 mai 1792	Japon	15 000	55 m
24 avr. 1771	Japon, Ryukyu	13 486	85 m
1 nov. 1755	Portugal	90 000	18 m

## 4.2 Équations de Saint-Venant et ondes dynamiques



- Qu'appelle-t-on « équation des ondes » ?
- ↪ Voir la définition au §1.6.6.

Les ondes dues à la gravité (gradient de pression) provoquent des ondes dynamiques à la surface des écoulements. On parle d'*onde de gravité* ou *onde de surface*. Leurs caractéristiques générales peuvent se déduire en considérant en première approximation que les effets visqueux sont d'influence négligeable sur la propagation de ces ondes.

Une des caractéristiques souvent rencontrées pour les ondes est qu'elles transmettent une information, une énergie, etc., mais ne sont pas associées à un mouvement des particules. Ce phénomène est bien visible à la surface d'un lac ou d'une mer : les vagues ne sont pas associées à un transport de particule. Ainsi, une bouée à la surface de l'eau est soulevée, puis rabaissée, mais reste *grosso modo* à la même place.

Considérons donc une intumescence d'épaisseur  $\eta$  se déplaçant à la surface d'une nappe d'eau peu épaisse (profondeur  $h_0$ ) et au repos. Si on suppose que cette onde n'induit pas de transport de fluide durant son mouvement, alors le débit doit être nul  $d(\eta u) = 0$ . Considérons l'équation (1.20) de continuité des équations de Saint Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0,$$

avec  $h = h_0 + \eta$ , soit encore

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0,$$

(compte tenu de  $d(\eta u) = 0$ ). L'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.21) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.$$

En linéarisant l'équation (c'est-à-dire en supprimant le terme convectif  $\bar{u}\partial\bar{u}/\partial x$  en supposant que la vitesse induite par la vague est faible) et en considérant un fluide non visqueux ( $\tau_p = 0$ ), on tire :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

En combinant équation de la masse et équation linéarisée de quantité de mouvement, on tire que :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

ce qui montre que la vitesse de l'intumescence satisfait l'équation typique des ondes dynamiques (1.180), vue précédemment avec  $c = \sqrt{gh_0}$ .

On peut aboutir au même résultat sans passer par l'approximation de Saint Venant, ce qui permet de calculer la vitesse des ondes lorsque la profondeur d'eau est quelconque. C'est ce que l'on va voir maintenant en considérant les équations locales du fluide parfait au lieu des équations moyennées.

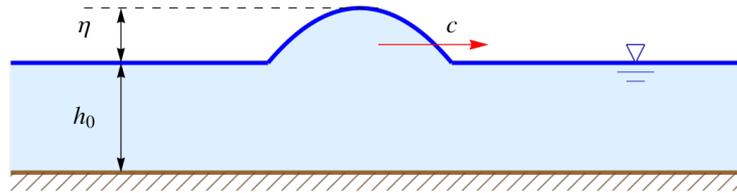


Figure 4.9 – Déplacement d'une intumescence à la surface de l'eau (au repos).

## 4.3 Modèle d'Airy

### 4.3.1 Équations d'Airy

Une des premières assez complètes pour décrire le mouvement d'une onde de gravité est due à Airy<sup>2</sup>. Si l'on considère un mouvement d'une onde provoquant une variation de la surface libre d'un fluide parfait initialement au repos (pas de mouvement hormis celui induit par l'onde), les équations du mouvement sont les équations d'Euler :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

On introduit le potentiel des vitesses  $\phi$  :  $\mathbf{u} = \nabla\phi$  ; en termes de composantes des vitesses on a donc :

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \text{ et } v = \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

2. Sir George Biddell Airy était un mathématicien et physicien britannique (1801–1892). Il s'est illustré dans ses jeunes années pour ses travaux d'observation en astronomie, ce qui lui a valu d'être nommé « astronome royal », poste qu'il continuera d'exercer jusqu'à ses 80 ans. Il s'est également beaucoup intéressé aux phénomènes ondulatoires, notamment les arcs-en-ciel, le mouvement pendulaire, les ondes de gravité. Il a aussi contribué à la géodésie, en particulier en développant la notion d'isostasie (en bref, les variations du champ de gravitation terrestre dues au relief).

On suppose également l'écoulement irrotationnel. Mathématiquement cela implique que le rotationnel du champ de vitesse est nul, soit  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ; physiquement cela veut dire qu'il n'y a pas de vorticité dans l'écoulement (déplacement de tourbillon dans l'écoulement). L'équation de conservation de la masse devient alors :

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (4.1)$$

(appelée équation de Laplace) tandis que l'équation de quantité de mouvement<sup>3</sup>

$$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

soit encore en intervertissant les opérateurs de différentiation spatiales et temporelle :

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) = \nabla \left( -\psi - \frac{1}{\rho} p \right), \quad (4.2)$$

avec  $\psi$  le potentiel gravitaire ( $\mathbf{g} = -\nabla \psi$ ); on reconnaît une variante de l'équation de Bernoulli, où la vitesse est remplacée par le potentiel  $\nabla \phi$ . Cette équation peut encore s'écrire (après intégration)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\psi - \frac{1}{\rho} p. \quad (4.3)$$

Il faut tenir compte des conditions aux limites. Au fond, on a non-pénétration, donc

$$v = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0. \quad (4.4)$$

  la surface libre  $y = h(x, t)$ , le terme de pression est supposé nul ( $p = 0$ ). De plus, si on ne retient que les termes de premier ordre (c'est-à-dire on néglige  $\nabla \phi \cdot \nabla \phi$ , ce qui est possible lorsque l'amplitude de la vague est petite devant sa longueur d'onde), on tire que la condition dynamique à la surface libre s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -gh \text{ en } y = h. \quad (4.5)$$

De plus, à la surface libre, on a aussi la condition cinématique (voir au chap. 1, à 1.2):

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt}$$

or  $v = \partial \phi / \partial y$  et  $u = \partial \phi / \partial x$ , d'où l'on tire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (4.6)$$

---

3. On s'est servi de  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ . Or comme  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ , on obtient l'égalité  $\nabla(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ .

Pour trouver une solution à (4.1), on va employer la méthode de séparation des variables. Physiquement, cette méthode est utile lorsqu'on considère que ce qui se passe dans une direction est découplé (ou indépendant) de ce qui se passe dans l'autre direction. Recherchons des solutions sous forme d'onde progressive :

$$\phi(x, y, t) = F(x - ct)G(y). \quad (4.7)$$

Le report dans l'équation  $\nabla^2\phi = 0$  donne :

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = -k^2,$$

avec  $k$  une constante ( $k$  est interprétée par la suite comme le nombre d'onde). La solution générale est :

$$F = A \cos[k(x - ct)] + B \sin(x - ct) \text{ et } G = Ce^{ky} + De^{-ky}. \quad (4.8)$$

Pour déterminer la relation de dispersion et les constantes d'intégration  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $D$ , il faut prendre en compte les conditions aux limites. Une condition est donnée par 4.4 au fond, et une autre est donnée par la surface libre (4.6). Le détail de la dérivation n'est pas reporté, mais on peut consulter [Stoker \(1957\)](#) par exemple pour un développement plus complet.

En différenciant (4.5) par rapport à  $t$ , puis en reportant l'expression de  $\partial h/\partial t$  déterminée dans la condition (4.6) sur  $v$  à la surface libre, on tire qu'à la surface libre (pour  $y = h$ ) on a :

$$\boxed{\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial\phi}{\partial y}}.$$

C'est l'équation des ondes de surface d'un courant d'eau.

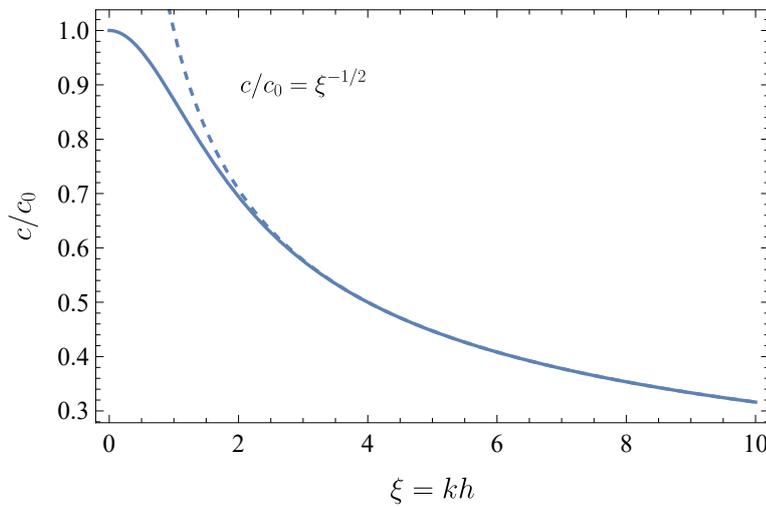
### 4.3.2 Relation de dispersion

La relation de dispersion est obtenue en reportant les expressions de  $F$  et  $G$  dans chacune des conditions aux limites pour éliminer les constantes d'intégration. Après calcul, on obtient :

$$\boxed{c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh)}. \quad (4.9)$$

On peut faire les remarques suivantes (voir figure 4.10) :

- la vitesse apparaît au carré, donc on peut déterminer deux vitesses (une négative, l'autre positive) avec des sens de propagation opposés (voir figures 4.11 et 4.12);
- en eau peu profonde (c'est-à-dire  $h \ll \lambda$ ), on a  $\tanh kh \approx kh$ , d'où l'on tire :  $c = \pm\sqrt{gh}$ . C'est la vitesse critique (correspondant à  $Fr = 1$ ). Toutes les ondes de surface ont la même vitesse de propagation quelle que soit leur longueur d'onde  $\lambda$ ;



**Figure 4.10** – Vitesse de propagation  $c$  donnée par l'équation de dispersion (4.9). On a posé  $\xi = kh$  et  $c_0 = \sqrt{gh}$ . La relation  $c = c_0/\sqrt{\xi}$  correspond à l'approximation en eau profonde lorsque  $\xi = kh \gg 1$ .

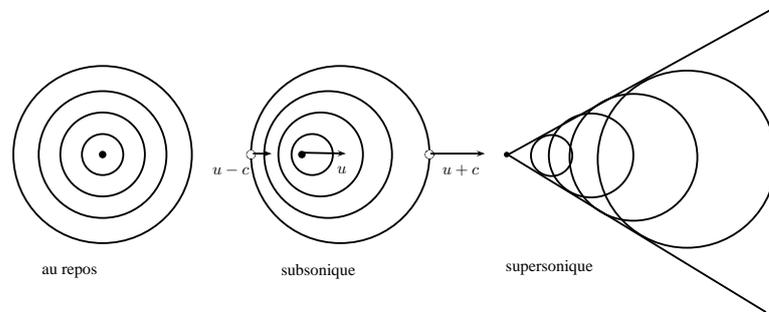
- en eau profonde (c'est-à-dire  $h \gg \lambda$ ), on a  $\tanh kh \approx 1$ , d'où l'on tire:  $c = \pm \sqrt{g\lambda}/(2\pi)$ . La vitesse des ondes de surface dépend de la longueur d'onde  $\lambda$ . Ces ondes sont désignées sous le terme général de *houle*.

Dans le cas des cours d'eau, on est dans le premier cas de figure (eaux peu profondes). Si on réitère le raisonnement précédent pour un fluide en écoulement à la vitesse moyenne  $\bar{u}$ , la célérité des ondes est calculée par rapport à la vitesse moyenne  $\bar{u}$ : les ondes de gravité se propagent donc à la vitesse  $c = \bar{u} \pm \sqrt{gh}$ , soit encore :

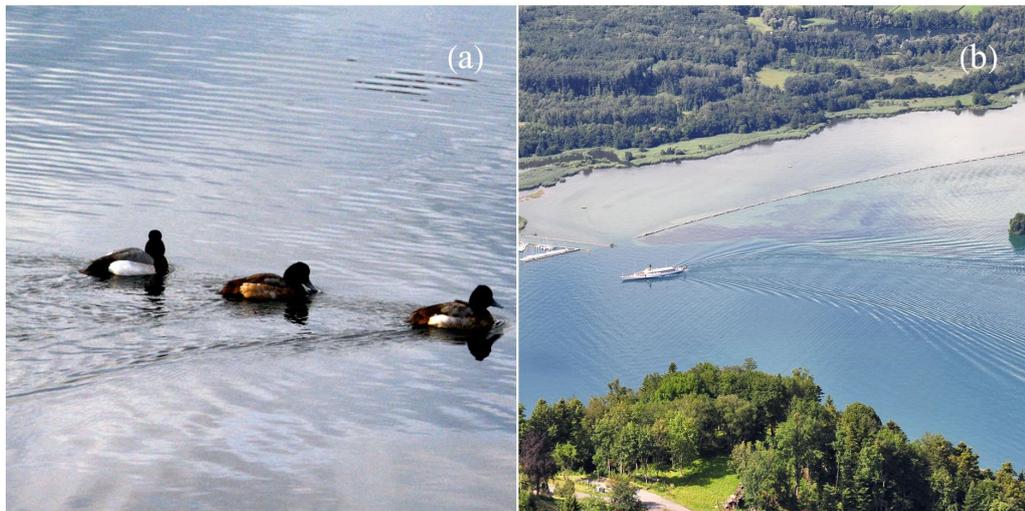
$$c = \sqrt{gh}(\text{Fr} \pm 1),$$

avec  $\text{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh}$  le nombre de Froude. On tire le résultat important :

- en régime subcritique (fluvial)  $\text{Fr} < 1$ , les ondes se propagent d'amont vers l'aval et d'aval vers l'amont. L'information se propage dans les deux sens. Une modification de l'écoulement qui se produit à l'amont est répercutée à l'aval et, de même, la modification des conditions d'écoulement entraîne une modification de ce qui se passe à l'amont une fois que l'onde a remonté l'information ;
- en régime supercritique (torrentiel)  $\text{Fr} > 1$ , les ondes se propagent d'amont vers l'aval uniquement. L'information ne se propage que dans le sens de l'écoulement. Il n'y a pas de « contrôle » aval, c'est l'amont qui dicte ce qui se passe dans le bief.



**Figure 4.11** – Propagation d’une onde circulaire se déplaçant à la vitesse  $c = \sqrt{gh}$  dans de l’eau au repos (au centre), dans un écoulement lent d’eau (au centre) tel que  $v < \sqrt{gh}$ , et dans un écoulement rapide d’eau.



**Figure 4.12** – (a) Le canard crée un sillage et il n’y a pas d’intumescence. Le canard est-il en nage supersonique ? (b) sillage d’un bateau sur le Léman à l’approche de Villeneuve. Quel que soit l’objet en mouvement, l’angle du sillage est à peu près le même (angle de Kelvin).

### 4.3.3 Vitesse de groupe et propagation d'énergie

Le champ de vitesse dans la théorie d'Airy s'obtient à partir du potentiel de vitesse (4.7) (on ne reporte pas ici tout le détail de la dérivation des constantes d'intégration, voir l'ouvrage de [Stoker \(1957\)](#), chap. 3, par exemple):

$$\phi = \frac{\omega}{k} a \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (4.10)$$

d'où:

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\omega}{2} H \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh[kh]} \cos(kx - \omega t), \quad (4.11)$$

$$v(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\omega}{2} H \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh[kh]} \sin(kx - \omega t), \quad (4.12)$$

avec  $H$  la hauteur de la vague,  $T = \lambda/c$  la période,  $\lambda$  la longueur d'onde,  $z$  la cote par rapport au plan moyen ( $z = y - h$ , donc  $z = 0$  correspond à la position de la surface libre). La figure 4.13 montre le champ de vitesse en fonction de la profondeur: une vague est un train de déformation sinusoïdale de la surface libre d'une étendue d'eau. Les particules de fluide décrivent des ellipses fixes, dont la taille décroît avec la profondeur; en eau profonde (lorsque la profondeur dépasse la moitié de la longueur d'onde), ces ellipses sont des cercles.

L'énergie potentielle de la vague, moyennée au cours du temps (sur une période  $T$ ) et sur longueur d'onde  $\lambda$ , est par unité de surface:

$$E_p = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[ \frac{1}{T} \int_0^T dt \left( \int_0^{\eta(x,t)} \rho g y dy \right) \right] = \rho g \frac{H^2}{16}, \quad (4.13)$$

avec  $\eta(x, t) = H \cos(kx - \omega t)/2$  la position de la surface libre. De même l'énergie cinétique de la colonne d'eau (moyennée sur  $\lambda$  et  $T$  et par unité de largeur, donc énergie cinétique moyenne par unité de surface) est

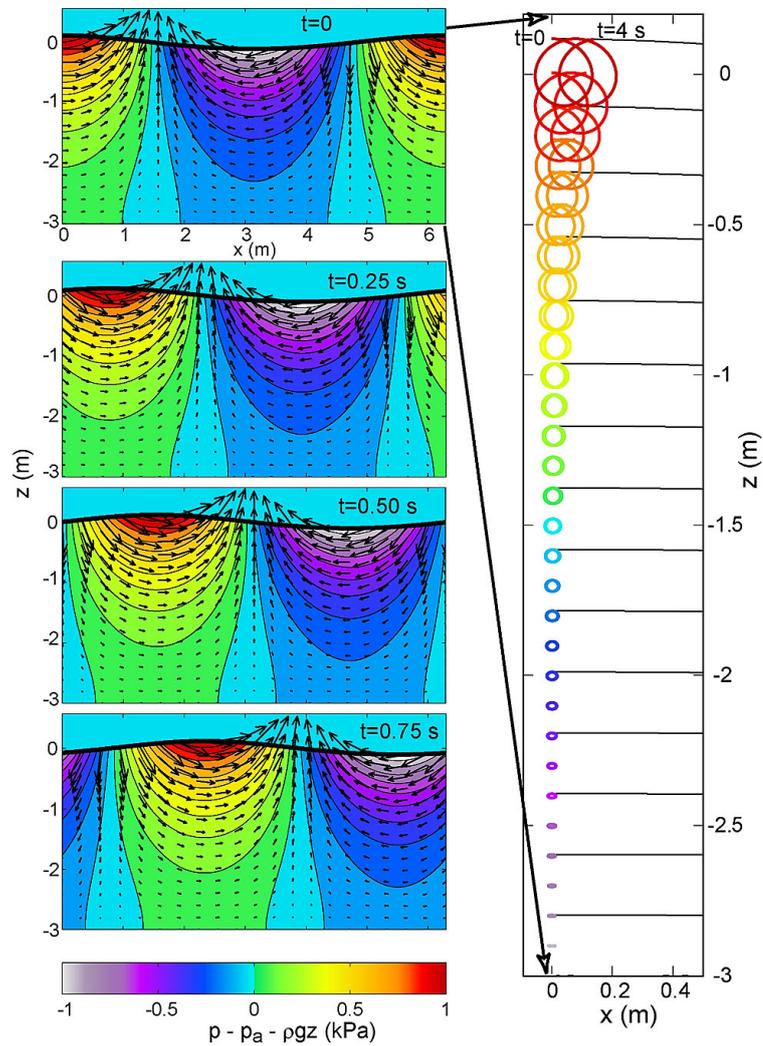
$$E_c = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[ \frac{1}{T} \int_0^T dt \left( \int_{-h}^{\eta(x,t)} \rho \frac{u^2 + v^2}{2} dy \right) \right].$$

L'intégration est un peu plus délicate, mais comme  $\eta$  est petit, on peut écrire au premier ordre en  $\eta$

$$E_c \approx \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[ \frac{1}{T} \int_0^T dt \left( \int_{-h}^0 \rho \frac{u^2 + v^2}{2} dy \right) \right].$$

soit encore

$$E_c = \rho \frac{\omega^2}{32k} H^2 \frac{\sinh(2kh)}{\sinh(kh)^2} + O(\eta) = \rho \frac{\omega^2 H^2}{16k} \frac{1}{\tanh(kh)}$$



**Figure 4.13** – Mouvement d’oscillation [Fabrice Ardhuin, SHOM]. Le diagramme à droite montre la trajectoire presque circulaire de particules fluides selon leur profondeur. À gauche, les champs de vitesse et de pression sont reportés. Le calcul a été réalisé pour une vague d’Airy de période  $T = 2$  s de période.

car  $\sinh(2kh) = 2 \sinh(kh) \cosh(kh)$ . En se servant de la relation de dispersion (4.9), on aboutit à

$$E_c = \varrho g \frac{H^2}{16} \frac{\omega^2}{c^2 k^2} = \varrho g \frac{H^2}{16}. \quad (4.14)$$

Pour les ondes d’Airy, les énergies potentielles et cinétiques sont égales et l’énergie

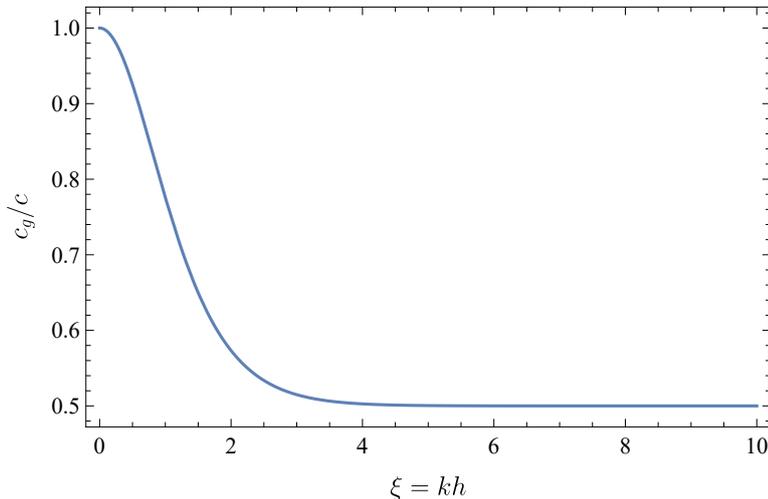
totale est

$$E = E_c + E_p = \rho g \frac{H^2}{8}. \quad (4.15)$$

C'est une force conséquente. Ainsi, un fort vent (vent de force Beaulieu 8, environ 70 km/h, soufflant pendant plusieurs heures) peut produire des hauteurs de vague  $H \geq 5$  m, soit des énergies  $E \geq 30$  kJ/m<sup>2</sup> de surface maritime. Cette énergie se propage à la vitesse de groupe

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left( k \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \right) = \frac{1}{2} c \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (4.16)$$

En eau profonde, dès que  $kh > 2$ , la vitesse de groupe vaut à peu près la moitié de la célérité des ondes tandis qu'en eau peu profonde, quand  $kh \ll 1$ , alors onde et énergie se déplacent à la même vitesse.



**Figure 4.14** – Variation de la vitesse relative  $c_g/c$  (vitesse de propagation de l'énergie par rapport à celle de l'onde) en fonction de la profondeur relative d'eau  $kh$ .

## 4.4 Vague

### 4.4.1 Classification

Les vagues sont des ondes à la surface de l'eau. Il en existe plusieurs classifications selon le ou les critère(s) considéré(s). Si on prend l'origine des ondes, on distingue

- vague causée par le vent (forçage météorologique): houle;
- vague causée par les mouvements de la lune (forçage astronomique): marées;
- vague causée par les tremblements de terre: tsunamis.

Selon le mécanisme physique qui est impliqué dans la propagation des ondes, on distingue:

- force motrice due à la gravité: onde gravitaire;
- vague due aux forces de tension à la surface de l'eau: onde capillaire.

Si on prend le rapport  $\lambda/h$  (avec  $\lambda$  la longueur d'onde et  $h$  la hauteur d'eau), on a:

- $\lambda/h \leq 2$ , les ondes en eau profonde ou bien des ondes courtes;
- $2 < \lambda/h \leq 20$ , les ondes intermédiaires (on ondes de transition);
- $\lambda/h > 20$ , les ondes en eau peu profonde ou bien des ondes longues;

La notion d'eau profonde se fait toujours à travers le rapport  $\lambda/h$ ; elle n'est pas liée à la profondeur totale d'eau.

Une dernière classification propose en fait des tableaux des théories et des équations utilisées pour décrire le mouvement des ondes. La figure 4.15 dresse un tel tableau en fonction des valeurs adimensionnelles de la profondeur d'eau et de la hauteur de vague.

Quelques mots d'explication supplémentaires. On introduit le nombre d'Ursell<sup>4</sup>

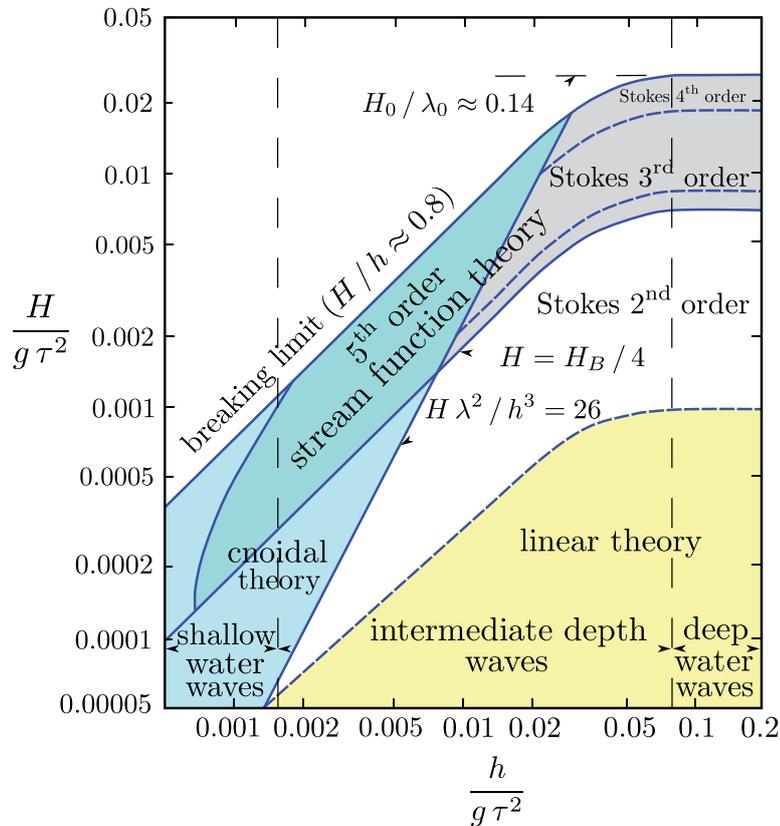
$$U = \frac{H\lambda^2}{h^3} \quad (4.17)$$

pour distinguer les ondes linéaires des ondes non linéaires. Ici, « onde linéaire » veut dire que l'équation du mouvement est une équation différentielle linéaire, et que sa solution se présente sous la forme d'harmoniques (voir § 1.6.6).

- La théorie des ondes linéaires s'applique pour des ondes longues ( $\lambda/h > 20$ ) caractérisées par un petit nombre d'Ursell (typiquement  $U \ll 100$ ). C'est la théorie d'Airy (vue au § 4.3 et 4.4.2) qui est utilisée pour décrire le mouvement des

---

4. Ce nombre est obtenu à partir d'un développement en série avec un petit paramètre  $\epsilon = kA$  ( $k$  nombre d'onde,  $A$  amplitude de la vague) de l'équation (4.2). Pour des ondes longues ( $kh \ll 1$ ), le nombre d'Ursell correspond – à une constante multiplicative près – au rapport des amplitudes de la solution d'ordre 2 sur la solution du premier ordre en  $\epsilon$ .



**Figure 4.15** – Domaine de validité des différentes théories en fonction de la hauteur de la vague  $H$ , de la hauteur d'eau  $h$ , de la période  $\tau = \lambda/c$ . La zone bleu-clair est le domaine des ondes cnoidales. La zone jaune correspond à la théorie d'Airy. La zone bleue correspond à la théorie des ondes de Stokes. D'après une [classification proposée par Le Méhauté \(1976\)](#). Voir aussi [Zhao et al. \(2024\)](#).

vagues. Rappelons que les vagues sont alors des combinaisons d'harmoniques, c'est-à-dire des fonctions périodiques sinusoidales.

- La théorie des ondes non linéaires s'applique dès lors que le cadre d'approximation des ondes linéaires n'est plus valable. Parmi les ondes non linéaires, on distingue :
  - les *ondes cnoidales* : ce sont des solutions de l'équation de Korteweg–de Vries<sup>5</sup> (KdV). À noter que l'équation date de 1895 ; cette équation décrit le mouvement unidimensionnel d'une onde dispersive, incluant une dispersion à la fois en amplitude et en fréquence. Son domaine d'application est

5. Diederik Johannes Korteweg (1848–1941) est un mathématicien appliqué hollandais. Son nom est principalement associé à ses travaux sur les ondes solitaires (solitons) avec son docteurant Gustav de Vries (1866–1934).

celui des ondes longues  $\lambda > 5h$  et de période  $\tau > 7\sqrt{h/g}$ . L'équation de Benjamin–Bona–Mahony (1972) est maintenant préférée car elle est plus précise quand on tend vers le domaine des ondes courtes. Lorsque l'on doit étudier des propagations d'ondes dans les deux directions de la surface de l'eau, on emploie les équations de Boussinesq (1872) ou ses variantes. Ces ondes servent souvent à décrire des vagues formées par le vent sur des eaux peu profondes.

- les ondes courtes sont généralement étudiées à l'aide de la théorie de Stokes, qui consiste à rechercher des solutions sous la forme de série tronquée. Plus l'ordre du développement est important, meilleure est en principe la précision, mais il faut que la longueur d'onde soit relativement courte pour qu'une convergence rapide soit assurée.
- les ondes solitaires ou solitons: ce sont des cas particuliers d'ondes cnoïdales (forme asymptotique). Elles ont des propriétés remarquables qui les distinguent des autres ondes:
  - la forme est stable (pas de dispersion) et ne présente qu'une seule crête;
  - l'onde peut se propager sur de très grandes distances sans atténuation apparente (pas de dispersion, pas de déferlement);
  - la vitesse dépend de la taille de la vague et sa largeur dépend de la profondeur d'eau;
  - deux solitons qui se croisent ou se dépassent ne coalescent pas;
  - si la profondeur d'eau vient à diminuer, le soliton peut se scinder en deux solitons, de taille différente.

Les ondes solitaires ont été décrites pour la première fois par John Scott Russell<sup>6</sup> dans un canal reliant Édimbourg à Forth-Clyde en Écosse en 1834.

---

6. John Scott Russell (1808–1882) était un ingénieur naval et un mathématicien britannique. Il est principalement connu pour sa découverte de l'onde solitaire et l'étude qu'il en a faite en laboratoire. En 1834, Russell observa la formation d'une onde de forte amplitude générée par l'arrêt brusque d'une barge qu'il venait d'emprunter. Il suivit à cheval cette vague sur plusieurs kilomètres. Il observa que la forme et la vitesse de la vague restaient inchangées tout le long de son parcours: « *Je ne puis donner une idée plus nette du phénomène qu'en décrivant les circonstances dans lesquelles il m'apparut pour la première fois. J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroite, lorsque ce bateau vint à s'arrêter tout à coup: mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal; elle s'accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis, laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation, dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 milles à l'heure et conservant sa figure initiale (environ 30 pieds de longueur sur 1 pied à 1,5 pieds de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal* » (traduction par M. H. Darcy et M. H. Bazin). Il faudra attendre les



**Figure 4.16** – Reproduction en 1995 de l’observation d’une onde solitaire faite par Russell dans le canal de l’Union. D’après un document du [Département de mathématiques de l’université de Heriot-Watt](#).

#### 4.4.2 Ondes linéaires

On appelle *ondes linéaires* des ondes de faible amplitude telles que le nombre d’Ur-sell  $U \ll 100$ . Ces ondes sont décrites dans le cadre de la théorie d’Airy (voir § 4.3); on les appelle donc également ondes d’Airy. Rappelons que les ondes linéaires sont composées d’harmoniques de la forme

$$\eta = A \cos[k(x - ct)], \quad (4.18)$$

avec  $A$  l’amplitude de l’onde,  $k = 2\pi/\lambda$  le nombre d’onde ( $\lambda$  la longueur d’onde), et  $c$  la célérité, dont l’expression est fournie par la relation de dispersion

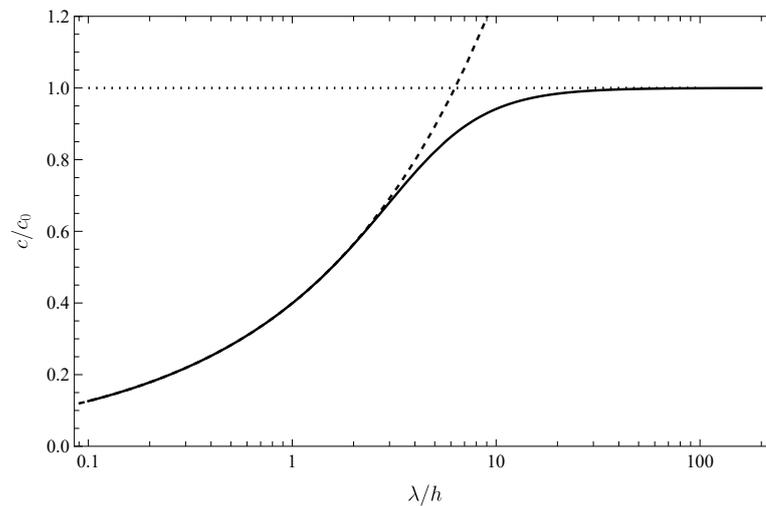
$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) = c_0^2 \frac{\tanh(kh)}{kh} = c_0^2 \frac{\lambda}{2\pi h} \tanh(2\pi h/\lambda) \quad (4.19)$$

avec  $c_0 = \sqrt{gh}$  la vitesse de propagation des ondes en eau peu profonde.

travaux du français Boussinesq (1871), de l’anglais Rayleigh (1876), et des hollandais Korteweg et de Vries (1895), pour disposer d’un modèle théorique décrivant le mouvement d’une telle onde.

**Tableau 4.4** – Classification et principales caractéristiques des ondes.

<i>Onde:</i>	<i>linéaire</i>	<i>Stokes</i>	<i>cnoïdale</i>	<i>solitaire</i>	<i>mascaret</i>
<i>Valeurs de U</i>	$U \rightarrow 0$	$U < 10$	$U > 25$	$U \sim 1$	$U \gg 1$
<i>Périodicité</i>	périodique	périodique	périodique	période infini- nie	période infini- nie
<i>Creux</i>	creux et crêtes iden- tiques	creux plats, crêtes poin- tues	creux plats, crêtes poin- tues	pas de creux	pas de creux
<i>Transport de masse</i>	nul	faible	faible	fort	fort
<i>Incorporation d'air</i>	nulle	faible	faible	fort	fort
<i>Rapport <math>\lambda/H</math></i>	$\lambda/H > 150$	$2 < \frac{\lambda}{H} < 20$	$\lambda/H > 10$	infini	infini



**Figure 4.17** – Variation de la célérité  $c/c_0$  (courbe continue) en fonction du rapport  $\lambda/h$  pour des ondes d'Airy. La courbe pointillée correspond à l'approximation des ondes en eau peu profonde:  $c \rightarrow c_0$ . La courbe tiretée représente la propagation de la houle, c'est-à-dire une onde linéaire en eau profonde:  $c/c_0 \rightarrow \sqrt{\lambda/(2\pi h)}$ .

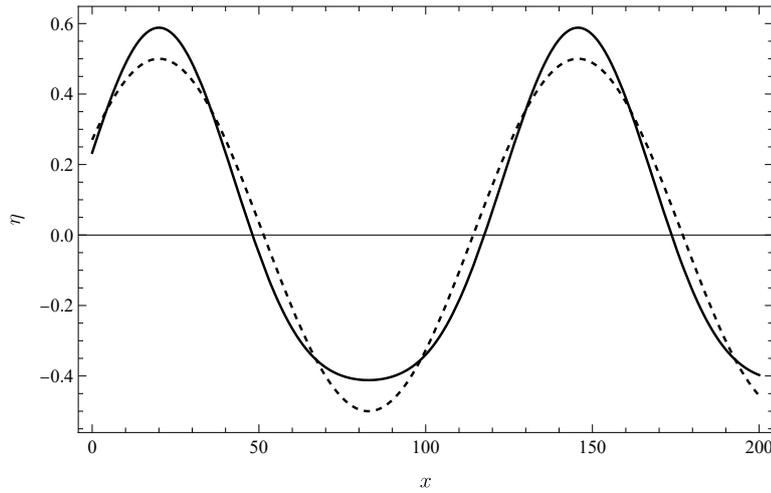
### 4.4.3 Ondes de Stokes

Les ondes de Stokes sont des ondes assez proches des ondes linéaires : ce sont des ondes périodiques, dont le profil de hauteur comporte une harmonique (partie linéaire) et une contribution non linéaire représentant les effets d'ordre supérieur quand  $\lambda/h$

croît

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \cos(t\omega - kx) + \frac{1}{16} kH^2 \frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} (\cosh(2hk) + 2) \cos(2(kx - t\omega)), \quad (4.20)$$

avec  $H$  la hauteur de la vague. Comme le montre la figure 4.18, une onde de Stokes présente des crêtes plus pointues et des creux plus plats qu'une onde linéaire (sinusoïdale).



**Figure 4.18** – Profil de hauteur d'une onde de Stokes (trait continu) comparé au profil de hauteur d'une onde linéaire (courbe tiretée). Calcul avec  $H = 1$  m,  $\omega = 1$  s<sup>-1</sup>,  $t = 1$  s, et  $h = 10$  m.

#### 4.4.4 Ondes cnoïdales

Les *ondes cnoïdales* sont des solutions périodiques de l'équation de Korteweg-de-Vries (KdV), une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre 3 :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} h^3 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (4.21)$$

Une solution de cette équation est

$$\eta(x, t) = \eta_2 + H \operatorname{cn} \left( \frac{x - ct}{\Delta} \right),$$

avec pour altitude des creux :

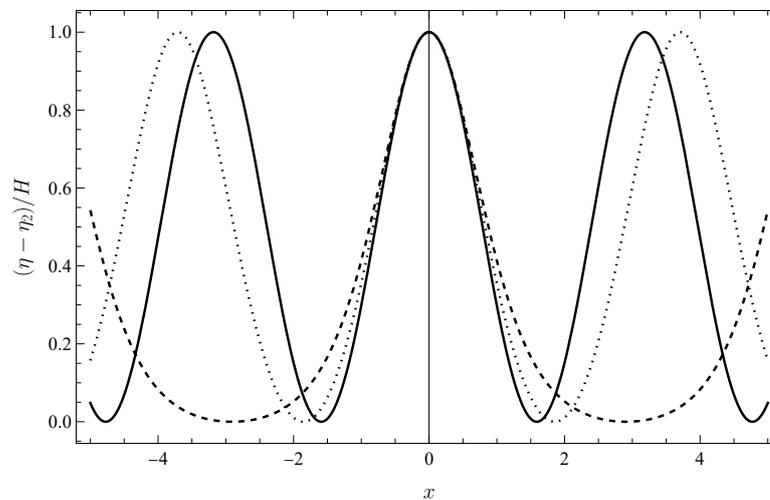
$$\eta_2(m) = \frac{H}{m} \left( 1 - m - \frac{E(m)}{K(m)} \right) \text{ et } \Delta = \frac{\lambda}{2K(m)} = h \sqrt{\frac{4}{3} \frac{mh}{H}},$$

où  $H$  est la hauteur de la vague,  $m$  est un paramètre dit paramètre elliptique,  $K(m)$  l'intégrale elliptique complète du premier type,  $\text{cn}$  la fonction elliptique  $\text{cn}$ <sup>7</sup> de Jacobi et  $E(m)$  l'intégrale elliptique complète du second type (Abramowitz & Stegun, 1964). Les longueur d'onde  $\lambda$  et célérité  $c$  sont données par :

$$\lambda = h\sqrt{\frac{16mh}{3H}}K(m) \text{ et } c = \sqrt{gh} \left[ 1 + \frac{H}{mh} \left( 1 - \frac{1}{2}m - \frac{3E(m)}{2K(m)} \right) \right],$$

On a reporté sur la figure 4.19 trois profils de vagues cnoïdales pour trois valeurs différentes de  $m$ . Pour  $m = 0,05$ , on a un profil proche d'une onde linéaire (sinusoïdale). Pour  $m = 0,5$ , la déformation est relativement faible par rapport au cas précédent. Pour  $m = 0,95$ , on observe que les crêtes de la vague sont séparées par des creux de plus en plus aplatis. La figure 4.20 montre la vitesse relative d'une onde cnoïdale, définie comme  $(c/c_0 - 1)h/H$ , en fonction du paramètre elliptique  $m$ . Pour  $m \rightarrow 0$ , cette vitesse relative tend vers  $-\infty$  alors que pour  $m \rightarrow 1$ , on a :

$$\left( \frac{c}{c_0} - 1 \right) \frac{h}{H} \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$



**Figure 4.19** – Profil d'une onde cnoïdale pour différentes valeurs du paramètre elliptique  $m$ :  $m = 0,05$  (courbe continue),  $m = 0,5$  (courbe pointillée),  $m = 0,95$  (courbe tiretée).

7. C'est de là d'où vient le nom d'onde cnoïdale.

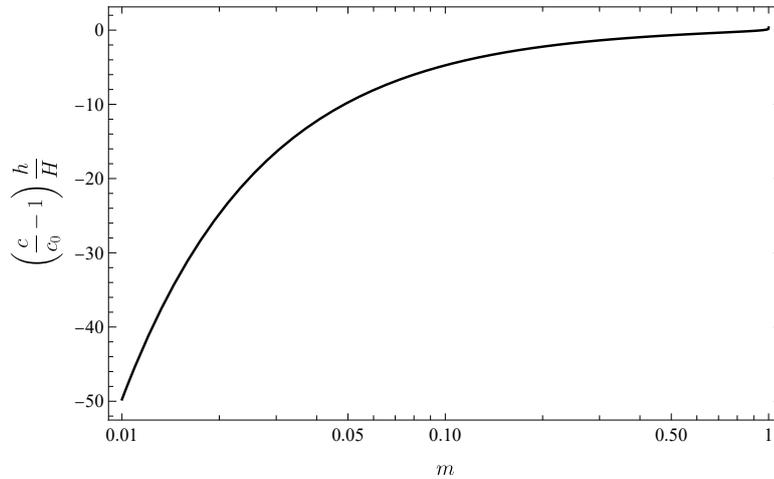


Figure 4.20 – Célérité relative d'une onde cnoïdale en fonction de  $m$ .

#### 4.4.5 Ondes solitaires

Une *onde solitaire* est un cas particulier d'onde cnoïdale qui correspond au cas asymptotique  $m \rightarrow 1$  (c'est-à-dire une longueur d'onde infiniment grande). On l'appelle également *soliton* car contrairement aux autres ondes non linéaires qui se dispersent et s'amortissent, elle garde une certaine individualité (comme on note en physique « photon », « proton », etc., des entités qui se comportent comme des particules élémentaires). Sa vitesse est obtenue à partir de l'équation (4.22), dont le plus souvent on prend un développement limité à l'ordre 1 en  $H/h$  :

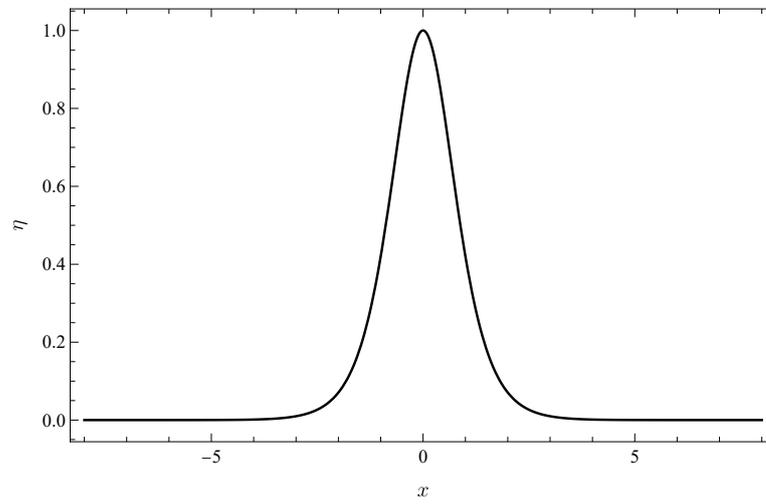
$$c^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h}\right)^2 \approx g(h + H).$$

C'est donc une vitesse peu différente de la vitesse en eau peu profonde. Le profil d'un soliton est

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)),$$

avec  $\beta^{-2} = 4h^2(h + H)/3a \approx 4h^3/(3a)$  (Drazin & Johnson, 1996) et  $\operatorname{sech}$  la sécante hyperbolique ( $\operatorname{sech} = 1/\cosh$ ). La figure 4.21 montre un profil type d'une solitaire. On note que contrairement aux cas précédents

- l'onde n'est pas périodique (période de retour infiniment longue);
- il n'y a pas de creux ( $\eta_2 = 0$ );
- le profil est constant au cours du temps (pas de dispersion).



**Figure 4.21** – Profil de hauteur d'une onde solitaire avec  $H = 1$ .

## 4.5 Tsunami

### 4.5.1 Introduction

Un tsunami est une onde liée au mouvement rapide d'un grand volume d'eau en haute mer à d'un séisme (destruction de Lisbonne en 1755, tsunami de décembre 2004 en Asie), d'une éruption volcanique sous-marine (éruption du Krakatoa en 1883), d'un glissement de terrain sous-marin de grande ampleur (baie de Lituya, Alaska en 1958). Les tsunamis se déplacent à très grande vitesse (plusieurs centaines de km/h), mais tant qu'ils se propagent en haute mer (en eau profonde), la hauteur de l'intumescence est faible, voire imperceptible. C'est à l'approche des côtes que l'onde gagne en amplitude et déferler sur le littoral, en provoquant d'énormes dommages.



**Figure 4.22** – Tsunami arrivant sur les cotes du Srilanka à Kalutara en décembre 2004. Source : DigitalGlobe.

Contrairement à la houle (vagues formées par le vent à la surface des océans), qui ne met en mouvement qu'une faible épaisseur d'eau près de la surface, le tsunami provoque un déplacement d'eau sur une grande épaisseur. La longueur d'onde est généralement très grande (quelques dizaines à centaines de km). L'énergie associée au mouvement de l'eau est donc considérable.



**Figure 4.23** – Tsunami provoqué par le tremblement de terre de Fukushima (Japon) le 11 mars 2011. La vague est prise au moment elle touche les quais du port de Miyako (préfecture d’Iwate). Source : Toru Yamanaka / AFP/ Getty Images.

De nos jours, il est plus courant d’utiliser des équations plus raffinées que les équations de Saint-Venant pour décrire le mouvement de grandes vagues à l’approche du littoral (Clamond *et al.*, 2024). Ainsi, les équations de Serre–Green–Naghdi introduisent des termes diffusifs dans le terme source des équations de Saint-Venant pour mieux décrire le comportement non linéaire des vagues (Berger & LeVeque, 2023; Clamond *et al.*, 2024). C’est un cas particulier des équations de Boussinesq, dont il existe plusieurs formulations (Brocchini, 2013). Par exemple, Berger & LeVeque (2023) posent :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} = gh \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x} - h\psi, \quad (4.24)$$

$$\psi + \alpha \mathcal{T}(\psi) = \mathcal{B}(\psi), \quad (4.25)$$

où  $\eta(x, t) = h + b$  est la cote de la surface libre,  $h(x, t)$  est la hauteur,  $b(x)$  est la cote du fond,  $\bar{u}(x, t)$  est la vitesse moyenne,  $\psi(x, t)$  est un terme dispersif qui vérifie une équation différentielle elliptique définie par les opérateurs :

$$\mathcal{T} = -\frac{h^3}{3} \partial_x^2 - hh_x \partial_x + \frac{h}{2} b_{xx} + b_x \eta_x,$$

$$\mathcal{B} = \frac{g}{\alpha} \eta_x + 2h \left( \frac{2h}{3} u_x u_{xx} + u_x^2 \left( h_x + \frac{1}{2} b_x \right) \right) + \frac{h}{2} (2u u_x b_{xx} + u^2 b_{xxx}) + \eta_x u^2 b_{xx}$$

où  $\alpha$  est un paramètre ajustable dont la valeur est voisine de 1. La figure 4.24 montre sur un cas particulier que les équations de Serre–Green–Naghdi prédisent des caractéristiques (amplitudes et formes) des vagues très différentes de celles que donnent les équations de Saint-Venant. Selon ces dernières équations, les vagues déferlent à l’arrivée sur le littoral, ce qui se traduit par l’apparition de ressauts. Compte tenu de leur caractère dispersif, les équations de Serre–Green–Naghdi prédisent des vagues sous la forme de trains de pulses successifs.

(a)

(b)

**Figure 4.24** – Solution  $h(x, t)$  des équations de Saint-Venant (a) et des équations de Serre–Green–Naghdi (b) sous forme adimensionnelle. Les équations ont été résolues à l’aide de la méthode numérique des volumes finis (solveur geoclaw étendu à l’ordre 2, limiteur du flux de type superbee, maillage adaptatif) (George, 2008; Berger & LeVeque, 2023). On suppose qu’en haute mer, les vagues sont des dérites par des harmoniques. On a pris  $\alpha = 1,153$ .

En dépit de performances moindres que les équations de Serre–Green–Naghdi, les équations de Saint-Venant peuvent être utilisées en première approximation pour décrire la dynamique des tsunamis. Voyons un exemple où l’on emploie une méthode de résolution approchée.

### 4.5.2 *Modèle approximatif de tsunami arrivant de haute mer*

Les équations de Saint-Venant (1.20–1.21) s'écrivent pour un écoulement non frottant le long d'un fond horizontal

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (4.27)$$

avec  $\bar{u}(x, t)$  la vitesse moyenne de l'eau,  $h(x, t)$  la profondeur d'eau,  $g$  la gravité. On part d'un état à l'équilibre ou  $h = h_0(x)$  et  $u = u_0(x) = 0$ . L'eau initialement au repos est perturbée par une secousse en haute mer. Il se produit un train d'ondes dans l'océan ( $x \rightarrow \infty$ ), c'est-à-dire une succession de vagues qui se dirigent vers la côte.

On cherche la solution sous la forme d'un développement asymptotique

$$\begin{aligned} h(x, t) &= h_0(x) + \epsilon h_1(x, t) + \dots, \\ u(x, t) &= u_0(x) + \epsilon u_1(x, t) + \dots, \end{aligned}$$

où  $\epsilon$  est petit (on prendra  $\epsilon = \beta$ ; voir figure 4.25) et  $u_0(x) = 0$ . Les équations de Saint-Venant (4.26–4.27) à l'ordre  $\epsilon^0$  s'écrivent donc

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 \bar{u}_0}{\partial x} = 0, \quad (4.28)$$

$$0 = -g \frac{\partial h_0}{\partial x}, \quad (4.29)$$

qui sont trivialement vérifiées. À l'ordre  $\epsilon^1$ , ces équations deviennent

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_0 \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1 \bar{u}_0}{\partial x} = 0, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -g \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (4.31)$$

où l'on note que le terme convectif, qui est non linéaire, disparaît dans (4.31) et le troisième terme dans (4.30) est en fait nul car  $u_0 = 0$ . Il s'ensuit que les équations (4.31) et (4.30) peuvent se combiner pour donner une seule équation régissant  $h_1$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( gh_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right), \quad (4.32)$$

où l'on reconnaît les équations des ondes (1.180) dans le cas où  $h_0$  est constant (indépendant de  $x$ ), avec ici la célérité des ondes égale à  $c = \sqrt{gh_0}$ .

Considérons le cas où le fond marin est constituée d'un haut fond et d'une plage faiblement inclinée (voir figure 4.25)

$$h_0(x) = \begin{cases} \beta x & \text{pour } 0 \leq x \leq L, \\ h_\infty & \text{pour } x \geq L. \end{cases}$$

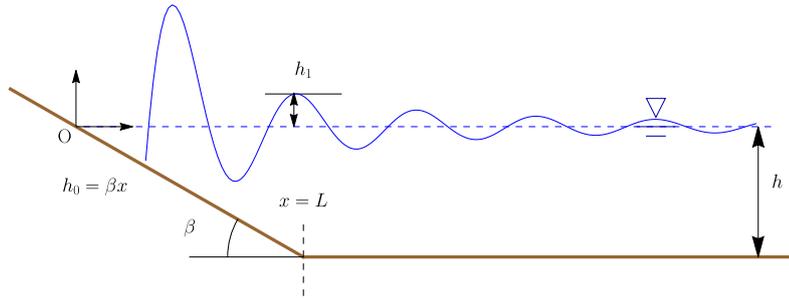


Figure 4.25 – Modèle simplifié de tsunami.

On suppose que  $h_\infty \ll L$  de telle sorte que  $\beta$  soit petit. Dans ce cas, l'équation (4.32) devient

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = g\beta x \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + g\beta \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (4.33)$$

sur le domaine  $0 \leq x \leq L$ . Pour la haute mer, c'est-à-dire pour le domaine  $x > L$ , la hauteur d'eau initiale est constante et l'équation à résoudre est l'équation des ondes linéaires

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = gh_\infty \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}, \quad (4.34)$$

dont la solution est de la forme  $h_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \psi)$ , avec  $A$  et  $\psi$  deux constantes,  $c = \omega/k = \sqrt{gh_\infty}$  la célérité de l'onde,  $k$  le nombre d'onde (voir § 1.6.6). Les deux solutions doivent se raccorder en  $x = L$  et avoir la valeur :

$$h_1(L, t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (4.35)$$

avec  $\phi = \psi - kL$ . Pour résoudre ce qui se passe à l'approche de la côte ( $0 \leq x \leq L$ ), on recherche une solution avec des variables séparables, c'est-à-dire sous la forme

$$h_1(x, t) = \cos(\omega t + \phi)H(x).$$

On substitue cette forme dans (4.33). L'équation différentielle régissant  $H$  est trouvée être

$$x \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{dH}{dx} + \frac{\omega^2}{g\beta} = 0,$$

avec  $H(L) = A$  comme condition à la limite. Cette équation peut être résolue en faisant le changement de variable:  $x = 2\alpha s^2$  avec  $\alpha = \sqrt{g\beta}/(8\omega^2)$  de telle sorte que

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{4\alpha s} \frac{dH}{ds}, \quad (4.36)$$

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = \frac{1}{16\alpha^2 s^2} \frac{d^2 H}{ds^2} - \frac{1}{16\alpha^2 s^3} \frac{dH}{ds}. \quad (4.37)$$

On aboutit alors à l'équation de Bessel d'ordre 0 :  $y'' + y'/x + y = 0$ , dont les solutions sont de la forme  $y = aJ_0(x) + bY_0(x)$  avec  $a$  et  $b$  deux constantes d'intégration et  $J_0$  la fonction de Bessel d'ordre 0 du premier type,  $Y_0$  la fonction de Bessel d'ordre 0 du second type qui n'est pas bornée en  $x = 0$ ; on a donc nécessairement  $b = 0$ . La solution s'écrit donc  $H(s) = aJ_0(s)$ , ce qui donne compte tenu de la condition aux limites

$$H(x) = A \frac{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}}\sqrt{x}\right)}{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}}\sqrt{L}\right)}.$$

Comme le montre la figure 4.26, l'amplitude de l'onde augmente tandis que sa longueur d'onde diminue quand elle approche la plage située en  $x = 0$ . Quoique très simplifié (notamment on ignore les effets non linéaires, qui deviennent de plus en plus importants à l'approche de la plage), ce modèle permet de démontrer l'amplification d'une vague venant de haute mer à l'approche d'une cote.

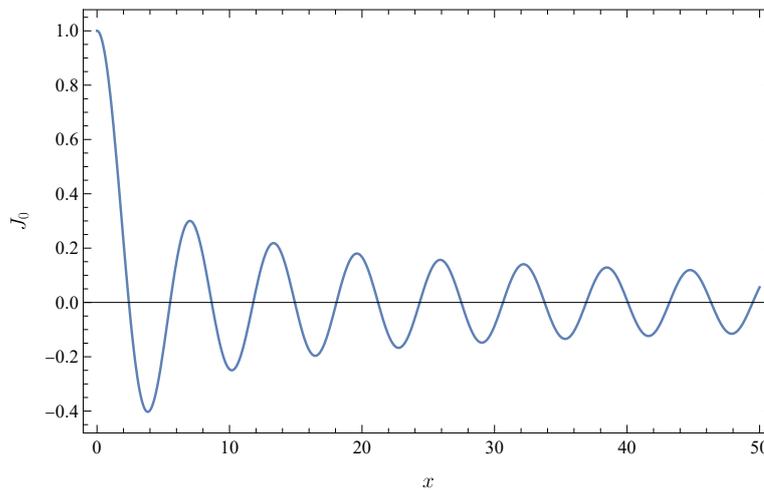


Figure 4.26 – Fonction de Bessel  $J_0$ .

## 4.6 Vague d'impulsion

L'entrée d'un écoulement gravitaire (tel qu'une avalanche ou un écroulement rocheux) produit une *onde d'impulsion*. Les retenues d'eau en montagne sont souvent soumises à un risque de vague d'impulsion. Ces vagues sont créées par la soudaine entrée d'une masse quelconque glissant le long d'une des berges de la retenue (glissement de terrain, écroulement rocheux, avalanche, chute de sérac, vêlage). La catastrophe du Vajont en 1963 (Pordenone, Italie) illustre le risque encouru par les barrages d'altitude. Les vagues d'impulsion dans les lacs d'accumulation sont un cas spécial de vagues à la surface de l'eau induites par une impulsion extérieure. Des problèmes similaires sont les glissements de terrain en zone littorale ou sous-marins, les séismes, l'impact de météorite, l'entrée d'un projectile, et l'explosion à la surface de l'eau ou dans l'eau (Jordaan, 1972; Slingerland & Voight, 1979).

En général, en ingénierie on a besoin d'étudier la possibilité qu'une onde d'impulsion soit générée (par une avalanche ou un mouvement de terrain) et se propage jusqu'à la digue; le principal problème est alors d'évaluer la force d'impact de la vague, la hauteur de remontée (*run-up*), et les effets de l'onde de submersion sur la digue.

Les vagues d'impulsion sont étudiées soit à l'aide de modèles numériques<sup>8</sup>, soit à l'aide de formules empiriques fondées sur des expériences de laboratoire et la théorie de la similitude. On va ici, après avoir mentionné le cadre général de la similitude au § 4.6.1, présenter des formules empiriques. On attire l'attention sur les écarts conséquents d'une formule à l'autre. Des écarts d'un facteur 10 sont fréquents quand on compare les différentes formules entre elles ou bien avec les rares événements bien documentés comme la baie de Lituya (Alaska, États-Unis) (Heller & Hager, 2010; Watt *et al.*, 2012) ou le lac Chehalis (Colombie britannique, Canada) (Heller & Ruffini, 2023). Parmi les sources d'erreur, on peut citer (Heller & Spinneken, 2013):

- la nature de l'écoulement: granulaire ou très cohésif;
- le rapport d'aspect entre largeur d'écoulement à l'impact et largeur de l'étendue d'eau;
- la forme du front de l'écoulement à son entrée dans l'eau;
- la transition de pente en pied de pente, dans la retenue d'eau.

---

8. Outre les aspects numériques ardues liés à la modélisation de l'écoulement entrant dans l'eau et le mouvement de l'eau qui en résulte, il faut disposer de la bathymétrie des fonds et de la topographie des pentes, ce qui présente un coût assez conséquent. Dans la pratique, de telles modélisations restent du domaine de la recherche (Kelfoun & Druitt, 2005; Kelfoun *et al.*, 2010; Giachetti *et al.*, 2011; Watt *et al.*, 2012).

### 4.6.1 Les premières tentatives d'adimensionalisation

Dans les années 1960, la propagation de tsunamis a attiré une attention considérable au-delà des spécialistes des vagues océaniques. À partir d'une adimensionalisation des équations d'Euler, on peut montrer que la propagation de l'intumescence d'un tsunami (d'amplitude  $\eta$ ) peut s'écrire en fonction de nombres sans dimension (Noda, 1970; Slingerland & Voight, 1982):

$$\eta = \lambda f(x^*, \text{Fr}), \quad (4.38)$$

où la distance depuis l'impulsion initiale est notée  $x$ ,  $\lambda$  est la longueur d'onde. Les deux grandeurs adimensionnelles sont la distance relative et le nombre de Froude

$$x^* = \frac{x}{h} \text{ et } \text{Fr} = \frac{u_0}{\sqrt{gh}},$$

où  $u_0$  est la vitesse de l'impulsion initiale et  $h$  la hauteur d'eau. Selon l'analyse dimensionnelle, le problème à résoudre se réduit à déterminer la fonction  $f$  donnant l'amplitude sous forme adimensionnelle en fonction de la distance parcourue et du nombre de Froude. Cette fonction  $f$  peut être déterminée numériquement ou bien à l'aide d'expériences à échelle réduite.

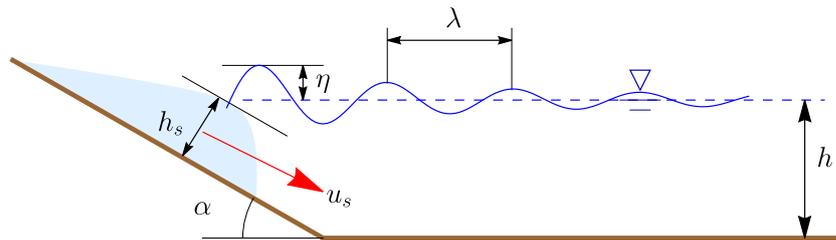


Figure 4.27 – Vague générée par un écoulement gravitaire dans une retenue d'eau.

Les vagues d'impulsion posent une difficulté supplémentaire puisque les conditions d'impact de l'écoulement gravitaire dans la retenue d'eau jouent un rôle essentiel. Il faut alors considérer un nombre supplémentaire de paramètres relatifs à l'écoulement gravitaire entrant dans la retenue : largeur de l'écoulement  $\ell_s$ , volume  $V_s$ , épaisseur  $h_s$ , masse volumique  $\rho_s$ , vitesse  $u_s$  à l'entrée dans la retenue, et angle de pente  $\alpha$  (voir figure 4.27). Comme on ne s'intéresse pas uniquement à la propagation, mais également au comportement de la vague lorsqu'elle rencontre le barrage ou le versant opposé, il faut également caractériser la hauteur de remontée (run-up), le volume qui peut passer par-dessus un barrage ou une digue, et le débit associé à la surverse. La prise en compte de ces paramètres conduit à réviser l'équation (4.38) de la façon suivante (Kamphuis & Bowering, 1970):

$$\eta = Af \left( x^*, t^*, \text{Fr}, \frac{h_s}{h}, \frac{V_s^2}{\ell_s h}, \frac{\rho_s}{\rho}, \alpha \right), \quad (4.39)$$

avec  $A$  l'échelle d'amplitude,  $t^* = t\sqrt{g/h}$  le temps adimensionnel et où le nombre de Froude est défini à partir de la vitesse  $u_s$  de l'écoulement gravitaire à l'impact avec la retenue d'eau :

$$\text{Fr} = \frac{u_s}{\sqrt{gh}}$$

À noter que la cohésion du matériau mobilisé par l'écoulement gravitaire n'apparaît pas dans la forme adimensionnelle (4.39) quoiqu'elle ait une influence importante : un matériau rigide (comme une brique) provoque des vagues de plus grande ampleur qu'un matériau pulvérulent (comme un écoulement granulaire). Sur la base d'essais en laboratoire, [Heller et al. \(2008\)](#) montrent ainsi que le rapport entre l'amplitude maximale  $\eta_{mg}$  d'une vague générée par l'entrée d'une masse granulaire et l'amplitude maximale  $\eta_{bs}$  d'une vague induite par un bloc solide varie à peu près linéairement avec le nombre de Froude

$$\frac{\eta_{mg} - \eta_{bs}}{\eta_{mg}} = 1 - 0,25\text{Fr}, \quad (4.40)$$

avec  $\text{Fr} = u_s/\sqrt{gh}$  et  $u_s$  la vitesse d'impact à l'entrée dans le lac d'une profondeur  $h$ . À petit nombre de Froude, un écoulement granulaire produit une vague dont l'amplitude est double par rapport à celle générée par un bloc solide. Cette différence s'estompe avec le nombre de Froude.

On peut simplifier un peu l'étude en ne regardant pas l'évolution de l'amplitude au cours du temps, mais uniquement sa valeur maximale. Les expériences montrent que l'amplitude maximale est atteinte pour  $x/h \sim 4$ , et elle est supposée être principalement une fonction de l'énergie adimensionnelle  $E^*$  ([Slingerland & Voight, 1982](#))

$$\frac{\eta}{h} = \phi(E^*) \text{ avec } E^* = \frac{\rho_s}{\rho} \frac{V_s}{\ell h^2} \frac{u_0^2}{gh}, \quad (4.41)$$

avec  $\phi$  une fonction à déterminer expérimentalement.

## 4.6.2 La contribution du VAW (ETHZ)

### Historique

La recherche dans le domaine général des vagues d'impulsion a commencé à la fin des années 1960 ([Heller & Ruffini, 2023](#)) – il existe aussi une abondante recherche militaire antérieure, plus ou moins accessible, qui s'est focalisée sur les effets d'une explosion sur une masse d'eau, l'entrée ou la sortie d'un projectile ([Le Méhauté, 1971](#); [Truscott et al., 2014](#)). Dans le domaine particulier de l'hydraulique des barrages, la recherche commence avec la thèse d'Andreas Huber à l'ETHZ ([Huber, 1980](#)). Depuis lors, le VAW a été un acteur majeur du domaine.

À partir d'essais en laboratoire VAW de l'ETHZ, [Huber & Hager \(1997\)](#) ont proposé que l'amplitude maximale de la vague était

$$\frac{\eta}{h} = 0,88 \sin \alpha \left( \frac{\rho_s}{\rho} \right)^{1/4} \left( \frac{V_s}{\ell_s h} \right)^{1/2} \left( \frac{h}{x} \right)^{1/4}, \quad (4.42)$$

tandis que [Zweifel et al. \(2006\)](#) calaient sur leurs données une expression de la forme

$$\frac{\eta}{h} = \frac{1}{3} \text{Fr} \left( \frac{h_s}{h} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_s V_s}{\rho \ell_s h^2} \right)^{1/4}, \quad (4.43)$$

ce qui est assez proche de ce que donnerait un petit modèle où l'on suppose que le flux de quantité de mouvement de l'écoulement  $\rho_s \ell_s h_s u_s^2$  serait identique au flux de quantité de mouvement de la vague d'impulsion  $\rho \ell_s \eta c^2$ , avec  $c$  la célérité de la vague :

$$\frac{\eta}{h} \propto \sqrt{\frac{\rho_s h_s u_s^2}{\rho h g h}},$$

une formulation qui reste voisine de l'équation (4.41) proposée par [Slingerland & Voight \(1982\)](#), mais qui diffère sur un point avec la corrélation empirique (4.43) : la dépendance de la densité  $\rho_s/\rho$  serait moins forte dans les expériences que ce que prédit la théorie.

Sur la base de cet accord entre approximation théorique du flux de quantité de mouvement et corrélation empirique des données de laboratoire, Heller a considéré qu'il y avait un unique nombre adimensionnel comme variable explicative ([Heller et al., 2008](#); [Heller, 2008](#); [Heller & Hager, 2010, 2014](#)). Il appela ce nombre le nombre d'impulsion P

$$P = \text{Fr} \left( \frac{h_s}{h} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_s V_s}{\rho \ell_s h^2} \right)^{1/4} \cos^{1/2} \left( \frac{6}{7} \alpha \right), \quad (4.44)$$

où le coefficient  $6/7$  dans la fonction  $\cos$  ne sert qu'à assurer une valeur d'amplitude non nulle en cas d'impact à la verticale.

À partir d'une nouvelle série d'essais, Heller proposait des relations non linéaires entre caractéristiques des vagues et nombre d'impulsion. Par exemple, l'amplitude maximale peut être estimée de la façon suivante

$$\frac{\eta}{h} = \frac{4}{9} P^{4/5}, \quad (4.45)$$

avec une précision de l'ordre de  $\pm 30\%$  (le coefficient de détermination vaut  $R^2 = 0,814$ ).

Le travail du VAW dans le domaine des vagues d'impulsion a été synthétisé dans deux rapports ([Heller et al., 2008](#); [Evers et al., 2019b](#)). Un accent particulier a été mis sur le transfert des connaissances vers l'ingénierie, notamment par la mise à disposition de feuilles de calcul qui permettent de faire des estimations pour un projet donné et de

situer le contexte de ce projet par rapport aux essais faits en laboratoire en similitude des vagues d'impulsion dans les lacs d'accumulation.

Le problème est que la méthode VAW repose sur une analyse dimensionnelle de la propagation d'une vague d'impulsion et sur un calage sur des expériences de laboratoire. Comme le font remarquer Heller & Ruffini (2023), le nombre de paramètres définissant le problème est grand, et il faudrait donc un nombre incroyablement élevé d'expériences pour explorer toutes les valeurs possibles de ces paramètres. Comme dans la majorité des essais en laboratoire, les expériences ont été conduites avec des matériaux « lourds » (c.-à-d. de masse volumique dépassant  $2000 \text{ kg/m}^3$ ) et cohésifs animés des vitesses élevées, on peut considérer que ces expériences à échelle réduite sont représentatives de vagues d'impulsion créées par des écoulements gravitaires de type glissement de terrain ou écroulement rocheux, mais qu'elles sont bien moins représentatives des vagues créées par des avalanches. Les quelques essais menés par le VAW avec des matériaux granulaires de faible masse volumique et de petits nombres de Froude ainsi que les expériences que nous avons réalisées avec des matériaux plus légers que l'eau montrent que les vagues d'impulsion ont des amplitudes significativement plus faibles (d'un facteur 3 environ) que celles créées par des matériaux lourds et de grands nombres de Froude dans les mêmes conditions (Zitti *et al.*, 2016).

## Synthèse des résultats

Nous reportons ici les résultats de la thèse de Valentin Heller; ces résultats ont été actualisés récemment Heller & Spinneken (2013); Evers *et al.* (2019a), mais cela ne change pas sensiblement la nature des résultats compte tenu de l'incertitude et la dispersion des données. Heller (2007) a montré que les paramètres suivants se calculaient à l'aide de P :

- l'amplitude maximale de la plus grosse vague d'impulsion est donnée par

$$\eta_{max} = \frac{4}{9} h P^{4/5}, \quad (4.46)$$

avec un écart relatif maximum de  $\pm 30 \%$ . La position à laquelle ce maximum est atteint est estimée par la formule :  $x_{max} = \frac{11}{2} h P^{1/2}$  avec une incertitude de l'ordre de  $\pm 50 \%$ . Huber & Hager (1997) avaient obtenu une relation un peu différente

$$\eta_{max}(x) = 0,88h \sin \alpha \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)^{1/4} \left( \frac{V_s}{h^2} \right)^{1/2} \left( \frac{h}{x} \right)^{1/4}. \quad (4.47)$$

La hauteur maximale est proportionnelle à l'amplitude de la vague :

$$H_{max}(x) = \frac{5}{4} \eta_{max} = \frac{5}{9} h P^{4/5}; \quad (4.48)$$

- le volume maximal de la plus grosse vague (par unité de largeur) est

$$V_{max} = h^2 P^{6/5}, \quad (4.49)$$

avec un écart relatif maximum de  $\pm 50$  %;

- l'amplitude des vagues décroît au cours de leur propagation selon une loi

$$\eta(x) = \frac{3}{5} h P^{4/5} \left( \frac{x}{h} \right)^{-4/15}, \quad (4.50)$$

avec un écart relatif maximum de  $\pm 30$  %;

- les vagues se déplacent à une vitesse (en crête) proche de celle d'un soliton

$$c = c_0 \left( 1 + 2 \frac{a^2}{h^2} \right)^{1/2}, \quad (4.51)$$

avec un écart relatif maximum de  $\pm 15$  %;

- la période de la plus grande vague d'impulsion vérifie à peu près la relation

$$\tau = 9 \sqrt{\frac{h}{g}} P^{1/2}, \quad (4.52)$$

tandis que la longueur d'onde de cette vague est

$$\lambda = c\tau = 9hP^{1/2} \left( 1 + 2 \frac{\eta^2}{h^2} \right)^{1/2}; \quad (4.53)$$

- la nature de la vague d'impulsion générée dépend d'une multitude de paramètres. En première approximation, on peut différencier les cas possibles à l'aide du nombre de Froude et du nombre adimensionnel  $Q$ :

$$Q = \left( \frac{s}{h} \right)^{1/3} \left( \frac{\rho_s V_s}{\rho_f h^2} \right) \cos \alpha, \quad (4.54)$$

- une onde de Stokes quand  $Q < \frac{4}{5} Fr^{-7/5}$ ,
- une onde cnoïdale quand  $\frac{4}{5} Fr^{-7/5} \leq Q \leq 11 Fr^{-5/2}$ ,
- un mascaret quand  $Q > 11 Fr^{-5/2}$ .

La hauteur des vagues dépend de la distance depuis le point d'impact. [Evers et al. \(2019b\)](#) proposent des relations empiriques permettant de calculer hauteur et amplitude en fonction de la distance.

### 4.6.3 Le problème des avalanches

La question se pose de savoir si les formules du VAW sont toujours valables lorsqu'on travaille avec de la neige, c.-à-d. un matériau faiblement cohésif de faible masse volumique (l'hypothèse  $\rho_s \sim 300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  est souvent posée pour les avalanches coulantes). Des corrélations empiriques comme celle de Zweifel (4.43) ne font montre qu'une faible dépendance de l'amplitude maximale vis-à-vis de la densité du matériau ( $\eta \propto d^{1/4}$  avec  $d = \rho_s/\rho$ ). Peu d'essais du VAW ont toutefois exploré le domaine des faibles densités, particulièrement celui des faibles densités  $d < 0,5$ .

Si les avalanches en aérosol peuvent atteindre de grande vitesse (souvent dans la fourchette  $50\text{--}100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ), la densité du nuage est très faible ( $d < 10^{-2}$ ). Leur effet sur une masse d'eau est sans doute équivalent à un gros coup de vent. On a un exemple documenté : l'avalanche de Stjernøya (Altafjord, Norvège) en avril 2014, déclenchée préventivement par le personnel d'une mine en contrebas, a été un gros aérosol – plus de  $100\,000 \text{ m}^3$  de neige mobilisés, vitesse de l'ordre de  $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , hauteur d'écoulement jusqu'à  $130 \text{ m}$  (Frauenfelder *et al.*, 2014). La vidéo tournée par le personnel de la mine montre l'absence de vague lorsque l'aérosol atteint la mer.



**Figure 4.28** – Capture vidéo de l'avalanche en aérosol de l'île de Stjernøya le 14 avril 2014. Source : Øystein Pedersen.

Les avalanches coulantes ont des vitesses plus faibles, le plus souvent comprises entre  $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (parfois  $50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ), tandis que la densité est dans une fourchette large  $0,15\text{--}0,50$ . Pour les grands lacs d'accumulation, le nombre de Froude varie entre  $0,5$  et  $3$  selon la profondeur du lac. La plupart des essais du VAW ont été réalisés

avec un piston pour impartir une grande quantité de mouvement initiale à l'écoulement gravitaire. Le nombre de Froude  $Fr$  était donc généralement supérieur à 2. Selon [Fritz et al. \(2003\)](#), la forme initiale de la vague d'impulsion dépend fortement de la valeur du nombre de Froude. Quand  $Fr > 2$ , l'impact forme un cratère à la surface de l'eau ; c'est lorsque la masse soulevée par l'impact retombe, que la vague d'impulsion se forme. Inversement à petit nombre de Froude, une partie de la masse d'eau est poussée lors de l'entrée de l'écoulement gravitaire dans le lac, et ce déplacement forme une vague d'impulsion.

La question de savoir si les essais du VAW peuvent servir à estimer les vagues d'impulsion créées par des avalanches reste ouverte. Pour attaquer ce problème, [Zitti et al. \(2016\)](#) ont étudié une configuration expérimentale qui s'approche le plus du problème des vagues d'impulsion générées par des avalanches. Le nombre de Froude était dans l'intervalle 1,1–2,1, et la masse volumique  $\rho_s$  des matériaux était de  $955 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . [Zitti et al. \(2016\)](#) ont aussi développé un petit modèle qui examinait le transfert de quantité de mouvement entre la masse entrante (avalanche) et la masse sortant (vague) d'un volume de contrôle. La résolution numérique montre que l'amplitude varie comme

$$\frac{\eta}{h} \approx 0,068Q \text{ avec } Q = \frac{\rho_s}{\rho} \frac{V_s}{\ell_s h^2} Fr. \quad (4.55)$$

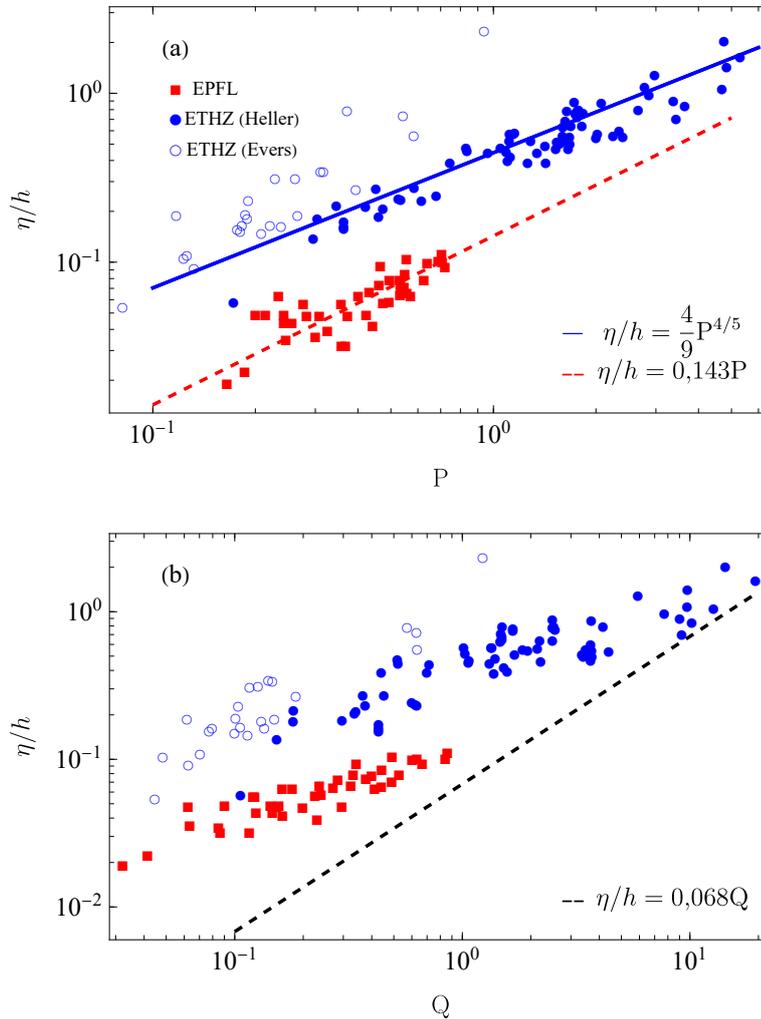
La figure 4.29 montre les essais réalisés à l'EPFL (LHE) et à l'ETHZ (VAW) sur des matériaux légers ( $\rho_s \sim 950 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ). La principale différence entre ces essais était qu'au VAW, le nombre de Froude  $Fr$  dépassait souvent 2 (64 essais sur 71 dans la thèse de Heller); pour 6 essais, le nombre de Froude était compris entre 1 et 2, et pour un essai, il était inférieur à 1. Au LHE, le nombre de Froude était autour de  $1,6 \pm 0,5$ . On observe sur la figure 4.29 que pour l'essai de Heller avec  $Fr = 0,95$ , la donnée a des caractéristiques voisines de celles observées pour les vagues d'impulsion au LHE, alors que pour les autres essais réalisés avec des nombres de Froude plus grands, les données du VAW se démarquent de celles du LHE. Pour ces essais à petits nombres de Froude, l'amplitude de la vague était environ 3 fois inférieure à la valeur prédite par la formule de Heller (4.45).

Si l'équation de Heller (4.45) tend à surestimer l'amplitude des vagues, le modèle simplifié de [Zitti et al. \(2016\)](#) tend à la sous-estimer. Un calage d'une formule à la Heller donne

$$\frac{\eta}{h} = 0,143P, \quad (4.56)$$

avec un coefficient de détermination  $R^2 = 0,685$ .

Sur la base de leurs expériences, [Zitti et al. \(2016\)](#) ont suggéré que l'amplitude des vagues était comprise entre deux bornes (voir tableau 4.5).



**Figure 4.29** – Synthèse des essais avec des matériaux de faible masse volumique conduits à l’ETHZ et à l’EPFL. (a) Variation de l’amplitude avec le nombre d’impulsion  $P$ . (b) Variation de l’amplitude avec le nombre adimensionnel  $Q$ . Source des données: ETHZ (Heller, 2007; Bross & Evers, 2023); EPFL (Zitti *et al.*, 2016).

#### 4.6.4 Autres paramètres

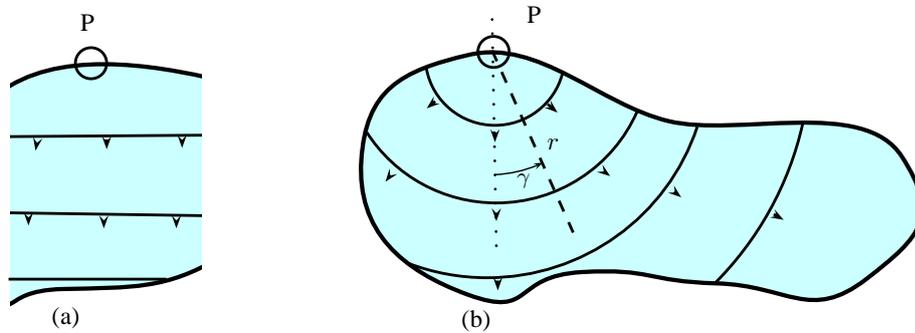
##### Géométrie de la vague

Un paramètre important du problème est la géométrie de propagation de l’onde: dans la plupart des cas, en particulier, dans les expériences en laboratoire, on considère la propagation d’ondes planes (voir fig. 4.30). Ce scénario peut se justifier soit par la

**Tableau 4.5** – Bornes inférieure et supérieure d’amplitude et de hauteur des vagues. Le coefficient de détermination  $R^2$  est indiqué. D’après [Zitti et al. \(2016\)](#).

	amplitude $\eta/h$	hauteur $H/h$
borne inférieure	$\eta' = 0,143P (R^2 = 0,685)$	$H' = 0,19P (R^2 = 0,526)$
borne supérieure	$\eta' = 0,427P^{4/5} (R^2 = 0,814)$	$H' = 0,48P^{4/5} (R^2 = 0,483)$

topographie des lieux et les caractéristiques de l’écoulement entrant dans le lac, soit par le pouvoir directeur de l’onde. Dans la réalité, des formes plus complexes peuvent être observées, avec des front d’onde à symétrie circulaire ou présentant des motifs plus complexes (notamment en cas de diffraction de l’onde).



**Figure 4.30** – Géométrie de propagation d’une onde d’impulsion. (a) Onde plane. (b) Onde circulaire. P Désigne le point d’impact. D’après ([Vischer & Hager, 1998](#)).

Sur la base d’essais en laboratoire, [Huber & Hager \(1997\)](#) ont proposé la formule suivante pour calculer l’amplitude maximale d’une onde d’impulsion en fonction de l’angle  $\gamma$  et de la distance  $r$  (voir fig. 4.30 pour la notation):

$$\eta_{max}(r) = 1,66h \sin \alpha \cos^2 \left( \frac{2\delta}{3} \right) \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)^{1/4} \left( \frac{V_s}{h^2} \right)^{1/2} \left( \frac{h}{r} \right)^{2/3}, \quad (4.57)$$

avec  $h$  la hauteur d’eau,  $\rho_s$  la masse volumique solide,  $\rho_f$  la masse volumique du fluide (eau), et  $V_s$  le volume de l’écoulement granulaire par unité de largeur (de l’écoulement entrant dans le lac). L’amortissement de l’onde est plus marqué que pour une onde plane. Comme précédemment, la vitesse maximale (en crête) est proche de celle d’une onde solitaire :

$$c^2 = g(h + \eta_{max}).$$

L’incertitude sur les résultats est évaluée à  $\pm 15\%$ . Ces résultats sont valables pour des distances dans la fourchette  $5 < r/h < 30$ .

## Runup

Sur la base de 200 expériences en laboratoire, Müller a calculé la hauteur de remontée (*run-up*)  $R$  d'une onde d'impulsion le long d'un obstacle (tel que le parement d'un barrage) (Vischer & Hager, 1998)

$$R = 1,25h \left( \frac{\pi}{2\delta} \right)^{1/5} \left( \frac{H}{h} \right)^{4/5} \left( \frac{H}{\lambda} \right)^{-3/20}, \quad (4.58)$$

avec  $\delta$  l'angle du parement par rapport à l'horizontale ( $18^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$  dans les expériences de Müller),  $H$  la hauteur maximale de la vague donnée par (4.48), et  $\lambda$  la longueur d'onde, dont une estimation est fournie par (4.53).

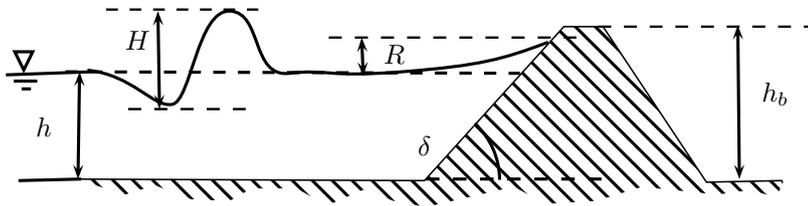


Figure 4.31 – Remontée (runup) d'une vague contre un barrage.

Evers *et al.* (2019b) proposent une formule différente (avec des écarts significatifs avec la formule de Müller):

$$R = 2\eta \exp\left(0,4\frac{\eta}{h}\right) \left(\frac{90}{\delta}\right)^{1/5} \quad (4.59)$$

avec  $\delta$  l'angle du parement par rapport à l'horizontale exprimé en degré,  $\eta$  l'amplitude de la vague à l'approche de la digue/barrage, et  $h$  la hauteur d'eau au niveau de la digue. Evers *et al.* (2019b) distinguent le cas d'un barrage rigide et celui d'un barrage en remblai. Ils proposent notamment une estimation du débit de surverse, du volume surversé, de la hauteur d'écoulement, et des forces d'impact de la vague d'impulsion sur un ouvrage.

## Cas des écoulements pyroclastiques

Parmi les études récentes, il faut mentionner celles sur les écoulements pyroclastiques (écoulements turbulents dus à l'éjection de gaz et particules à partir d'un cratère volcanique), qui se rapprochent des avalanches dites inertielles (écoulements rapides avec des vitesses supérieures à  $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) dont les avalanches en aérosol font partie. À partir d'essais en laboratoire sur des écoulements granulaires fluidisés, Bougouin *et al.*

(2020) notaient que l'équation de Heller (4.45) sous-estimait l'amplitude des vagues d'impulsion. Ils suggéraient d'employer :

$$\frac{\eta}{h} = K\zeta^{2/7}, \quad (4.60)$$

avec  $K$  un paramètre qui dépend de la taille des particules et qui varie de  $K = 0,2$  pour des particulières grossières à  $K = 1,2$  pour de l'eau

$$\zeta = \text{Fr} \frac{h_s}{h} \frac{\rho_s V_s}{\rho h^2} \sin \alpha$$

Cette formulation n'est pas sans rappeler l'équation (4.41) ou l'équation (4.55), deux équations qui attribuent un plus grand rôle à la densité  $d = \rho_s/\rho$  que ne le fait le nombre d'impulsion  $P$ . Selon Bougouin *et al.* (2020), la taille des grains contrôle la perméabilité et la dissipation d'énergie : plus le matériau est fin, moins il est perméable, plus le choc est violent, et plus grande est l'amplitude de la vague. Un point intéressant que leurs données sont assez proches de celles obtenues par Bullard *et al.* (2019), qui ont utilisé de l'eau comme matériau de l'écoulement gravitaire.

#### 4.6.5 Les autres approches

La première tentative pour s'attaquer au calcul numérique des vagues d'impulsion créées par des avalanches remonte à Jean-Paul Vila dans son étude des avalanches issues du couloir du Boulangeard et menaçant la retenue du Verney (Allemond, Isère, France) en aval du barrage de Grand Maison (Vila, 1987). À cet effet, il a utilisé les équations de Saint-Venant et calculé la vague générée par l'application d'une condition aux limites soudaine, censée représenter l'entrée de l'avalanche dans la retenue du Verney.

Depuis l'étude de Vila, un grand nombre d'études proposant des simulations numériques de vagues d'impulsion ont été publiées :

- résolution des équations de Saint-Venant à une couche (Serrano-Pacheco *et al.*, 2009) ou à deux couches (une pour l'eau, l'autre pour l'écoulement gravitaire) (Fernández-Nieto *et al.*, 2008; Kelfoun *et al.*, 2010; George *et al.*, 2017; Kafle *et al.*, 2019; Popinet, 2020; Poulain *et al.*, 2023);
- résolution des équations de Navier-Stokes à l'aide de méthodes particulières (Ward & Day, 2008; Capone *et al.*, 2010; Vacondio *et al.*, 2013; Xiao *et al.*, 2015; Mulligan *et al.*, 2020; Franci *et al.*, 2020; Xu *et al.*, 2022);
- résolution des équations de Navier-Stokes (Gabl *et al.*, 2015), ou des équations de Navier-Stokes multiphasiques (James *et al.*, 2014; Rauter *et al.*, 2021; Battershill *et al.*, 2021), ou généralisées avec des rhéologies non linéaires (Viroulet *et al.*, 2016; Rauter *et al.*, 2022);

La liste n'est pas exhaustive ; je renvoie le lecteur vers des articles de revue ([Yavari-Ramshe & Ataie-Ashtiani, 2016](#); [Heller & Ruffini, 2023](#)).

En dépit d'une complexité croissante tant du point de vue des équations résolues que des algorithmes de résolution numérique, les codes de calcul n'apportent pas un éclairage décisif sur le problème du transfert de quantité de mouvement entre l'écoulement gravitaires et la vague d'impulsion. En effet, ces codes reposent sur un certain nombre d'approximations quant au comportement rhéologique et à ce qui se passe lorsque deux matériaux se rencontrent. Si on prend l'exemple simple d'un écoulement granulaire composé de particules sphériques solides, il est possible en théorie de calculer l'entrée et le mouvement subséquent d'une particule dans l'eau ; cette particule subit de nombreuses forces (traînée, poussée, Basset, etc.) et entraîne une profonde modification de l'interface eau/atmosphère, et ce fait le problème à une particule n'est pas trivial ([Truscott \*et al.\*, 2014](#)). Ce problème se corse notablement quand on considère non pas une particule, mais plusieurs particules. Celles-ci vont interagir entre elles (p. ex. effet de sillage, collision). Formellement ce problème pourrait être résolu en couplant des méthodes numériques (p. ex. couplage de solveur RANS pour le fluide et DEM pour les particules), mais on est encore loin de pouvoir considérer des écoulements complexes (grand volume de particules, forme non sphérique, matériau non rigide, etc.).

Plus récemment sont apparues les techniques d'apprentissage par machine (*machine learning*) ([Meng \*et al.\*, 2020, 2023](#)). Il faut voir ces techniques comme de superbes outils de corrélation statistique, et comme toute corrélation, elles sont d'autant plus précises que l'on dispose d'un grand nombre de données couvrant la plus large possible gamme de valeurs. L'outil est donc merveilleux, presque miraculeux, mais ne change pas la nature du problème (il faut disposer d'un grand nombre de données) pas plus qu'il n'offre de perspective pour comprendre la dynamique des vagues d'impulsion (pour l'heure).

## 4.7 Mascaret



- Qu'est-ce qu'un ressaut hydraulique ?
- ↪ Voir la définition mathématique au § 1.6.2 (et revoir également l'interprétation hydraulique d'un choc au § 1.2.7 pour le cas stationnaire).

### 4.7.1 Phénomène physique

Un *mascaret* désigne la vague créée par la marée montante dans un estuaire. À la suite de l'élévation du niveau d'eau dans l'océan, de l'eau remonte à contre courant dans le fleuve. La vague peut dépasser 1 m de hauteur et se déplacer à plus de 10 km/h lors des grandes marées d'équinoxe. Tous les fleuves ne connaissent pas des mascarets; il faut en effet des conditions assez particulières pour que ces vagues se forment :

- amplitude suffisante de la marée ;
- estuaire en entonnoir pour amplifier l'effet de la marée ;
- faible hauteur d'eau dans le fleuve et pente douce du lit ;
- pas de vent contraire.

En France, c'est principalement l'estuaire de la Dordogne et celui de la Gironde dans la région bordelaise, où le phénomène est fréquent et attire les surfeurs en nombre. Jusqu'à la construction du chenal de Rouen dans les années 1960, l'estuaire de la Seine était également réputé pour ses mascarets. En Chine, le spectacle attire chaque année beaucoup de monde sur la rivière Qiantang.

Un mascaret est une forme particulière de ressaut hydraulique mobile. De tels ressauts peuvent se former sur tout type de cours d'eau lorsqu'une grande quantité d'eau arrive brutalement, par exemple lors d'un lâcher de barrage ou bien lors d'une crue rapide sur un cours d'eau à pente suffisamment forte. La figure 4.34 montre un ressaut mobile (front de crue) dans la rivière Zavràgia au Tessin lors de la grosse crue de juillet 1987. Le débit instantané a été estimé à  $600 \text{ m}^3/\text{s}$  et le front devait se propager à une vitesse d'environ 8 m/s.

Le mascaret est une onde avec un front raide qui se propage dans les cours d'eau : c'est typiquement ce qu'on appelle une discontinuité ou un choc ; c'est une caractéristique essentielle des équations non linéaires aux dérivées partielles hyperboliques. La forme de la surface libre près d'une discontinuité ne peut plus être étudiée par les équations de Saint-Venant à cause de la courbure de la surface libre (qui devient trop importante) et de la dissipation d'énergie (qui est également bien plus significative que la simple dissipation par frottement modélisée avec des formules empiriques de type Manning-Strickler) ; toutefois, la dynamique des discontinuités reste entièrement dictée par ces équations. On montre ci-après qu'on peut dériver un jeu d'équations, dites



**Figure 4.32** – Mascaret sur la Dordogne près de Libourne (Vayres, Gironde, France). Les surfeurs donnent une échelle de la taille du phénomène. Source [archaero](#).

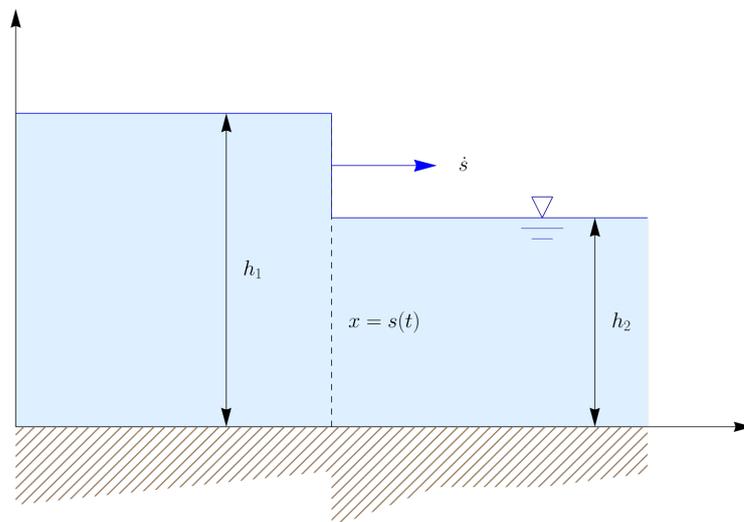


**Figure 4.33** – Mascaret sur la rivière Qiantang en Chine [The Atlantic](#).

relations de Rankine, qui décrivent la variation brutale de masse et de quantité de mouvement au passage de la discontinuité.



**Figure 4.34** – Arrivée du front d’une crue sur la rivière Zavragia (Tessin) en 1987 ; les deux clichés sont pris à 15 mn d’intervalle. Source : T. Venzin.



**Figure 4.35** – Déplacement d’un mascaret (« onde de choc »).

### 4.7.2 Ressaut mobile

Aux § 1.2.6 § 1.6.2, on a évoqué la formation d’un ressaut mobile, d’un point de vue mathématique, comme l’apparition d’une discontinuité. On redéveloppe ici cet ar-

gument mathématique général en se focalisant sur aux équations de Saint-Venant (en prenant soin de les mettre sous une forme conservative). On intègre le système d'équations (1.22)–(1.23)– le long d'un segment  $[x_1, x_2]$  comprenant le point  $x = s(t)$  où se produit un choc (ressaut hydraulique mobile). L'équation de conservation de la masse s'écrit alors (voir figure 4.35):

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx + [uh]_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} hu dx + [u^2h + \frac{1}{2}g \cos \theta h^2]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \left( gh \sin \theta - \frac{\tau_p}{\varrho} \right) dx.$$

Quand on fait la décomposition de l'intervalle  $[x_1, x_2]$  en deux parties ( $[x_1, x_2] = [x_1, s(t)] + [s(t), x_2]$ ), puis en faisant le passage à la limite  $x_1 \rightarrow s$  et  $x_2 \rightarrow s$ , on obtient pour la conservation de la masse :

$$\dot{s} \llbracket h \rrbracket = \llbracket uh \rrbracket, \quad (4.61)$$

ainsi que pour la quantité de mouvement :

$$\dot{s} \llbracket hu \rrbracket = \llbracket u^2h + \frac{1}{2}g \cos \theta h^2 \rrbracket, \quad (4.62)$$

où les crochets indiquent la variation brutale de part et d'autre de la discontinuité. Par exemple, on note

$$\llbracket h \rrbracket = h_+ - h_-, \text{ avec } h_+ = \lim_{x \rightarrow s, x > s(t)} h(x, t) \text{ et } h_- = \lim_{x \rightarrow s, x < s(t)} h(x, t).$$

Rappelons que le terme source  $\varrho g \sin \theta - \tau_p / \varrho$  n'a aucune influence sur l'équation de Rankine–Hugoniot. On trouve donc que la quantité (flux de masse)  $uh$  se conserve à travers le choc quand on exprime cette quantité dans un repère mobile rattaché au choc. La vitesse s'écrit alors de manière relative comme :  $u' = u - \dot{s}$  :  $\llbracket u'h \rrbracket = 0$ . De même, le flux de quantité de mouvement  $u'^2h + g \cos \theta h^2 / 2$  se conserve :  $\llbracket u'^2h + g \cos \theta h^2 / 2 \rrbracket = 0$  (pour montrer cette dernière relation, il faut également se servir de la conservation de la masse dans le référentiel mobile).

♣ **Exemple.** – Mascaret induit par une vanne en translation.

Considérons une vanne qui à l'instant  $t = 0$  se met en mouvement de translation le long d'un canal plat où l'eau est initialement au repos. La vitesse de cette vanne est  $V$ . On peut calculer la vitesse de l'intumescence créée par le mouvement de l'eau.

Si on se replace dans le repère fixe, on peut écrire :

$$\dot{s}(h_2 - h_1) = -Vh_1,$$

$$\dot{s}(-Vh_1) = gh_2^2/2 - (h_1V^2 + gh_1^2/2).$$

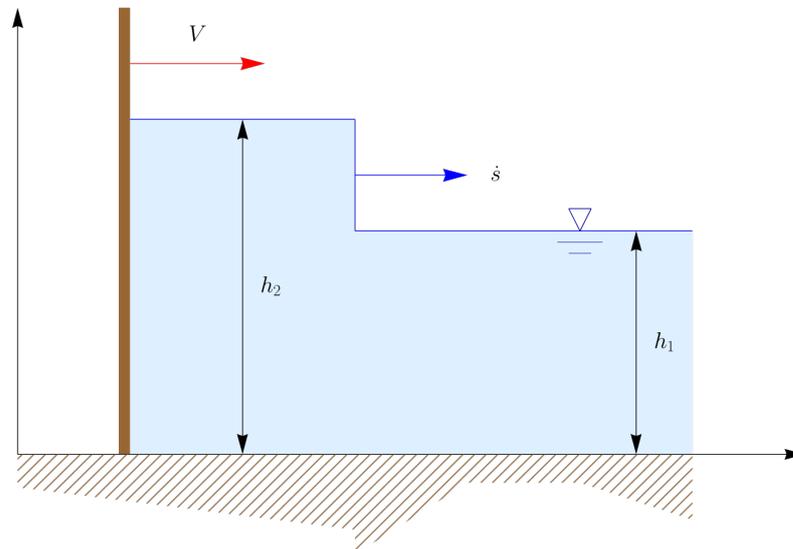


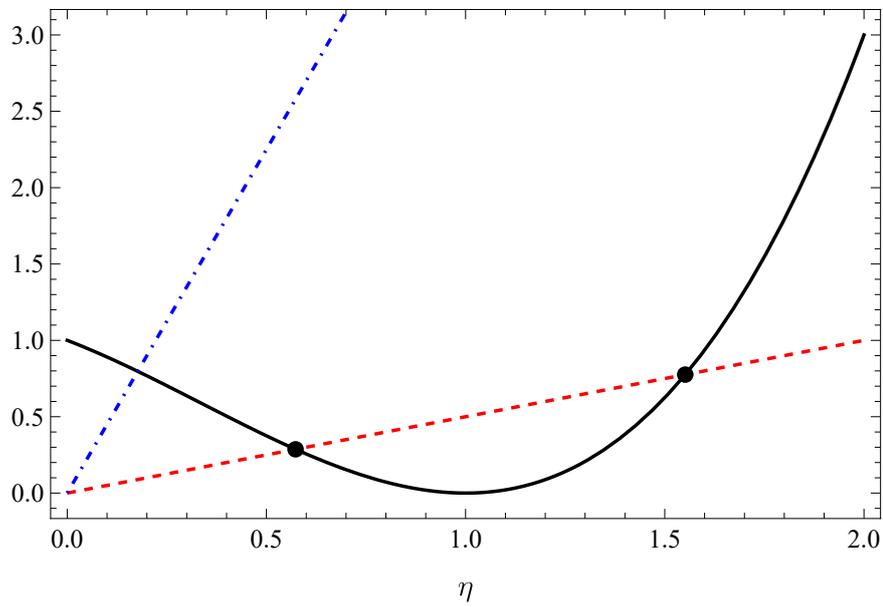
Figure 4.36 – Ressaut mobile créé par le déplacement d'un mur mobile.

En éliminant  $\dot{s}$ , on tire la relation :

$$(1 - \eta)^2(1 + \eta) = 2Fr^2\eta,$$

où  $Fr = V/\sqrt{gh_2}$  est le nombre de Froude et  $\eta = h_1/h_2$ . Il y a deux solutions à cette équation mais une seule<sup>9</sup> permet d'avoir  $\eta > 1$  (dans le cas plus général, c'est une condition de dissipation d'énergie qui permet de choisir la bonne solution). On reporte sur la figure 4.37 les deux courbes  $2Fr^2\eta$  et  $(1 - \eta)^2(1 + \eta)$ , dont l'intersection nous fournit la valeur  $\eta$  voulue et donc nous permet de calculer la vitesse de propagation du mascaret. Notons sur ce même graphique que si l'on se place dans le cas  $Fr > 1$ , on trouverait une valeur de  $\eta < 1$ , donc une vitesse  $\dot{s} < 0$ , ce qui n'a pas de sens ; en fait, dans ce cas-là, la solution est plus complexe : elle comprend une onde simple de détente précédée d'un mascaret.

9. En effet, il faut que  $\dot{s} > 0$  or  $\dot{s} = V\eta(\eta - 1)^{-1}$ , d'où il faut que  $\eta > 1$ .



**Figure 4.37** – Tracé des courbes  $2Fr^2\eta$  (trait discontinu) et  $(1 - \eta)^2(1 + \eta)$  (trait continu). On a tracé  $2Fr^2\eta$  pour deux valeurs de  $Fr$ :  $Fr = 0,5$  (tiret long rouge) et  $Fr = 1,5$  (tiret et pointillé bleu).

## 4.8 Houle et vagues dues au vent

Sur les grandes étendues d'eau, le vent peut former des successions de vagues à leur surface, dont l'amplitude croît généralement avec la force du vent. Une fois générées par le vent, ces vagues peuvent se propager jusqu'à des secteurs sans vent. On observe alors des vagues alors qu'il n'y a pas vent ; on parle de *houle* (voir figures 4.38 et 4.39).



**Figure 4.38** – (a) Par mer calme, les vagues créées par le vent sont de hauteur très faible. Clapotis des vagues à Senigallia sur la mer Adriatique. (b) Mais à l'approche du littoral, cette hauteur croît et la vague peut devenir déferlante, ce qui produit l'écume si caractéristique (à gauche). Lors des tempêtes, les vagues peuvent atteindre des hauteurs de plusieurs mètres et interagir fortement avec des obstacles, comme ici ce phare lors de la tempête Darcy en février 2021. Source : John Fatkin/Cover Images/INSTARimages.

Parmi les nombreuses méthodes de calcul des effets du vent sur les vagues, les techniques empiriques par corrélation de données ont connu un certain succès. L'idée de base est que si l'on emploie les bons nombres sans dimension (tels que le nombre de Froude), alors il est possible de faire émerger des lois à partir des mesures accumulées en différents endroits en mer. On définit ainsi une *hauteur caractéristique* qui serait la hauteur vers laquelle tendraient toutes les hauteurs de vague au bout d'une certaine distance. Comme il y a toujours une forte composante aléatoire dans les vagues, il convient de définir la hauteur caractéristique sur un plan statistique. On introduit ainsi



**Figure 4.39** – Côte britannique dans le Somerset touchée par des vagues lors de la tempête Pétra de février 2014. [Daily Mail](#).

la hauteur significative de la façon suivante<sup>10</sup> :

- on détermine la probabilité d’observer une certaine hauteur de vague. Les hauteurs de vague sont souvent décrites à l’aide de la loi de probabilité de Rayleigh<sup>11</sup> ;

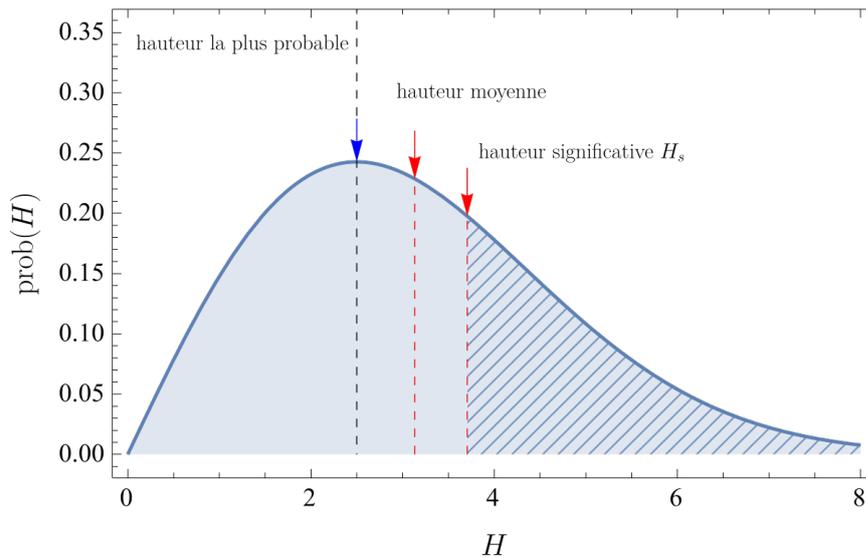
10. La définition a changé au cours du temps, mais du temps des premiers manuels de l’USACE, cette hauteur correspond à la moyenne des hauteurs de vague les plus importantes. De nos jours on définit cette hauteur plutôt à partir de l’énergie des vagues.

11. La distribution de Rayleigh est en fait souvent utilisée pour le vent : si on suppose que les deux composantes  $u$  et  $v$  (dans un référentiel cartésien) sont des variables indépendantes, non corrélées entre elles, et suivant une loi de Gauss avec la même variance, alors la norme de

- on considère la population de vague qui constitue le tiers supérieur (voir figure 4.40);
- la hauteur spécifique  $H_s$  est la moyenne de cette population.

La seconde notion importante est celle de *fetch*  $F$ , qui est défini comme étant la plus grande distance sur une étendue d'eau, sur laquelle souffle le vent sans rencontrer d'obstacle d'une côte/berge à l'autre (ou bien d'une côte à un point donné). La direction du vent n'est pas nécessairement celle des vagues ni celle du fetch. Cela est particulier vrai aux abords des côtes avec un vent de terre.

La dernière notion-clé est naturellement la vitesse caractéristique du vent. Il est aujourd'hui courant d'introduire la *vitesse de frottement*  $u_*$  comme grandeur caractéristique. Cette vitesse est simplement la vitesse fictive de glissement du vent à la surface de l'étendue d'eau. Elle se définit à partir de la contrainte  $\tau$  exercée par le vent sur la surface d'eau:  $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$  ( $\rho$  étant ici la masse volumique de l'air). Il faut ensuite relier cette vitesse de surface avec la vitesse du vent loin du sol (ou de l'eau).



**Figure 4.40** – Définition de la hauteur significative à partir de la densité de probabilité des hauteurs de vague.

On introduit de la façon suivante les hauteurs significatives, fetchs, et fréquence (des pics du spectre) sous forme adimensionnelle :

$$\hat{H} = \frac{gH}{u_*^2}, \hat{F} = \frac{gF}{u_*^2}, \hat{U} = \frac{U}{u_*}, \text{ et } \hat{f} = \frac{u_* f}{g}.$$

la vitesse  $(u^2 + v^2)^{1/2}$  suit une loi de Rayleigh.

Parmi les premières lois proposées, il y a le modèle SMB, du nom de ses auteurs Sverdrup, Munk and Bretschneider (1947, 1952, 1973), qui a été calé sur des données de l'Atlantique nord durant la seconde guerre mondiale :

$$\hat{H}_s = 0,283 \tanh \left( 0,0125 \hat{F} \right).$$

Par la suite, les lois d'échelle ont été recherchées sous la forme de produits de monômes :

$$\hat{H}_s = a \hat{F}^p \hat{U}^q, \text{ et } \hat{f}_p = b \hat{F}^r \hat{U}^s,$$

avec  $a$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , et  $s$  des paramètres calés sur des mesures. La formule dite JONSWAP<sup>12</sup> (1973) donne la hauteur significative des vagues à partir d'une analyse de tempêtes sur la mer du Nord :

$$\hat{H}_s = 1,6 \times 10^{-3} \hat{U} \sqrt{\hat{F}}, \quad (4.63)$$

tandis que la fréquence du pic est donnée par

$$\hat{f}_p = \frac{3,5 \times 10^{-3}}{\hat{F}^{1/3} \hat{U}^{1/3}}, \quad (4.64)$$

avec  $\hat{U} = 1$  pour cette méthode (profil de vitesse plat). Si la mesure du fetch ne pose pas de problème insurmontable, la détermination du vent est beaucoup plus épineuse. En Suisse (et ailleurs), il existe un réseau de capteurs météorologiques : ANETZ (72 stations automatiques mesurant en continu de nombreux paramètres), ENET (44 stations mesurant les vents et certains paramètres relatifs à la neige). Il est déjà possible de déduire des courbes intensité-durée-fréquence. Le problème de l'extrapolation de cette mesure ponctuelle pour en déduire ce qui se passe plus loin (à quelques kilomètres) ou plus haut (dans la couche limite) est très ardu. Il existe de nombreuses formulations empiriques (voir par exemple (Demirbilek *et al.*, 1993)).

Le tableau 4.6 fournit l'ordre de grandeur la hauteur significative  $H_s$  des vagues à l'aide de formules empiriques, la plupart d'entre elles étant résumées dans le manuel « Coastal Engineering Manual » de l'USACE<sup>13</sup>.

Le spectre de fréquence des vagues doit fortement s'atténuer car le vent ne peut pas créer des vagues indéfiniment hautes. Au-delà d'une certaine hauteur, des phénomènes (effondrement de la crête de vague, dissipation turbulence) doivent contrebalancer cette croissance. Sur la base de considérations sur la conservation de l'énergie, Phillips émit l'idée que le spectre de fréquence devait tendre vers la fonction limite quand  $f \rightarrow 0$

$$S(f) = \frac{\alpha}{(2\pi)^4} g^2 f^{-5} [\text{m}^2\text{s}], \quad (4.65)$$

12. Acronyme pour JOint North Sea WAve Project, un projet collectif entrepris au début des années 1970.

13. US Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Manual, Washington, 2008

**Tableau 4.6** – Détermination de la hauteur significative pour un vent  $U$  (en m/s, à 10 m du sol) et un fetch  $F$  (en m). Pour chaque méthode, on a aussi reporté le coefficient de corrélation  $r_p$  quand il est connu. Donelan propose une formulation différente calée sur des mesures sur les Grands Lacs américains ;  $\phi$  est l'angle entre la direction du vent et celle des vagues. Demirbilek *et col.* modulent la vitesse à la surface de la retenue en se servant de la relation empirique de Garratt entre vitesses du vent à 10 m et à 3 m. Smith s'intéresse aux vagues dans un contexte de fjord et d'embouchures. Toutes ces formules ont été calées sur des étendues d'eau dont le fetch dépasse 2 km.

Auteur	$H_s$ (m)	$r_p$
Jonswap (1973) <sup>a</sup>	$H_s = 1,6 \times 10^{-3} g^{-0,5} F^{0,5} U$	–
Donelan (1982) <sup>b</sup>	$H_s = 3,66 \times 10^{-3} g^{-0,62} U^{1,24} F^{0,38} \phi^{1,24}$	0,83
Walsh (1985) <sup>c</sup>	$H_s = 1,7 \times 10^{-3} g^{-0,5} U F^{0,5} \phi^{1,63}$	0,85
Smith (1991) <sup>b</sup>	$H_s = 1,5 \times 10^{-3} g^{-0,5} F^{0,5} U \cos \phi$	0,87
Molitor (1935) <sup>d</sup>	$F \leq 32$ km, $H_s = 0,76 - 4,62 \times 10^{-2} F^{0,25} + 5,3 \times 10^{-4} F^{0,5} U^{0,5}$ $F > 32$ km, $H_s = 5,3 \times 10^{-4} F^{0,5} U^{0,5}$	– –

<sup>a</sup>US Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Manual, Washington, 2008.

<sup>b</sup>Smith, J., Wind-wave generation on restricted fetches, USACE Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, 1991.

<sup>c</sup>Walsh, E. *et col.*, Directional wave spectra measured with the surface contour radar, *Journal of Physical Oceanography*, 15, 566-592, 1985.

<sup>d</sup>A. Schleiss et H. Pougatsch, Les barrages: du projet à la mise en service, *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne, 2011.

avec  $\alpha = 8,1 \times 10^{-3}$  un nombre sans dimension. Les données de la mer du Nord (projet Jonswap) ont modulé ce spectre :

$$S(f) = \frac{\alpha}{(2\pi)^4} g^2 f^{-5} [\text{m}^2 \text{s}] \quad (4.66)$$

avec la fonction de modulation

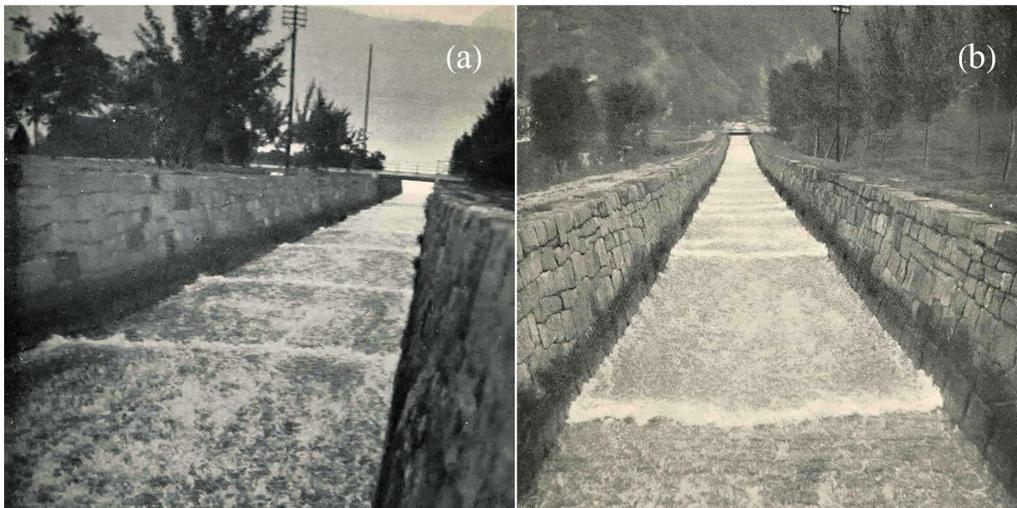
$$E(f) = \exp \left( -1,25 \left( \frac{f_p}{f} \right)^4 \right) \gamma^\Gamma \text{ avec } \Gamma = \exp \left( -\frac{(f - f_p)^2}{2\beta^2 f_p^2} \right)$$

et où  $f_p$  est la fréquence de pic donnée par exemple par la loi (4.64),  $\beta = 0,07$  pour  $f < f_p$  et  $\beta = 0,09$  pour  $f > f_p$  et  $\gamma = 3,3$ .

## 4.9 Trains d'onde

### 4.9.1 Problématique

Un écoulement à surface libre devient instable lorsque sa vitesse augmente. Cette instabilité se manifeste par l'apparition d'ondulations de la surface libre. En français on désigne ces ondulations sous le terme générique de train d'ondes (car il s'agit d'une succession d'ondes balayant la surface libre); en anglais, on parle de vagues de roulement (*roll waves*) car ces ondulations sont en fait de petites vagues déferlantes (voir figure 4.41).



**Figure 4.41** – Train d'ondes dans la rivière (canalisée) Grönbach (ou Grönnbach) près du village de Merlingen (lac de Thoune, BE, Suisse); à gauche, vue vers l'aval et à droite, vue vers l'amont. Cliché de Vaughan Cornish (1910). Source [Digital collection of the university of Washington](#)

Ces instabilités se manifestent fréquemment, notamment sur les coursiers raides tels que des évacuateurs de crue ou bien sur des chaussées et trottoirs en pente lorsque l'eau de pluie ruisselle jusqu'à former une lame d'eau. Ces ondulations sont des perturbations de l'écoulement. Elles ne sont en général pas considérées dans les calculs en hydraulique car elles ne modifient pas le comportement général de l'écoulement tant que leur amplitude est modérée. Elles peuvent néanmoins poser problème pour certains problèmes en ingénierie lorsqu'on doit connaître la hauteur maximale de l'écoulement et/ou imposer une certaine continuité à cet écoulement. Par exemple, un écoulement à surface libre peut emprunter des passages busés, pour lesquels il est essentiel de s'assurer qu'il n'y a pas de mise en pression de l'écoulement; un écoulement en charge

exerce en effet des contraintes bien plus importantes sur les parois. L'apparition de train d'ondes sur un écoulement à surface libre dans une conduite peut générer un écoulement pulsé, avec une mise en charge locale de l'écoulement, suivie d'un retour à la pression hydrostatique. Un autre problème lié à l'apparition de ces instabilités est la formation d'eau blanche similaire à l'écume des vagues : en déferlant, les vagues emprisonnent de l'air et il se forme alors de petites bulles ; le mélange eau + air forme une émulsion qui peut être dangereuse pour des installations à cause de la cavitation (explosion des bulles contre les parois, avec usure prématurée des parements en béton) et de l'accentuation du caractère pulsé. Pour ces raisons, il convient en général de limiter voire d'empêcher de telles instabilités de se produire.

### 4.9.2 Stabilité linéaire des équations de Saint-Venant

Nous suivons la méthode employée par Trowbridge (1987) pour calculer le domaine de stabilité des équations de Saint-Venant. Les équations de Saint-Venant (1.20–1.21) s'écrivent sous la forme tensorielle

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = \mathbf{S}, \quad (4.67)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{u} & h \\ g \cos \theta & \bar{u} \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \theta - \frac{\tau_p}{\rho h} \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant que l'on a une solution  $\mathbf{U}_0 = (H, U)$  à ces équations et qu'on perturbe cette solution pour savoir si elle stable

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}', \quad (4.68)$$

où le vecteur  $\mathbf{U}' = (\eta, \kappa)$  est la perturbation, avec  $\kappa$  et  $\eta$  la perturbation de la hauteur et celle de la vitesse, respectivement. En substituant cette décomposition dans l'équation (4.67) et en gardant uniquement les termes du premier ordre, on obtient une équation linéarisée gouvernant les perturbations  $\mathbf{U}'$

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}'). \quad (4.69)$$

Nous supposons que la solution peut s'écrire sous la forme

$$\eta = \text{Re}(\Delta e^{i(nx-ct)}), \quad \kappa = \text{Re}(X e^{i(nx-ct)}), \quad (4.70)$$

où  $\Delta$  et  $X$  sont les amplitudes complexes respectivement de la hauteur et de la vitesse,  $n$  est le nombre d'onde (qui est un réel positif), et  $c$  une constante complexe qui reste à déterminer. Le symbol  $i$  est le nombre imaginaire. La partie réelle de  $c$  peut être interprétée comme la vitesse de propagation des perturbations tandis que sa partie imaginaire reflète le taux de croissance (ou de décroissance) de l'amplitude. Dans le cadre de la

théorie de la stabilité linéaire, l'écoulement est supposé devenir instable dès qu'une solution au système (4.69) est caractérisée par une partie imaginaire de  $c$  positive. En substituant la forme complexe (4.70) dans (4.69) fournit le système suivant

$$\begin{bmatrix} nA_{11} - c & nA_{12} \\ nA_{21} - i\frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial H} & nA_{22} - c - i\frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ X \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.71)$$

où  $A_{ij}$  est la composante  $(i, j)$  de la matrice  $\mathbf{A}$ . Ce système admet aucune solution triviale pourvu que son déterminant soit nul. L'équation de dispersion est obtenue en calculant le déterminant du système et en l'exprimant en fonction de  $c$

$$c^2 - 2\alpha c - \beta = 0, \quad (4.72)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_r + i\alpha_i = n \frac{A_{22} + A_{11}}{2} - i \frac{1}{2} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial U}, \\ \beta &= \beta_r + i\beta_i = n \left[ n(A_{12}A_{21} - A_{22}A_{11}) + i \left( A_{11} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial U} - A_{12} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\varrho}H)}{\partial H} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution à l'équation (4.72) mise sous la forme

$$(c - \alpha)^2 = r e^{i\Theta}. \quad (4.73)$$

La partie imaginaire de la solution à l'équation (4.73) peut être écrite

$$c = \alpha \pm \sqrt{r} e^{i\Theta/2} \Rightarrow c_i = \text{Im}(c) = \alpha_i \pm \sqrt{r} \sin \frac{\Theta}{2}. \quad (4.74)$$

La plus grande partie imaginaire est

$$c_i = \alpha_i + \sqrt{r} \left| \sin \frac{\Theta}{2} \right|. \quad (4.75)$$

Nous cherchons maintenant quel domaine cette expression est positive:  $c_i > 0$ . En prenant la racine carrée de chaque des membres de cette équation, puis considérant que  $2\alpha_i^2 + r \cos \Theta$  est toujours positive, on obtient après réarrangement:

$$r > 2\alpha_i^2 + r \cos \Theta \Leftrightarrow \beta_i^2 > 4\alpha_i(\beta_r\alpha_i - \beta_i\alpha_r). \quad (4.76)$$

Le critère d'instabilité est le suivant:

$$\left( H \frac{\partial \tau_p}{\partial H} - \tau_p \right) \left( H \frac{\partial \tau_p}{\partial H} - \tau_p \right) > gH \cos \theta \left( \frac{\partial \tau_p}{\partial U} \right)^2 \quad (4.77)$$

On peut montrer que la source d'énergie pour que l'instabilité se développe est fournie par le travail de la gravité; l'écoulement est linéairement instable si la puissance des forces gravitaires excède l'énergie dissipée aux frontières par  $\tau_p$ . En prenant par exemple une contrainte de frottement à la Chézy ( $\tau_p = \varrho g \bar{u}^2 / C^2$ ), on trouve que le critère d'instabilité est

$$\boxed{\text{Fr} > 2}, \quad (4.78)$$

avec  $\text{Fr} = \bar{u} / \sqrt{gh \cos \theta}$  le nombre de Froude.



## Index des mots clés

- advection, 119, 133
  - non linéaire, 194
- aggradation, 22
- algue, 42
- alternance
  - rapide-mouille, 115
  - seuil-mouille, 115
- angle
  - de Kelvin, 285
- animal
  - fouisseur, 205
- antidune, 72, 76
- approximation de Padé, 269
- assurance, 147
- autocorrélation, 138
- avalanche, 275
- banc, 72, 115
  - alterné, 36, 37
  - de gravier, 37
  - de sable, 37
- barrage, 19, 143, 150, 205
  - classification, 227
  - petit, 215
- BASEbreach, 233
- bedrock, 42, 111
- bief, 72
  - moyenne sur un, 72
- bifurcation, 35
- brèche, 208, 233, 236
- canopée, 115
- caractéristique, 25
- cascade, 11, 75, 109, 111
- catastrophe
  - naturelle, 147
- cellule convective, 143
- charge, 12, 230
  - hydraulique, 2
  - pertes de, 2
- charriage, 22, 149
- choc, 124, 128, 199, 318
- chute, 3, 11, 75, 111
- claquage, 205
- Clawpack, viii
- coefficient
  - de Boussinesq, 17, 265
  - de Chézy, 45
  - de Darcy–Weisbach, 44
  - de débit, 12
  - de Manning, 45
  - de Strickler, 45
  - de traînée, 115
- concentration
  - de rugosité, 112
- condition
  - aux limites, 25, 285
  - de Dirichlet, 120
  - de Lax, 250
- conduit, 238
- confluence, 35

- conjugaison, 8
- constante
  - de von Kármán, 48, 54, 61, 101
- contrainte
  - de Shields, 22
  - pariétale, 265
- contrôle, 285
- convection, 119, 133
- couche
  - de rugosité, 53
  - de surface, 53
- courbe
  - caractéristique, 25
  - de remous, 3, 8, 29
  - de tarage, 78
  - enveloppe, 166
  - granulométrique, 97
- courbure, 4, 14, 30
- crue, 37, 141, 152
  - méga, 152
  - torrentielle, 149
  - éclair, 143, 166
- célérité, 22, 136
- dalot, 33
- delta, 37
- densité
  - spectrale, 138
- diamètre
  - médian, 97
- diffusion, 130, 133
- digue, 219
- discontinuité, 318
- distribution
  - granulométrique, 97
- dune, 72, 76, 91
- durée
  - spécifique, 182
- débit
  - de plein bord, 78
- débâcle, 217
- décomposition
  - de Reynolds, 65
- déposition, 22
- dépression, 152
- déversoir, 31
- eau
  - blanche, 8, 75, 109, 329
- écosystème, 36
- écoulement
  - hyporhéique, 115
  - pyroclastique, 315
- elliptique, 24
- embranchent, 35
- embâcle, 110, 111
- energie
  - énergie, 42
- énergie
  - totale, 1
- épicerage, 182
- équation
  - advection-diffusion, 133
  - caractéristique, 25, 120
  - courbe de remous, 3
  - d'Airy, 282
  - d'Exner, 22
  - de Benjamin–Bona–Mahony, 290
  - de Bernoulli, 284
  - de Bonelli, 239
  - de Boussinesq, 30, 290, 299
  - de Buckley–Leverett, 250
  - de Burgers, 127
  - de Burgers visqueuse, 134
  - de Clague–Mathews, 243
  - de conjugaison, 7
  - de continuité, 15
  - de convection, 119
  - de diffusion, 130
  - de diffusion non linéaire, 130
  - de fermeture, 65
  - de Froehlich, 233
  - de Huppert, 245
  - de Korteweg–de-Vries, 290
  - de la chaleur, 130, 139
  - de la quantité de mouvement, 16, 19
  - de Laplace, 139, 282, 283

- de Meyer-Peter, 46
- de Navier–Stokes, 14, 16, 65, 134
- de Rankine–Hugoniot, 27, 124, 128, 199, 248
- de Saint-Venant, 14, 15, 19, 23, 191, 254, 301, 330
- de Serre–Green–Naghdi, 299
- des ondes, 136, 282
- hyperbolique, 24
- érosion
  - externe, 205
  - indice, 239
  - interne, 205, 237
- estuaire, 36
- étiage, 78
- évacuateur, 207
- facteur
  - intégrant, 24
- Ferguson, Rob, 57
- fermeture
  - algébrique, 65
- fetch, 324
- flottant, 36
- flux, 23
- fonction
  - de Bessel, 304
  - de Green, 132
  - de transfert, 186
- forme
  - caractéristique, 18, 124
  - conservative, 18, 21
  - non conservative, 18
  - tensorielle, 23, 27
- formulation
  - conservative, 20
  - filaire, 21
- formule
  - de Kirpich, 170
  - de Kleitz–Seddon, 194
  - de Turraza, 170
- fracturation, 205
- frottement
  - de forme, 42, 43, 50, 91
  - de peau, 42, 43, 91
  - loi, 43
- Froude, 3
- fréquence, 137
- gradex, 169
- harmonique, 137
- hauteur, 21
  - critique, 3
  - normale, 3
  - significative, 324
- houle, 285, 290, 299, 324
- hydrogramme, 174
  - unitaire instantané, 186
- hyperbolique, 24
- hypothèse
  - de Boussinesq, 66
- hystérésis, 76
- hyétogramme, 182
- impact, 271, 315
- infiltration, 169
- inondation, 141, 143
- instabilité, 14, 329
- invariant
  - de Riemann, 258, 260
- jacobien, 23
- jökulhlaup, 217
- lac, 146, 150, 216
  - glaciaire, 217, 243
  - morainique, 216, 217, 240
- lahar, 150
- largeur, 21
- lave torrentielle, 149
- lit, 37, 42
  - alluvial, 42
  - composé, 42, 72
  - de sable, 97
  - en tresse, 37, 72
  - majeur, 42, 72
  - mineur, 42, 72
  - mobile, 42

- mouillé, 261
  - penne, 72
  - rocheux, 42
  - végétalisé, 42
  - vététalisé, 42
- loi
  - de Brownlie, 97
  - de charriage, 22
  - de Chézy, 45, 56, 193, 265, 331
  - de Coles, 50
  - de Darcy, 139
  - de Darcy–Weisbach, 44, 52, 86
  - de déficit de vitesse, 50
  - de Ferguson, 57, 112
  - de Ferro, 61
  - de frottement, 43
  - de Gauckler–Manning–Strickler, 45
  - de Keulegan, 48, 51, 57, 94, 99, 112
  - de Manning–Strickler, 45, 56–58, 85, 92, 99, 193
  - de Parker, 57
  - de Prandtl, 48, 68, 101
  - de Recking, 104
  - de Rickenmann–Recking, 58, 112
  - de Smart–Jaeggi, 103
  - de Strickler, 46
  - de von Kármán–Prandtl, 86
  - log-normale, 97
  - parabolique, 65
- loi de probabilité
  - de Fréchet, 160
  - de Gumbel, 160, 173
  - de Rayleigh, 324
  - de valeurs extrêmes, 160
  - de Weibull, 160
- longueur
  - d’onde, 137
  - de mélange, 48, 50, 54, 101
  - de ressaut, 7
- marée, 290
- mascaret, 192, 310, 318
- modèle
  - $k - \varepsilon$ , 66, 68
  - de Katul, 115
  - de Lamb, 115
  - de Thompson–Campbell, 115
  - GR4, 185
  - LES, 30, 35
  - réservoir GR, 185
- morphodynamique, 36
- mouille, 37, 72, 75, 109
- mouvement de terrain, 150
- moyenne, 14
  - double, 53
  - géométrique, 97
  - selon la hauteur, 16
- méandre, 37, 72
- méga-crue, 152
- méthode
  - Crupédix, 165
  - de Pohlhausen, 266
  - de séparation des variables, 283
  - de Whitham, 266
  - des caractéristiques, 25, 128, 194, 258
  - des volumes finis, 25
  - du gradex, 169
  - QdF, 171
  - rationnelle, 177, 194
  - SCS, 179
  - Socose, 176, 182
  - transformation pluie-débit, 176
- nappe, 146
- nombre
  - d’onde, 137
  - d’Ursell, 290
  - de Chézy, 57
  - de Froude, 3, 16, 21, 22, 44, 61, 322, 331
  - de Froude critique, 285
  - de Reynolds, 16, 44
  - de Shields, 22, 61, 94, 101, 104
- obstacle, 11
- OFEN, 239

- onde, 136
  - aléatoire, 138
  - capillaire, 290
  - cinématique, 191, 193, 194, 258
  - cnoïdale, 290, 295, 310
  - courte, 290
  - d'impulsion, 273, 305
  - de choc, 27, 192, 248
  - de crue, 193
  - de détente, 248
  - de gravité, 281
  - de Stokes, 294, 310
  - de surface, 281
  - dynamique, 191
  - gravitaire, 290
  - linéaire, 293
  - longue, 290
  - mixte, 250
  - plane, 313
  - progressive, 137
  - régressive, 137
  - simple, 248, 258
  - simple centrée, 258
  - solitaire, 290, 297
  - soliton, 290
- orage, 152
- parabolique, 24
- paroi, 85
- pavage, 75
- pelle, 11
- penne, 72
  - critique, 3
  - frottement, 2
- perle
  - de charge, 2, 7, 12
- poche glaciaire, 150
- ponceau, 33
- pont, 33
- probabilité
  - de dépassement, 158
- problème
  - de Green, 131
  - de Riemann, 246
- période, 137
  - de retour, 158, 163
- R (langage), 190
- rapide, 75, 109
- rapport
  - d'échelle, 14
- rayon hydraulique, 21, 48
- régime
  - graduellement varié, 2
  - inférieur, 72, 99
  - rapidement varié, 2
  - subcritique, 4, 19, 26
  - supercritique, 4, 19, 26
  - supérieur, 72, 99
  - varié, 31
- relation
  - de dispersion, 137, 284
  - de Rankine–Hugoniot, 248, 318
- remontée, 315
- remontée de nappe, 146
- renard, 205
- ressaut, 3, 4, 8, 20, 24, 30, 109, 192, 318
  - mobile, 27, 320
- ride, 72, 76, 91
- rivière
  - alluviale, 42, 72, 111
  - de montagne, 57, 109
  - torrentielle, 75
  - à forte pente, 109
- roll wave, 329
- routage, 176
- rugosité, 72
  - de forme, 47
- ruissellement, 146
- run-up, 315
- rupture
  - barrage, 203
  - bassin de décantation, 220
  - cause, 205
  - digue, 219
  - graduelle, 233
  - instantanée, 232
  - soudaine, 233

- terril, 220
- rupture de barrage, 150
- réchauffement climatique, 217
- régime
  - fluvial, 285
  - inférieur, 75
  - subcritique, 285
  - supercritique, 285
  - supérieur, 75
  - torrentiel, 285
- résistance, 42
  - écoulement, 72
- section, 21
- seiche, 146, 216
- seuil, 8, 11, 31, 37, 72, 75, 109
  - de mise en mouvement, 76
  - dénoyé, 12, 31, 116
  - mince, 11
  - noyé, 12, 31, 116
  - épais, 11
- sillage, 109
- similitude, 61
- singularité, 8
- solitaire, 297
- soliton, 290, 310
- solution
  - auto-similaire, 255
  - de D'Alembert, 137
  - de Green, 131
  - de Ritter, 254
- source, 23, 126
- spectre, 138
- stabilité, 330
- structure
  - morphologique, 72, 91
- suffusion, 205
- surverse, 205, 207
- séquence
  - mouille-rapide, 75, 109
  - rapide-mouille, 115
  - seuil-mouille, 75, 83, 109, 115
- tarage, 78
- temps
  - de concentration, 169
  - formation de brèche, 236
  - rupture, 238, 240
- tenseur
  - de Reynolds, 65
- théorie
  - d'Airy, 282, 290, 293
  - de Korteweg-de-Vries, 290
  - de la similitude, 305
  - de la stabilité linéaire, 330
  - de Stokes, 290, 294
  - des ondes linéaires, 281, 293
  - des ondes non linéaires, 290
  - des valeurs extrêmes, 160, 163
- théorème
  - de Wiener-Khinchin, 138
- tirant, 21
  - d'eau, 72
- torrent, 75
- train d'onde, 329
- transition, 72, 76
- transport
  - solide, 22, 36
- traînée, 112
- tsunami, 146, 290, 299, 301
- vague, 191, 271
  - d'impulsion, 305
  - déferlante, 72
  - scélérate, 271
  - stationnaire, 72
- valeur
  - propre, 23
- vanne, 33
- variable
  - de Riemann, 24, 258
  - séparable, 303
- VAW, 307
- vecteur
  - propre, 23
- vitesse
  - de cisaillement, 48
  - de frottement, 48

de groupe, 137, 287  
de l'onde, 137  
de phase, 137  
de sédimentation, 101

des ondes, 23  
débitante, 21  
moyenne, 2, 21  
vorticité, 4, 42

## Index des noms propres

Airy, George, 282

Boussinesq, Joseph, 30  
Brownlie, William R., 97

Chézy, Antoine de, 45, 56  
Coles, Donald, 50

Darcy, Henry, 44, 86  
de Vries, Gustav, 290  
Dressler, Robert F., 30

Einstein, Hans Albert, 85, 94  
Engelund, Frank, 93  
Exner, Felix M., 22

Ferro, Vittorio, 61

Gauckler, Philippe, 45  
Green, George, 131

Heller, Valentin, 309  
Hugoniot, Pierre-Henri, 4  
Huppert, Herbert E., 245

Jaeggi, Martin, 103

Katul, Gabriel, 115  
Keulegan, Garbis H., 48  
Kleitz, Charles, 194  
Korteweg, Diederik, 290

Lane, Emory, 111

Manning, Robert, 45  
Meyer-Peter, Eugen, 22, 46

Nikora, Vladimir, 53

Parker, Gary, 57  
Prandtl, Ludwig, 48

Rankine, William, 4  
Recking, Alain, 58, 104  
Rickenmann, Dieter, 58  
Riemann, Bernhard, 23  
Ritter, August, 254  
Russell, John Scott, 292

Saint-Venant, Adhémar Barré de, 1, 14,  
30

Seddon, James A., 194  
Smart, Graham, 103  
Strickler, Albert, 45, 46, 57

van Rijn, Leo, 97  
Vila, Jean-Paul, 316  
von Kármán, Theodore, 48, 86

Weisbach, Julius, 44  
Whitham, Gerald B., 266

## Index des lieux

- Aa, 143  
 Aar, 31, 34  
 Ahr, 148  
 Alphée, 33  
 Amazone, 37, 152  
 Arpitetta, 112  
 Arve, 35  
 Avançon, 8, 37, 110  
 baie  
     Arcachon, 37  
     de Lituya, 276, 299, 305  
     Saint-Michel, 37  
 barrage  
     d'Edersee, 207  
     d'Oroville, 207  
     de Hell Hole, 205  
     de Kakhovka, 204  
     de Limmeren, 276  
     de Malpasset, 204, 205, 207, 233  
     de Mauvoisin, 217  
     de Molare, 204  
     de Möhne, 207  
     de Sweetwater, 207  
     de Taum Sauk, 204  
     de Teton, 207  
     de Tokwe-Mukosi, 205  
 Bento Rodrigues, 220  
 Brigue, 150  
 Brusquet, 156  
 Chamoli, 217  
 Châtel, 146  
 Devecser, 220  
 Doménon, 112  
 Dordogne, 318  
 Doubs, 42, 109  
 Dranse (de Bagnes), 33  
 Erlenbach, 156  
 Escaut, 37  
 Florac, 172  
 Fréjus, 207  
 Fukushima, 299  
 Fully, 150  
 Gange, 37  
 Garonne, 34  
 Giétro, 217, 219  
 glacier  
     de Ferpècle, 219  
     de Gorner, 219  
     de Grindelwald, 219, 276  
     du Giétro, 219  
 Grammont, 217  
 Grenoble, 217  
 Grünbach, 329  
 Gualdalquivir, 34, 220  
 Krakatoa, 299  
 lac  
     Agassiz, 152  
     Chehalis, 305  
     de Cleuson, 276  
     de Gorner, 219  
     de Greve, 37  
     de Limmeren, 276  
     de Louvie, 31  
     de Mauvoisin, 217  
     de Märjelen, 219  
     de Nostetuko, 219  
     de Weingarten, 217  
     Dig Tsho, 217  
     Léman, 276  
     Nostetuko, 217  
     Palcacocha, 276  
     Safuna Alta, 217  
     Sarez, 152  
     Tahoe, 273  
     Érié, 273  
 Laval, 156  
 Lena, 152  
 Lituya Bay, 276, 299  
 Lochsa, 47  
 Longarone, 204  
 Lucerne, 11

- Léman, 217, 276, 285
- Malpasset, 204, 233
- Navisence, 37, 42, 43, 109, 111
- Nozon, 112
- Orbe, 42
- Ouvèze, 143
- Pinatubo, 150
- Po, 37
- Pô, 141
- Qiantang, 273, 318
- retenue  
  de Baldwin Hills, 205  
  de la Bouisse, 215
- Reuss, 11, 143
- Rhin, 143
- Rhône, 35
- Rimbaud, 156
- Rote Bach, 37
- Rèche, 112
- Saint-Barthélemy, 31
- Saint-Gervais-les-Bains, 217
- Sarno, 150
- Schlans, 37
- Secchia, 205
- Soyans, 172
- Tagliamento, 37
- Talent, 42, 111
- Taum Sauk, 204
- Tauredunum, 217
- Tessin, 37, 141
- Tibre, 31
- Torneresse, 111
- Tzanté, 110
- Täsch, 217
- Vajont, 204
- val di Stava, 220
- Vandenesse, 172
- Vésubie, 37, 143
- Yangtse, 152
- Zavragia, 318



# Références bibliographiques

## Bibliographie

- ABERLE, J. & NIKORA, V. 2006 Statistical properties of armored gravel bed surfaces. *Water Resources Research* **42**, W11414.
- ABERLE, J., NIKORA, V., HENNING, M., ETTMER, B. & HENTSCHER, B. 2010 Statistical characterization of bed roughness due to bed forms: A field study in the Elbe river at Aken, Germany. *Water Resources Research* **46**, W03521.
- ABERLE, J. & SMART, G. M. 2003 The influence of roughness structure on flow resistance on steep slopes. *Journal of Hydraulic Research* **41**, 259–269.
- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A. 1964 *Handbook of Mathematical Functions*. Washington: National Bureau of Standards.
- ALAM, A. M. Z. & KENNEDY, J. F. 1969 Friction factors for flow in sand-bed channels. *Journal of the Hydraulics Division* **95**, 1973–1992.
- AMMANN, W. J., ed. 2000 *Der Lawinenwinter 1999*. Davos: Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung.
- ANCEY, C., COCHARD, S., WIEDERSEINER, S. & RENTSCHLER, M. 2006 Front dynamics of supercritical non-Boussinesq gravity currents. *Water Resources Research* **42**, W08424.
- ANCEY, C., COCHARD, S., WIEDERSEINER, S. & RENTSCHLER, M. 2007 Existence and features of similarity solutions for supercritical non-Boussinesq gravity currents. *Physica D* **226**, 32–54.
- ANCEY, C. & RECKING, A. 2023 Scaling behavior of bedload transport: what if Bagnold was right? *Earth Science Reviews* **239**, 104571.
- ARCEMENT, G. J. & SCHNEIDER, V. R. 1989 Guide for selecting Manning's roughness coefficients for natural channels and flood plains. *Tech. Rep. Water Supply Paper 2339*. US Geological Survey.
- ASHLEY, G. M. 1990 Classification of large-scale subaqueous bedforms; a new look at an old problem. *Journal of Sedimentary Research* **60** (1), 160–172.
- BACCHUS, F., CHAMPIRÉ, F., DEROO, L., LEMPERRIÈRE, F. & POUPART, M. 2019 Lessons learned from dam failures and incidents due to spillway malfunctions. In *Sustainable and Safe Dams around the World* (ed. J. P. Tournier, T. Bennett & J. Bibeau), , vol. 2, pp. 2238–2251. Ottawa: Canadian Dam Association, CRC Press.

- BALMFORTH, N. J., VON HARDENBERG, J., PROVENZALE, A. & ZAMMETT, R. 2008 Dam breaking by wave-induced erosional incision. *Journal of Geophysical Research* **113**, F01020.
- BALMFORTH, N. J. & LIU, J. J. 2004 Roll waves in mud. *Journal of Fluid Mechanics* **519**, 33–54.
- BALMFORTH, N. J. & PROVENZALE, A. 2001 Patterns of dirt. In *Geomorphological Fluid Mechanics* (ed. N. J. Balmforth & A. Provenzale), pp. 369–393. Berlin: Springer Verlag.
- BARENBLATT, G. I. 1993 Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 1. Basic hypotheses and analysis. *Journal of Fluid Mechanics* **248**, 513–520.
- BARENBLATT, G. I. 1996 *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- BARNES, H. H. 1967 Roughness characteristics of natural channels. *Tech. Rep.*. U. S. Geological Survey.
- BATES, P. D. 2022 Flood Inundation Prediction. *Annual Review of Fluid Mechanics* **54**, 287–315.
- BATHURST, J. C. 1978 Flow resistance of large-scale roughness. *Journal of the Hydraulics Division* **104** (12), 1587–1603.
- BATHURST, J. C., SIMONS, D. B. & LI, R. M. 1981 Resistance equation for large-scale roughness. *Journal of the Hydraulics Division* **107** (12), 1593–1613.
- BATTERSHILL, L., WHITTAKER, C. N., LANE, E. M., POPINET, S., WHITE, J. D. L., POWER, W. L. & NOMIKOU, P. 2021 Numerical simulations of a fluidized granular flow entry into water: insights into modeling tsunami generation by pyroclastic density currents. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **126** (11), e2021JB022855.
- BEGAM, S., SEN, D. & DEY, S. 2018 Moraine dam breach and glacial lake outburst flood generation by physical and numerical models. *Journal of Hydrology* **563**, 694–710.
- BERGER, M. J. & LEVEQUE, R. J. 2023 Implicit Adaptive Mesh Refinement for Dispersive Tsunami Propagation. *arXiv preprint arXiv:2307.05816*.
- BERGHUIJS, W. R., AALBERS, E. E., LARSEN, J. R., TRANCOSO, R. & WOODS, R. A. 2017 Recent changes in extreme floods across multiple continents. *Environmental Research Letters* **12** (11), 114035.
- BERGHUIJS, W. R., ALLEN, S. T., HARRIGAN, S. & KIRCHNER, J. W. 2019 Growing spatial scales of synchronous river flooding in Europe. *Geophysical Research Letters* **46**.
- BERLIOZ, J. 1997 Une catastrophe en Dauphiné (septembre 1219). Témoignages contemporains. In *Milieus naturels, espaces sociaux* (ed. E. Mornet & F. Morenzini). Paris: Publications de la Sorbonne.
- BERNARD, C. J. M. . 1927 Les avalanches. In *Cours de restauration des terrains de montagne*. Paris: École Nationale des Eaux et Forêts.
- BÉROD, D. 1994 Contribution à l'estimation des crues rares à l'aide de méthodes déterministes: apport de la description géomorphologique pour la simulation des processus d'écoulement. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- BERTIN, S., GROOM, J. & FRIEDRICH, H. 2017 Isolating roughness scales of gravel-bed patches. *Water Resources Research* **53**, 6841–6856.

- BISCHOF, R., HAUENSTEIN, W., KALT, L., MÜLLER, R. W., POUGATSCH, H., RABOUD, P. B. & VETTERLI, W. 2002a Sécurité des barrages d'accumulation. *Tech. Rep.*. Bundesamt für Wasser und Geologie.
- BISCHOF, R., HAUENSTEIN, W., KALT, L., MÜLLER, R. W., POUGATSCH, H., RABOUD, P. B. & VETTERLI, W. 2002b Sécurité des barrages d'accumulation – Documentation de base relative aux critères d'assujettissement. *Tech. Rep.*. Bundesamt für Wasser und Geologie.
- BOES, R., VONWILLER, L. & VETSCH, D. F. 2015 Breaching of small embankment dams: Tool for cost-effective determination of peak breach outflow. In *Proceedings of the 36th IAHR World Congress, 28 June–3 July 2015*, (ed. A. Mynett). The Hague, the Netherlands: International Association for Hydro-Environment Engineering and Research.
- BOHORQUEZ, P. & DARBY, S. E. 2008 The use of one- and two-dimensional hydraulic modelling to reconstruct a glacial outburst flood in a steep Alpine valley. *Journal of Hydrology* **361**, 240–261.
- BOHORQUEZ, P., CAÑADA PEREIRA, P., JIMENEZ-RUIZ, P. J. & DEL MORAL-ERENCIA, J. D. 2019 The fascination of a shallow-water theory for the formation of megaflood-scale dunes and antidunes. *Earth-Science Reviews* **193**, 91–108.
- BONELLI, S., ed. 2013 *Erosion in geomechanics applied to dams and levees*. Hoboken, NJ: Wiley Online Library.
- BONELLI, S., BENAHMED, N., PHILIPPE, P., BERNARD, A., GRÉMEAUX, Y. & NUNES, G. 2008 Évaluer le temps de rupture d'une digue en remblai érodée par conduit traversant. *Sciences Eaux & Territoires* pp. 85–94.
- BOUGOUIN, A., PARIS, R. & ROCHE, O. 2020 Impact of fluidized granular flows into water: Implications for tsunamis generated by pyroclastic flows. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **125** (5), e2019JB018954.
- BOUSSINESQ, J. 1877 Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences* **XIII** (1-680).
- BRADLEY, R. W. & VENDITTI, J. G. 2017 Reevaluating dune scaling relations. *Earth-Science Reviews* **165**, 356–376.
- BREWITT, P. K. & COLWYN, C. L. 2020 Little dams, big problems: The legal and policy issues of nonjurisdictional dams. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Water* **7** (1), e1393.
- BROCCHINI, M. 2013 A reasoned overview on Boussinesq-type models: the interplay between physics, mathematics and numerics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **469** (2160), 20130496.
- BROSS, F. & EVERS, F. M. 2023 Impulswellen bei flachen Eintauchwinkeln. *Tech. Rep.*. Bundesamt für Energie BFE.
- BROWNLIE, W. R. 1981 Compilation of alluvial channel data: laboratory and field. *Tech. Rep.* Report No. KH-R 43B. W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology.
- BROWNLIE, W. R. 1983 Flow depth in sand-bed channels. *Journal of Hydraulic Engineering* **109** (7), 959–990.

- BRUNNER, M. I., FARINOTTI, D., ZEKOLLARI, H., HUSS, M. & ZAPPA, M. 2019a Future shifts in extreme flow regimes in Alpine regions. *Hydrology and Earth System Sciences* **23** (11), 4471–4489.
- BRUNNER, M. I., HINGRAY, B., ZAPPA, M. & FAVRE, A. C. 2019b Future Trends in the Interdependence Between Flood Peaks and Volumes: Hydro-Climatological Drivers and Uncertainty. *Water Resources Research* **55** (6), 4745–4759.
- BRUTSAERT, W. 2005 *Hydrology: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- BUFFINGTON, J. M. & MONTGOMERY, D. R. 1997 A systematic analysis of eight decades of incipient motion studies, with special reference to gravel-bedded rivers. *Water Resources Research* **33**, 1993–2029.
- BULLARD, G. K., MULLIGAN, R. P., CARREIRA, A. & TAKE, W. A. 2019 Experimental analysis of tsunamis generated by the impact of landslides with high mobility. *Coastal Engineering* **152**, 103538.
- CAMENEN, B., BAYRAM, A. & LARSON, M. 2006 Equivalent roughness height for plane bed under steady flow. *Journal of Hydraulic Engineering* **132**, 1146–1158.
- CANOVARO, F., PARIS, E. & SOLARI, L. 2007 Effects of macro-scale bed roughness geometry on flow resistance. *Water Resources Research* **43** (10), W10414.
- CANOVARO, F. & SOLARI, L. 2007 Dissipative analogies between a schematic macro-roughness arrangement and step-pool morphology. *Earth Surface Processes and Landforms* **32** (11), 1628–1640.
- CAO, H. H. 1985 Résistance hydraulique d'un lit de gravier mobile à pente raide. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- CAO, Z., HU, P., HU, K., PENDER, G. & LIU, Q. 2015 Modelling roll waves with shallow water equations and turbulent closure. *Journal of Hydraulic Research* **53** (2), 161–177.
- CAO, Z., YUE, Z. & PENDER, G. 2011 Landslide dam failure and flood hydraulics. Part II: coupled mathematical modelling. *Natural Hazards* **59**, 1003–1019.
- CAPART, H. 2013 Analytical solutions for gradual dam breaching and downstream river flooding. *Water Resources Research* **49**, 1968–1987.
- CAPONE, T., PANIZZO, A. & MONAGHAN, J. J. 2010 SPH modelling of water waves generated by submarine landslides. *Journal of Hydraulic Research* **48** (sup1), 80–84.
- CARRIVICK, J. L. & TWEED, F. S. 2016 A global assessment of the societal impacts of glacier outburst floods. *Global and Planetary Change* **144**, 1–16.
- CASTANEDO, S., MEDINA, R. & MENDEZ, F. J. 2005 Models for the turbulent diffusion terms of shallow water equations. *Journal of Hydraulic Engineering* **131** (3), 217–223.
- CASTRO-ORGAZ, O. & HAGER, W. H. 2013 Unsteady Boussinesq-type flow equations for gradually-eroded beds: application to dike breaches. *Journal of Hydraulic Research* **51**, 203–208.
- CASTRO-ORGAZ, O. & HAGER, W. H. 2017 *Non-Hydrostatic Free Surface Flows*. Berlin: Springer.
- CASTRO-ORGAZ, O. & HAGER, W. H. 2019 *Shallow Water Hydraulics*. Cham, Switzerland: Springer.

- CEA, L., PUERTAS, J. & VÁSQUEZ-CENDÓN, M. E. 2007 Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts. *Archives for Computational Methods in Engineering* **14**, 303–341.
- CHANSON, H. 1994 Hydraulics of skimming flows over stepped channels and spillways. *Journal of Hydraulic Research* **32** (3), 445–460.
- CHANSON, H. 2004 *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction*, 2nd edn. Amsterdam: Elsevier Butterworth Heinemann.
- CHEN, X., HASSAN, M. A., AN, C. & FU, X. 2020 Rough correlations: Meta-analysis of roughness measures in gravel bed rivers. *Water Resources Research* **56**, e2020WR027079.
- CHESTER, C. R. 1970 *Techniques in Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.
- CHIN, A. & WOHL, E. 2005 Toward a theory for step pools in stream channels. *Progress in physical geography* **29** (3), 275–296.
- CHINNARASRI, C., JIRAKITLERD, S. & SOMCHAI, W. 2004 Embankment dam breach and its outflow characteristics. *Civil Engineering and Environmental Systems* **21**, 247–264.
- CHISOLM, R. E. & MCKINNEY, D. C. 2018 Dynamics of avalanche-generated impulse waves: three-dimensional hydrodynamic simulations and sensitivity analysis. *Natural Hazards and Earth System Sciences* **18** (5), 1373–1393.
- CHOW, V. T., ed. 1959 *Open-Channel Hydraulics*. New York: Mc Graw Hill.
- CHURCH, M. 2006 Bed material transport and the morphology of alluvial river channels. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* **34**, 325–354.
- CHURCH, M. 2010 Mountains and montane channels. In *Sediment Cascades: An Integrated Approach* (ed. T. Burt & R. Allison), pp. 17–53. Chichester: John Wiley & Sons.
- CHURCH, M. & ZIMMERMANN, A. 2007 Form and stability of step-pool channels: Research progress. *Water Resources Research* **43** (3), W03415.
- CLAGUE, J. J. & EVANS, S. G. 2000 A review of catastrophic drainage of moraine-dammed lakes in British Columbia. *Quaternary Science Reviews* **19**, 1763–1783.
- CLAGUE, J. J. & MATHEWS, W. H. 1973 The magnitude of jökulhlaups. *Journal of Glaciology* **12**, 501–504.
- CLAMOND, D., DUTYKH, D. & MITSOTAKIS, D. 2024 *A Variational Approach to Water Wave Modelling*. Madrid: IAHR.
- CLIFFORD, N. J., ROBERT, A. & RICHARDS, K. S. 1992 Estimation of flow resistance in gravel-bedded rivers: A physical explanation of the multiplier of roughness length. *Earth Surface Processes and Landforms* **17** (2), 111–126.
- COLES, D. 1956 The law of the wake in the turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* **1**, 191–226.
- COLES, S. G. 2001 *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. London: Springer.
- COLOSIMO, C., COPERTINO, V. A. & VELTRI, M. 1988 Friction factor evaluation in gravel-bed rivers. *Journal of Hydraulic Engineering* **114**, 861–876.

- COMITI, F., ANDREOLI, A. & LENZI, M. A. 2005 Morphological effects of local scouring in step-pool streams. *Earth Surface Processes and Landforms* **30** (12), 1567–1581.
- COMITI, F. & MAO, L. 2012 Recent advances in the dynamics of steep channels. In *Gravel-Bed Rivers: Processes, Tools, Environments* (ed. M. Church, M. P. Biron & A. G. Roy), pp. 351–377. Chichester: John Wiley & Sons.
- COMITI, F., MAO, L., WILCOX, A. C., WOHL, E. E. & LENZI, M. A. 2007 Field-derived relationships for flow velocity and resistance in high-gradient streams. *Journal of Hydrology* **340** (1-2), 48–62.
- COON, W. F. 1998 Estimation of roughness coefficients for natural stream channels with vegetated banks. *Tech. Rep.* 060788701X. US Geological Survey.
- CORON, L., THIREL, G., DELAIGUE, O., PERRIN, C. & ANDRÉASSIAN, V. 2017 The suite of lumped GR hydrological models in an R package. *Environmental modelling & software* **94**, 166–171.
- COSTA, J. E. 1988 Floods from dam failure. In *Flood Geomorphology* (ed. V. R. Baker, R. C. Kochel & P. C. Patton), pp. 439–461. New York: Wiley.
- COSTA, J. E. & SCHUSTER, R. L. 1988 The formation and failure of natural dams. *Geological Society of America Bulletin* **100**, 1054–1068.
- CUNGE, J. A., HOLLY, F. M. & VERWEY, A. 1980 *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Boston: Pitman publishing.
- D'AGOSTINO, V. & MICHELINI, T. 2015 On kinematics and flow velocity prediction in step-pool channels. *Water Resources Research* **51**.
- DAVID, G. C. L., WOHL, E., YOCHUM, S. E. & BLEDSOE, B. P. 2011 Comparative analysis of bed resistance partitioning in high-gradient streams. *Water Resources Research* **47** (7), W07507.
- DE LORENZO, G. & MACCHIONE, F. 2013 Formulas for the peak discharge from breached earthfill dams. *Journal of Hydraulic Engineering* **140**, 56–67.
- DELAIGUE, O., THIREL, G., CORON, L. & BRIGODE, P. 2018 airGR and airGRteaching: Two Open-Source Tools for Rainfall-Runoff Modeling and Teaching Hydrology. *EPiC Series in Engineering* **3**, 541–548.
- DEMIRBILEK, Z., BRATOS, S. M. & THOMPSON, E. F. 1993 Wind Products for the Use in Coastal Wave and Surge Models. *Tech. Rep.* AD-A269 753. US Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station.
- DENT, J. D. & LANG, T. E. 1983 A biviscous modified Bingham model of snow avalanche motion. *Annals of Glaciology* **4**, 42–46.
- DEROO, L. & FRY, J.-J. 2022 Projet national Erosion interne dans les ouvrages hydrauliques (ERINOH): guide ingénierie. *Tech. Rep.* IREX.
- DEY, S. & DAS, R. 2012 Gravel-bed hydrodynamics: Double-averaging approach. *Journal of Hydraulic Engineering* **138**, 707–725.
- DEY, S., DAS, R., GAUDIO, R. & BOSE, S. K. 2012 Turbulence in mobile-bed streams. *Acta Geophysica* **60**, 1547–1588.
- DEY, S. & RAIKAR, R. V. 2007 Characteristics of loose rough boundary streams at near-threshold. *Journal of Hydraulic Engineering* **133**, 288–304.

- DIETRICH, W. E. 1982 Settling velocity of natural particles. *Water Resources Research* **18**, 1615–1626.
- DOOGE, J. 1973 Linear theory of hydrologic systems. *Tech. Rep.*. Agricultural Research Service, US Department of Agriculture.
- DOOGE, J. C. I. 1992 The Manning formula in context. In *Channel flow resistance: centennial of Manning's formula* (ed. B. C. Yen), pp. 136–185. University of Virginia, Charlottesville: Water Resources Publications Littleton, CO.
- DRAZIN, P. G. & JOHNSON, R. S. 1996 *Solitons: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- DRESSLER, R. F. 1978 New nonlinear shallow-flow equations with curvature. *Journal of Hydraulic Research* **16**, 205–222.
- DRESSLER, R. F. & YEVJEVICH, V. 1984 Hydraulic-resistance terms modified for the Dressler curved-flow equations. *Journal of Hydraulic Research* **22** (3), 145–156.
- DUDLEY, S. J., FISCHENICH, J. C. & ABT, S. R. 1998 Effect of woody debris entrapment on flow resistance. *Journal of the American Water Resources Association* **34**, 1189–1197.
- EINSTEIN, H. A. 1942 Formulas for the transportation of bed load. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* **107**, 561–597.
- EINSTEIN, H. A. 1950 The bed-load function for sediment transportation in open channel flows. *Tech. Rep.* Technical Report No. 1026. United States Department of Agriculture.
- EINSTEIN, H. A. & BARBAROSSA, N. L. 1952 River channel roughness. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* **117** (1), 1121–1132.
- EMMER, A. 2017 Glacier Retreat and Glacial Lake Outburst Floods (GLOFs). In *Natural Hazard Science* (ed. S. L. Cutter), p. doi: 10. 1093/acrefore/9780199389407. 013. 275. Oxford: Oxford University Press.
- EMMER, A., KLIMEŠ, J., MERGILI, M., VILÍMEK, V. & COCHACHIN, A. 2016 882 lakes of the Cordillera Blanca: an inventory, classification, evolution and assessment of susceptibility to outburst floods. *Catena* **147**, 269–279.
- ENGELUND, F. 1966 Hydraulic resistance of alluvial streams. *Journal of the Hydraulics Division* **HY2**, 315–326.
- EVERS, F. M., HAGER, W. H. & BOES, R. M. 2019a Spatial impulse wave generation and propagation. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **145**, 04019011.
- EVERS, F. M., HELLER, V., FUCHS, H., HAGER, W. H. & BOES, R. M. 2019b Landslide-generated Impulse Waves in Reservoirs — Basics and Computation. *Tech. Rep.*. VAW-Mitteilungen 254, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie (ETHZ/VAW).
- EVETTE, A., PEYRAS, L., FRANÇOIS, H. & MÉRIAUX, P. 2011 Environmental risks and impacts of mountain reservoirs for artificial snow production in a context of climate change. *Journal of Alpine Research* **99**, doi: 10. 4000/rga. 1481.
- EVETTE, A., PEYRAS, L. & LAIGLE, D. 2009 *Risques et impacts des retenues d'altitude*. Versailles: Éditions Quæ.

- FAEH, R. 2007 Numerical modeling of breach erosion of river embankments. *Journal of Hydraulic Engineering* **133**, 1000–1009.
- FARLOW, S. J. 1993 *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York: Dover.
- FERGUSON, R. 2010 Time to abandon the Manning equation? *Earth Surface Processes and Landforms* **35** (15), 1873–1876.
- FERGUSON, R. 2013 Reach-Scale Flow Resistance. In *Treatise on Geomorphology, Volume 9* (ed. E. Wohl), pp. 50–68. Amsterdam: Elsevier.
- FERGUSON, R. I. 2007 Flow resistance equations for gravel- and boulder-bed streams. *Water Resources Research* **43**, W05427.
- FERGUSON, R. I. 2021 Roughness calibration to improve flow predictions in coarse-bed streams. *Water Resources Research* **57**, e2021WR029979.
- FERGUSON, R. I., HARDY, R. J. & HODGE, R. A. 2019 Flow resistance and hydraulic geometry in bedrock rivers with multiple roughness length scales. *Earth Surface Processes and Landforms* **44** (12), 2437–2449.
- FERGUSON, R. I., SHARMA, B. P., HARDY, R. J., HODGE, R. A. & WARBURTON, J. 2017 Flow resistance and hydraulic geometry in contrasting reaches of a bedrock channel. *Water Resources Research* **53** (3), 2278–2293.
- FERNÁNDEZ-NIETO, E. D., BOUCHUT, F., BRESCH, D., CASTRO DÍAZ, M. J. & MANGENEY, A. 2008 A new Savage-Hutter type model for submarine avalanches and generated tsunamis. *Journal of Computational Physics* **227**, 7720–7754.
- FERRICK, M. G. 2005 Simple wave and monoclinal wave models: River flow surge applications and implications. *Water Resources Research* **41**, W11402.
- FERRO, V. 2017 New flow-resistance law for steep mountain streams based on velocity profile. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* **143** (8), 04017024.
- FERRO, V. 2018 Flow resistance law under equilibrium bed-load transport conditions. *Flow Measurement and Instrumentation* **64**, 1–8.
- FERRO, V. & PECORARO, R. 2000 Incomplete self-similarity and flow velocity in gravel bed channels. *Water Resources Research* **36**, 2761–2769.
- FLAMMER, G. H., TULLIS, J. P. & MASON, E. S. 1970 Free surface, velocity gradient flow past hemisphere. *Journal of the Hydraulics Division* **96** (7), 1485–1502.
- FOLMAR, N. D., MILLER, A. C. & WOODWARD, D. E. 2007 History and development of the NRCS lag time equation. *Journal of the American Water Resources Association* **43**, 829–838.
- FOSTER, M., FELL, R. & SPANNAGLE, M. 2000 The statistics of embankment dam failures and accidents. *Canadian Geotechnical Journal* **37** (5), 1000–1024.
- FRANCI, A., CREMONESI, M., PEREGO, U., CROSTA, G. B. & OÑATE, E. 2020 3D simulation of Vajont disaster. Part 1: Numerical formulation and validation. *Engineering Geology* **279**, 105854.
- FRANCOU, B. & RODIER, J. A. 1967 Essai de classification des crues maximales observées dans le monde. *Cahiers de l'ORSTOM, série Hydrologie* **4** (3), 19–46.

- FRAUENFELDER, R., JÓNSSON, A., LIED, K., SCHWERDTFEGER, D., BERGUM, G., BÜHLER, Y. & STOFFEL, L. 2014 Analysis of an artificially triggered avalanche at the Nepheline Syenite Mine on Stjernøya, Alta, Northern Norway. In *International Snow Science Workshop 2014*, pp. 689–696. Banff: Montana State University.
- FRITZ, H. M., HAGER, W. H. & MINOR, H. E. 2003 Landslide generated impulse waves. 2. Hydrodynamic impact crater. *Experiments in Fluids* **35**, 520–532.
- FROELICH, D. C. 2008 Embankment dam breach parameters and their uncertainties. *Journal of Hydraulic Engineering* **134**, 1708–1720.
- FROELICH, D. C. 2016 Predicting peak discharge from gradually breached embankment dam. *Journal of Hydrologic Engineering* **21**, 04016041.
- FRY, J.-J., FRANÇOIS, D., MAROT, D., BONELLI, S., ROYET, P., CHEVALIER, C. & DEROO, L. 2015 Étude de l'érosion interne: apport du projet Eniroh. In *Vingt-cinquième congrès des Grands Barrages*, pp. 486–507. 17-19 June 2015, Stavanger: International Commission on Large Dams, Paris.
- GABL, R., SEIBL, J., GEMS, B. & AUFLEGER, M. 2015 3-D numerical approach to simulate the overtopping volume caused by an impulse wave comparable to avalanche impact in a reservoir. *Natural Hazards and Earth System Sciences* **15**, 2617–2630.
- GALÉA, G. & RAMEZ, P. 1995 *Maîtrise du ruissellement et de l'érosion en vignoble de coteau – Guide à l'usage des aménageurs*. Antony: Cemagref Éditions.
- GARABEDIAN, P. R. 1964 *Partial Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.
- GARCÍA, M. H. 2007 Sediment transport and morphodynamics. In *Sedimentation Engineering* (ed. M. H. García), , vol. ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice 110, pp. 21–164. Reston: American Society of Civil Engineers.
- GAUDIO, R. & DEY, S. 2013 Evidence of non-universality of von Kármán's  $\kappa$ . In *Experimental and computational solutions of hydraulic problems* (ed. P. M. Rowinski), pp. 71–83. Heidelberg: Springer.
- GAUDIO, R., MIGLIO, A. & CALOMINO, F. 2011 Friction factor and von Kármán's  $\kappa$  in open channels with bed-load. *Journal of Hydraulic Research* **49**, 239–247.
- GAUDIO, R., MIGLIO, A. & DEY, S. 2010 Non-universality of von Kármán's  $\kappa$  in fluvial streams. *Journal of Hydraulic Research* **48** (5), 658–663.
- GAUME, E., BAIN, V., BERNARDARA, P., NEWINGER, O., BARBUC, M., BATEMAN, A., BLÁŠKOVICOVÁ, L., BLÖSCHL, G., BORGA, M., DUMITRESCU, A., DALIAKOPOULOS, I., GARCIA, J., IRIMESCU, A., KOHNOVA, S., KOUTROULIS, A., MARCHI, L., MATREATA, S., MEDINA, V., PRECISO, E., SEMPERE-TORRES, D., STANCALIE, G., SZOLGAY, J., TSANIS, I., VELASCOM, D. & VIGLIONE, A. 2009 A compilation of data on European flash floods. *Journal of Hydrology* **367**, 70–78.
- GEORGE, D. L. 2008 Augmented Riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation. *Journal of Computational Physics* **227**, 3089–3113.
- GEORGE, D. L., IVERSON, R. M. & CANNON, C. M. 2017 New methodology for computing tsunami generation by subaerial landslides: application to the 2015 Tyndall Glacier Landslide, Alaska. *Geophysical Research Letters* **44**.

- GERTSCH, E. 2009 Geschiebelieferung alpiner Wildbachsysteme bei Grossereignissen – Ereignisanalysen und Entwicklung eines Abschätzverfahrens. PhD thesis, Universität Bern.
- GIACHETTI, T., PARIS, R., KELFOUN, K. & PÉREZ-TORRADO, F. 2011 Numerical modelling of the tsunami triggered by the Güimar debris avalanche, tenerife (canary islands): Comparison with field-based data. *Marine Geology* **284**, 189–202.
- GILARD, O. 1998 *Les bases techniques de la méthode inondabilité*. Antony: Cemagref éditions.
- GLEASON, C. J. 2015 Hydraulic geometry of natural rivers: A review and future directions. *Progress in Physical Geography* **39**, 337–360.
- GRAF, W. H. 1991 Flow resistance over a gravel bed: Its consequence on initial sediment movement. In *Fluvial Hydraulics of Mountain Regions* (ed. A. Armanini & G. Di Silvio), pp. 15–32. Berlin: Springer.
- GRAFF, B. 2004 Prédétermination des débits de crue des petits bassins versants torrentiels. PhD thesis, Université de Montpellier II.
- GRAY, J. M. N. T. 2001 Granular flow in partially filled slowly rotating drums. *Journal of Fluid Mechanics* **441**, 1–29.
- GRIFFITHS, G. A. 1989 Form resistance in gravel channels with mobile beds. *Journal of Hydraulic Engineering* **115** (3), 340–355.
- GUILLOT, P. & DUBAND, D. 1967 La méthode du GRADEX pour le calcul de la probabilité des crues rares à partir des pluies. In *Colloque International sur les crues et leur évaluation*, vol. 84, pp. 560–569. Leningrad: International Association for Hydrological Sciences.
- GUINOT, V. 2010 *Wave Propagation in Fluids—Models and Numerical Techniques*. Hoboken: John Wiley & Sons.
- GUO, J. 2015 Sidewall and non-uniformity corrections for flume experiments. *Journal of Hydraulic Research* **53**, 218–229.
- GUO, J. 2017 Exact procedure for Einstein–Johnson’s sidewall correction in open channel flow. *Journal of Hydraulic Engineering* **143**, 06016027.
- GUST, G. & SOUTHARD, J. B. 1983 Effects of weak bed load on the universal law of the wall. *Journal of Geophysical Research: Oceans* **88**, 5939–5952.
- GUTA, H., HURTHUR, D. & CHAUCHAT, J. 2022 Bedload and Concentration Effects on Turbulent Suspension Properties in Heavy Particle Sheet Flows. *Journal of Hydraulic Engineering* **148**, 04022012.
- HAEBERLI, W. 1983 Frequency and characteristics of glacier floods in the Swiss Alps. *Annals of Glaciology* **4**, 85–90.
- HAGER, W. H. 2001 Gauckler and the GMS formula. *Journal of Hydraulic Engineering* **127** (8), 635–638.
- HAGER, W. H. 2009 *Hydraulicians in Europe 1800–2000*. Boca Raton: CRC Press.
- HAGER, W. H. 2010 *Wastewater Hydraulics: Theory and Practice*. Berlin: Springer.
- HAGER, W. H. 2015 *Hydraulicians in the USA 1800–2000*. Boca Raton: CRC Press.

- HAGER, W. H., BREMEN, R. & KAWAGOSHI, N. 1990 Classical hydraulic jump: length of roller. *Journal of Hydraulic Research* **28** (5), 591–608.
- HAGER, W. H. & SCHLEISS, A. 2009 *Constructions hydrauliques: écoulements stationnaires, Traité de génie civil*, vol. 15. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- HARRISON, S., KARGEL, J. S., HUGGEL, C., REYNOLDS, J. M., SHUGAR, D. H., BETTS, R. A., EMMER, A., GLASSER, N. F., HARITASHYA, U. K., KLIMES, J., REINHARDT, L., YVONNE SCHAUB, Y., WILTSHIRE, A., DHANANJAY REGMI, D. & VILÍMEK, V. 2018 Climate change and the global pattern of moraine-dammed glacial lake outburst-floods. *The Cryosphere* **12**, 1195–1209.
- HELLER, V. 2007 Landslide generated impulse waves: prediction of near-field characteristics. PhD Thesis, ETHZ.
- HELLER, V. 2008 Landslide generated impulse waves: prediction of near field characteristics. *Tech. Rep. Mitteilungen* 204. Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich.
- HELLER, V. & HAGER, W. H. 2010 Impulse product parameter in landslide generated impulse waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **136**, 145–155.
- HELLER, V. & HAGER, W. H. 2014 A universal parameter to predict subaerial landslide tsunamis? *Journal of Marine Science and Engineering* **2**, 400–412.
- HELLER, V., HAGER, W. H. & MINOR, H. E. 2008 Rutscherzeugte Impulswellen in Stauseen – Grundlagen und Berechnung. *Tech. Rep. VAW 4257*. Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie VAW, ETH Zürich – Bundesamt für Energie.
- HELLER, V. & RUFFINI, G. 2023 A critical review about generic subaerial landslide-tsunami experiments and options for a needed step change. *Earth-Science Reviews* **242**, 104459.
- HELLER, V. & SPINNEKEN, J. 2013 Improved landslide-tsunami prediction: Effects of block model parameters and slide model. *Journal of Geophysical Research* **118**, 1489–1507.
- HEY, R. D. 1979 Flow resistance in gravel-bed rivers. *Journal of the Hydraulics Division* **105**, 365–379.
- HEY, R. D. 1988 Bar form resistance in gravel-bed rivers. *Journal of Hydraulic Engineering* **114**, 1498–1508.
- HEY, R. D. & THORNE, C. R. 1986 Stable channels with mobile gravel beds. *Journal of Hydraulic engineering* **112**, 671–689.
- HINGRAY, B., PICOUET, B. & MUSY, A. 2009 *Hydrologie 2: une science pour l'ingénieur*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- HINZE, J. O. 1975 *Turbulence*. New York: McGraw-Hill.
- HOGG, A. J. & PRITCHARD, D. 2004 The effects of hydraulic resistance on dam-break and other shallow inertial flows. *Journal of Fluid Mechanics* **501**, 179–212.
- HOHERMUTH, B. & WEITBRECHT, V. 2018 Influence of bed-load transport on flow resistance of step-pool channels. *Water Resources Research* **54**, 5567–5583.

- HUBBARD, B. P., HEALD, A., REYNOLDS, J. M., QUINCEY, D., RICHARDSON, S. D., ZAPATA LUYO, M., PORTILLA, N. S. & HAMBREY, M. J. 2005 Impact of a rock avalanche on a moraine-dammed proglacial lake: Laguna Safuna Alta, Cordillera Blanca, Peru. *Earth Surface Processes and Landforms* **30**, 1251–1264.
- HUBER, A. 1980 Schwallwellen in Seen aus Folge von Felsstürzen. *Tech. Rep.* ETHZ/VAW. Mitteilung 47.
- HUBER, A. 1982 Felsbewegungen und Uferabbrüche an Schweizer Seen, ihre Ursachen und Auswirkungen. *Eclogae Geologicae Helveticae* **75**, 563–578.
- HUBER, A. & HAGER, W. H. 1997 Forecasting impulse waves in reservoirs. In *19ème Congrès des Grands Barrages*, pp. C. 31: 993–1005. Florence: ICOLD, Paris.
- HUNT, B. 1994 Newtonian fluid mechanics treatment of debris flows and avalanches. *Journal of Hydraulic Engineering* **120**, 1350–1363.
- HUPPERT, H. E. 1982 Flow and instability of a viscous current down a slope. *Nature* **300**, 427–429.
- ICOLD 1998 Étude d'onde de submersion de barrage, synthèse et recommandations. *Tech. Rep.* 111. International Commission on Large Dams.
- ICOLD 2005 Évaluation du risque dans la gestion de la sécurité du barrage. *Tech. Rep.* 130. International Commission on Large Dams.
- ICOLD 2017 *L'érosion interne dans les digues, barrages existants et leurs fondations*. Paris: Commission internationale des grands barrages.
- JÄGGI, M. 1984 Der Geschiebetransport in Flüssen nach der VAW-Formel 1983. *Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein* **102**, 940–943.
- JAMES, N., BOYAVAL, S., CABOUSSAT, A. & PICASSO, M. 2014 Numerical simulation of 3D free surface flows, with multiple incompressible immiscible phases. Applications to impulse waves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **76**, 1004–1024.
- JEROLMACK, D. & MOHRIG, D. 2005 A unified model for subaqueous bed form dynamics. *Water Resources Research* **41**, W12421.
- JOHNSON, J. W. 1942 The importance of considering side-wall friction in bed-load investigations. *Civil Engineering* **12**, 329–332.
- JOLY, D., BROSSARD, T., CARDOT, H., CAVAILHES, J., HILAL, M. & WAVRESKY, P. 2010 Les types de climats en France, une construction spatiale. *Cybergeo: European Journal of Geography* p. doi. org/10. 4000/cybergeo. 23155.
- JORDAAN, J. M. 1972 Impulsive waves: model and prototype correlations. *Advances in Hydroscience* **8**, 261–304.
- JORDAN, F. 2007 Modèle de prévision et de gestion des crues: optimisation des opérations des aménagements hydroélectriques à accumulation pour la réduction des débits de crue. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- JUDD, H. E. & PETERSON, D. F. 1969 Hydraulics of large bed element channels. *Tech. Rep.* Report PRWG 17-6. Utah Water Research Laboratory, Utah State University.
- JULIEN, P. Y. 1994 *Erosion and Sedimentation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- JULIEN, P. Y. 2002 *River Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.

- KAFLE, J., KATTEL, P., MERGILI, M., FISCHER, J.-T. & PUDASAINI, S. P. 2019 Dynamic response of submarine obstacles to two-phase landslide and tsunami impact on reservoirs. *Acta Mechanica* **230** (9), 3143–3169.
- KALESS, G., MAO, L. & LENZI, M. A. 2014 Regime theories in gravel-bed rivers: models, controlling variables, and applications in disturbed Italian rivers. *Hydrological Processes* **28** (4), 2348–2360.
- KAMPHUIS, J. W. 1974 Determination of sand roughness for fixed beds. *Journal of Hydraulic Research* **12**, 193–203.
- KAMPHUIS, J. W. & BOWERING, R. J. 1970 Impulse waves generated by landslides. In *12th Conference on Coastal Engineering* (ed. J. W. Johnson), , vol. 1, pp. 575–586. Washington: ASCE, New York.
- KATUL, G., WIBERG, P., ALBERTSON, J. & HORNBERGER, G. 2002 A mixing layer theory for flow resistance in shallow streams. *Water Resources Research* **38**, 1250.
- KEAN, J. W. & SMITH, J. D. 2006 Form drag in rivers due to small-scale natural topographic features: 1. Regular sequences. *Journal of Geophysical Research* **111**, F04009.
- KELFOUN, K. & DRUITT, T. H. 2005 Numerical modeling of the emplacement of Socompa rock avalanche, Chile. *Journal of Geophysical Research* **110**, B12202.
- KELFOUN, K., GIACHETTI, T. & LABAZUY, P. 2010 Landslide-generated tsunamis at Réunion Island. *Journal of Geophysical Research* **115**, F04012.
- KERT, C. 2008 Amélioration de la sécurité des barrages et ouvrages hydrauliques. *Tech. Rep.* 454. Office parlementaire d'évaluation des choix scientifiques et technologiques.
- KETCHESON, D. I., LEVEQUE, R. J. & DEL RAZO, M. 2020 *Riemann Problems and Jupiter Solutions*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- KEULEGAN, G. H. 1938 Laws of turbulent flows in open channels. *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **21**, 707–741.
- KEYLOCK, C. J., CONSTANTINESCU, G. S. & HARDY, R. J. 2012 The application of computational fluid dynamics to natural river channels: Eddy resolving versus mean flow approaches. *Geomorphology* **179**, 1–20.
- KING, J., NICKLING, W. G. & GILLIES, J. A. 2008 Investigations of the law-of-the-wall over sparse roughness elements. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* **113** (F2).
- KIRONOTO, B. A. & GRAF, W. H. 1994 Turbulence characteristics in rough uniform open-channel flow. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Water Maritime and Energy* **106**, 333–344.
- KNIGHT, D. W., HAZLEWOOD, C., LAMB, R., SAMUELS, P. G. & SHIONO, K. 2018 *Practical Channel Hydraulics — Roughness, Conveyance and Afflux*. Boca Raton: CRC Press.
- KOLL, K. 2006 Parameterisation of the vertical velocity profile in the wall region over rough surfaces. In *River Flow 2006 - International Conference on Fluvial Hydraulics* (ed. A. H. Cardoso), pp. 163–172. Lisbon: Balkema.
- KOLOSEUS, H. J. & DAVIDIAN, J. 1966 Free-surface Instability Correlations: And Roughness-concentration Effects on Flow Over Hydrodynamically Rough Surfaces. *Tech. Rep.* Water Supply Paper 1592-C,D. US Geological Survey.

- KORUP, O. & TWEED, F. 2006 Ice, moraine, and landslide dams in mountainous terrain. *Quaternary Science Reviews* **26**, 3406–3422.
- KRANENBURG, C. 1992 On the evolution of roll waves. *Journal of Fluid Mechanics* **245**, 249–261.
- KREMER, K., SIMPSON, G. & GIRARD-CLOS, S. 2012 Giant Lake Geneva tsunami in AD 563. *Nature Geoscience* **5** (11), 756–757.
- LAMB, M. P., BRUN, F. & FULLER, B. M. 2017 Hydrodynamics of steep streams with planar coarse-grained beds: Turbulence, flow resistance, and implications for sediment transport. *Water Resources Research* **53**, 2240–2263.
- LANE, E. W. 1955 The importance of fluvial morphology in river hydraulic engineering. *American Society of Civil Engineers Proceedings* **81**, 1–17.
- LANG, M. & LAVABRE, J., ed. 2007 *Estimation de la crue centennale pour les plans de prévention des risques d'inondation*. Versailles: Editions Quae.
- DE LANGE, S. I., NAQSHBAND, S. & HOITINK, A. J. F. 2021 Quantifying hydraulic roughness from field data: can dune morphology tell the whole story? *Water Resources Research* **57**, e2021WR030329.
- LAPOINTE, M. F., SECRETAN, Y., DRISCOLL, S. N., BERGERON, N. & LECLERC, M. 1998 Response of the Ha! Ha! River to the flood of July 1996 in the Saguenay Region of Quebec: Large-scale avulsion in a glaciated valley. *Water Resources Research* **34**, 2383–2392.
- LAROCQUE, L. A., IMRAN, J. & CHAUDHRY, M. H. 2013 3D numerical simulation of partial breach dam-break flow using the LES and  $k - \epsilon$  turbulence models. *Journal of Hydraulic Research* **51**, 145–157.
- LAWRENCE, D. S. L. 2000 Hydraulic resistance in overland flow during partial and marginal surface inundation: Experimental observations and modeling. *Water Resources Research* **36** (8), 2381–2393.
- LE MÉHAUTÉ, B. 1971 Theory of explosion-generated water waves. *Advances in Hydroscience* **7**, 1–79.
- LEVEQUE, R. J. 1992 *Numerical Methods for Conservation Laws*. Basel: Birkhäuser.
- LEVEQUE, R. J. 2002 *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- LEVEQUE, R. J. 2007 *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- LIÉBAULT, F., MELUN, G., PITON, G., CHAPUIS, M., PASSY, P. & TACON, S. 2024 Channel change during catastrophic flood: Example of Storm Alex in the Vésudie and Roya valleys. *Geomorphology* **446**, 109008.
- LIGHTHILL, M. J. & WHITHAM, G. B. 1955 On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers. *Proceedings of the Royal Society of London series A* **229**, 281–316.
- LOAT, R. & PETRASCHECK, A. 1997 Prise en compte des dangers dus aux crues dans le cadre des activités de l'aménagement du territoire. Recommandations. *Tech. Rep.*. Office fédéral de l'économie des eaux, Office fédéral de l'aménagement du territoire, Office fédéral de l'environnement, des forêts et du paysage.

- LÓPEZ, R. & BARRAGÁN, J. 2008 Equivalent roughness of gravel-bed rivers. *Journal of Hydraulic Engineering* **134**, 847–851.
- LUO, M., YAN, X. & HUANG, E. 2022 Flow resistance evaluation based on three morphological patterns in step-pool streams. *Acta Geophysica* pp. 1–14.
- MACCHIONE, F. 2008 Model for predicting floods due to earthen dam breaching. I: Formulation and evaluation. *Journal of Hydraulic Engineering* **134**, 1688–1696.
- MACCHIONE, F., DE LORENZO, G. & GRAZIANO, A. A. 2023 Study of key aspects in simplified modelling of man-made earthen dams breaching: breach shape, erosion process and hydraulics. *Journal of Hydrology* **620**, 129425.
- MACDONALD, T. C. & LANGRIDGE-MONOPOLIS, J. 1984 Breaching characteristics of dam failures. *Journal of Hydraulic Engineering* **110**, 567–584.
- MACFARLANE, W. A. & WOHL, E. 2003 Influence of step composition on step geometry and flow resistance in step-pool streams of the Washington Cascades. *Water Resources Research* **39** (2), 2001WR001238.
- MANDLI, K. T., AHMADIA, A. J., BERGER, M., CALHOUN, D., GEORGE, D. L., HADJIMICHAEL, Y., KETCHESON, D. I., LEMOINE, G. I. & LEVEQUE, R. J. 2016 Clawpack: building an open source ecosystem for solving hyperbolic PDEs. *PeerJ Computer Science* **2**, e68.
- MANES, C., POKRAJAC, D. & MCEWAN, I. 2007 Double-averaged open-channel flows with small relative submergence. *Journal of Hydraulic Engineering* **133**, 896–904.
- MARCHE, C. 2008 *Barrages, crues de rupture et protection civile*. Montréal: Presses internationales polytechniques.
- MARCHE, C. & ORIAC, A. 2005 Évaluation des conséquences de rupture d'un barrage: calculs détaillés ou méthode simplifiée? *Canadian Journal of Civil Engineering* **32**, 543–552.
- MARCHI, L., BORGA, M., PRECISO, E. & GAUME, E. 2010 Characterisation of selected extreme flash floods in Europe and implications for flood risk management. *Journal of Hydrology* **394**, 118–133.
- MARTIN, R. L. & JEROLMACK, D. J. 2013 Origin of hysteresis in bed form response to unsteady flows. *Water Resources Research* **49**, 1314–1333.
- MC GAHEY, C., KNIGHT, D. W. & SAMUELS, P. G. 2009 Advice, methods and tools for estimating channel roughness. *Water Management* **162** (6), 353–362.
- MC GAHEY, C., SAMUELS, P. G., KNIGHT, D. W. & O'HARE, M. T. 2008 Estimating river flow capacity in practice. *Journal of Flood Risk Management* **1** (1), 23–33.
- MENG, Z., HU, Y. & ANCEY, C. 2020 Using a data driven approach to predict waves generated by gravity driven mass flows. *Water* **12**, 600.
- MENG, Z., ZHANG, J., HU, Y. & ANCEY, C. 2023 Temporal Prediction of Landslide-Generated Waves Using a Theoretical-Statistical Combined Method. *Journal of Marine Science and Engineering* **11**, 1151.
- MÉRIAUX, P., PEYRAS, L. & GIRARD, H. 2005 Sécurité et durabilité des barrages d'altitude pour la production de neige de culture: état des lieux du parc existant et élaboration d'outils visant à améliorer la conception, la réalisation et l'entretien des ouvrages. *Tech. Rep.*. Cemagref.

- MEYER-PETER, E. & MÜLLER, R. 1948 Formulas for bed load transport. In *2nd meeting* (ed. IAHR), pp. 39–64. Stockholm, Sweden.
- MEYLAN, P., FAVRE, A. C. & MUSY, A. 2008 *Hydrologie fréquentielle*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- MILLAR, R. G. 1999 Grain and form resistance in gravel-bed rivers. *Journal of Hydraulic Research* **37**, 303–312.
- MILLAR, R. G. 2005 Theoretical regime equations for mobile gravel-bed rivers with stable banks. *Geomorphology* **64**, 207–220.
- MIQUEL, J. 1984 *Guide pratique d'estimation des probabilités de crues*. Paris: Eyrolles.
- MIZUYAMA, T. 1978 Bed load transport in steep channel. PhD thesis, Kyoto.
- MONTANDON, F. 1925 Les éboulements de la Dent du Midi et du Grammont. *Le Globe* **64**, 35–91.
- MONTGOMERY, D. R. & BUFFINGTON, J. M. 1997 Channel-reach morphology in mountain drainage basins. *Geological Society of America Bulletin* **109**, 596–611.
- MORRIS, J. F. 2009 A review of microstructure in concentrated suspensions and its implications for rheology and bulk flow. *Rheologica Acta* **48**, 909–923.
- MUELLER, E. R., PITLICK, J. & NELSON, J. M. 2005 Variation in the reference Shields stress for bed load transport in gravel-bed streams and rivers. *Water Resources Research* **41**, W04006.
- MÜLLER, D. 1995 Auflaufen und Überschwappen von Impulswellen an Talsperren. PhD thesis, ETHZ.
- MULLIGAN, R. P., FRANCI, A., CELIGUETA, M. A. & TAKE, W. A. 2020 Simulations of landslide wave generation and propagation using the particle finite element method. *Journal of Geophysical Research: Oceans* **125** (6), e2019JC015873.
- NEEDHAM, D. J. & MERKIN, J. H. 1984 On roll waves down an open inclined channel. *Proceedings of the Royal Society of London* **394**, 259–278.
- NEZU, I. & NAKAGAWA, H. 1993 *Turbulence in Open-Channel Flows*. Rotterdam: Balkema.
- NEZU, I. & RODI, W. 1986 Open-channel flow measurements with a laser Doppler anemometer. *Journal of Hydraulic Engineering* **112**, 335–355.
- NG, F. & BJÖRNSSON, H. 2003 On the Clague-Mathews relation for jökulhlaups. *Journal of Glaciology* **49**, 161–172.
- NIE, Y., LIU, Q., WANG, J., ZHANG, Y., SHENG, Y. & LIU, S. 2018 An inventory of historical glacial lake outburst floods in the Himalayas based on remote sensing observations and geomorphological analysis. *Geomorphology* **308**, 91–106.
- NIKORA, V. & GORING, D. 2000 Flow turbulence over fixed and weakly mobile gravel beds. *Journal of Hydraulic Engineering* **126**, 679–690.
- NIKORA, V., GORING, D. G., MCEWAN, I. & GRIFFITHS, G. 2001 Spatially averaged open-channel flow over rough bed. *Journal of Hydraulic Engineering* **127**, 123.
- NIKORA, V., HABERSACK, H., HUBER, T. & MCEWAN, I. 2002 On bed particle diffusion in gravel bed flows under weak bed load transport. *Water Resources Research* **38**, WR000513.

- NIKORA, V., KOLL, K., MCEWAN, I., MCLEAN, S. & DITTRICH, A. 2004 Velocity distribution in the roughness layer of rough-bed flows. *Journal of Hydraulic Engineering* **130**, 1036–1042.
- NIKORA, V., MCEWAN, I., MCLEAN, S., COLEMAN, S., POKRAJAC, D. & WALTERS, R. 2007a Double-averaging concept for rough-bed open-channel and overland flows: Theoretical background. *Journal of Hydraulic Engineering* **133**, 873–883.
- NIKORA, V., MCLEAN, S., COLEMAN, S., POKRAJAC, D., MCEWAN, I., CAMPBELL, L., ABERLE, J., CLUNIE, D. & KOLL, K. 2007b Double-averaging concept for rough-bed open-channel and overland flows: Applications. *Journal of Hydraulic Engineering* **133**, 873–883.
- NODA, E. 1970 Water waves generated by landslides. *Journal of the Waterway and Harbors Division: Proceedings of the American Society of Civil Engineers* **96**, 835–855.
- O'CONNOR, J. E. & BEEBEE, R. A. 2009 Floods from natural rock-material dams. In *Megaflooding on Earth and Mars* (ed. D. M. Burr, P. A. Carling & V. R. Baker), pp. 128–171. Cambridge: Cambridge University Press.
- O'CONNOR, J. E. & COSTA, J. E. 2004 The world's largest floods, past and present: their causes and magnitudes. *Tech. Rep.* 0607973781. US Geological Survey.
- O'LOUGHLIN, E. M. & MACDONALD, E. G. 1964 Some roughness-concentration effects on boundary resistance p. 773. *La Houille Blanche* (7), 773–783.
- OMID, M. H., KARBASI, M. & FARHOUDI, J. 2010 Effects of bed-load movement on flow resistance over bed forms. *Sadhana* **35**, 681–691.
- ODIN, L., ANDRÉASSIAN, V., PERRIN, C., MICHEL, C. & LE MOINE, N. 2008 Spatial proximity, physical similarity, regression and ungaged catchments: a comparison of regionalization approaches based on 913 French catchments. *Water Resources Research* **44**, W03413.
- PALUCIS, M. C., ULIZIO, T. P., FULLER, B. & LAMB, M. P. 2018 Flow resistance, sediment transport, and bedform development in a steep gravel-bedded river flume. *Geomorphology* **320**, 111–126.
- PANIZZO, A., DE GIROLAMO, P., DI RISIO, M., MAISTRI, A. & PETACCIA, A. 2005 Great landslide events in Italian reservoirs. *Natural Hazards and Earth System Sciences* **5**, 733–740.
- PAQUET, E., GAILHARD, J. & GARÇON, R. 2006 Évolution de la méthode du gradex: approche par type de temps et modélisation hydrologique. *La Houille Blanche* **5**, 80–90.
- PARKER, G. 1991 Selective sorting and abrasion of river gravel: II. Applications. *Journal of Hydraulic Engineering* **117**, 150–171.
- PARKER, G., HASSAN, M. A. & WILCOCK, P. R. 2007 Adjustment of the bed surface size distribution of gravel-bed rivers in response to cycled hydrographs. In *Gravel-Bed Rivers VI: From Process Understanding to River Restoration* (ed. H. Habersack, H. Piégay & M. Rinaldi), vol. 11, pp. 241–285. Amsterdam: Elsevier.
- PAYRASTRE, O., NICOLLE, P., BONNIFAIT, L., BRIGODE, P., ASTAGNEAU, P., BAISE, A., BELLEVILLE, A., BOUAMARA, N., BOURGIN, F. & BREIL, P. 2022 Tempête Alex du 2

- octobre 2020 dans les Alpes-Maritimes: une contribution de la communauté scientifique à l'estimation des débits de pointe des crues. *La Houille Blanche* p. 2082891.
- PAZIS, G. 1976 Faible transport des sédiments par érosion et déposition dans les canaux alluvionnaires. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- PERRIN, C., MICHEL, C. & ANDRÉASSIAN, V. 2001 Does a large number of parameters enhance model performance? comparative assessment of common catchment model structures on 429 catchments. *Journal of Hydrology* **242**, 275–301.
- PERRIN, C., MICHEL, C. & ANDRÉASSIAN, V. 2003 Improvement of a parsimonious model for streamflow simulation. *Journal of Hydrology* **279**, 275–289.
- PETER, S. J., SIVIGLIA, A., NAGEL, J. B., MARELLI, S., BOES, R. M., VETSCH, D. F. & SUDRET, B. 2018 Development of probabilistic dam breach model using Bayesian inference. *Water Resources Research* **54**, 4376–4400.
- PEYRAS, L. & MÉRIAUX, P., ed. 2009 *Retenues d'altitude*. Versailles: Quæ éditions.
- PHILLIPS, J. D. 2010 The job of the river. *Earth Surface Processes and Landforms* **35**, 305–313.
- PHILLIPS, J. V. & INGERSOLL, T. L. 1998 Verification of roughness coefficients for selected natural and constructed stream channels in Arizona. *Tech. Rep. Survey Professional Paper 1584*. US Geological Survey.
- PIERCE, M. W., THORNTON, C. I. & ABT, S. R. 2010 Predicting peak outflow from breached embankment dams. *Journal of Hydrologic Engineering* **15**, 338–349.
- PITLICK, J. 1992 Flow resistance under conditions of intense gravel transport. *Water Resources Research* **28**, 891–903.
- PONCE, V. M. 1994 *Engineering Hydrology: Principles and Practices*. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- PONS, F., BONNIFAIT, L., CRIADO, D., PAYRASTRE, O., BILLAUD, F., BRIGODE, P., FOUCHIER, C., GOURBESVILLE, P., KUSS, D. & LE NOUVEAU, N. 2024 Consensus hydrologique de la tempête ALEX du 2 et 3 octobre 2020 dans les Alpes-Maritimes. *La Houille Blanche* p. 2363619.
- POPINET, S. 2020 A vertically-Lagrangian, non-hydrostatic, multilayer model for multiscale free-surface flows. *Journal of Computational Physics* **418**, 109609.
- POULAIN, P., LE FRIANT, A., MANGENEY, A., VIROULET, S., FERNÁNDEZ-NIETO, E., CASTRO DIAZ, M., PERUZZETTO, M., GRANDJEAN, G., BOUCHUT, F. & PEDREROS, R. 2023 Performance and limits of a shallow-water model for landslide-generated tsunamis: from laboratory experiments to simulations of flank collapses at Montagne Pelée (Martinique). *Geophysical Journal International* **233** (2), 796–825.
- POWELL, D. M. 2014 Flow resistance in gravel-bed rivers: Progress in research. *Earth-Science Reviews* **136**, 301–338.
- POWELL, R. W. 1962 Another note on Manning's formula. *Journal of Geophysical Research* **67** (9), 3634–3635.
- RAJARATNAM, N. & MURALIDHAR, D. 1969 Flow below deeply submerged rectangular weirs. *Journal of Hydraulic Research* **7**, 355–374.

- RASTOGI, A. K. & RODI, W. 1978 Predictions of heat and mass transfer in open channels. *Journal of the Hydraulics Division* **104** (3), 397–420.
- RAUDKIVI, A. J. 1990 *Loose Boundary Hydraulics*. Oxford: Pergamon Press.
- RAUPACH, M. R. 1992 Drag and drag partition on rough surfaces. *Boundary-Layer Meteorology* **60** (4), 375–395.
- RAUTER, M., HOBE, L., MULLIGAN, R. P., TAKE, W. A. & LØVHOLT, F. 2021 Numerical simulation of impulse wave generation by idealized landslides with OpenFOAM. *Coastal Engineering* **165**, 103815.
- RAUTER, M., VIROULET, S., GYLFADÓTTIR, S. S., FELLIN, W. & LØVHOLT, F. 2022 Granular porous landslide tsunami modelling—the 2014 Lake Askja flank collapse. *Nature communications* **13** (1), 678.
- RAYMOND, M., WEGMANN, M. & FUNK, M. 2003 Inventar gefährlicher Gletscher in der Schweiz. *Tech. Rep. Mitteilung* 182. ETH Zürich, Versuchsanstalt für Wasserbau.
- RECKING, A. 2013 Simple method for calculating reach-averaged bed-load transport. *Journal of Hydraulic Engineering* **139**, 70–75.
- RECKING, A., FREY, P., PAQUIER, A., BELLEUDY, P. & CHAMPAGNE, J. Y. 2008a Bed-load transport flume experiments on steep slopes. *Journal of Hydraulic Engineering* **134**, 1302–1310.
- RECKING, A., FREY, P., PAQUIER, A., BELLEUDY, P. & CHAMPAGNE, J. Y. 2008b Feedback between bed load transport and flow resistance in gravel and cobble bed rivers. *Water Resources Research* **44**, W05412.
- REDOLFI, M., TUBINO, M., BERTOLDI, W. & BRASINGTON, J. 2016 Analysis of reach-scale elevation distribution in braided rivers: Definition of a new morphologic indicator and estimation of mean quantities. *Water Resources Research* **52**, 5951–5970.
- RICKENMANN, D. 1996 Fliessgeschwindigkeit in Wildbächen Gebirgsflüssen. *Wasser, Energie, Luft* **88**, 298–304.
- RICKENMANN, D. & RECKING, A. 2011 Evaluation of flow resistance in gravel-bed rivers through a large field data set. *Water Resources Research* **47**, W07538.
- VAN RIJN, L. 1984 Sediment transport, part III: bed forms and alluvial roughness. *Journal of Hydraulic Engineering* **110**, 1733–1754.
- RITTER, A. 1892 Die Fortpflanzung der Wasserwellen. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* **36** (33), 947–954.
- ROBERTS, M. J. 2005 Jökulhlaups: a reassessment of floodwater flow through glaciers. *Reviews of Geophysics* **43**, 2003RG000147.
- RODI, W. 1995 Impact of Reynolds-average modelling in hydraulics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* **451** (1941), 141–164.
- ROJAS-SERNA, C. 2005 Quelle connaissance hydrométrique minimale pour définir les paramètres d'un modèle pluie-débit. PhD thesis, ENGREF.
- ROUSE, H. 1965 Critical analysis of open-channel resistance. *Journal of the Hydraulics Division* **91**, 1–23.

- ROUSSEAU, G. & ANCEY, C. 2022 An experimental investigation of turbulent free-surface flows over a steep permeable bed. *Journal of Fluid Mechanics* **941**, A51.
- ROUZES, M., MOULIN, F. Y., FLORENS, E. & EIFF, O. 2019 Low relative-submergence effects in a rough-bed open-channel flow. *Journal of Hydraulic Research* **57**, 139–166.
- RUIZ-VILLANUEVA, V., MAZZORANA, B., BLADÉ, E., BÜRKLI, L., IRIBARREN-ANACONA, P., MAO, L., NAKAMURA, F., RAVAZZOLO, D., RICKENMANN, D. & SANZ-RAMOS, M. 2019 Characterization of wood-laden flows in rivers. *Earth Surface Processes and Landforms*.
- SCHMITT, F. G. 2007 Joseph Boussinesq, a Scientist of bygone days and present times About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity. *Comptes Rendus Mécanique* **335** (9), 617–627, tY - JOUR.
- SCHUMM, S. A. 2005 *River Variability and Complexity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- SCHUSTER, R. L. & ALFORD, D. 2004 Usoi landslide dam and lake Sarez, Pamir mountains, Tajikistan. *Environmental & Engineering Geoscience* **10** (2), 151–168.
- SERRANO-PACHECO, A., MURILLO, J. & GARCÍA-NAVARRO, P. 2009 A finite volume method for the simulation of the waves generated by landslides. *Journal of Hydrology* **373**, 273–289.
- SHARMA, A., WASKO, C. & LETTENMAIER, D. P. 2018 If precipitation extremes are increasing, why aren't floods? *Water Resources Research* **54**, 8545–8551.
- SHEN, H. T. 2016 River ice processes. In *Advances in Water Resources Management* (ed. L. K. Wang, C. T. Yang & M. H. S. Wang), pp. 483–530. Berlin: Springer.
- SHIMIZU, Y., GIRI, S., YAMAGUCHI, S. & NELSON, J. 2009 Numerical simulation of dune-flat bed transition and stage-discharge relationship with hysteresis effect. *Water Resources Research* **45**, W04429.
- SHIONO, K. & KNIGHT, D. W. 1991 Turbulent open-channel flows with variable depth across the channel. *Journal of Fluid Mechanics* **222**, 617–646.
- SIMONS, D. B. & ŞENTÜK, F. 1992 *Sediment Transport Technology: Water and Sediment Dynamics*, 2nd edn. Littleton, Colorado: Water Resources Publication.
- SIMONS, D. B. & RICHARDSON, E. V. 1966 Resistance to flow in alluvial channels. *Tech. Rep. Professional Paper 422-J*. U. S. Geological Survey.
- SINGH, V. P. 1996 *Dam Breach Modeling Technology*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- SIVAKUMARAN, N. S., TINGSANCHALI, T. & HOSKING, R. J. 1983 Steady shallow flow over curved beds. *Journal of Fluid Mechanics* **128**, 469–487.
- SLINGERLAND, R. & VOIGHT, B. 1982 Evaluating hazard of landslide-induced water waves. *Journal of the Waterway Port Coastal and Ocean Division* **108**, 504–512.
- SLINGERLAND, R. L. & VOIGHT, B. 1979 Occurrences, properties, and predictive models of landslide-generated water waves. In *Rockslides and Avalanches* (ed. B. Voight), , vol. 2, pp. 317–397.
- SMART, G. M. 1984 Sediment transport formula for steep channels. *Journal of Hydraulic Engineering* **110**, 267–276.

- SMART, G. M. & JAEGGI, M. N. R. 1983 Sedimenttransport in steilen Gerinnen. *Tech. Rep.* 64. Mitteilungen 64 der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie.
- SMITH, B. T. & ETTEMA, R. 1997 Flow resistance in ice-covered alluvial channels. *Journal of Hydraulic Engineering* **123** (7), 592–599.
- SMITH, J. D. & MCLEAN, S. R. 1977 Spatially averaged flow over a wavy surface. *Journal of Geophysical Research* **82** (12), 1735–1746.
- SMITH, M. W. 2014 Roughness in the earth sciences. *Earth-Science Reviews* **136**, 202–225.
- SOMOS-VALENZUELA, M. A., CHISOLM, R. E., RIVAS, D. S., PORTOCARRERO, C. & MCKINNEY, D. C. 2016 Modeling a glacial lake outburst flood process chain: the case of Lake Palcacocha and Huaraz, Peru. *Hydrology and Earth System Sciences* **20** (6), 2519–2543.
- SONG, T. 1994 Velocity and turbulence distribution in non-uniform and unsteady open-channel flow. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- SONG, T., GRAF, W. H. & LEMMIN, U. 1994 Uniform flow in open channels with movable gravel bed. *Journal of Hydraulic Research* **32**, 861–876.
- SPREAFICO, M., WEINGARTNER, R., BARBEN, M. & RYSER, A. 2003 Evaluation des crues dans les bassins versants de Suisse. *Tech. Rep.* OFEG.
- STOKER, J. J. 1957 *Water Waves*. New York: Interscience Publishers.
- STRICKLER, A. 1922 Beiträge zur frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauigkeit Zahlen für Strome, Kanäle und geschlossene Leitungen. *Tech. Rep.* 16. Mitteilungen des Amtes für Wasserwirtschaft.
- STRICKLER, A. 1924 Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen. *Schweizerische Bauzeitung* **83-84** (23), 265–268.
- TANG, X. & KNIGHT, D. W. 2008 A general model of lateral depth-averaged velocity distributions for open channel flows. *Advances in Water Resources* **31** (5), 846–857.
- THOMPSON, S. M. & CAMPBELL, P. L. 1979 Hydraulics of a large channel paved with boulders. *Journal of Hydraulic Research* **17**, 341–354.
- THORNE, C. R. & ZEVENBERGEN, L. W. 1985 Estimating mean velocity in mountain rivers. *Journal of Hydraulic Engineering* **111** (4), 612–624.
- THORNTON, C. I., PIERCE, M. W. & ABT, S. R. 2011 Enhanced predictions for peak outflow from breached embankment dams. *Journal of Hydrologic Engineering* **16**, 81–88.
- TORO, E. F. 2001 *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Chichester: Wiley.
- TROWBRIDGE, J. H. 1987 Instability of concentrated free surface flows. *Journal of Geophysical Research* **C 92**, 9523–9530.
- TRUSCOTT, T. T., EPPS, B. P. & BELDEN, J. 2014 Water entry of projectiles. *Annual Review of Fluid Mechanics* **46**, 355–378.
- UMEYAMA, M. & GERRITSEN, F. 1992 Velocity distribution in uniform sediment-laden flow. *Journal of Hydraulic Engineering* **118** (2), 229–245.

- VACONDIO, R., MIGNOSA, P. & PAGANI, S. 2013 3D SPH numerical simulation of the wave generated by the Vajont rockslide. *Advances in Water Resources* **59**, 146–156.
- VAN RIJN, L. C. 1993 *Principles of Sediment Transport in Rivers, Estuaries and Coastal Seas*, vol. 1006. Aqua publications Amsterdam.
- VILA, J. P. 1987 La prevision des vagues produites par la chute d'une avalanche dans une retenue. In *Avalanche Formation, Movement and Effects* (ed. H. Gubler & B. Salm), pp. 509–518. Davos: IAHS, Wallingford, Oxfordshire, U. K.
- VIROULET, S., SAURET, A., KIMMOUN, O. & KHARIF, C. 2016 Tsunami Waves Generated by Cliff Collapse: Comparison Between Experiments and Triphasic Simulations. In *Extreme Ocean Waves* (ed. E. Pelinovsky & C. Kharif), pp. 173–190. Springer International Publishing.
- VISCHER, D. L. 1987 Strickler formula, a Swiss contribution to hydraulics A short note on the 100th anniversary of Strickler's birth. *Wasser, Energie, Luft* **79** (7-8), 139–142.
- VISCHER, D. L. & HAGER, W. H. 1998 *Dam Hydraulics*. Chichester: John Wiley & Sons.
- VISENTINI, M. 1936 Ecoulement d'un barrage sur l'Orba, en Italie, le 13 août 1935. *Revue de Géographie Alpine* **24**, 381–393.
- VITI, N., VALERO, D. & GUALTIERI, C. 2018 Numerical simulation of hydraulic jumps. Part 2: Recent results and future outlook. *Water* **11** (1), 28.
- VOGEL, R. M. 2020 The geometric mean? *Communications in Statistics–Theory and Methods* **51** (1), 82–94.
- WAHL, T. L. 1998 Prediction of embankment dam breach parameters. *Tech. Rep. Dam Safety Research Report DSO-98-004*. U. S. Department of the Interior – Bureau of Reclamation.
- WAHL, T. L., ed. 2017 *Evaluation of Numerical Models for Simulating Embankment Dam Erosion and Breach Processes*. Denver: Bureau of Reclamation, Working Group on Embankment Dam Erosion and Breach Modeling, Report DSO-2017-02.
- WALDER, J. S. & COSTA, J. E. 1996 Outburst floods from glacier-dammed lakes: The effect of mode of lake drainage on flood magnitude. *Earth Surface Processes and Landforms* **21**, 701–723.
- WALDER, J. S. & O'CONNOR, J. E. 1997 Methods for predicting peak discharge of floods caused by failure of natural and constructed earthen dams. *Water Resources Research* **33**, 2337–2348.
- WALDER, J. S., WATTS, P. & WAYTHOMAS, C. F. 2006 Case study: mapping tsunami hazards associated with debris flow into a reservoir. *Journal of Hydraulic Engineering* **132**, 1–11.
- WARD, S. N. & DAY, S. 2008 Tsunami balls: a granular approach to tsunami runup and inundation. *Communications in Computational Physics* **3** (1), 222–249.
- WATT, S. F. L., TALLING, P. J., VARDY, M. E., HELLER, V., HÜHNERBACH, V., URLAUB, M., SARKAR, S., MASSON, D. G., HENSTOCK, T. J. & MINSHULL, T. A. 2012 Combinations of volcanic-flank and seafloor-sediment failure offshore Montserrat, and their implications for tsunami generation. *Earth and Planetary Science Letters* **319** (320), 228–240.

- WEISS, R., FRITZ, H. M. & WÜNNEMANN, K. 2009 Hybrid modeling of the mega-tsunami runup in Lituya Bay after half a century. *Geophysical Research Letters* **36**, L09602.
- WESTOBY, M. J., GLASSER, N. F., BRASINGTON, J., HAMBREY, M. J., QUINCEY, D. J. & REYNOLDS, J. M. 2014 Modelling outburst floods from moraine-dammed glacial lakes. *Earth-Science Reviews* **134**, 137–159.
- WHITHAM, G. B. 1954 The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem. *Proceedings of the Royal Society of London series A* **227**, 399–407.
- WIBERG, P. L. & SMITH, A. F. M. 1991 Velocity distribution and bed roughness in high-gradient streams. *Water Resources Research* **27**, 825–838.
- WILCOX, A. C., NELSON, J. M. & WOHL, E. E. 2006 Flow resistance dynamics in step-pool channels: 2. Partitioning between grain, spill, and woody debris resistance. *Water Resources Research* **42**, W05419.
- WILCOX, A. C., WOHL, E. E., COMITI, F. & MAO, L. 2011 Hydraulics, morphology, and energy dissipation in an alpine step-pool channel. *Water Resources Research* **47**, W07514.
- WILKERSON, G. V. & PARKER, G. 2011 Physical basis for quasi-universal relationships describing bankfull hydraulic geometry of sand-bed rivers. *Journal of Hydraulic Engineering* **137**, 739–753.
- WILLIAMS, G. P. 1970 Flume width and water depth effects in sediment-transport experiments. *Tech. Rep.* Professional Paper 562-H. USGS.
- WILLIAMS, G. P. 1978 Bank-full discharge of rivers. *Water resources research* **14** (6), 1141–1154.
- WILSON, K. C. 1989 Mobile-bed friction at high shear stress. *Journal of Hydraulic Engineering* **115** (6), 825–830.
- WOHL, E. 2000 *Mountain Rivers*. Washington: American Geophysical Union.
- WOHL, E. E. & IKEDA, H. 1998 The effect of roughness configuration on velocity profiles in an artificial channel. *Earth Surface Processes and Landforms* **23** (2), 159–169.
- WONG, M. & PARKER, G. 2006 Reanalysis and correction of bed-load relation of Meyer-Peter and Müller using their own database. *Journal of Hydraulic Engineering* **132**, 1159–1168.
- WORNİ, R., HUGGEL, C., CLAGUE, J. J., SCHAUB, Y. & STOFFEL, M. 2014 Coupling glacial lake impact, dam breach, and flood processes: A modeling perspective. *Geomorphology* **224**, 161–176.
- WU, W. 2007 *Computational River Dynamics*. London: Taylor & Francis.
- WU, W. 2011 Earthen embankment breaching. *Journal of Hydraulic Engineering* **137**, 1549–1564.
- WU, W. 2013 Simplified physically based model of earthen embankment breaching. *Journal of Hydraulic Engineering* **139**, 837–851.
- WU, W., MARSOOLI, R. & HE, Z. 2012 Depth-averaged two-dimensional model of unsteady flow and sediment transport due to noncohesive embankment break/breaching. *Journal of Hydraulic Engineering* **138**, 503–516.

- WÜTHRICH, D., KORSWAGEN, P. A., SELVAM, H., OETJEN, J., BRICKER, J. & SCHÜTTRUMPF, H. 2024 Field survey assessment of flood loads and related building damage from the July 2021 event in the Ahr Valley (Germany). *Journal of Flood Risk Management* p. e13024.
- WYRICK, J. R. & PASTERNAK, G. B. 2008 Modeling energy dissipation and hydraulic jump regime responses to channel nonuniformity at river steps. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* **113** (F3), F03003.
- XIAO, L., WARD, S. N. & WANG, J. 2015 Tsunami squares approach to landslide-generated waves: application to Gongjiafang Landslide, Three Gorges Reservoir, China. *Pure and Applied Geophysics* **172**, 3639–3654.
- XU, W.-J., ZHOU, Q. & DONG, X.-Y. 2022 SPH–DEM coupling method based on GPU and its application to the landslide tsunami. Part II: reproduction of the Vajont landslide tsunami. *Acta Geotechnica* **17** (6), 2121–2137.
- YAGER, E. M., DIETRICH, W. E., KIRCHNER, J. W. & MCARDELL, B. W. 2012 Prediction of sediment transport in step-pool channels. *Water Resources Research* **48**, W01541.
- YAGER, E. M., KIRCHNER, J. W. & DIETRICH, W. E. 2007 Calculating bed load transport in steep boulder bed channels. *Water Resources Research* **43**, W07418.
- YAVARI-RAMSHE, S. & ATAIE-ASHTIANI, B. 2016 Numerical modeling of subaerial and submarine landslide-generated tsunami waves—Recent advances and future challenges. *Landslides* **13** (6), 1325–1368.
- YEN, B. C. 2002 Open channel flow resistance. *Journal of Hydraulic Engineering* **128**, 20–39.
- YOCHUM, S. E., COMITI, F., WOHL, E., DAVID, G. C. L. & MAO, L. 2014 Photographic guidance for selecting flow resistance coefficients in high-gradient channels. *Tech. Rep.*. Rocky Mountain Research Station.
- YOUNUS, M. & CHAUDHRY, H. M. 1994 A depth-averaged  $\hat{h}$ - $\hat{\epsilon}$  turbulence model for the computation of free-surface flow. *Journal of Hydraulic research* **32** (3), 415–444.
- YU, B. 1998 Theoretical justification of SCS method for runoff estimation. *Journal of Irrigation and drainage engineering* **124** (306-310).
- ZHANG, G., CARRIVICK, J. L., EMMER, A., SHUGAR, D. H., VEH, G., WANG, X., LABEDZ, C., MERGILI, M., MÖLG, N. & HUSS, M. 2024 Characteristics and changes of glacial lakes and outburst floods. *Nature Reviews Earth & Environment* pp. 1–16.
- ZHAO, K., WANG, Y. & LIU, P. L.-F. 2024 A guide for selecting periodic water wave theories—Le Méhauté (1976)'s graph revisited. *Coastal Engineering* **188**, 104432.
- ZITTI, G., ANCEY, C., POSTACCHINI, M. & BROCCINI, M. 2016 Impulse waves generated by snow avalanches: Momentum and energy transfer to the water body. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* **121**, 2399–2423.
- ZWEIFEL, A., HAGER, W. H. & MINOR, H. E. 2006 Plane impulse waves in reservoirs. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **132**, 358–368.